

2. 近似関数として上の例と同じく sine 関数を用い、上の演習問題のたわみの近似解を求め、中央点における精度を示せ。

(3) Galerkin 形式

前節最後の例では、わざと一部の境界条件（力学的境界条件）を満足しない関数を選ぶことによって式 (5.4) を用いた近似解の精度が悪くなることを示した。より複雑な問題ではすべての境界条件を満たす近似関数を探すことは一般には容易ではないから、このままでは弱形式 (5.4) は使えないことが明らかになった。そして、選んだ近似関数が 4 階の微係数が定義できるものでないといけなかったことも、その選択をさらに難しくしそうだ。この状況を改善するためには境界条件の誤差も含められるように弱形式を定義し直す必要がありそうだ。また同時に、近似関数の微係数の階数も小さくできればさらに使い易くなりそうだ。そこで、弱形式 (5.4) に境界条件式 (5.2) の一部を、つまり少なくとも力学的境界条件だけでも含めることを試みよう。第 3.5.1 (1) 節や第 4.4.2 (1) 節の仮想仕事式の誘導をよく勉強した読者ならその改善策をすぐに思い付くと思う。

まず、式 (5.4) の被積分関数の第 1 項を 2 回部分積分すると

$$0 = [-EI w'''(\ell) v(\ell) - \{-EI w''(\ell)\} \{-v'(\ell)\}] - [-EI w'''(0) v(0) - \{-EI w''(0)\} \{-v'(0)\}] \\ - \int_0^\ell EI w''(x) v''(x) dx + \int_0^\ell q_0 v(x) dx$$

となる。ここで、重み関数 $v(x)$ は元の問題と同じ幾何学的境界条件だけは満足し

$$v(0) = 0, \quad v(\ell) = 0$$

となるものを選ぶ³ことにする。これと、境界条件式 (5.2) のうちの力学的境界条件式 (5.2b) (5.2d) とを上式右辺の第 1 行に代入すると、そのすべてが零になり、最終的に上式は

$$\int_0^\ell \{-EI w''(x)\} \{-v''(x)\} dx - \int_0^\ell q_0 v(x) dx = 0 \quad (5.6)$$

となる。この式 (5.6) を弱形式として用いることにすれば、 $w(x)$ には 2 階微分可能な関数を選べばいいことになる。しかし、この形式には幾何学的境界条件の方は考慮されていないので、選ぶ関数は幾何学的境界条件を必ず満足させておかないと何をしているかわからなくなってしまう。それに対応させて、とりあえず重み関数 $v(x)$ も最低限 2 階微分可能なものを選ぶことにする。ただ、最終的に新しく得られた弱形式 (5.6) には境界における項を全く含まないので、式 (5.4) と何ら違いが無いように見える。しかしその誘導過程では元の問題の力学的境界条件を考慮してあるので、この新しい弱形式から得られる近似解の精度が上がることを期待できそうだ。この弱形式 (5.6) を **Galerkin 形式** と呼ぶ。

(4) Galerkin 形式を用いた近似

では新しく誘導された弱形式を用いた場合に近似解が改善されるのかどうかを確かめよう。比較のために式 (5.5) で示した 4 次多項式で $w(x)$ を近似し、重み $v(x)$ も同じく式 (5.5) から a を取り除いた部分で与える。これを式 (5.6) に代入して、未知係数 a と中央点のたわみを計算すると

$$a = \frac{11q_0}{504EI}, \quad w(\ell/2) \sim \frac{99q_0\ell^4}{8064EI} \simeq 0.943 \times (\text{厳密解})$$

³ Lagrange の未定乗数を用いて幾何学的境界条件も含めた変分原理の定式化も可能であり、その場合には重みや近似関数の選択はかなり自由になる。あるいは $v(x)$ が幾何学的境界条件を満足しない場合は、式 (5.6) の左辺に境界項 $\{-EI w'''(0) v(0)\} - \{-EI w'''(\ell) v(\ell)\}$ を残しておくという手もある。



Wabash Avenue Bridge, Illinois 州



Winnipeg にある歩道橋 Esplanade Riel 橋[※]

[※] 斜張橋である必要は多分無いと思われる。すぐ横に道路用桁橋有り。しかも塔基部のレストランは2008年には営業していなかった。



移設後の高麗橋と桜島



気仙沼大島大橋^Ⅱ 2017 年 3 月ヤードにて

^Ⅱ 写真には「(仮称) 気仙沼湾横断橋」とあるが、これは後にすぐ横に架設された斜張橋の方の名称になった。