
構造と連続体の力学基礎

熊でもわかる変形できる物体の力学

岩熊 哲夫・小山 茂



構造と連続体の力学基礎

熊でもわかる変形できる物体の力学

I've Got a Bad Headache in Learning Mechanics of Structures and Continual

『表紙写真は1987年建設時の南北備讃瀬戸大橋，1988年竣工。学外見学の引率時に撮影したもので，瀬戸大橋が見学先に含まれていた
ので倉西茂先生も同行なさった。利用した貸切バス（下津井電鉄株式会社だったと思うが）の女性添乗員さんはとても勉強家だったら
しく，橋梁の種類を絵で説明する紙芝居を作ってきていて，走行中にそれを使いながら一番前に座っていた倉西先生と学生達とに向
かって橋梁工学の講義をしたのはとても愉快だった。

まえがき

構造力学は、ある種の仮定を連続体力学に追加して構築された近似力学理論体系である。その仮定は、構造特有の幾何学的な特徴すなわち細長い・薄いといった特徴を活かしたもので、非常に明解な仮定であり、最終的にはそれに基づいて美しい理論（例えば表 7.1）が誘導されている。そして、連続体力学は変形できる物体の力学体系であるから、構造力学も変形できる物体の力学である。

その力学を理解して使えるようになるために、できるだけ物理的に、しかし著者の限られた能力の範囲内だが数学的な正確さを保持しながらこれを書いてみた。だから間違っている可能性が非常に高い。呵呵。特に第 1 著者自身が理解できない「エネルギー¹」という概念を可能な限り使わないように心掛け、「仕事」の段階で説明がつくことはそこまでとした。また古典的・手計算的解析法については、その「仕事」に基づく手法と境界値問題の標準的な解法以外ではできるだけ載せなかった。何となくわかったような気にさせる魔法や一般論・読み替えも避け、個別的な情報の羅列にはなるものの、個々の話題毎にできるだけ具体的な表現を心掛けた。また基本的な部分についてはその誘導等も含めて詳述するように努め、著者が大事だと思っていることを他の文献を用いずに²学べるようにしたつもりである。したがって、大学院入試等でラーメン（骨組）が手計算で解けるようになることはこの文書の目的ではなく、そういった問題を解くときにどのような力学的な考え方が必要であり、それはどのような数理的な手法で記述されているかを正確に理解することが目的である。そういう意味の力学基礎である上に、昨今流行の数値的アプローチにはほとんど触れ（ることが著者の能力的にでき）ない解析的な内容になっているため、計算（機）力学の勉強のための情報については他の専門家と文献に相談して欲しい。「エネルギー」を避けて「仕事」を、と書いたが、基本的には「仮想仕事」という関数同士の積の積分（例えば第 3.5 節や式 (5.4) 前後の解説を参照のこと）つまり「関数の内積」がこの文書の背骨になっている。ただし、「仮想仕事」も使い方によっては数学的過ぎる場合もあるので、使わないでもいいところではできるだけ使わないようにした。

とは言え、この文書は、各種講義を受け持つようになって以来用いてきた³手書きの講義ノートを $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}^4$ 草稿として書いたもので、著者が学んで理解できた部分だけを抽出して単に列挙しただけの内容に過ぎない。著者索引を見ると古く偏った情報に基づいているように思うかもしれないが、力学の基礎に古いも新しいも無いはずだ。しかし、それぞれの章の本来の目標に達して研究の基礎にするためには、最低でもその内容の倍はさらに学ぶ必要があるだろう。そこは個々の読者自身が深めるべき専門化された基礎的内容だと思う。いろいろな方に読んでいただきコメントをいただいているが、種々の概念が土木系標準教科書とは異なっていることから、初学者にとってはこの文書は難しいかもしれない。逆に言うと、著者が学生だった頃に使われていた教科書等に見られる標準的な記述には間違いや曖昧な部分が多量にあると感じたこと、またいくつかの既刊書への批判を書いておきたかったことが、この文書を公開している理由には含まれる。また学部時代には難しく面白くもなかった構造力学だったが、指導教員と一緒に勉強しているうちに楽しい学問だなぁと感じるようになったことも、他とは異なる記述になってしまった理由の一つだと思う。一通り学んだあとの復習あるいは *second opinion* として眺めてみると、自分がわからなかった部分へのヒントを得ることがあるかもしれない。例えば修士 1 年生の春から夏の間批判的に読むというのはどうだろう。そういう意味で、やはり独断と偏見に基づいた文書になっていることには注意して欲しい。ある査読者から「雑音」とまで酷評された内容⁵も含んでいるので、かなりバイアスのかかったものだと認識し、怪我をしないように注意して欲しい。さらに口語体を多用しているので、著者と波長の合わない人には読み難くなっている。

東北大学のカリキュラム等から類推すると、たいていの大学の土木系学科・専攻における、学部 2 年生前半の静定構造を学ぶ講義から大学院の材料力学と構造力学に関する講義までの内容になっていると思う。第 1 章は第 12 版でようやく埋めることができたもので、東北大学工学部建築・社会環境工学科における 2 年生前半のコース振り分けのための情報提供科目「シビックデザインの力学」の配付資料を元にした。付録 I は同大学大学院博士課程（俗称）の集中講義の配付資料が元になっていて、付録 J は同大学短期留学プログラムの学部 3 年次留学生を含む英語による講義の配付資料を元にしてある。また付録 N は、同大学工学部 1 年生前半の演習付き「情報基礎 B」の配付資料を改訂したものである。

なお記号表記等は各章毎には統一するようにしたが、説明を少しだけ付録 S にまとめておいた。第 10 章以降ではテンソル演算を用いていて、これについては付録 D を参照して欲しい。また本文中の固有名詞等には原則として原語を用い、括弧

¹ 文献 [127] 同様「エネルギー」に長音を用いないのは原語発音からという電気系の先生の助言による。

² 工学系大学生が学ぶべき基礎的な数学（例えば [35, 82, 150] の大半）は知っていることを前提とし、そのための章は設けていない。

³ 実際には、学部では第 4, 5, 6 章の一部を「橋梁力学」で、第 9 章を「振動解析学」で、大学院では第 7, 8 章を「薄肉構造」で、第 11 章を「構造強度論」で講義ノートとして用いた。いわゆる「構造力学」と「材料力学」は著者が所属した研究室担当ではなかった。

⁴ $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ は AMS（米国数学会）の商標。

⁵ 幸いなことに出版・公表されています。編集委員の先生に感謝。しかし「雑音」とはねえ。

書きの翻訳を示していない。同様に索引に並べる語句等も日本語か原語およびその混合のどれかを本文中では用い、括弧書きの翻訳を略している。その代わり索引ではどちらの言語からでも引けるようにした。その索引には \TeX についての著名な著書 [54] を真似た箇所⁶もある。第 11~25 版のタイトルは東京工業大学の森勉先生の命名「毎苦勞迷禍荷苦痛 [194]」を参考にした。

この文書を書くに当たっては、東京大学の堀井秀之先生からの個人的な重要な示唆はもちろん、同氏のご尽力で土木学会構造工学委員会の下に設置された力学教育に関する小委員会における議論もたいへん参考になった [164, 165]。委員の方々に感謝する。この委員会の報告書等は、下に書いた Web Page にアクセスすればすべて得ることができる。材料力学や塑性論については東北大学の岸野佑次先生から、有限要素法については同大の京谷孝史先生から多くの明快で有益な示唆を受けた。振動論については同大の斉木功先生と秋山充良先生からデータや有益な情報とコメントをいただいた。また行列の検算等で、同大大学院修士課程（俗称）に在学していた時の小林裕君や安藤聡君達の協力を得た。細かい語句から内容に至るまで貴重なご意見をいただいた東北大学の藤原稔先生⁷と、東北学院大学の飛田善雄先生と中沢正利先生、秋田大学の後藤文彦先生にも感謝します。もちろん⁸、著者が学生のときに受けた講義（単位を取得できたか否かはともかく）の担当教員にも大いに感謝しています。

不完全な上に間違いが多々あるはずだが Web Page を通して公開することにした。ソースは非公開⁹で、奥付に記した条件下の freeware とする。1 年も経たないうちに版が進んでいる場合もあるが、さらに小さい間違い等が見つかる度に β 版（版の副番号がある値から単調減少）にもなっている。文章に「魂」を入れること¹⁰に専念でき、文章の順番の変更はもちろん、式や図表等の順の入れ替えや追加・削除が簡単にできる上に目次と索引も間違いなく更新でき、ワードプロセサでは実現できない¹¹ような美しく読み易い出力を容易に可能にしてくれる組版パッケージ \TeX に出会えたことは、著者の幸せである。大幅な加筆修正も楽しみながら積極的に行っている。この software 群が無かったらこの文書は書き続けなかっただろう。これと文献 [173] を最初に紹介してくださったのが土木学会の中村雅昭氏である。心から感謝している。また、GUI 方式の OS ができる前のパーソナルコンピュータの時代（1980 年代後半）に、ほぼ完全版の日本語 \TeX freeware パッケージ JaWa \TeX (em \TeX , NTT-J \TeX base) を開発してくれた東北大学の渡邊雅俊先生と、その当時の東北大学内電子掲示板システム TAINSBbms の \TeX 仲間にも大いに感謝したい。

執筆に際し、Quick/Visual BASIC（旧版）やポストプロセサ等の正規購入 software に加えて、エディタ QX やファイル管理 WinFD・画像処理 GifConstructionSet 等の shareware を用いたが、それ以外は freeware を用いた。例えば、日本語組版の J \TeX や対応するフォント生成の METAFONT に加えて索引作成の mendex や変換 dvi \TeX 等を含む Windows 版の \TeX パッケージと、その表示・出力の dviout for Windows, 図化の gnuplot や Ngraph とそれを利用した等高線描画ツール Le Pont, フローチャート作成の flow, 画像処理の Gimp や IrfanView・GhostScript, Cygwin パッケージのコンパイラ等や新 Visual BASIC・数値計算の Scilab・数式処理システムの Maxima, ワードプロセサやスプレッドシート等のパッケージ LibreOffice, そして QRWindow や pdf \TeX 等である。このような [free/share]ware の作者に加え、 \TeX の各種スタイルファイルやマクロ等の作者と関連した NEWSGROUP の情報提供者に感謝の意を表したい。 \TeX のスタイルファイル [45, 112] と、この文書で紹介している資料や構造解析プログラム・著者自作の software は

<http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/bear-collections/>

に¹²置いてある。またこの文書の印刷版しかお持ちでない読者は pdf ファイルを

<http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/civil/node16.html>

からダウンロードできる。

某年某月吉日

著者

⁶ その真似等も含めた難解な見出しは 40 個以上になる。ヲタクな世界のことなのでお問い合わせはご遠慮ください。呵呵。

⁷ 先生の著書 [185] では第 16 版のタイトルでこの文書を引用していただいた。感謝します。

⁸ 論理的な文章に口語体や「もちろん」を使うなどというウェブページを見たことがあるが、もちろん無視。口語体の代表例は「よい」の代わりに使う「いい」だ。読み易くてわかり易いと感じたからだ。

⁹ この文書は J \TeX で書かれているが、 \TeX の「特殊でよくない」使い方等については相談に乗ります。アドレスは奥付に描いた。

¹⁰ ある先生が例えば科研費の申請書等を書くときの注意事項の説明会等でよく使う表現で、とても気に入っているのでも使った。その科研費申請書も \TeX で作れるようになってから魂を入れ易くなった。足し算もしてくれるし。呵呵。

¹¹ 全くと言っていいくらい使わないので正確ではないが、土木学会論文集の公式サンプルや査読で接した実例を見てこう判断した。しかし一度だけとても美しいワードプロセサによる出力に出会ったことがある。作成者は理学部の林檎 OS 上の \TeX ユーザーだった。

¹² サーバ変更のため 2016 年春以降は 'bear/' の前のチルダ '~' が無くなっているのに注意して欲しい。

目次

I	ほぼ線形のほぼ静力学	1		
1	力学を学ぶこととデザイン	3		
1.1	どうして力学を学ばなければならないのか	3		
1.2	力学と設計 — デザインとはどういった行為か	9		
	演習問題 1-1	12		
2	静定構造の力学 — 外力と内力	15		
2.1	つり合い式	15		
2.1.1	つり合っているとは?	15		
2.1.2	外力と反力	17		
2.1.3	変形できる物体の抵抗力 — 内力	18		
2.2	静定トラス	19		
2.2.1	トラス構造の特徴	19		
2.2.2	断面力の求め方 — 節点法と断面法	20		
	演習問題 2-1	23		
2.2.3	影響線と断面設計	24		
	演習問題 2-2	28		
2.3	静定梁	28		
2.3.1	梁の特徴と断面力の定義	28		
2.3.2	代表的な例	31		
	演習問題 2-3	38		
2.3.3	梁の中の応力分布と断面係数	38		
2.3.4	影響線と断面設計	39		
	演習問題 2-4	42		
2.3.5	微分方程式で表したつり合い式	42		
	演習問題 2-5	46		
2.4	不静定とは?	46		
2.4.1	トラス構造の安定性と不静定	46		
2.4.2	不静定構造が解けるためのヒント	49		
	演習問題 2-6	51		
3	変形できる物体の力学基礎	53		
3.1	連続体とは	53		
3.2	変形の定義	54		
3.2.1	変位ベクトル	54		
3.2.2	ひずみテンソル	55		
3.2.3	剛体変位成分と微小回転 — 「変形」とは	57		
3.2.4	ひずみの主方向	58		
3.2.5	ひずみ成分の座標変換	58		
3.2.6	体積ひずみとせん断ひずみ	60		
3.2.7	ひずみの適合条件	62		
	演習問題 3-1	63		
3.3	内力と局所的なつり合い式	63		
3.3.1	変形できる物体の抵抗とは	63		
3.3.2	表面力ベクトルと応力テンソル	64		
3.3.3	応力で表したつり合い	66		
3.3.4	境界条件	67		
	演習問題 3-2	68		
3.3.5	外力のつり合いと内力のつり合い — 巨視的なつり合いと局所的なつり合い	68		
3.3.6	応力の主方向と不変量	69		
	演習問題 3-3	72		
3.3.7	応力成分の座標変換	73		
	演習問題 3-4	74		
3.3.8	静水圧成分とせん断応力成分	74		
3.4	変形と内力の関係 — 材料特性の記述の仕方	74		
3.4.1	構成方程式	74		
3.4.2	Hooke の等方弾性体	75		
3.4.3	弾性係数の特性	79		
	演習問題 3-5	85		
3.4.4	非弾性ひずみと非適合ひずみ	85		
3.4.5	塑性論の基礎	87		
	演習問題 3-6	93		
3.4.6	ちょっとだけ粘性	93		
3.4.7	材料の抵抗則に用いるひずみと応力	93		
3.5	仮想仕事の原理	93		
3.5.1	二つの許容場と仮想仕事の原理	93		
3.5.2	ポテンシャルエネルギー — 厳密解同士の仮想仕事と変分原理	96		
3.5.3	相反定理 — 異なる問題同士の仮想仕事式	99		
3.5.4	非弾性ひずみに関する相反性	102		
3.5.5	弾性体の単位荷重法と Green 関数	104		
	演習問題 3-7	106		
3.6	弾性問題の例	106		
3.6.1	固体中を伝播する波	106		
3.6.2	流体力学の基礎	107		
	演習問題 3-8	114		
3.6.3	平面問題	114		
	演習問題 3-9	119		
3.6.4	Airy の応力関数で平面問題を解く	119		
	演習問題 3-10	121		
	演習問題 3-11	125		
	演習問題 3-12	134		
3.6.5	3次元問題とポテンシャル	134		
	演習問題 3-13	136		

4	面内曲げと軸力を受ける棒の力学	139	5	有限要素法の基礎 — 柱と梁と平面ひずみ問題	211
4.1	初等梁理論	139	5.1	境界値問題の弱形式と近似解法	211
4.1.1	梁とは	139	5.1.1	近似して解くということ	211
4.1.2	支配方程式	140	5.1.2	弱形式	212
	演習問題 4-1	146		演習問題 5-1	214
4.1.3	境界条件	146		演習問題 5-2	216
4.1.4	境界値問題の例	149		演習問題 5-3	218
	演習問題 4-2	154	5.2	有限要素法の考え方	218
4.2	梁中間の集中せん断力や集中モーメントの作用	155	5.2.1	Galerkin 法の精度改善	218
4.2.1	梁中間の集中外力の作用と連続条件	155		演習問題 5-4	220
4.2.2	集中せん断力の作用	157	5.2.2	区分的多項式による近似	220
	演習問題 4-3	161		演習問題 5-5	222
4.2.3	集中モーメントの作用	161	5.3	構造部材の有限要素	222
	演習問題 4-4	162	5.3.1	要素剛性方程式	222
4.3	重ね合わせの原理で不静定梁を解く	163		演習問題 5-6	225
	演習問題 4-5	166	5.3.2	直接剛性法と内力分布	225
4.4	集中外力の数学的表現と単位荷重法	167		演習問題 5-7	230
4.4.1	集中外力の分布外力的表現	167	5.3.3	平面トラス	230
	演習問題 4-6	169		演習問題 5-8	234
4.4.2	単位荷重法	169	5.3.4	平面骨組	234
4.5	影響線	175	5.3.5	全体剛性方程式の解法	236
4.5.1	たわみの影響線	175		演習問題 5-9	237
	演習問題 4-7	178	5.3.6	その他の要素	238
4.5.2	曲げモーメントとせん断力の影響線	178		演習問題 5-10	243
4.5.3	梁の設計 — 最大曲げモーメントと最大せん断力	179	5.4	有限要素の特徴	243
	演習問題 4-8	180	5.4.1	柱と梁の剛性方程式は厳密	243
4.5.4	不静定梁の影響線	180	5.4.2	要素剛性行列は特異	244
	演習問題 4-9	184	5.4.3	変分原理と近似度	246
4.6	梁のせん断応力・せん断変形	186		演習問題 5-11	249
4.6.1	初等梁理論の枠組内のせん断応力	186	5.5	剛性方程式や仮想仕事の原理によるやや古めかしい手法	250
	演習問題 4-10	189	5.5.1	剛性方程式の一部分だけを使う解法	250
	演習問題 4-11	194	5.5.2	補仮想仕事の原理とその利用	250
4.6.2	せん断遅れ	194		演習問題 5-12	254
4.6.3	せん断変形を考慮した梁理論	194	5.6	平面ひずみ問題の有限要素定式化	257
	演習問題 4-12	196	5.6.1	仮想仕事式と応力ひずみ関係	257
4.7	梁のその他の問題	196	5.6.2	定ひずみ三角形要素	258
4.7.1	弾性床上の梁	196	5.6.3	高次要素や非力学問題	263
	演習問題 4-13	197	6	安定問題と梁-柱理論	267
4.7.2	棒の運動と初期値境界値問題	197	6.1	安定問題とは	267
4.8	トラスと骨組	198	6.2	剛体バネモデルによる安定問題の例	268
4.8.1	単位荷重法の一般化	198	6.2.1	有限変位問題と安定・不安定	268
4.8.2	トラスの変位と断面力	200		エネルギーを利用した安定規準	272
4.8.3	骨組の変位と断面力	203		演習問題 6-1	275
4.8.4	アーチの力学	207	6.2.3	接線剛性と安定・不安定	275
	演習問題 4-14	207		演習問題 6-2	275
4.9	仮想仕事の原理を用いた梁理論の定式化	207	6.2.4	比較的小さい変位状態の安定・不安定	275
4.9.1	仮想仕事式	207	6.3	座屈現象の特徴と例	277
4.9.2	梁の微小変位理論	208	6.3.1	2種類の座屈現象	277
			6.3.2	座屈点およびそのあとの挙動	279
			6.4	梁-柱の力学	281
			6.4.1	梁-柱の境界値問題と座屈	281
				演習問題 6-3	283
			6.4.2	柱の曲げ座屈	286

	演習問題 6-4	292	7.7	曲げねじりと安定問題	351
6.4.3	軸圧縮力と曲げを受ける棒	292	7.7.1	ねじれ座屈	351
6.4.4	初期たわみのある棒	295	7.7.2	横倒れ座屈	352
6.4.5	柱の非弾性座屈	297	7.7.3	曲げ引張・圧縮強度	353
6.4.6	1 軸部材の引張強度と圧縮強度	300	8	平板の力学の基礎	355
6.4.7	剛性方程式と座屈解析	300	8.1	構造部材の最小単位	355
	演習問題 6-5	302	8.2	支配方程式と境界条件	355
6.5	その他の梁-柱の座屈	302	8.2.1	ひずみの仮定と変位場	355
6.5.1	バネ支持された梁-柱の座屈	302	8.2.2	応力と断面力	357
	演習問題 6-6	304	8.2.3	支配方程式	358
6.5.2	骨組の座屈	304		演習問題 8-1	360
6.5.3	弾性床上の梁-柱の座屈	306	8.2.4	境界条件	360
	演習問題 6-7	307	8.2.5	仮想仕事の原理を用いた平板理論の 定式化	361
6.5.4	Timoshenko 梁-柱の座屈	307	8.3	境界値問題の解法の例	364
6.5.5	弾性床上の Timoshenko 梁-柱の座屈	307	8.3.1	変位で表した曲げの境界値問題	364
6.6	大きく変位する棒の力学	308	8.3.2	Navier の解法	364
6.6.1	棒の有限変位理論	308		演習問題 8-2	365
6.6.2	座屈後挙動	309	8.4	剛性方程式	366
6.6.3	伸びない棒の理論 — Elastica	310	8.4.1	仮想仕事式	366
6.6.4	ケーブル	311	8.4.2	変位関数	366
6.6.5	弦を考えてみる	313	8.5	安定問題	367
7	ねじりを受ける薄肉断面棒の力学	315	8.5.1	比較的変位の小さい範囲の非線形理論	367
7.1	円柱と円管のねじり	315	8.5.2	一様な面内場の場合	369
7.1.1	円柱のねじり	315	8.5.3	1 方向に圧縮された単純支持板の座屈	370
7.1.2	円管のねじり	317		演習問題 8-3	371
	演習問題 7-1	319	8.5.4	座屈後の挙動	371
7.2	薄肉閉断面棒の Saint-Venant のねじり	319	8.5.5	膜を考えてみる	372
7.2.1	せん断流とねじりモーメント	319	II	ほぼ線形の動力学	375
7.2.2	閉断面の Saint-Venant のねじり定数	321	9	振動論の基礎	377
	演習問題 7-2	322	9.1	1 自由度系の振動	377
7.2.3	多室断面のねじり定数	322	9.1.1	非減衰自由振動	377
	演習問題 7-3	323		演習問題 9-1	381
7.2.4	つり合い式と境界条件	323	9.1.2	減衰自由振動	382
7.3	薄肉開断面棒のねじり	323	9.1.3	強制振動	386
7.3.1	薄肉長方形断面棒のねじり	323		演習問題 9-2	388
7.3.2	薄肉開断面の Saint-Venant のねじり 定数	327		演習問題 9-3	397
	演習問題 7-4	328	9.1.4	不規則応答	399
7.4	薄肉断面棒の曲げねじり	328	9.2	多自由度系の振動	405
7.4.1	I 形断面棒の曲げねじり	328	9.2.1	2 自由度系の振動	405
7.4.2	曲げねじりの境界値問題	334		演習問題 9-4	412
	演習問題 7-5	338	9.2.2	多自由度系の振動	413
7.4.3	一般化した曲げねじり理論における 断面座標・定数と応力分布	338		演習問題 9-5	420
7.5	構造力学体系と充実断面棒のねじり	340	9.2.3	数値解析手法	423
7.5.1	棒の力学の表現のまとめ	340	9.3	連続体の振動 — 曲げ剛性の無い構造要素の 振動	424
7.5.2	充実断面棒のねじり	340	9.3.1	まっすぐな弦の振動	424
7.6	ねじりを受ける棒の剛性方程式	342	9.3.2	円形膜の振動	430
7.6.1	曲げねじり問題	342		演習問題 9-6	435
	演習問題 7-6	343	9.4	連続体の振動 — 梁の振動	436
7.6.2	Saint-Venant のねじり問題	344	9.4.1	梁の運動方程式	436
	演習問題 7-7	344	9.4.2	非減衰自由振動 — 正攻法	437
7.6.3	立体骨組の問題	344			
	演習問題 7-8	347			

9.4.3	非減衰自由振動	438	演習問題 11-4	553	
9.4.4	振動モードの直交性と自由振動解 — モード解析法	440	11.4.2	静水圧依存モデル	553
	演習問題 9-7	442		演習問題 11-5	557
9.4.5	粘性減衰自由振動	443	11.4.3	非共軸モデル	557
9.4.6	強制振動	443	11.4.4	材料パラメータ特性	559
	演習問題 9-8	451	11.4.5	もっと現実的なモデル	561
9.4.7	有限要素と振動解析	452	11.5	塑性解析	562
	演習問題 9-9	457	11.5.1	メカニズムと安全率	562
9.4.8	回転慣性とせん断変形	460	11.5.2	すべり線理論	563
9.5	1 自由度系の非線形振動	464	11.5.3	変形の局所化予測	569
9.5.1	振り子の運動	464	11.5.4	極限解析	570
9.5.2	リミットサイクル	470		演習問題 11-6	578
9.5.3	係数励振	472	11.5.5	終局状態の選択は正しいか? — 進行 性破壊	579
9.5.4	Duffing 振動子の強制振動	477		演習問題 11-7	582
10	弾性体中を伝播する波 初歩	483	12	有限変形理論を直感で噛み砕く	587
10.1	1 次元の波動	483	12.1	有限変形って?	587
10.1.1	非破壊評価の勉強を目指して	483	12.2	ひずみとひずみ速度	588
10.1.2	支配方程式	483	12.2.1	変形とひずみ	588
10.1.3	d'Alembert の解と解の意味	483		演習問題 12-1	601
10.1.4	波の反射	485	12.2.2	変形と運動の変化率	601
	演習問題 10-1	487		演習問題 12-2	608
10.2	平面波	487	12.2.3	弾性ひずみ速度と塑性ひずみ速度	608
10.2.1	3 次元の運動方程式	487	12.3	応力とつり合い式および応力速度	612
10.2.2	平面波の定義	488	12.3.1	基本的な応力とつり合い式	612
10.2.3	無限領域の調平面波	490	12.3.2	その他の応力とつり合い式	616
	演習問題 10-2	496	12.3.3	応力の物理的な意味	618
10.3	表面波	496		演習問題 12-3	622
10.3.1	Rayleigh 波	496	12.3.4	客観性を持つ応力速度	622
10.3.2	Love 波	499	12.4	現配置を基準配置と捉えること	624
	演習問題 10-3	501	12.4.1	updated Lagrange 手法	624
III	非線形の静力学	503	12.4.2	変形速度	625
11	塑性序論 — 時間が関与しない増分の力学	505	12.4.3	応力速度	625
11.1	非可逆変形と 1 次元塑性モデル	505	12.4.4	増分つり合い式	627
11.1.1	非可逆変形と破壊	505	12.4.5	応力の更新	628
11.1.2	1 次元の塑性モデル	508	12.5	有限変形の枠組で構成則を表すには	630
11.1.3	弾・完全塑性材料でできた構造要素 の例	513	12.5.1	構成則に用いる応力とは、ひずみと は?	630
	演習問題 11-1	515	12.5.2	超弾性と亜弾性	632
11.2	3 次元への一般化	516	12.5.3	こんな弾性体って?	634
11.2.1	降伏条件 — 状態の定義	516		演習問題 12-4	646
11.2.2	流れ則 — 変形の変化則	519	12.5.4	弾塑性体の代表例 — 速度非依存塑性	646
11.2.3	増分型構成方程式	521	12.6	非線形挙動の解析的予測の例	652
	演習問題 11-2	525	12.6.1	局所化条件	652
11.3	一般化された弾塑性構成方程式	525	12.6.2	構成則の違いによる代表的な例	653
11.3.1	降伏曲面と法線則	525	12.7	非線形挙動の数値的予測の例	655
11.3.2	塑性ポテンシャルの導入	529	12.7.1	updated Lagrange 的数値解析法	655
	演習問題 11-3	533	12.7.2	数値解析例 — 弾性体の 1 軸載荷	662
11.3.3	具体例と履歴依存性	533	12.7.3	構成則の違いによる代表的な例	663
11.3.4	転位の運動と Prandtl-Reuss モデル	547			
11.4	その他の有用な物理モデル	548			
11.4.1	移動硬化モデル	548			

IV 補足と蛇足	677	D テンソル演算について	731
A 補講: 致命傷を負わないために	679	D.1 座標と基底ベクトル	731
A.1 なぜ Hooke の法則を応力とひずみで表すのか	679	D.2 計量テンソルと置換テンソル	732
A.2 熱ひずみは非弾性ひずみ	680	D.3 共変微分	733
A.2.1 1次元の場合	680	D.4 極座標系における物理成分	734
A.2.2 3次元の場合	682	D.5 座標変換とテンソル	736
A.3 内力と外力	683	D.6 極座標系の物理成分を用いた誘導例	736
A.3.1 内力って何だ	683	E 破壊力学はどうしても好きになれない	739
A.3.2 内力の可視化	683	E.1 破壊力学とは	739
A.4 トラスは軸力だけで抵抗する	684	E.2 弾性亀裂と応力拡大係数	740
A.5 分布外力と等価な集中外力の落とし穴	685	E.2.1 亀裂の変形モードと面外問題	740
A.6 集中モーメントって何	687	E.2.2 面内問題の場合	743
A.7 Castigliano の第2定理は冗長過ぎる	687	E.2.3 平面問題の応力拡大係数	743
B Timoshenko 梁理論	689	E.3 亀裂先端の塑性変形について	744
B.1 支配方程式	689	F 境界要素法と逆問題の概念	745
B.1.1 運動場の仮定と合応力	689	F.1 境界上の解の積分表現	745
B.1.2 つり合い式と境界条件	690	F.1.1 問題の設定	745
B.1.3 たわみで表した支配方程式	691	F.1.2 解の積分表現	745
B.2 曲げ問題の仮想仕事式と剛性方程式	692	F.2 境界要素法	746
B.2.1 仮想仕事式	692	F.3 逆問題の概念	747
B.2.2 剛性方程式	693	G 1次元の粘弾性の基礎的な考え方	749
C 面内の有限変位棒理論	697	G.1 粘性	749
C.1 微小でない変位と変形	697	G.2 粘弾性	749
C.1.1 ひずみの定義	697	G.2.1 クリーブ	749
C.1.2 仮想仕事の原理と応力	698	G.2.2 応力緩和	751
C.1.3 運動場の仮定	698	H 1次元の熱伝導と関連した力学	753
C.2 Bernoulli-Euler 梁理論 — 美しい理論	699	H.1 1次元の熱伝導問題	753
C.2.1 運動場	699	H.1.1 熱伝導方程式	753
C.2.2 つり合い式と境界条件	700	H.1.2 過去に向かって拡がる	755
C.2.3 構成方程式	701	H.2 1次元の力学との簡単な連成	755
C.2.4 座屈荷重	702	I 複合材料の平均特性	763
C.2.5 変分原理と Elastica	702	I.1 内部に微視構造を持つ材料	763
C.3 Timoshenko 梁理論	704	I.2 非均質体と介在物	764
C.3.1 つり合い式と境界条件	704	I.2.1 非均質体と Eshelby の解	764
C.3.2 構成方程式	705	I.2.2 支配方程式	765
C.3.3 近似支配方程式	706	I.2.3 Fourier 解析	767
C.3.4 座屈荷重	707	I.2.4 等価介在物法	770
C.4 微小変位の枠組の中の梁-柱理論	708	演習問題 I-1	771
C.4.1 有限変位理論の線形化	708	I.3 複合材料の平均特性	772
C.4.2 剛性方程式	708	I.3.1 弾性材料の森・田中平均	772
C.5 断面変形する薄肉円管梁理論	711	I.3.2 実測値との比較	774
C.5.1 運動場	711	演習問題 I-2	775
C.5.2 支配方程式	713	I.3.3 弾塑性材料の場合とその改善手法	776
C.5.3 断面力の変位表示	714		
C.5.4 安定問題	714		
C.6 数値解析法	716		
C.6.1 2点境界値問題の一解法	716		
C.6.2 一つの有限要素解析法 — 有限変位の枠組の中で	717		
C.7 やや不安定な梁-柱の座屈と数値解	721		
C.7.1 片端を斜面上で支持された棒	721		
C.7.2 リンクで押された棒	727		

J Fourier 級数と初期値境界値問題	781	K.7.1 接合の種類	853
J.1 準備 — ベクトル値関数と常微分方程式	781	K.7.2 溶接接合	854
J.1.1 問題の設定	781	K.7.3 高力ボルト接合の種類	857
J.1.2 固有値問題	781	K.7.4 高力ボルトの摩擦接合	857
J.1.3 ベクトル値関数の常微分方程式	782	K.8 吊橋の古典的考え方	861
J.2 1次元熱伝導方程式 — 放物型偏微分方程式	784	K.9 あの津波による被害状況と仮橋	863
J.2.1 熱伝導方程式	784	L 模型で学ぶ	865
J.2.2 固有値問題	785	L.1 橋梁模型	865
J.2.3 固有関数を用いた解	787	L.1.1 ケント紙を使ったトラス	865
J.2.4 非零の境界条件	788	L.1.2 トラスと桁のペーパークラフト	874
J.2.5 非斉次問題	789	L.2 自己展開型構造	874
演習問題 J-1	789	L.3 折り紙やペーパークラフト等	875
J.3 1次元波動方程式 — 双曲型偏微分方程式	789	M 図学って知ってますか?	885
J.3.1 波動方程式	789	M.1 それってなあに?	885
J.3.2 固有値問題	790	M.2 3次元的な線分と平面を2次元で表す方法	885
J.3.3 斉次問題	790	M.3 代表的な例	886
J.3.4 非斉次問題	791	N 情報の表現と伝達, そして処理と倫理	887
演習問題 J-2	792	N.1 コマンドライン上のコンピュータとの対話	887
J.4 直角座標系のポテンシャル方程式 — 楕円型偏微分方程式	792	演習問題 N-1	894
演習問題 J-3	794	N.2 HTML と \LaTeX による文書作成の基礎 — 情報の表現と伝達	896
J.5 円盤上の熱伝導方程式	794	N.2.1 文書の記述法	896
J.5.1 極座標系の熱伝導方程式	794	N.2.2 HTML と \LaTeX の基本	901
J.5.2 円盤上の固有値問題	794	演習問題 N-2	911
J.5.3 固有関数を用いた解	796	N.2.3 プログラムやパッケージを使う	914
J.5.4 軸対称問題	796	N.2.4 悲しいワードプロセッサ	915
K 橋梁と鋼構造	801	N.3 プログラミング — 情報処理	917
K.1 橋梁の形式と種類・構成	801	N.3.1 数値の表現とコンピュータへの命令	917
K.1.1 橋梁について	801	演習問題 N-3	919
K.1.2 鋼橋の形式や構成	804	N.3.2 Java 言語を例としたプログラミング	919
K.1.3 形式とスパン長	811	演習問題 N-4	921
K.2 鋼の基本的な特性	811	演習問題 N-5	926
K.2.1 鋼の製法と冶金学的性質	811	演習問題 N-6	931
K.2.2 鋼の機械的性質	815	N.3.3 計算結果を可視化して文書にする	931
K.3 構造設計の考え方	823	演習問題 N-7	935
K.3.1 新設の手順	823	N.3.4 C と FORTRAN77 や BASIC の例	937
K.3.2 安全に対する設計法	824	N.4 情報取り扱いマナー — 情報倫理	940
K.3.3 信頼性理論と設計法	826	O 独断と偏見に満ちた FORTRAN 入門	947
K.4 鋼の強度 — 許容応力	827	O.1 はじめに	947
K.4.1 引張強度	827	O.2 文法の基本	947
K.4.2 棒の圧縮強度	827	O.2.1 プログラムの書き方と変数および算術代入文	947
K.4.3 梁の曲げ強度	833	O.2.2 ファイル入出力と do ループ・if 文	952
K.4.4 せん断強度	834	O.2.3 文字変数と倍精度実数	956
K.4.5 複雑な応力状態に対する照査	834	O.2.4 1次元配列	957
K.4.6 板や補剛材等の圧縮強度	836	O.2.5 common 文と parameter 文・data 文	958
K.5 橋梁構造の荷重 (作用)	838	O.2.6 2次元配列	961
K.5.1 主な荷重の種類	838	O.2.7 2次元配列の受渡しと上手なメモリの使い方 (整合配列)	963
K.5.2 床版設計のための T 荷重	842	O.3 いくつかの応用例	970
K.5.3 桁設計のための L 荷重	844	O.3.1 ソーティングと最小2乗法	970
K.6 プレートガーダの設計例	852	O.3.2 2分法による求解	972
K.6.1 設計例 — 文献から	852		
K.6.2 補足 I: 垂直補剛材について	852		
K.6.3 補足 II: せん断遅れについて	853		
K.7 接合	853		

O.3.3	Newton-Raphson 法	974	Q.2	論文の執筆要領	990
O.3.4	連立方程式の Newton-Raphson 法	975	Q.2.1	文章のスタイルと章建て	990
O.3.5	計算を途中でやめたり継続したりするには	977	Q.2.2	フォント等	991
O.3.6	繰り返し計算と増分計算	978	Q.2.3	式番号や図表の番号と配置	992
O.4	その他の一般的なこと	982	Q.2.4	参考文献の引用とリスト	993
			Q.2.5	図の描き方と著作権	995
P	支援ソフトウェア	983	Q.3	審査会におけるプレゼンテーション	996
P.1	数学に関する自作ではないソフトウェア	983	Q.3.1	スライド作成についての技術的なヒント	996
P.2	力学に関する自作のソフトウェア	983	Q.3.2	発表と質疑応答におけるマナー	998
P.3	文書作成に関するソフトウェア	984	Q.4	大学で学ぶということ	1007
P.3.1	自作のソフトウェア	984			
P.3.2	自作ではないソフトウェア	985	R	演習問題の答	1015
P.4	学位論文審査に関する L ^A T _E X ファイル	985	S	数学記号等について	1025
Q	卒業論文等の書き方とプレゼンテーション, そして大学とは	987		参考文献	1029
Q.1	論文とは	987		索引 — 著者・記号・橋梁写真・英単語を含む	1039
Q.1.1	論文の目的	987		あとがき	1071
Q.1.2	論理的構成を持った論文	988			
Q.1.3	自分自身の成果と他人の成果	989			

トホホ¹³・・・の目次

☆	積分の縦棒って何?	481	☆	汎用プログラムがあれば力学は要らない?	10
☆	我が国の Fourier 級数の教え方は間違っていないか?	781	☆	シェル要素で 3 次元解析ができるか?	372
☆	複素関数論を学ばずに工学は発展できるか?	447	☆	数値解析の結果は解析解か?	264
☆	テンソル (数学) 成分は物理成分か?	701	☆	板書を写さずして理解が深まるのか?	761
☆	構造力学って多項式の積分の練習科目か?	255	☆	英語だけでやる数学の授業はそんなに嫌ですか?	1010
☆	線形系の基本は重ね合わせなんだがなあ?	186	☆	それはとんでもない勘違いではないですか?	
☆	相反定理の証明に剛性行列が必要ですか?	101	▶	大学 1 年生のとんでもない勘違い	1002
☆	Castigliano の定理等を教える必要ありますか?	256	▶	卒論生のとんでもない勘違い	1001
☆	断面の性質を最初に教える意味がありますか?	143	☆	学生さんは朝からお疲れですか?	729
☆	立体構造を教える前に断面の主軸って?	346	☆	情報倫理教育ってどうすればいいのか?	940
☆	Young 係数と呼ばないといけませんか?	75	☆	パラスタってどこのスタジアムなのか?	266
☆	延性と靱性をちゃんと区別できますか?	819	☆	英文の論文表現に嘘は無いのか?	1013
☆	仮想仕事の原理はエネルギー原理ですか?	93	☆	我が国への quarter 制や GPA 導入は大丈夫か?	759
☆	極複雑系の事実合う物理モデルって何?	585	☆	自然界を支配する法則って?	12
☆	水理学は得意ですか?	107	 呵呵	

¹³ ドイツ語標記の 'BACH' (シラドシ) という音階の有名な曲がある。多分 Max Reger による曲? そこで以前, 秋田大学の後藤文彦先生に「橋トホホ (ドシソシミ 'CHGEE')」の作曲 (<https://gthmhk.gitlab.io/gthmhk/verkoj.html#verkoh>) を依頼したことがある。

フリーライター等をする仙台在住の熊谷智美さん@Something が学科パンフレットに寄せてくれたコピー

社会環境工学の研究や開発の仕事は、
「ありがとう」と言われにくい。

なぜならそれは、
あまりに大きく、
あまりに身近だから。

なにげなく利用する道路や鉄道、
子どもたちの笑顔がはじける公園、
おだやかに流れる河川。
都市には活気が満ちあふれ、
一方で豊かな自然が保たれている。

こうした日常を守り支えているのが、
社会環境工学の技術だ。

誰か一人を幸せにもするし、
地域を、日本を、世界をも豊かにする。

「ありがとう」と言われる以上の価値が
社会環境工学の世界にはある。

ちなみにこのコピー [© 2010 年頃 東北大学大学院工学部
研究科土木工学専攻] 中の「社会環境工学」は「土木工学¹⁴」と同義

¹⁴ 「土木工学」は英語で ‘civil engineering’ と記される。その意味を「市民のための工学」とすることが多く、この鉤カッコは土木学会のホームページの表現そのままである。しかし第1著者が尊敬する先生から教えてもらったのは次のような経緯だった。『かつて工学には ‘military engineering’ という分野があり、それ以外の分野つまり土木工学分野が ‘civil engineering’ だった。そのあと前者から機械工学や電気工学等が派生して現在に至っているのであって、そもそも「市民」という意味ではなく ‘military’ に対峙するという意味に過ぎない』ということだ。このように昔は対軍事工学（敢えて文字にすると民生工学）だった土木工学の研究も昨今は他の工学研究との違いは無くなってきている。そもそも工学分野のほとんどの研究が軍事技術とは全く無関係だとは言えないのだが。さて、種々の分野や組織・機関のパンフレット製作の経験があって土木工学のこともご存知の熊谷智美さんには、「社会環境工学」は「土木工学」と同じだと伝えた上で、パンフレットの中身や文章表現等に対して助言をいただき、このコピーをボランティア提供していただいた。

第 I 部

ほぼ線形のほぼ静力学



大鳴門橋 1985年竣工

第1章

力学を学ぶこととデザイン

1.1 どうして力学を学ばなければならないのか



(a) 牛越橋 — ゲルバー梁



(b) 桁のスポンジ模型

写真 1.1 最も単純な橋梁形式 — 桁。牛越橋は仙台の広瀬川に架かる橋で 1953 年竣工

土木構造物（社会基盤構造物）の一例としての橋梁を対象として、構造物を設計（デザイン）する場合に、なぜ力学的な感覚を身に付けていないといけないのかについて、まずは示しておこう。

桁 — 最も単純な橋梁形式： 写真 1.1 (a) は東北大学の川内キャンパスのちょっと北にある牛越橋である。橋は、物や人・情報・文化をスムーズに渡すために谷や川等に架けられる重要な土木構造物の代表例である。その最も単純な形式は桁と呼ばれる¹もので



写真 1.2 上部は圧縮で下部は引張

1. 橋に載っている人や車等の重量は、重力下向きの力として桁にかかる。
2. 桁の中では、写真 1.1 (b) や写真 1.2 からわかるように、上部は水平方向に縮んでいることから水平方向の圧縮で抵抗しており、下部は伸びていることから、これも水平方向の引張りで抵抗している。どちらも水平方向の力で、桁の上半分と下半分で向きが逆になっている。重量の作用は上から下への鉛直方向の力なのに、桁はそれを水平方向の力に変換して抵抗していることは、ちょっと不思議で理解し難い。ほとんどすべての学生にとって、構造力学の最初の難所である。

¹ 英語では「ガーダ」であり、「ガード下の屋台」と言うときの「ガード」は桁のこと。なお「ガーター」は靴下留めのこと。

3. 一つの断面（写真 1.1 (b) と写真 1.2 の、スポンジに付けた縦線マーカー部分）の上部と下部に同じ大きさで逆向きの力がかかっていることから、その二つの力を作る偶力（曲げモーメント）が、最終的な桁の抵抗力になって、人や車等の重量を支えている。

という抵抗をすることになる。これは初学者にはとても難しい（第1著者も学生の時にはさっぱりわからなかった）ことで、今は理解できなくてもいい。第2,4章で学んで欲しい。

では同じ長方形断面の桁を、写真 1.3 のように縦向きに置いたときと、横向きに置いたときとで、どちらが強いだろう。答は前者なのだが、その理由は、第2,4章で習う次式の断面2次モーメントと断面係数

$$I \equiv \frac{bh^3}{12}, \quad W \equiv \frac{bh^2}{6}$$

が抵抗係数として関与していることにある。ただし、 b が桁の断面の幅で h が高さである。具体的には、変形のし難さを示す抵抗はこの I に比例し、幅 b には比例するだけだが、桁の高さ h についてはその3乗 (h^3) に比例して強くなる。抵抗力の度合の場合には、 W 、つまり h の2乗 (h^2) に比例して強くなる。この模型断面の寸法 3.5×6 (cm) を用いて I を計算すると、縦長の場合が 63.0 cm^4 、横長が 21.4 cm^4 で、その比は '2.94' になる。実測されたたわみは写真 1.3 の下の写真のように、縦長の場合が約 4 mm、横長が約 12 mm となるので、たわみ難さの比がおおよそ $\frac{1/4}{1/12} = \text{約}3$ 、つまりこれが上述の '2.94' に相当している。

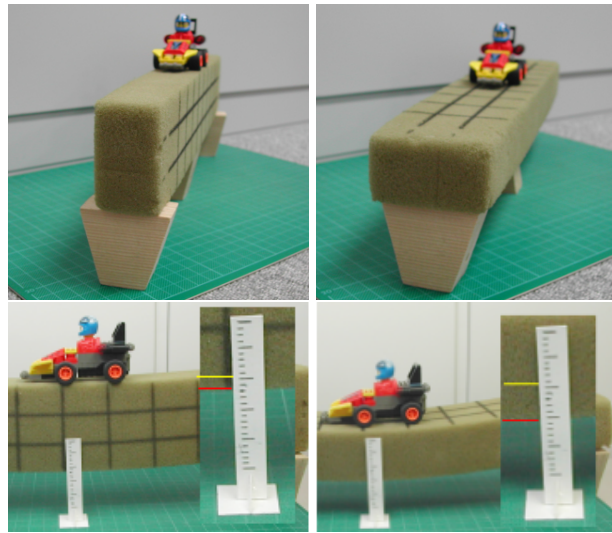


写真 1.3 縦長と横長、どちらが強い

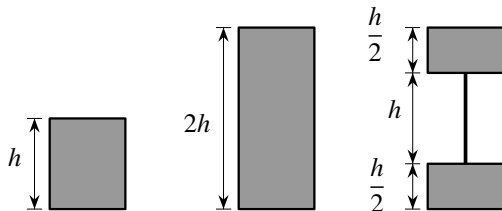


図 1.1 長方形断面とI形断面



写真 1.4 I形断面の身近な例はレール

表 1.1 効率的な断面形状とその性能比較表および実例

	矩形 (高さ h)	矩形 (高さ $2h$)	I 形 (高さ $2h$)	断面の幅 b は三つ共同じ
コスト	1	2	$1 + \alpha$	断面積比 (ウェブ分の α は小さい)
たわみ難さ	1	$8 (= 2^3)$	7	断面2次モーメント I の比
抵抗力	1	$4 (= 2^2)$	3.5	断面係数 W の比

このことを踏まえ、図 1.1 に示した同じ幅 b を持つ三つの断面形の性能を、一番左の矩形断面を基準にして比較したのがその下の表 1.1 である。コストは断面積で、抵抗力は断面係数 W で評価し、この三つの断面形を比較して総合的に判断すれば、一番右のI形断面が経済的・力学的に最も合理的であることがわかる。こういったことを、この文書がカバーしている「構造力学」という科目で習い、それを身に付けていなければ、より合理的な橋梁デザイン²はできないのだ。

² 土木構造物のほとんどは税金を使った公共事業における成果品であるため、まず確保すべき安全性とほぼ同様の重要さで経済性も考慮しなければならない。

この図 1.1 の一番右の断面は、厚い板（フランジ）を上下方向に縦の薄い板（ウェブ）で距離を離しているだけだ。これはどこかで見たことのある形ではないだろうか。そう、写真 1.4 に示した線路のレールの断面と同じである。この図のようにレールは、バラスト（砂利）でできた弾性的に抵抗する床の上に、枕木を介して支えられた「けた」と同じ抵抗作用で列車³を支えている。だから抵抗係数（曲げ剛性）を大きくする必要があって、図の左に黒い図形で示したような I 形のような断面になっているのだ。

ところで、毛利元就の「3本の矢」という逸話がある。Wikipedia⁴から引用すると

ある日、元就は三人の息子（隆元・元春・隆景）を枕元に呼び寄せ、1本の矢を折るよう命じた。息子たちが難なくこれを折ると、次は3本の矢束を折るよう命じたが、息子たちは誰も折ることができなかった。元就は一本では脆い矢も束になれば頑丈になることを示し、三兄弟の結束を強く訴えかけた<後略・注略>

というもの⁵だ。では逆に、三人で力を合わせたら折ることができただろうか。半径 r の1本の円形断面 \odot の断面2次モーメントと断面係数は $I_0 = \pi r^4/4$, $W_0 = \pi r^3/4$ である。もし矢を横に並べ $\odot\odot\odot$ のようにすると断面2次モーメントも断面係数も3倍になるだけだから三人で力を合わせたら折ることができただろう。しかし、もし矢を $\odot\odot$ のように組むと、断面2次モーメントは $11I_0$ と1本の11倍になり、上下端の断面係数が $W_U = {}^{33}W_0/(3+2\sqrt{3}) \approx 5.11W_0$, $W_L = {}^{33}W_0/(3+\sqrt{3}) \approx 6.97W_0$ になる。折ることを議論するのであれば断面係数を比較検討すればいいので、3本を三角形にくみ上げると5倍以上強くなることがわかる。もしこの元就の逸話を作った人が構造力学をちゃんと勉強していたら、三人で3本の矢を折るように命じて、例えば「つまり凡庸な戦略なら3倍の軍勢が来たら負けるかもしれないが、いい軍師を雇用して戦略を練ることによっては5倍の軍勢に対しても国を守ることができる。」とでも追加していたかもしれない。呵呵。閑話休題。☆



写真 1.5 プレートガーダ橋

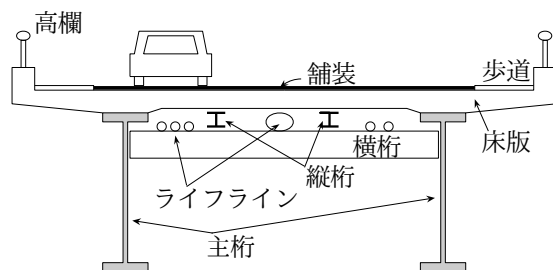


図 1.2 2主桁橋梁の標準的な断面

最初に示した桁橋の例に用いた牛越橋も、実は、写真 1.5 のように下から見ると I 形断面の桁 2 本（主桁）に支えられていることがわかる。図 1.2 に示したような断面の主桁がプレートガーダ（^{ばんげた} 鋸桁）と呼ばれ、この図は鋼の桁橋断面の代表例である。「主桁」だけでなく「縦桁」や「横桁」も『I 形断面』の部材でできていることが多い。ちなみに、写真からもわかるように、人や車だけではなくライフライン（ガスや水道等）も渡していることに注意⁶すべきである。

³ 実は列車の床もたわんでいるということを、第1著者が学部2年生のときの物理学の講義で小出昭一郎先生が「警告」なされた。「警告」と書いたのは、周りをいつも観察しなさいというお叱りだったからである。

⁴ 2008年11月27日現在、数字の使い方が統一されていない。http://ja.wikipedia.org/wiki/元就/

⁵ どうやら「3本の矢」と「材料力学」で検索するとこのノートもヒットするらしく、Northwestern 大学つながりの広島国際学院大学の元家勝彦先生から2014年9月26日にメールをいただいた。三人には3本を折らせるべきであり、そのとき重ねた矢の接着の有無を問題にすべきであって、実はそれはそもそも Aesop 寓話にある話だと教えていただいた。この文書の記述は、矢をしっかり握っていることを前提にしている。やはりこの逸話はかなりの論理矛盾を含んでおり、これを作った人はかなりの勉強不足だったようだ。

⁶ 東北地方には、秋に「芋煮会」という行事があって、河原で鍋を囲んで友人との親睦を深める催しがある。できればその際には、橋の下を覗き込んでいろいろと力学的なことに思いを巡らせて欲しい。

そこで、桁の力学的な抵抗の特性を見るために、主にフランジ部が材料の持つ最大の抵抗力 S で荷重を支えている状態を図 1.3 に示した。簡単のために、薄いウェブはあまり抵抗しないものとして無視する。上と下のフランジに、同じ大きさの最大抵抗力 S が逆向きの力として発生し、それが作る偶力で荷重を支えていると考えていいので、図からも明らかのように、もし $h_1 < h_2$ であれば、曲げモーメント（偶力）の「最大抵抗モーメント」も $M_1 < M_2$ となり、右の断面の方が大きい抵抗力を持っていることになる。これは「テコ」の原理から類推するとわかり易いかも。

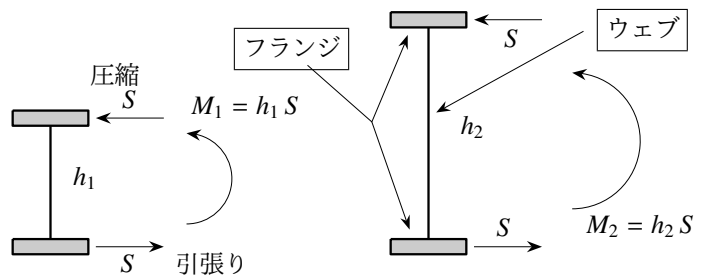


図 1.3 桁高と曲げモーメントの大小

と考えると、図からも明らかのように、もし $h_1 < h_2$ であれば、曲げモーメント（偶力）の「最大抵抗モーメント」も $M_1 < M_2$ となり、右の断面の方が大きい抵抗力を持っていることになる。これは「テコ」の原理から類推するとわかり易いかも。



写真 1.6 JR 仙台駅新幹線 14 番ホーム

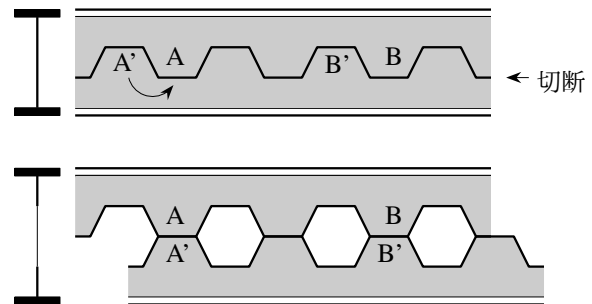


図 1.4 孔開き板

ここでは、ウェブと呼ばれる部分が無視していたが、実際に橋を見に行くとわかるように、そこはかなりしっかりした板に見える。本当に無視していいのだろうか。実はウェブは、第 8 章で述べるような意味で剛性を確保している部品であり、桁という構造の主要な働きを考察する場合には、ある程度は無視してもいい。例えば写真 1.6 は JR 仙台駅新幹線ホームであるが、天井を支えている梁を見ると六角形の黒い部分が見える。これは I 形桁のウェブ板に六角形の孔が開いているのだ。いわゆる孔開き板と呼ばれるもので、図 1.4 に示したように、通常の I 形桁を図のように切断し、A' を A に、B' を B に合わせて、合わせた面をすべて溶接するとできあがる。これで桁の高さも大きくできて強くすることができる。使われる箇所⁷にもよるが、このくらいの孔は開いていてもいいということだ。

トラス — 桁からウェブを無くしてしまおう：孔開き板を紹介したが、もしそれでもいいのなら、上下フランジ間の距離をもっと離して、ついでにウェブの部分もほとんど無くしてしまったらどうなるだろうか。つまりそれは図 1.5 のようになる。この形式をトラスと呼ぶ。

この形式の橋梁の場合には

- それぞれの部材（弦材）は桁ほどは太くなくてもいい。

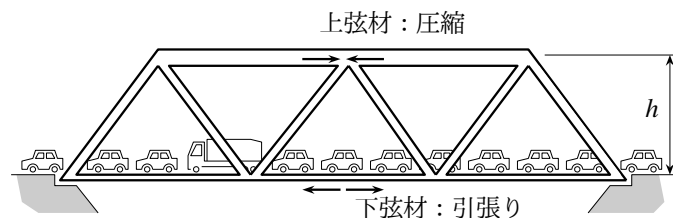


図 1.5 トラス構造 — 上弦材圧縮・下弦材引張

⁷ 柱や横梁と交差する箇所のようなせん断力が比較的大きくなる所には孔が無い。

- 桁高 h を図のように大きくでき、つまり、抵抗モーメントを大きくできる。
- 各弦材は、曲げではなく、単純に圧縮か引張だけで抵抗すればいい。
- 弦材のつなぎ目（格点）は柔らかくてもいい。極端には、格点は「ピン留め」でもいい。

という特徴をもつことになる。弦材のつなぎ目がピンであったりして柔らかい（回転可能な）ので、図のように、一つのパネルを三角形にして安定なものにし、それを連続して組み合わせて安定な構造にしている。

こうすることによって、上弦材は常に圧縮された状態で抵抗し、下弦材は引張られた状態になる。斜めの部材（斜材）は、その部材と荷重の位置関係によって圧縮だったり引張だったりするが、桁のような曲げによる抵抗はほとんど生じないため、個々の部材は単純な抵抗を持った構造でいい。また例えば p.482 の写真にある松齢橋の上下の弦材を注意深く観察すればわかるように、通常は下弦材は上弦材よりも細くなっている。図 1.5 でもわざとこのように描いてみた。そして下弦材には引張だけが生じているので、極端なことを言えば、理屈上は下弦材はケーブルでもいいから、

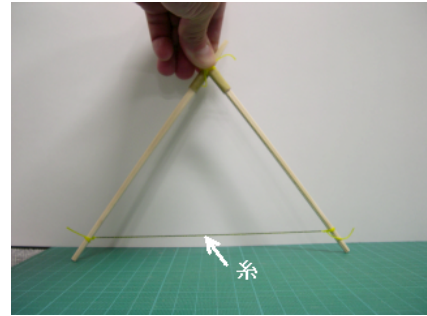
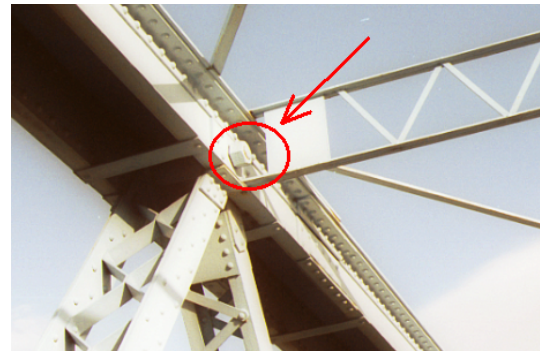


写真 1.7 引張側はケーブル可

写真 1.7 の模型のように、糸でも十分抵抗できている。格点がピンでできている実例⁸を写真 1.8 に示した。この例の三角形のパネル以外に、鉛直材が入っているトラス等もあるが、それぞれの形式の特徴等については橋梁工学の本等を参考にして欲しい。それぞれの形式にはそれぞれの力学的特徴があるのであろうが、著者是不勉強なので、それについてはコメントできない。個人的には、写真 1.8 (a) の左奥に写っている新しいトラス橋のような正三角形を並べただけのものより、p.482 の松齢橋のような曲弦トラスが増えて欲しいと感じているのではあるが、最近では合理化のためにそれが難しいようだ。



(a) 元は鉄道橋、今は歩道橋



(b) 格点はピン（大きなボルト）で接合

写真 1.8 トラス橋の例 — 伊達橋（福島のア武隈川に架かる）

アーチ: では、トラスの上弦材をもっとガッチリとした部材にして、斜材をすべて取り除き、しかも下弦材を写真 1.7 のようにケーブルにしたものはどうだろう。写真 1.9 は、ちょっとだけ台形にした木片⁹を 7 個並べて置いたもので、それぞれの木片同士は接着されていないが、下に「ひも」（タイと呼ぶ）をつけてある。木片の部分は、トラスの上弦材同様、主として圧縮力で抵抗し、タ

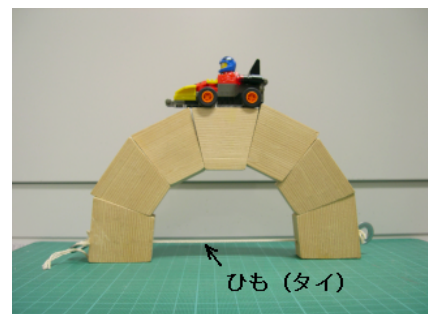


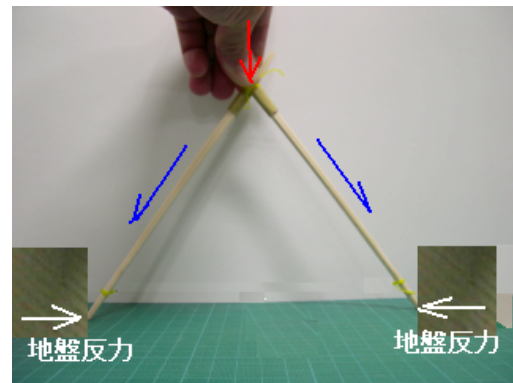
写真 1.9 タイドアーチ

⁸ ピンではない場合の格点付近には、副次的な曲げモーメントが発生してしまう。

⁹ 秋田大学の後藤文彦先生作。



(a) 御霊屋橋 (仙台の広瀬川)



(b) アーチの働きの模型

写真 1.10 普通のアーチの働き



(a) 大橋 (広瀬川) — 塞がったスパンデル部



(b) 鋼アーチ橋の例 — 十綱橋 (福島飯坂温泉)

写真 1.11 コンクリートアーチと鋼アーチ

イがトラスの下弦材と同じ引張で抵抗している。単に木片の重さ（と木片間の摩擦）だけで抵抗しているので、1個でも取り去ると崩壊してしまう。もちろん、タイを切った場合にも崩壊する。このように円弧のような形¹⁰にした部材（アーチリブと呼ぶ）で主に圧縮で抵抗する形式をアーチと呼ぶ。

さて写真 1.10 (a) は、これも広瀬川に架かる御霊屋橋であるが、タイは見えない。すなわち、写真 1.10 (b) に示したように、もし地盤が強固で地盤反力が期待できるならタイは不要になる。通常の多くのアーチにはタイは無く、それは、地盤が強固な場所にアーチが建設されていることを意味している。実は、東京の隅田川に架かる「永代橋」がタイドアーチであるが、「タイ」はケーブルではなく、桁の中に隠された鋼板でできている。また、この御霊屋橋ではアーチの上に道路があるので「上路形式」に分類される。この上路とアーチリブの間の部分をスパンデルと呼ぶが、この御霊屋橋の場合はそこに鉛直材が配置されている。これに対して、東北大学川内キャンパスに近い「広瀬川に架かる大橋 (写真 1.11 (a))」のように、スパンデル部が塞がって（多分中空）いる場合もある。写真 1.11 (b) は鋼アーチの一例である。鋼アーチの場合のリブには、桁と同様、I 形や箱形断面がよく用いられるが、この例の場合には、2 対の溝形鋼を向き合わせて造った（やや古いから多分； 呵呵）箱断面の比較的細い部材を造り、それを 2 本にして主なリブとして上下に配置し、その間を筋交いで組んで 1 本のリブ（ブレーストリブ）にしていると思われる。

¹⁰ 円弧状に見えてもアーチではない橋梁もある。例えば p.800 の写真の岩国の錦帯橋は張り出し（片持ち）梁を重ねたものであって、圧縮で抵抗するアーチではない。アーチ状の桁橋。

吊構造： 橋梁をもっと長くするためには、非常に高い引張強度を持つことができる¹¹鋼ケーブルを利用した吊構造が採用される。具体例が写真 1.12 の吊橋である。比較的短いトラス形式の桁を何本もつないで、その自重をケーブルで支えることによって、自動車等の荷重はその短い個々の桁が支えているというのが、大まかな働きである。自然界の写真 1.14 のようなものをヒントにしたのだろう。もう一つの形式は写真 1.13, 1.15 の斜張橋だ。

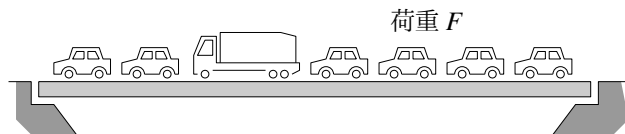


写真 1.12 吊橋 — 南備讃瀬戸大橋

このように、形式毎にもその力学的特徴は異なっているし、用いる材料の持つ特性も異なる。したがって橋梁を設計する際には、どんな材料を使えばいいかという材料力学と、どのような形式がいいかという構造力学、さらに各部材が破壊するまでにはどのような抵抗を示すかについての一般的な連続体力学、この三つの力学をバランスよく理解しておく必要があるというわけだ。

1.2 力学と設計 — デザインとはどういった行為か

最終的に、橋梁を「デザインする」という行為のステップを大まかにまとめると、次のようになる。



1. 建設位置を決めて、そこに相応しい形式を思い浮かべながら、材料（鋼がいいかコンクリートにするか）を選ぶ。したがって、材料科学的な知識に加えて、建設位置付近の社会や文化を理解する人文科学や社会科学的な知識・能力も必要になる。
2. 同時にその形式（桁にするかトラスがいいか、あるいはアーチにするか、それとも吊橋か）や断面の形（矩形でいいか、台形にするか、それともパイプがいいか）等を設定して、次のステップで用いなければならない式の各種係数 D や W , D_{ult} , W_{ult} （定数とは限らない）を決める。 D は曲げ剛性と呼ばれ、 W は断面係数と呼ばれる。いずれも第 4 章で習う重要なパラメータである。ここでは材料力学的かつ構造力学的・連続体力学的な知識と能力が必要になる。通常は、設計しようとしている断面に対して最も不利になるような荷重 F の載せ方を、これも第 2, 4 章で習う影響線を用いて決めることになる。
3. 建設したあとのことを予測する：通常、実物大の実験をして橋の安全を確認することは不可能であるから、力学や数学を用いて、そしてコンピュータを駆使して橋の性能を予測する必要がある。すなわち、材料と形を選んで決定した係数を用いて、次式群の「微分方程式（ここでは梁理論を例とした）」を、境界値問題として [多くの場合コンピュータで] 解くことによって、構造物の内部に生じる「最大抵抗力」 σ^{12} を計算する。

つり合い式:	$\frac{d^2 M}{dx^2} + F = 0$	あるいは	$\frac{d^2 M_{ult}}{dx^2} + \gamma_f F = 0$
抵抗則:	$M = D \frac{d^2 (\text{たわみ})}{dx^2}$	あるいは	$M_{ult} = D_{ult} \frac{d^2 (\text{たわみ})}{dx^2}$
使用中の最大抵抗力:	$\sigma = \frac{M}{W}$	あるいは	$\sigma_{ult} = \frac{M_{ult}}{W_{ult}}$

¹¹ Argonne 国立研究所の井口道生先生のお話では、冷戦時代のソ連は有線ミサイルを飛ばしていたらしい。

¹² ギリシャ文字とその読み方は p.1028 にまとめたので、早めに覚えて欲しい。

最終的には、モデルや解法に近似があるのでコンピュータの結果を正しく理解して判断するために、ここでも力学的に正確な知識と、第5章の数値解析法の基礎知識とが必要になる。

4. 予測された「最大抵抗力」を用いて、次の「安全条件」を満たしているかどうかをチェックする。

$$\sigma \leq \frac{\text{材料・構造の真の強度}}{\gamma} \quad \text{あるいは} \quad \gamma_s \frac{\sigma_{\text{ult}}}{\text{材料・構造の真の強度}_{\gamma_m}} \leq 1$$

ただし、 γ は安全率と呼ばれ、予想できない事態を想定した安全のための余裕係数¹³ (≈ 1.7) である。この「あるいは」を挟む二つのフローのうちの左側のフローは許容応力(度)設計法と呼ばれる設計法の考え方で、右のは限界状態設計法の中の終局状態設計法の考え方に相当するが、本質的な安全確保の思想は同じである。「あるいは」の右のステップにある γ_f や γ_s , γ_m は、上述の安全率 γ に相当する荷重係数やその他の要因の余裕係数¹⁴ である。

5. 安全が確保されていればデザイン(設計)は終わりである。もし確保できない場合には、作業ステップ‘1’か‘2’に戻ってデザイン変更をした上で、上に示した微分方程式の係数を算定し、所定の安全が確保されるまで繰り返す¹⁵。ただし、橋梁のような公共構造物の場合は公的資金によって建設されるため、上式の安全条件の不等号は可能な限り等号に近くなるようにする(経済的観点から力学的な効率を最大化する)のが目標であるが、費用対便益を第一に追求する¹⁶ことを構造技術者はすべきではない。

これが設計という行為の大まかなフロー¹⁷である。

形式とスパンの間の合理的な組み合わせ: 現実に建設されているデータからまとめられた、経済的・力学的に合理的な形式とスパンの組み合わせを表 1.2 [168]¹⁸に示した。例えば 100 m の支間長の橋梁を設計しなければならないとしよう。この表からわかることは、少なくとも 8 種類ほどの形式が可能であるということだ。つまり、いわゆるデザイン(形式選定)の自由度はスパン毎にたくさんあり、材料の選択(適材適所)も念頭に置くと、設計の自由度は無限であることを示している。もし読者が橋梁技術者として仕事をするのであれば、架設現場付近の社会や文化を理解した上で、それを活かして自由にデザインできる¹⁹ことを覚えておいて欲しい。そして、そのデザインを実現するためには、正しい力学の理解が必要であることもわかると思う。

汎用プログラムがあれば力学は要らない? さて今日は、パーソナルコンピュータ上で非線形の動的解析までできる汎用プログラムが、以前よりは廉価で入手できる。それがあれば、どんな構造でも強度計算はできてしまう。だから構造力学の勉強はしなくてもいい!・・・と言えるだろうか。数値解析は、数値を入力しなればできない。どんな断面の形がいいのかは教えてくれない。ケーススタディはできても、普遍的な特性を教えてく

¹³ 破断強度で算定すると土木構造の場合の安全率は3程度になる。これに対して象徴的に(土木構造の安全性を謳うためか)航空機の安全率は1と言われることがある。それはフライト毎に点検があるからということであったが、航空工学の先生から聞いた話では、土木構造の1.7に対応する安全率は1.5だとのこと。TV番組で知ったことだが、零戦の設計者堀越二郎氏は当時の1.8という安全率を下げた(確か1.6)らしい。また、第1著者が昔読んだ零戦についての堀越氏自身の本(多分カッパ・ブックスだったか)の淡い記憶からであるが、資材不足のためにエレベータ等とのケーブルに工夫をしたこと(剛性低下式操縦索と呼ぶらしい)によって高速時の操縦・飛行性能が思いがけず上がったことはとても興味深い。

¹⁴ 2011年3月11日の東北地方太平洋沖地震による震災、特に原子力発電所の災害に関連して「想定」という言葉が毎日のように流れた。安全率を1.7に設定したのは、実はそれ以上の作用もある確率で生じると「想定」していて、それを超えた作用に対しても、どのように壊れて構造がどのような性能を発揮すべきかということも可能な限り検討することになっていたはずだ。ただ残念なことに、そういう作用が実際にどのように発生するのか、そして設計上の数値的・実験的シミュレーションの精度が十分なのか、という点で100%の安心を得ることが不可能だということも事実である。したがって「想定外」という言葉を我々土木屋は使ってはいけない。あるTV番組で中村桂子女史は「『想定外』という言葉は何でも知っている(と思っている)人が使う言葉だ」とおっしゃっていた。

¹⁵ つまり設計という作業は本来一種の逆問題なのだが、実際には順問題を繰り返す手法を用いている。

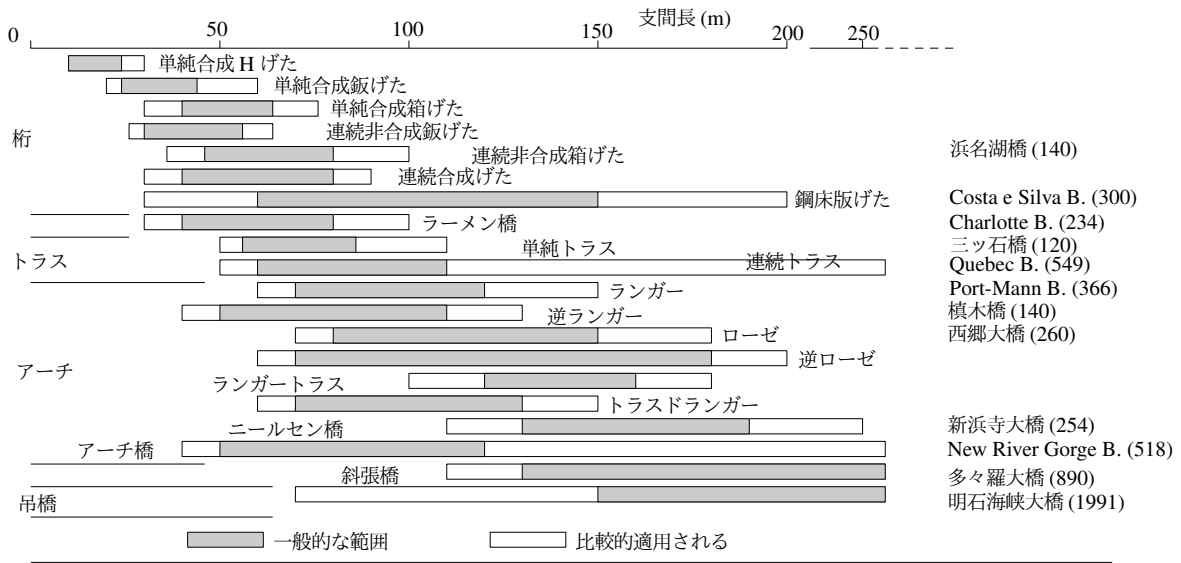
¹⁶ 現在の社会の悪い部分の多くが、これ(換金化)を原因の一つにしていると思う。「 θ/c 信奉は疎外を生む」とか。呵呵。

¹⁷ もちろん、設計書保管庫で過去の類似例を探すという便法があるのは事実ではあるが。

¹⁸ 正しいデータは文献[168]を参照のこと。トレースの許可は長岡技術科学大学の長井正嗣先生からメール(2005/2/21)でいただいた。

¹⁹ 第1著者の個人的な希望だが、斜張橋・コンクリート斜張橋はこれ以上造らないで欲しい。審美的にもよくないし力学的にも美しくないと思う。東北大学の倉西茂先生がお好きではない(構造力学的過ぎる)フィーレンデル橋の方がよっぽどいい。

表 1.2 形式とスパンの間の経済性と力学上合理的な組み合わせ



れることはない。例えば、この章の最初の方で述べたような、縦長の断面と横長の断面のどちらがどのくらい強度が大きくて、そしてそれはなぜなのかについて数値解析の結果は決して教えてくれない。のちに学ぶ座屈における細長比と構造の境界条件等との関係や、動的解析における固有振動数とモードと構造形態や境界条件との関係等についても、やはり力学として学んで身に付けておかなければ、数値解析ツールを使う資格は無いと思う。文献 [117] で引用されていたのだが、茶道の心得²⁰に「守・破・離」というものがあるらしい。「守」とは、ひたすら学ぶ(覚える)こと。「破」は、教えの言葉から抜け出して真意を会得すること。「離」とは、型にはとらわれなくて自由に飛翔する境地で、順に、下手・上手・名人と対比されるらしい。多分「守」がなければその上も無いということではないのだろうか。キュビズムの流れの中のある独自のものを発展させた Picasso のデッサン力や対象を写し取る技術がものすごいということは、読者も知っていると思う。やはり、常に必要なのは基本²¹である。力学は、土木構造に携わる技術者の基本・心得²²であると考えている。

工学とは: さて、「工学」は「理学²³」と同じく「自然科学」で²⁴ある。『「科学」は「予測すること」と同義』²⁵であり、そのためには何らかの科学的な道具すなわち構造物を設計する場合には「物理学」や「数学」「化学」を用いて、建設したあとの性能(昨今はそう呼ぶらしい)を予測しなければならない。これが「デザイン」という行為である。狭い意味の「デザイン(意匠)」の場合であっても同様に、建設後の表現を、心理

²⁰ 川上不自の『不白筆記』にある記述で、他にも剣道等でも流用されている心得らしい。

²¹ H. Gardner 氏は著名な心理学者らしいが、立派な社会学者になることについて次のように述べて [13] いる。「ひとつは必ず<修養>の年月を持つこと。これは知識習得には必要です。もうひとつは、<創造性>の大切さです。創造性は古い考え方を打ち破り、世界についての新しい真実を発見する推進力になるからです。」と、「守・破」に言及している。ただし、『創造性』は結果的に身に付くもの、あるいは結果を形容する言葉で、まず大事なのは『想像力』だと第1著者は考えているが。

²² 近年、「工学」という修飾語付きの倫理が取りざたされているが、なぜそのような修飾語が必要なのか理解できない。倫理は倫理であろう。それは大学で学ぶものでもなく、身に付けていない人には、もはや技術者・研究者として仕事をする資格は無いのではないだろうか。他人の図表の無断コピー添付のような軽いものも含め、学位論文草稿等ですつとたくさん見つけることができる。自分のことは棚に上げて注意を書いておきたい。

²³ 統一理論の S. Weinberg 博士は、結論が完全に逆だがどちらにも間違いは全く無い二つの論文を書き、どちらを投稿するか悩んだという。そのとき投稿した論文がノーベル賞につながっていったらしい。理学(理論物理)は面白い。

²⁴ ただ、「科学・技術」の「技術」と「科学」は別であるという見方 [123, 147] は確かにうなずけるものがある。2009 年頃から新聞等では「科学」と「技術」の間に中黒を入れるようになった・・・と思ったのだが、また元に戻った。

²⁵ 村上陽一郎氏かどなたかの著作か随筆で読んだもので、著者のオリジナルではない。

学や社会学等の「社会科学」的道具を用いて「科学した」上で決定している²⁶のと同じである。「理学」が事実の裏に秘めた真実を予測・探求するのに対し、「工学」は真実を追いながらも、それがほぼ不可能なくらいの複雑な系を対象としているために、事実（実現象）を説明できる真実のかけらやモデルを構築し、さらに適切な予測ツールを開発し、それをを用いることによってできるだけすぐに社会に役立たせようとする学問である。さて最後に、その自然を支配している最も基本的な法則のほんの一部を並べておく。

MURPHY'S LAW

If anything can go wrong, it will.

Corollaries:

1. Nothing is as easy as it looks.
3. If there is a possibility of several things going wrong, the one that will cause the most damage will be the one to go wrong.
5. Left to themselves, things tend to go from bad to worse.

その他の系や法則については文献[11]を! その中からいくつかp.210にも引用しておいた。

演習問題 1-1

1. Murphy's law の文献[11]に紹介されている Cole's law とはどのような内容か想像してみよ。綺麗に発音してごらん。



写真 1.13 多々羅大橋 1999年竣工 (中沢正利先生撮影)

²⁶ もちろん、科学的には定量化できない(かなあ? [27, 137])「芸術的な観点」が第1要素であると主張する向きはあろうが、それだけなら第1著者のような似非インテリの反感を買うだけで、損をするのはデザイナーだ。どこかの使い難い本屋や食堂のように。

写真 1.14 かずら橋 徳島県祖谷²⁷

‘馬から落馬:’ 国鉄では長年漢語を多用していたが、あるときからそれをやめたというニュースを聞いた記憶がある。車両の扉を開けるときの車掌へのホーム（フォーム?）アナウンスが、「ドア開扉願います」だった。今は「ドアを開けてください」だ。ところがインターネットを探すと、今でも車両の場合の「ドア開扉」は一つの実用単語のようだがなぜだろう。漢語と例えば、卒論発表等で普段使いもしない漢語のような言葉を使う学生が絶えない。文献 [136] にはその理由について興味深い考察があるが、卒論発表でスーツを着ることと同じで、本質ではないところを心配するからという見方は正しいのではないか。最近はその本質を無視した行事等が多いのではないか。英語が大切なことは認めるが、小学校で英会話を教えたり、修士論文審査会を英語でやったり、2 次的な目的の方を優先しているとしか思えない。まずは頭の中で使っている言語で論理的な表現ができるようになる教育が必要だ。

²⁷ 橋梁の写真は <http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/civil/node20.html> に。

‘see no evil, hear no evil, speak no evil.’ 三猿を英語ではこう言う。1981年の米国雑誌 ‘Audubon’ には、双眼鏡で何かを観ている猿・メガホンで何かを叫んでいる猿・盗聴器で電話を聞きながら録音している猿が並んで座っている一コマ漫画があった。



写真 1.15 櫃石島橋・岩黒島橋 斜張橋 1988年竣工



‘Beats me!’ ボスの秘書さんの一人 Barbara はとても早口で、最初の頃は時々挟む ‘Ok?’ 以外は何も聞き取れなかった。彼女に何か質問して、このように答えたときは、そのあとにすぐ ‘But don’t hit me!’ っておっしゃる、とても愉快な方でした。もう一人の Erica はラトビア人でたいへんお世話になったが、‘Alles in Ordnung.’ が口癖だった。そのボスの部屋のそばには実験室があり、そこの技術職員 John はドイツ人だった。Erica は彼ととても仲がよかったが、どうやら戦争中に逃げて来るときドイツ人にすごく世話になったからということだった。このフロアには力学系の研究室があったのだが、教授もラトビア人や日本人・オランダ人・イラン人・ユダヤ人と多彩だった。一階下にもチェコ人とウクライナ人。皆、世界的に著名な先生達だ。

第2章

静定構造の力学 — 外力と内力

2.1 つり合い式

2.1.1 つり合っているとは?

構造力学は変形できる物体の力学だとまえがきで述べたが、その変形そのものを取り扱う前に、この章では重要な概念である「抵抗力」を導入する。物体内部の力なので「内力」と総称するが、人間の病気に対する抵抗力と同様目に見えない内部の力なのでわかり難い。だがそれは力には他ならないので、まずその力が満足すべき法則について書いておこう。さて我々は Newton の運動方程式が正しいものだと考えていいだろう。あるいはそれが成立するような場のみを対象としている。そうすると、写真 2.1(a) にあるような力を受けている starship は、例えば力 F_1 方向の移動量を $u(t)$ としたときに、運動方程式

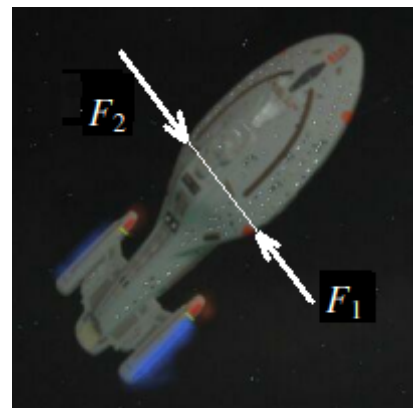
$$\sum [\text{力}] = F_1 - F_2 = m \frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \quad m \equiv \int_V \rho dV \quad (2.1a, b)$$

を満足する運動をすることになる。ここに t は時間である。 ρ は starship の密度で、starship の体積 V 上で密度を積分した m は starship の全質量である。もしこの物体が静止しているなら、上式の右辺は零になるため、結局この物体に働いている力は

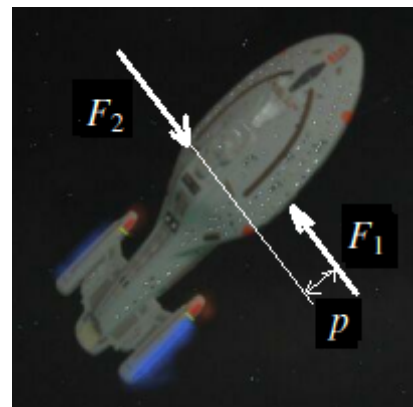
$$\sum [\text{力}] = F_1 - F_2 = 0 \quad (2.2)$$

を満足しなければならない。これが力のつり合い式である。ただ注意しなければならないのは、「力がつり合っている状態」が常に「静止した状態」とは限らないということである。すなわち、式(2.1a)の左辺が零の場合には右辺の加速度が零になるだけなので、この starship は等速運動をしていればよく、静止している必要は無い。容易に理解できると思うが、宇宙空間の starship のように適切には固定されていない物体の場合は、運動し続けるという答もつり合い式は持っている。

さて、では写真 2.1(b) にあるように、もし二つの力の作用線が同一線上には無い場合を考えてみよう。もし $F_1 = F_2 = F$ であれば力はつり合っていることになるが、もちろん、この物体が回転することは容易に想像で



(a) 力のつり合い



(b) $F_1 = F_2$ だと力はつり合っているが?

写真 2.1 つり合いとは?

きるだろう。それは、 $p \times F$ という大きさの偶力がこの物体には作用しており、その偶力がこの物体を反時計回りに回転させてしまうからである。すなわち、「つり合い状態」を規定するには力のつり合いだけでは不十分であり、回転運動に関連したつり合いも規定する必要があることがわかる。

例えば、写真 2.2 にあるように、ある点 O から三つの力 F_1, F_2, F_3 の作用線までの距離をそれぞれ p_1, p_2, p_3 とすると、starship の O 点回りの反時計回りの回転移動量を $\theta(t)$ としたときに、その starship は回転についての Newton の運動方程式

$$\sum \text{【モーメント】} = p_1 F_1 - p_2 F_2 + p_3 F_3 = J \frac{d^2 \theta(t)}{dt^2} \quad (2.3)$$

を満足する運動をすることになる。ここに J は starship の O 点まわりの慣性モーメントで

$$J \equiv \int_V r^2 \rho dV \quad (2.4)$$

と定義される。ここに r は点 O から物体中の点までの距離である。したがって、静止した物体の力学の場合は、この Newton の運動方程式 (2.3) の右辺も零になり、この物体に働いている力は

$$\sum \text{【モーメント】} = p_1 F_1 - p_2 F_2 + p_3 F_3 = 0$$

を満足しなければならない。これがモーメントのつり合い式である。

ここまでは簡単のために 2 次元で、かつ力の向きを限定した上でつり合い式を導いた。もし 2 次元で図 2.1 のような一般的な場合には、力のベクトル F_i と作用点までの位置ベクトル p_i との x, y 方向成分同士で上述のようなつり合いを考えれば簡単である。つまり、 x, y 方向の力の成分を添え字 x, y で表すことにすれば、そのつり合いはそれぞれ

$$(F_1)_x + (F_2)_x + (F_3)_x = 0, \quad (F_1)_y + (F_2)_y + (F_3)_y = 0$$

になるということは、容易に理解できるであろう。また原点 O 回りの反時計回りのモーメントのつり合いは、例えば、 F_2 と p_2 を図中で x, y 成分に分解して各自鉛筆で図示しておき、その二つの力成分の反時計回りのモーメントを考えてみるとわかるように

$$\{(p_1)_x (F_1)_y - (p_1)_y (F_1)_x\} + \{(p_2)_x (F_2)_y - (p_2)_y (F_2)_x\} + \{(p_3)_x (F_3)_y - (p_3)_y (F_3)_x\} = 0$$

となる。この二つのつり合い式を 3 次元に一般化し、成分ではなくベクトルそのもので表現すると、それぞれ

$$\sum_{i=1}^3 F_i = \mathbf{0}, \quad \sum_{i=1}^3 p_i \times F_i = \mathbf{0} \quad (2.5a, b)$$

と表されることも理解できるだろう。いや、理解できるようになって欲しい。ここに \times はベクトル積（あるいは外積）を示す。では原点回りの式 (2.5b) 同様、任意の点 A 回りのモーメントについてもつり合っているかどうか確かめてみよう。点 A の位置ベクトルを \mathbf{a} とすると、その点 A 回りのモーメントの総和は

$$\sum_{i=1}^3 (p_i - \mathbf{a}) \times F_i$$

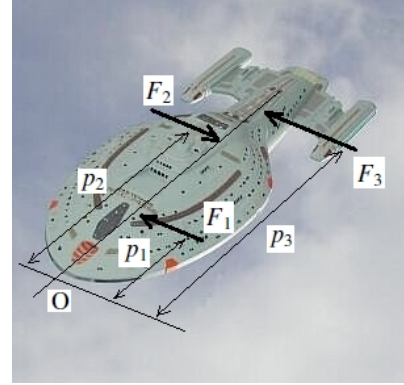


写真 2.2 モーメントのつり合い

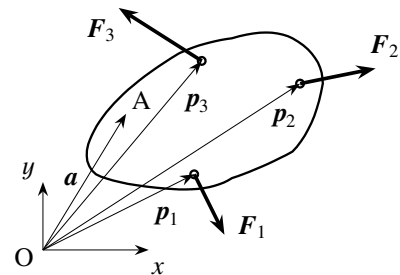


図 2.1 つり合い状態

であるから、次のように展開すれば

$$= \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i \times \mathbf{F}_i - \sum_{i=1}^3 \mathbf{a} \times \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i \times \mathbf{F}_i - \mathbf{a} \times \sum_{i=1}^3 \mathbf{F}_i = \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$$

になるのは理解できるだろう。力のつり合い $\sum \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ から三つ目の等号が成立し、O点回りのモーメントのつり合い $\sum_{i=1}^3 \mathbf{p}_i \times \mathbf{F}_i = \mathbf{0}$ から四つ目の等号が成立するからである。したがって、適切に固定¹された物体に作用している力が式(2.5)を満足しているとき、その物体はつり合い状態にあると呼ぶ。

2.1.2 外力と反力

以上、暗黙のうちに力 \mathbf{F} は物体の外から作用しているものに限定していた。このような、物体にとって外の環境から作用する力を外力と呼ぶ。そこで図 1.5 で紹介したトラス橋の1パネルを模擬し、3本の部材（太い線はある太さを持った棒）から成る構造を図 2.2 に示した。点 A, B, C は格点と呼ばれ、そこに集まる部材同士がまっすぐなまま自由に回転できるように接続されていると考えて欲しい。実際にはピンや比較的柔らかい板で接合されている。上の格点 C に作用しているのが外力 P, Q である。このとき下の二つの格点は沈下しないように支えられており、このような通常の支持構造を三角形の記号で描くことが多い。ただ左側 A は三角形記号だけだが、右側 B はその記号の下に線分が描かれている。これは、左の支持は上下方向だけではなく水平方向にも固定されていることを示し、右の支持は水平方向には移動可能であることを表している。右のような支持を三角形ではなく円で表すこともある。

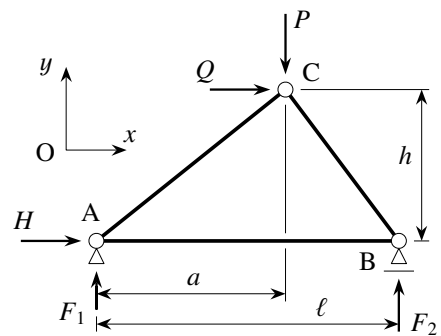


図 2.2 外力と反力

二つの外力を受けたこの構造は、その力を部材が伝達し、支持された2点 A, B で地盤にその力を逃がすことによって外力を支えている。つまり、作用反作用の原理で地盤は構造をこの2点で支えて動かさないようにしている。したがって、動かない構造は支持点で地盤からの力を逆に受けて、地盤に支えられていると考えればいいことになる。このような力を反力と呼んでいる。図の H, F_1, F_2 がその反力である。支点 B は水平方向への移動が自由なので、水平方向の反力は生じない（といったことには早く慣れて欲しい）。このような反力は、構造にとっては外から作用している力とは区別がつかないので、外力として扱えばいいことになるが、気持ちの上では P と Q が原因で H と F_1, F_2 が結果的に生じていると考えるのが望ましい。

この三つの支点反力の大きさは前節で説明したつり合い条件で求めることができるはずだ。 x, y 方向の力のつり合いと、点 A 回りの反時計回りのモーメントのつり合いは

$$H + Q = 0, \quad F_1 + F_2 - P = 0, \quad \ell F_2 - aP - hQ = 0$$

となる。この3式から反力は

$$H = -Q, \quad F_1 = \frac{\ell - a}{\ell} P - \frac{h}{\ell} Q, \quad F_2 = \frac{a}{\ell} P + \frac{h}{\ell} Q$$

のように求めることができる。支持構造と地盤はこの大きさの力を支えることができないと安全な構造とは言えないわけだ。ただ、反力を求めただけでは、この構造が壊れないように設計されているかどうかはまだわからない。だって部材本体が壊れることをまだ確認してないからだ。つまり、外力を伝達する部材の「内部で何が起きている」のかを調べない限り、構造の設計は完了できていないことになる。

¹ starship がフェーザー砲を撃つと実はその姿勢が変動するはずだが、発射力が無視できるほど starship の質量が大きいと考えるのだから。それに対し、浮遊したガンダム (© サイライズ) が砲を動かただけで体の姿勢も相対的に変わるはずだが、制御工学はすごい。

2.1.3 変形できる物体の抵抗力 — 内力

さて前節では、点Cで受けた外力を部材が支点へと「伝達」すると述べたが、それはどういう仕組みだろう。まえがきにも書いた通り、この文書で取り扱うのは変形できる物体の力学である。つまり、ここで例として扱っている3本の部材でできた構造も、実は外力の作用に対して図2.3に模式的に描いたように、それぞれの部材が伸び縮みしてつり合い状態になっていると考えるべきである。わかり易いように図2.3では各部材をバネで置き換えた。少し誇張して描いたが、支持点Aは動かず、点BはB'の位置に、点CはC'の位置に移動して静止している。ここで各バネが例えば Δ_{AB} 、 Δ_{BC} 、 Δ_{CA} だけ伸びていた²としよう。各添え字は部材の両端の記号に対応している。もし各部材のバネ定数（抵抗係数）がそれぞれ k_{AB} 、 k_{BC} 、 k_{CA} であれば、それぞれのバネには $N_{AB}(\equiv k_{AB} \Delta_{AB})$ 、 $N_{BC}(\equiv k_{BC} \Delta_{BC})$ 、 $N_{CA}(\equiv k_{CA} \Delta_{CA})$ の大きさの抵抗力³が発生していることになる。この抵抗力を内力と呼んでいる。例えば材料がスポンジだと小さい抵抗力しか発揮できない。つまりバネ定数が小さいので、小さい力で大きな伸びが生じてしまう。もし材料が鋼だとバネ定数が大きいから大きな抵抗力を発揮でき、大きな外力を伝達することができ、部材に生じる伸びを小さい状態に留めることができる。そして、そのそれぞれの材料特有の破壊の限界としての伸び変形の限界に相当して、対応する内力にも限界（強度）がある。したがって、もし部材を構成している材料の「強度」を「内力」が超えてしまうと構造は崩壊（破壊）してしまうことになるので、内力が設計における最も重要な量の一つになる。

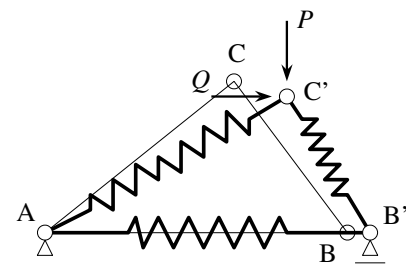


図2.3 変形して支える構造

このような内力は材料が変形することによって生じている力なので、構造全体を眺めている図2.2等に矢印では描くことができない。これが見えるようにするためには（頭の中で）部材を切断してみればよい。切断したことによって材料の内部が見えるようになり、その部材の切断面に内力が生じているように見えるからだ。そこで点Cの近傍で二つの部材を切断してみたのが図2.4である。切断した相対する断面には作用反作用の原理に従って、同じ内力が逆向きに生じていると考えればよい。慣例として「切断面の外向きの力（引張）を正と考えて矢印で描く」ことになっている。

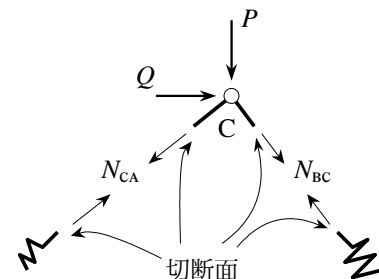


図2.4 切断面に可視化された内力

この内力を求めるためには、例えば切り離してしまった点Cにおいて、二つの外力 P 、 Q と二つの内力 N_{CA} 、 N_{BC} との四つの力の x 、 y 方向の力のつり合いを考えればよいことになる。切断したことによって内力を（頭の中では）外力と同じように扱うことができるので、内力と外力の間の力のつり合い条件を用いて内力を求めることができる。章題目の「静定」の詳細な定義は第2.4節で述べるが、この例のように、つり合い条件のみで反力のみならず内力も求めることができる構造系を静定な構造系と呼んでいる。

このように、我々が構造設計をする際に必要な最重要情報の一つは内力であり、それは力学的な原理によって求めることができる。したがって、内力という概念と力学原理が理解できない場合には、この文書は多分全く理解できないだろうし、社会基盤構造のデザインはできないことになる。次の節からは、最も基本的な社会基盤構造形態であるトラスと梁を対象として、力学原理を用いて内力分布を求める。そしてそのようにして求められた内力を用いて、トラスと梁の設計の手順について概説する。

² 部材BCは縮んでいるだろうから Δ_{BC} が負の値になるように、伸びそのものを定義してある。

³ 部材ABと部材CAは伸びているので N_{AB} と N_{CA} は正で引張力であるのに対し、 Δ_{BC} は負だったから N_{BC} は負で圧縮力である。

2.2 静定トラス

2.2.1 トラス構造の特徴

(1) 構造の概要

写真 1.8 に示したように、部材の接合点がピンあるいは柔らかい板で結合された、三角形を基本構造とする部材組み構造をトラスと呼ぶ。トラスは古くから鉄道橋⁴でも多く用いられ、既に 100 年以上経った橋梁もあるが、体育館・ドーム等の天井や鉄塔にもトラス構造が使われている。トラス部材は図 2.3 のバネモデルのように、その部材方向の伸び縮みという変形だけで抵抗するといった、最も単純な抵抗則を持っている。したがって、内力も図 2.4 のモデルのように、その部材軸方向の力だけになる。

なぜ三角形を基本としているのかについては、写真 2.3 から一目瞭然であろう。接合点をピンと考えていたため、割り箸を糸で緩く組み立てて作った模型にしてみた。当然なことだが四角形では不安定で自立すらできないが、三角形であれば安定する。しかも写真 1.7 に示したように、荷重がこのように上からのみ作用している場合の下の部材は糸（ケーブル）でも安定している。これは上述のように、各部材には単に圧縮か引張のみが生じている場合が多いためであり、力学的には非常に単純でわかり易い構造になっているからである。そのため、引張部材をケーブルで代用しても、構造全体は安定で強度も確保できることになる。

トラスもそれ以外の社会基盤構造と同様、実際には 3 次元的な広がりを持つ。したがって、厳密には図 2.5 のような奥行き方向も考慮した立体トラスとして考えなければならない。しかしながら、まず主構造としての平面トラスで設計した上で、奥行き方向を別途設計することが普通であり、また、この文書では最も単純な構造の例としてトラスを取り上げることから、ここでは図 2.6 に示したような平面トラスのみを取り扱う。なお実際の部材には太さがあるが、以下たいていの場合はこの図のように、部材を 1 本の太い線で表すので注意すること。またトラスの場合、部材の接合点はピンのようなものだが、○印は原則略す。

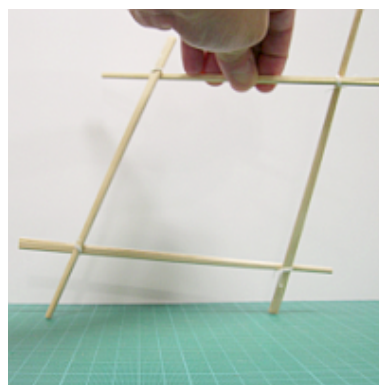
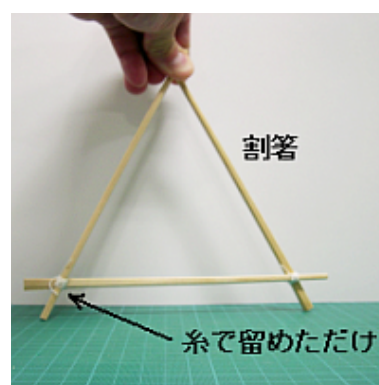


写真 2.3 割り箸で作ったトラス 1 パネル

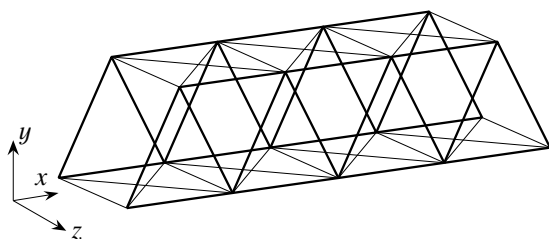


図 2.5 立体トラス

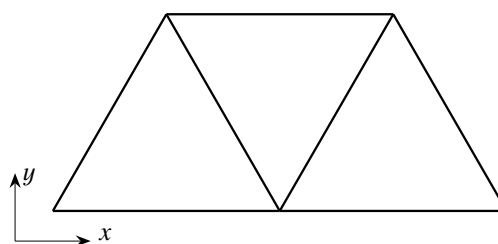


図 2.6 平面トラス

⁴ 写真 1.8 の手前と写真 K.9 に示した伊達橋も典型的な鉄道橋で、移設して歩道・自転車道橋として用いられている。

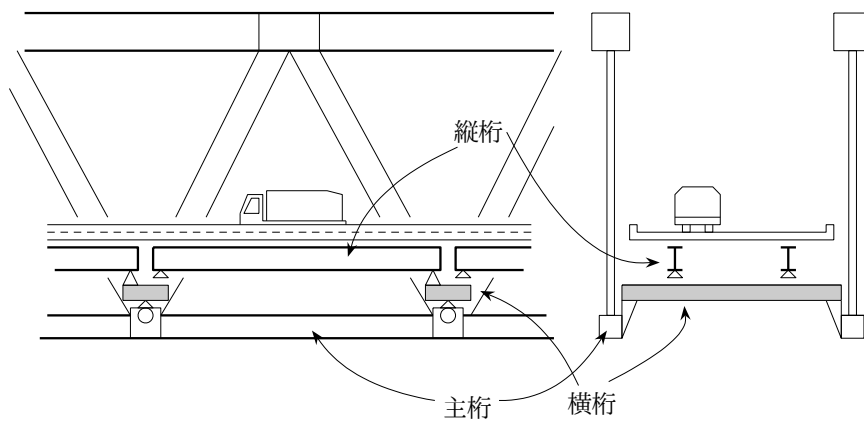


図 2.7 節点へ荷重が伝達される仕組み

(2) トラス構造の特徴と設定

トラスには、重要な特徴が二つある。

特徴 1: トラスを構成する部材（弦材とも呼ぶ）はまっすぐであり、両端はピンで連結されていると仮定する。この連結されている点をここでは節点と呼ぶ。ここまでは格点と呼んでいた。

特徴 2: 外力は節点のみに作用する。

特徴 1 で定義した節点については、写真 1.8 の右側の写真から実際の状況⁵は理解できると思う。ピンの働きは、コンパスの足の結合点や自転車のペダルの取り付け部を思い描けば想像できるだろう。したがって、部材は節点を中心として曲がることなく（まっすぐなまま）回転することができる。また、二つの特徴から導かれる結論は、トラス部材 1 本の抵抗力つまり内力は軸方向の力（後述の軸力）だけだということである。

特徴 2 については疑問を感じると思う。つまり、実際にトラス橋の上を車や列車が通過するところを遠くから観察すると、直接部材の上を通っているように見えるので、節点にだけでなく部材にも直接荷重が作用しているように感じられるかもしれない。しかし実際には、図 2.7 に誇張して示したように、横桁・縦桁を介して主トラス構造の節点のみに荷重が作用するようになっている。一度は現場観察をしてみよう。

2.2.2 断面力の求め方 — 節点法と断面法

(1) 断面を切断すること

トラスの内力を、断面に生じている抵抗力であることから一般的には断面力、あるいは部材の軸方向の力なので軸力と呼ぶことにする。前節でも述べたように、断面力は部材を仮想的に（頭の中で）切断しないと見えないようにはならないが、この断面を仮想的に切断する方法には

1. 節点のそばで切断する
2. トラスを二つに分割するように、三つの部材を切断する

の 2 種類がある。前者を「節点法」、後者を「断面法」と呼ぶ。ただし、部材を切断するときには

切断の約束 1: 元々はくっついていた二つの切断面には、お互いに逆向きに同じ大きさの力が内力として生じている（作用反作用の原理）ことにする。

⁵ 近代的トラスの節点はピンではなくガセットプレートという比較的薄い板を使って 2 部材を接合しているが、主部材の剛性に比べて柔らかくできていることから、設計・解析においてはピンでモデル化される。

切断の約束 2: 切断する前につり合っていた物体は、切断したあともその切断された部分毎につり合っていることにする。

という大事な約束がある。

(2) 節点法

まず節点法の手順をまとめると以下の通りである。

手順 1: 支点反力を求める。

手順 2: 各節点において、連結している部材をすべて切断する。

手順 3: 節点 i と節点 j を結ぶ部材の軸力を $N_{ij} (= N_{ji})$ とし、切断面の外側に向かう方向を正として (引張が正) 作用させる。

手順 4: 節点 (切断点) においては、切断の約束 1 により、逆向きに同じ大きさの力を作用させる。

手順 5: 各節点において水平方向および鉛直方向の力のつり合いを考え、各軸力を算定する。このとき、一番端の節点からつり合いを考えていくと楽かもしれない。

図 2.8 に示した正三角形のトラス構造を例にとって説明しよう。力およびモーメントのつり合い条件から支点反力を求める [手順 1] と、 $R_A = \frac{1}{4}P$, $R_C = \frac{3}{4}P$ になる。各節点で部材を切断し、未知数としての軸力を作用させる [手順 2 (図 2.9)]。切断の約束 1 に従い、各節点に逆向きで同じ大きさの力を作用させる [手順 3 (図 2.10)]。まず点 A におけるつり合いは

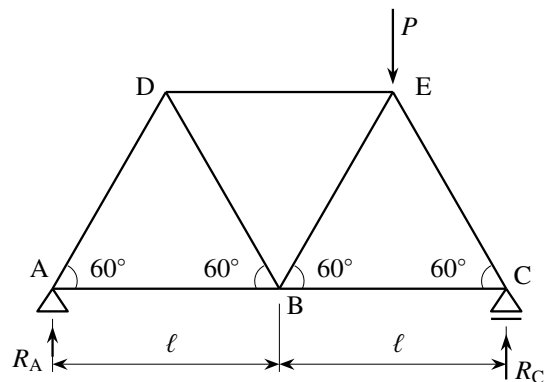


図 2.8 トラスの例

$$\begin{cases} x \text{ 方向} & N_{AB} + N_{AD} \cos 60^\circ = N_{AB} + \frac{1}{2}N_{AD} = 0 \\ y \text{ 方向} & R_A + N_{AD} \sin 60^\circ = \frac{1}{4}P + \frac{\sqrt{3}}{2}N_{AD} = 0 \end{cases}$$

となるので、 $N_{AB} = \frac{\sqrt{3}}{12}P$, $N_{AD} = -\frac{\sqrt{3}}{6}P$ と各断面力が求められる。

次は点 B でつり合いを考えたいかもしれないが、そこには四つの軸力が作用しているのにつり合い式は二つしか無いので、未知数の方が多くて軸力を確定することができない。そこで点 D を次の対象とするのも一

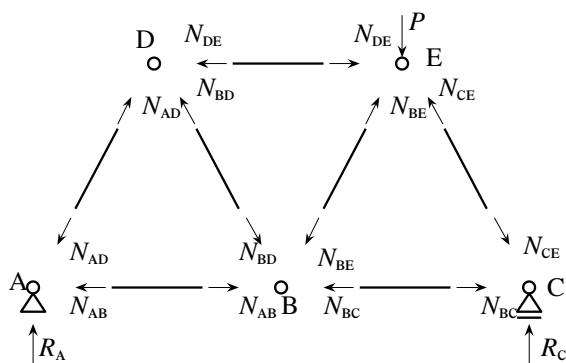


図 2.9 [節点法: 手順 2] 軸力を設定する

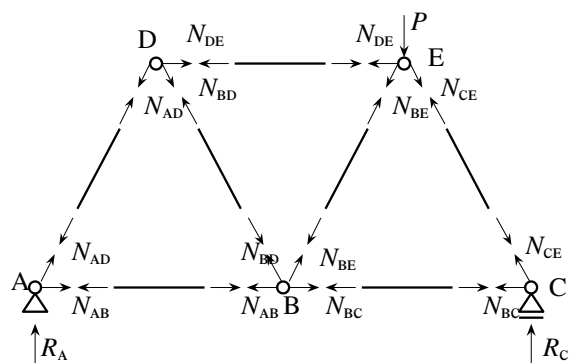


図 2.10 [節点法: 手順 3] 節点に力を作用させる

つのアイデアであるが、ここでは端点Cでつり合いを考えてみよう。それは

$$\begin{cases} x \text{ 方向} & N_{BC} + N_{CE} \cos 60^\circ = N_{BC} + \frac{1}{2}N_{CE} = 0 \\ y \text{ 方向} & R_C + N_{CE} \sin 60^\circ = \frac{3}{4}P + \frac{\sqrt{3}}{2}N_{CE} = 0 \end{cases}$$

だから、 $N_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{4}P$, $N_{CE} = -\frac{\sqrt{3}}{2}P$ のように軸力が求められる。こうすると、点Dにおけるつり合いは

$$\begin{cases} x \text{ 方向} & -N_{AD} \cos 60^\circ + N_{BC} \cos 60^\circ + N_{DE} = -\frac{1}{2}N_{DA} + \frac{1}{2}N_{DB} + N_{DE} = 0 \\ y \text{ 方向} & N_{AD} \sin 60^\circ + N_{BD} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}N_{AD} + \frac{\sqrt{3}}{2}N_{BD} = 0 \end{cases}$$

となるから、 $N_{BD} = \frac{\sqrt{3}}{6}P$, $N_{DE} = -\frac{\sqrt{3}}{6}P$ が各軸力の値である。最後に点Eにおけるy方向のつり合いから

$$N_{BE} \sin 60^\circ + N_{CE} \sin 60^\circ + P = \frac{\sqrt{3}}{2}N_{BE} + \frac{\sqrt{3}}{2}N_{CE} + P = 0$$

を得て、 $N_{BE} = -\frac{\sqrt{3}}{6}P$ が求められる。すべての軸力が求められたので点Bでつり合いは考えなくてもいいはずだが、検算のためにも練習のためにも各自必ず確かめて欲しい。解く順番は未知数の数を考えればわかる。

(3) 断面法

次に断面法の手順は以下の通りである。

手順1: 支点反力を求める。

手順2: トラスの部材を3本切断して二つに分ける。このときトラスは完全に分断されていなければならない。

手順3: 節点iと節点jとを結ぶ部材の軸力を N_{ij} (= N_{ji})とし、切断面の外側に向かう方向を正として(引張が正)作用させる。切断した箇所は三つなので、設定する軸力も三つでなければならないことに注意すること。

手順4: 二つに分けられたトラスの片方だけを用いて、水平・鉛直方向の力のつり合いと、モーメントのつり合いから(切断の約束2)、各軸力を算定する。

この方法を用いて、再度図2.8のトラスの三つの軸力 N_{BC} , N_{BE} , N_{DE} を求めてみよう。

まず全体のつり合いから支点反力を求める[手順1]と、 $R_A = \frac{1}{4}P$, $R_C = \frac{3}{4}P$ となる。一つの例として切断は図2.11のように[手順2]した。切断されたトラスの左側に対してつり合いを考える[手順3]と、x方向の

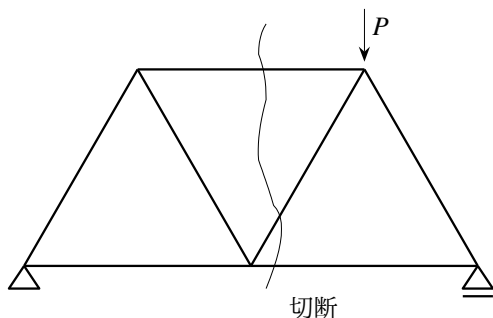


図 2.11 [断面法: 手順2] 構造を二つに切断する

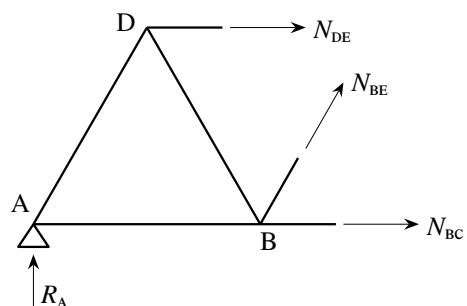


図 2.12 [断面法: 手順3] つり合いで軸力を求める

つり合いより

$$N_{BC} + N_{BE} \cos 60^\circ + N_{DE} = N_{BC} + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{BE} + N_{DE} = 0 \quad (*)$$

となり、 y 方向のつり合いより

$$R_A + N_{BE} \sin 30^\circ = \frac{1}{4} P + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{BE} = 0$$

となる。したがって $N_{BE} = -\frac{\sqrt{3}}{6} P$ と求められる。モーメントのつり合いはどこを中心にしてもいいが、式中の未知数は少ない方が楽だし間違いも少ないだろうから、点 B を中心にしてみよう。するとそれは

$$R_A \ell + N_{DE} \frac{\sqrt{3}}{2} \ell = 0 \rightarrow \frac{1}{4} P \ell + \frac{\sqrt{3}}{2} N_{DE} \ell = 0$$

だから、 $N_{DE} = -\frac{\sqrt{3}}{6} P$ が求められる。以上から、 $N_{BE} = -\frac{\sqrt{3}}{6} P$ と $N_{DE} = -\frac{\sqrt{3}}{6} P$ を上式(*)に代入すると、最終的に $N_{BC} = \frac{\sqrt{3}}{4} P$ と求められ、節点法の答と一致する。各自の練習のために、他の軸力も同様に求めて欲しい。得られた軸力分布を図 2.13 に棒グラフで示した。

断面法を用いて計算を行う場合には、特に切断箇所には注意しなければならない。図 2.14 には間違っただ切断方法の例を示した。まず図 2.14 (a) では四つの部材を切断しているため、未知数である軸力は四つになっているにもかかわらず、つり合い式は三つしか立てられないため条件が一つ不足し、軸力を唯一に求めることはできない。次に図 2.14 (b) では三つの部材を切断してはいるものの、トラスが二つには分断されていないために、切断の約束 2 を適用することができない。そのため、トラス全体に対するつり合い式しか立てることができず、各軸力は逆向きに同じ大きさで作用しているために打ち消しあうだけで、結果として得ることができるのは支点反力だけである。

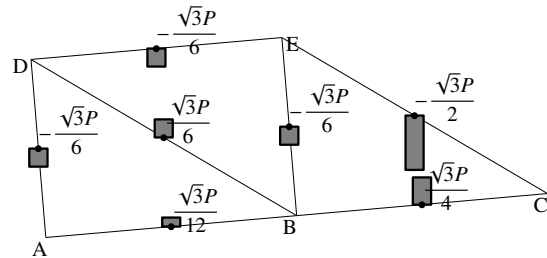


図 2.13 軸力分布図 (標準的な軸力図は図 2.38)

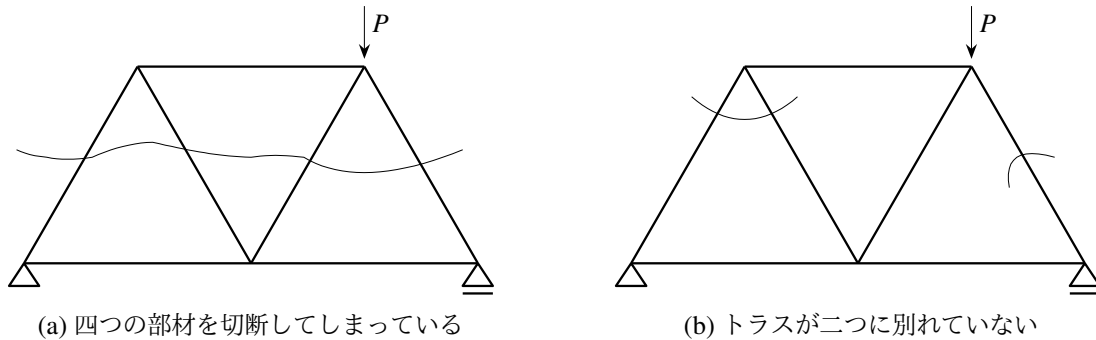


図 2.14 断面法において、うまくいかない切断の例

演習問題 2-1

- 図 2.15 は正方形パネルでできたトラスであるが、部材 1-2, 2-4 が必要かどうかを、軸力を計算せずにじっくり考えてみよ。結論が出たら全部材の軸力を計算し、その結果と自分の推測を比べてみよ。もし、部材 1-2, 2-4 が不要なら、その 2 部材を取り除いたあとの不静定次数 (第 2.4.1 節参照) を計算せよ。また、斜材の向きを右下がりにした (2-3, 4-5 に付け替えた) 場合の結果も推測した上で計算し、どちらの構造がより力学的に効果的か論ぜよ。

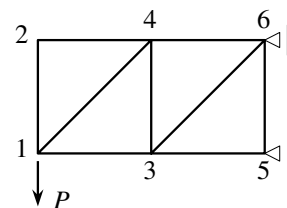


図 2.15 簡単なトラス

2.2.3 影響線と断面設計

(1) 部材を設計するというとは?

前節の例では、荷重の大きさはもちろん、それが作用する場所も与えられた上で軸力を求めていた。機械部品の場合にはそれでよさそうだが、しかし橋梁を設計する場合はどうだろう。普段橋梁に作用している主な荷重は自重(死荷重)と自動車等の荷重(活荷重)である。自重は常に同じ強度で常に同じ場所に作用していると考えていいが、自動車等の荷重は大型車と小型車で重量が異なる上に、橋梁の幅方向・長さ方向共にどの部分にどのように載るかについては決まっているわけではなく、またそれは時々刻々変化する。したがって、設計しようとするある1本のトラス部材に対し、載るであろう種々の荷重をいろいろな場所に配置する等して(実際にはそうしないが)その部材に生じる軸力の最大値(それ以上の軸力はトラスの一生涯で経験しない大きさ)を求める必要がある。そのためには、その部材が最も危険になるように自動車等の載る位置を探すことから始める必要があり、しかもその位置は設計する部材毎に異なる⁶のだ。

現行の設計法では、橋梁の主部材を設計する場合の自動車等の荷重は、図 2.16 に示したような交通荷重(L 荷重)でモデル化 [176] されている。これは、ある長さ D の区間には q_1 の強度で、それ以外の区間には q_2 の強度で、ある指定された分布外力が載ることを意味する。 q_1, q_2 の値の求め方については第 K.5.3 節を参照のこと。しかし、この分布荷重をどこに載せたときに設計しようとしている部材が最も危険になるのかを、まず調べる必要がある。

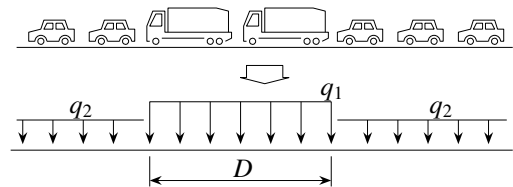


図 2.16 活荷重のモデル

(2) 軸力の影響線

そのためにはまず、単位大きさを持った集中荷重(注意: 単位は無い)を床版に載せ、その載せた位置をいろいろ移動させたときに、設計しようとしている部材がどの程度の軸力で抵抗するのかについて予め探査しておけばよさそうだが、ちょうど患者の顔色や反応を見ながら医者が触診によって病気の原因を探すのと同じように、どの位置の荷重が設計する部材にとってどのくらい「辛い」のかについて探しておくわけである。このような「辛さ」に相当する関数を影響線と呼んでいる。

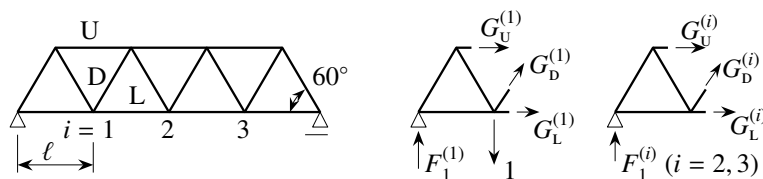


図 2.17 軸力の影響線を求める

例として図 2.17 に示したような、正三角形のパネルでできた下路トラスの部材 U, D, L の軸力の影響線を求めよう。まず節点 $i = 1, 2, 3$ の位置に大きさ 1 の集中荷重が作用したときの軸力を求める。 $i = 1$ の位置に荷重があるときの図を左から二番目に描いた。図のように内力を記すと、力のつり合いとモーメントのつり合いは

$$G_u^{(1)} + G_L^{(1)} + \frac{1}{2} G_D^{(1)} = 0, \quad F_1^{(1)} - 1 + G_D^{(1)} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad -l \times 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} l G_D^{(1)} - \frac{\sqrt{3}}{2} l G_U^{(1)} = 0$$

である。支点反力は $F_1^{(1)} = \frac{3}{4}$ であるから、各軸力は

$$G_U^{(1)} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad G_D^{(1)} = \frac{\sqrt{3}}{6}, \quad G_L^{(1)} = \frac{5\sqrt{3}}{12} \quad (\text{単位は無い, 無次元})$$

⁶ 近年数値的最適化の研究が盛んだが、多くの例で載荷位置が固定されていることに土木構造分野では少なからざる違和感がある。

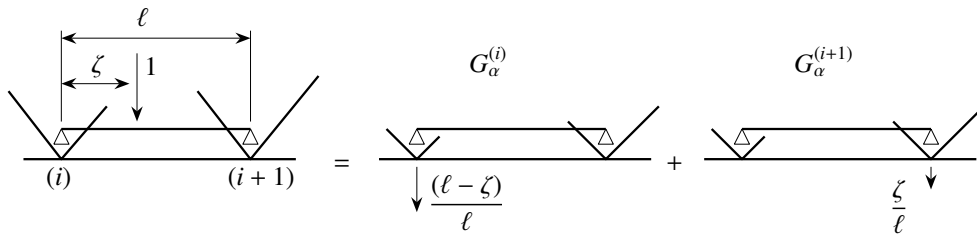


図 2.18 節点間に荷重があるときの考え方

と求められる。同じように節点 $i = 2, 3$ に荷重があるときのつり合いは、右端の図から

$$G_U^{(i)} + G_L^{(i)} + \frac{1}{2} G_D^{(i)} = 0, \quad F_1^{(i)} + G_D^{(i)} \frac{\sqrt{3}}{2} = 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \ell G_D^{(i)} - \frac{\sqrt{3}}{2} \ell G_U^{(i)} = 0$$

となる。支点反力は $F_1^{(2)} = \frac{1}{2}, F_1^{(3)} = \frac{1}{4}$ なので、各軸力は

$$G_U^{(i)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} F_1^{(i)}, \quad G_D^{(i)} = -\frac{2}{\sqrt{3}} F_1^{(i)}, \quad G_L^{(i)} = \sqrt{3} F_1^{(i)}$$

と求められる。

次に荷重が節点と節点の間にあるときを考えてみよう。図 2.7 に示したように、床版上の荷重は縦桁・横桁を通して節点に伝達される。したがって、節点間に集中荷重があるときには、その荷重は両方の節点に図 2.18 のように分配されると考えなければならない。したがって、節点 i から $zeta$ だけ離れた点に荷重が載るときの影響線は、節点に荷重が作用したときの上で求めた値 $G_\alpha^{(i)}, \alpha = U, D, L$ ($i = 0, 1, 2, 3$) を用いて内挿し

$$G_\alpha(z) = \frac{\ell - z}{\ell} G_\alpha^{(i)} + \frac{z}{\ell} G_\alpha^{(i+1)}, \quad G_\alpha^{(0)} \equiv 0, \quad G_\alpha^{(4)} \equiv 0$$

になることは容易に理解できるだろう。つまり、载荷位置 x の関数として捉えた影響線は、節点に作用したときの影響線の値を線形補間すれば（直線で結べば）いいことになる。このようにして描いたのが図 2.19 である。横軸の x は単位荷重を載せた位置であることに十分注意しなければならない。ここは初学者がまずわからなくなるところなので注意して欲しい。

上弦材 U の影響線は常に負の値であることから、荷重がどこに載っても常に圧縮力が生じていることがわかる。逆に下弦材 L は常に引張で抵抗する。これに対し、斜材 D の影響線は $x < \frac{4\ell}{3}$ までは正の値をとることから、その範囲に荷重が載ると引張抵抗をする。そして $x > \frac{4\ell}{3}$ の部分に荷重がある場合には圧縮力が生じている。実は、今はわからなくてもいいが、引張と圧縮で強度が異なる場合がある。したがって斜材は通常、圧縮および引張の両方に抵抗できるように設計されなければならないことになる。

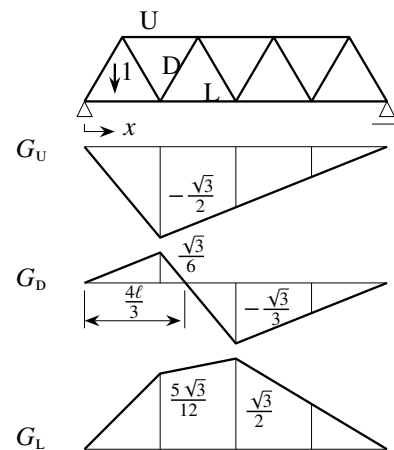


図 2.19 軸力の影響線

(3) 最大軸力

このようにして求めた影響線を用いれば、設計する部材にとって最も不利になるように（辛くなるように）設計荷重を載せる位置を決定できるのだが、まず例として、ある一つの集中荷重の大きさとその位置が与えられたときに、影響線を用いて軸力を求める方法を考えてみよう。例えば図 2.20 の一番左の図を見て欲しい。影響線は大きさ 1 の集中荷重（単位は無い）が載ったときの軸力だったから、もし左から x_1 の位置に集中荷重 P_1 （単位は例えば N）が作用したときの下弦材の軸力は $P_1 \times g_1$ （単位は N）になることは容易に理解できる

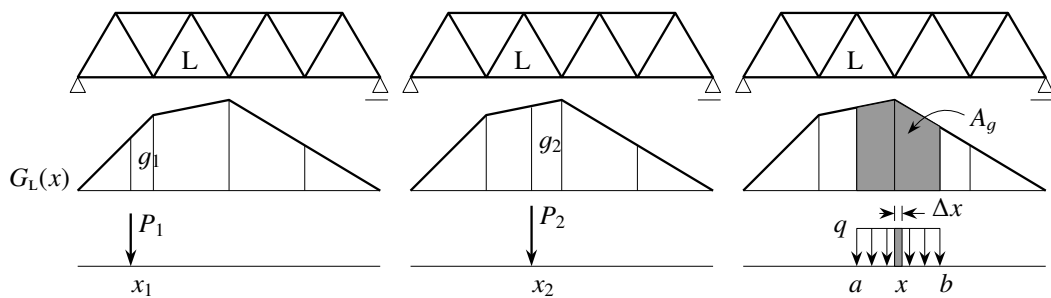


図 2.20 影響線を用いた軸力の算定の仕方

と思う。では、中の図のように x_2 の位置に P_2 が載った場合には当然 $P_2 \times g_2$ が軸力になる。したがって、もし両方の荷重が同時に作用している場合に下弦材に生じる軸力は、この二つを重ね合わせて $P_1 g_1 + P_2 g_2$ になるのもわかると思う。

では、一番右の図のように強度 q （単位は N/m ）の様な分布荷重が $a < x < b$ の区間に作用した場合はどうすればいいだろう。まず分布荷重をあたかも集中荷重の集合のように捉え、ある位置 x の微小区間 Δx 分の分布荷重 $q \times \Delta x$ が点 x に作用している「集中荷重」だと解釈してみよう。そうすると下弦材の軸力は、上述の二つの集中荷重を載せた場合を拡張して、通常の Riemann 積分の定義を思い出せば

$$N_L = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x=a}^b (q \Delta x) G_L(x) = \int_a^b q G_L(x) dx = q \int_a^b G_L(x) dx = q \times A_g \quad (\text{単位は } N) \quad (*)$$

になることも理解できるだろう。分布荷重が一様なので積分の外に出すことができ、したがって最後の等式が示すように、影響線面積 A_g （単位は m ）に q を乗じれば下弦材の軸力が算定できる。 A_g は図の網掛けした部分の面積である。このように、一旦影響線を求めておけば任意の荷重に対する軸力を容易に求めることができる。この性質を逆に使って、その部材が最も危険になるような荷重の位置を決める手法を説明しよう。

さて図 2.16 に示したように、橋梁の主部材を設計する場合には 2 段階の大きさの等分布荷重を作用させることになっている。そこで、この分布荷重をどのように載せると、設計しようとしている部材が最も危険に（辛く）なるのかを決めるために、影響線を用いる手法を説明しよう。ここでは簡単のために、 $D = 10\text{ m}$ とし、トラスの 1 パネルの長さも $l = 10\text{ m}$ とし、影響線が単純な関数になっている上弦材を例にして、その設計をしてみよう。単位を揃えるために q_1, q_2 も N/m の単位で与えられているものとする。上式 (*) のように、分布荷重が作用したときの軸力は、分布荷重の強度と影響線面積を乗じればよかった。したがって、影響線の面積ができるだけ大きくなる箇所に、強い強度の q_1 を分布させればいいことがわかる。そこで図 2.21 に示したように、左端から ζ の位置から q_1 を載せ、図の網掛け部分の面積が最大になるように ζ を決定しよう。

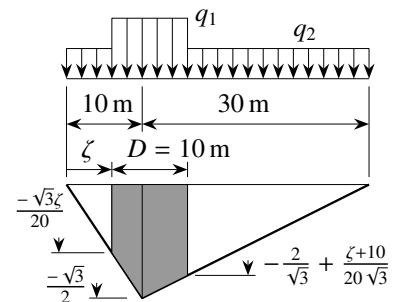


図 2.21 載荷位置を決定する

この網掛け部分の面積（負）は、この例の場合には

$$A_g = -\frac{1}{2} (10 - \zeta) \left(\frac{\sqrt{3}\zeta}{20} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} \zeta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\zeta + 10}{20\sqrt{3}} \right)$$

となるので、 $\frac{dA_g}{d\zeta} = 0$ を計算すると ζ は

$$0 = \frac{\zeta}{5\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \zeta = \frac{15}{2} = 7.5\text{ m}$$

と求められる。すなわち、左端から 7.5 m の位置から q_1 を 10 m 分だけ載せたときに、上弦材には最大の軸力が発生することを意味する。この $\zeta = \frac{15}{2}$ を上式に代入して面積を求めると $A_g = -\frac{35\sqrt{3}}{8}$ になる。また、左の白い三角形の面積は $-\frac{45\sqrt{3}}{32}$ 、右の白い三角形の面積は $-\frac{135\sqrt{3}}{32}$ であるから、合計は $-\frac{45\sqrt{3}}{8}$ になる。したがって、図 2.16 の設計用の荷重が図 2.21 のように載ったときに、設計上は上弦材に最も大きな軸力が生じることになる。これを、このトラスの一生でそれ以上の軸力は生じないことから**最大軸力**と呼ぶが、この例ではそれが

$$(N_U)_{MAX} = -q_1 \frac{35\sqrt{3}}{8} - q_2 \frac{45\sqrt{3}}{8} < 0 \quad (\text{単位は N}) \quad (**)$$

と求められる。あるいは図 2.21 の影響線の全面積を A_t とすると $A_t = -10\sqrt{3}$ となり、これを用いて $(N_U)_{MAX} = (q_1 - q_2) A_g + q_2 A_t$ でも同じだ。この算定の仕方の方が、上の $\frac{dA_g}{d\zeta} = 0$ にする意味はわかり易いかもしれない。いずれにしても最大軸力に対して部材が破壊しないように断面を設計すれば安全だということになる。

(4) 断面の設計

トラス部材は単純に軸力で抵抗する物体だと説明したが、材料を変えないで強くするにはどうしたらいいだろう。そこで簡単のために、トラス部材を図 2.22 のようなバネで置き換え、左上の 1 本のバネは力 F までは壊れないものとする。そのバネを下図のように 2 本直列にしても、支えられる力は F のままであることはすぐにわかるだろう。しかし、右上のように並列にすると、それぞれが F まで支えるので、合計で $2F$ までの力を支えることができる。したがってトラス部材の場合にも、同じ材料で造るなら、太くすればするほど強い構造になることは容易に推測できる。つまり、部材の断面面積を大きくすれば強くなるのだ。このことを踏まえて、材料規格では単位面積当たりの抵抗圧力（おうりよく 応力と呼ぶ）のある種の最大値でその強度が規定されている。

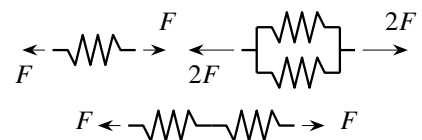


図 2.22 並列は強い — 断面積が鍵

例えば前節の上弦材にしたい材料の圧縮強度 $\sigma_a^{(c)}$ が、単位面積当たりの圧力値（応力値）として決められている場合、断面積 A_U の上弦材が支えることができる最大の断面強度（軸力で表した強度）は $\sigma_a^{(c)} A_U$ になる。これが、前節で求めた最大軸力（圧縮なので前節の式(**) は負）の絶対値 $|(N_U)_{MAX}|$ より大きければ安全に設計されたことになる。つまり上弦材の安全確保のためには（断面の強度） \geq （実際に生じる軸力）ならいいから

$$\sigma_a^{(c)} A_U \geq |(N_U)_{MAX}| \rightarrow A_U \geq \frac{|(N_U)_{MAX}|}{\sigma_a^{(c)}} \quad (2.6)$$

を満足するように断面積 A_U を決定すれば（断面を設計すれば）、安全な設計ができたことになる。

下弦材の場合には節点 $i = 2$ で影響線が最大値をとることから、やはりその前後に大きい方の q_1 の荷重を載せるようにして、 q_1 に対する影響線面積が最大になるようにその位置を決定すればいい。結局図 2.23 のように荷重する位置を探し出し、影響線面積を用いて $(N_L)_{MAX}$ を算定しさえすれば、上弦材と同様

$$A_L \geq \frac{(N_L)_{MAX}}{\sigma_a^{(t)}} \quad (2.7)$$

を満足するように、断面を設計すればいいことになる。ここで $\sigma_a^{(t)}$ は引張に対する材料強度である。一方斜材の場合には、載せる位置によって軸力の符号が変化するため、圧縮と引張に対して別々に最大軸力を求める必

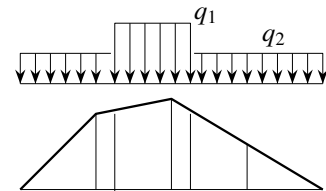


図 2.23 下弦材のための荷重位置

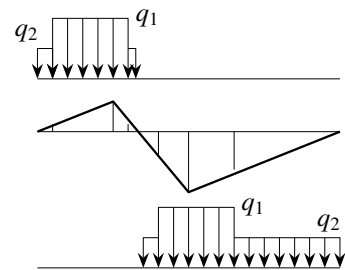


図 2.24 斜材のための荷重位置

要がある。具体的には図 2.24 のように、引張に対しては上段の図に示した正の影響線部分のみへの荷重に対する最大軸力 $(N_D^{(t)})_{\text{MAX}}$ を算定し、圧縮に対しては下段の図の負の影響線部分のみへの荷重に対して最大軸力 $(N_D^{(c)})_{\text{MAX}}$ を計算し、引張と圧縮のそれぞれに対して上下の弦材と同様に

$$A_D \geq \frac{(N_D^{(t)})_{\text{MAX}}}{\sigma_a^{(t)}}, \quad A_D \geq \frac{|(N_D^{(c)})_{\text{MAX}}|}{\sigma_a^{(c)}} \quad (2.8a, b)$$

の両方が同時に満足されるように断面積 A_D を決定（設計）することになる。材料強度が圧縮と引張で異なるのは奇妙に感じられるかもしれない。しかし、使う材料によってはそのようなことがある。例えばコンクリートは圧縮には強いが、引張られるとすぐにひびが入って壊れることがある。あるいは第6章で説明する座屈現象のために、圧縮と引張とでは強度が異なる（第 6.4.5, 6.4.6 節の式 (6.61) (6.62) 参照）こともあるので、このような2重の確認が必要⁷になる。

演習問題 2-2

2. $D = 10 \text{ m}$, $\ell = 10 \text{ m}$ として、下弦材と斜材に対する荷重位置を具体的に（図 2.23, 2.24 のこと）求め、最大軸力を求めよ。

2.3 静定梁

2.3.1 梁の特徴と断面力の定義

(1) 細長いトラス — 曲げモーメントという抵抗力とは

いよいよ第1章の最初に見た「桁」の力学を考えよう。図 2.25 に示したのは、クレーンのアーム構造のような細長いトラス構造である。全部で K 個の四角パネル ($p = 1 \sim K$) から成り、先端に荷重 P が作用している。まず反力を求めると、 x, y 方向の力のつり合いと、先端の P の荷重点におけるモーメントのつり合いが

$$F_1 + F_2 = 0, \quad S - P = 0, \quad KhS - hF_1 = 0$$

となるので、 $F_1 = -F_2 = KP$, $S = P$ と求められる。次に断面法を用いて第 k パネルで切断し、上下弦材と斜材の軸力をそれぞれ N_1, N_2, N_3 として、つり合いをとると

$$N_1 + N_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_3 = 0, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} N_3 - P = 0, \quad -hN_1 + (k-1) \frac{h}{\sqrt{2}} N_3 = 0$$

である。ここもモーメントのつり合いは P の荷重点でとった。したがって、各部材の軸力は

$$N_1 = (k-1)P, \quad N_2 = -kP, \quad N_3 = \sqrt{2}P \quad (*)$$

と求められる。鉛直材は、両端の2本の軸力が零⁸で、それ以外はすべて $-P$ である。

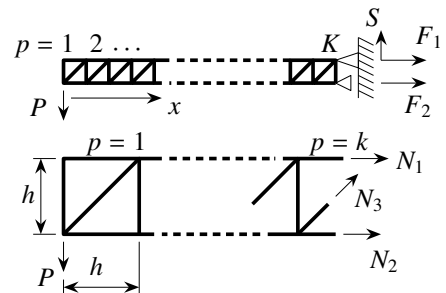


図 2.25 細長いトラス構造

⁷ 本当はそういうことは不要なはずで、断面を決めたあとにコンピュータ等で性能を確認すればいいと思うかもしれない。しかし、その入力データの断面をまずどうやって概算するのかということ考えると、力のかかり具合で強度を区別しておくのも便利なのだ。

⁸ 左端は上弦材の軸力が零なので不思議ではないが、右端の鉛直材の軸力が零になるのは不思議でならないのではないか。演習問題 2-1 の問題 1 の解答（自分でまず解いてください）を参照のこと。右端の支持条件を変更して、上を鉛直方向自由にして下を止めることにすると、右端の鉛直材の軸力は $-P$ になり、この場合は不思議は無い。

では、図 2.25 に示した細長いトラスを、そのそれぞれの弦材が見えないくらい遠くから眺めてみると、実は細長い棒で P を支えているように見える。こうすると、右端の支点反力を図 2.26 の右図のように捉えることはできないだろうか。つまり、この場合は x 方向には荷重を加えていないので、 x 方向の反力は当然 $F_1 + F_2 = KP - KP = 0$ であるが、それ以外に y 方向の反力 V_0 と、図に描いたような反時計回りの反作用モーメントと呼ばれる M_0 が、この細長い棒を固定するための反力として壁の側に発生すると考えるのである。鉛直方向の「反力」 V_0 は $V_0 = P$ 、また「反作用モーメント」 M_0 という概念は

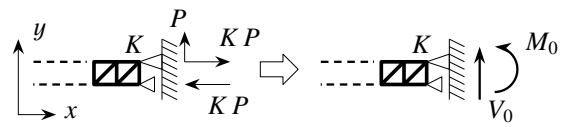


図 2.26 壁における全反力

$M_0 = (h \text{ 離れて作用する } F_1 \text{ と } F_2 \text{ が作る偶力}) = h \times (-KP) = (Kh) \times (-P) = -(\text{棒の長さ}) \times P$ (**)

になっている。

次に、トラスの任意の位置 x に断面法で切断を入れた上で、3本のトラス部材の個々の断面力ではなく、上で導入した反力と同じように考えて、その位置 x の切断面全体に生じた力の総和(3軸力の合計)としての新しい内力を定義する。これが図 2.27 の中段に示した二つの断面力、「せん断力」 V と「曲げモーメント」 M である。前者はハサミで紙を切るときの力の作用⁹に似ているので「せん断」の意味もわかり易いと思うが、後者は右端の「反作用モーメント」の考え方に合わせたもので、名称については後述する。図の幾何学的な関係から

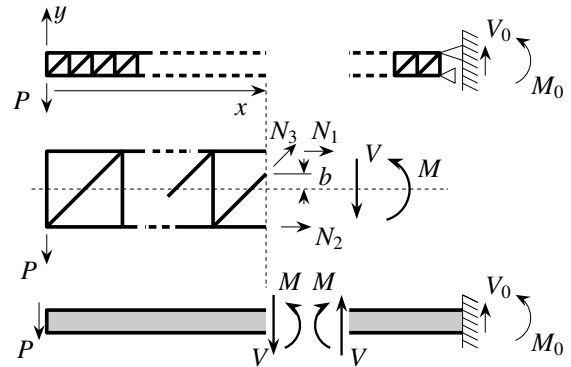


図 2.27 細長い棒の断面力

$$V \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} N_3, \quad M \equiv \frac{h}{2} N_2 - \frac{h}{2} N_1 - b \frac{1}{\sqrt{2}} N_3$$

と定義できる。ここで x が第 k パネルの途中であれば

$$b = \{x - (k - 1)h\} - \frac{h}{2} = x - \frac{h}{2}(2k - 1)$$

なので、この式と上式(N)の N_1, N_2, N_3 とを上式に代入すれば「せん断力」と「曲げモーメント」は

$$V = -P, \quad M = -xP \tag{a}$$

と求められる。右端の M を求めると、 $x = (\text{棒の長さ})$ なのでそれは上式(**)の M_0 に一致する。ただ右端では $V = -V_0$ になっているが、これは内力 V と外力 V_0 の向きを逆に定義したからである。

つまり図 2.27 の下段に示したように、細長い棒(網掛けした部分はトラスではなく中実棒)のできた構造の左端に「せん断外力」 P を載せたときに断面に発生する抵抗力(内力)は単純な軸力ではなく、この図のように「せん断力」と呼ばれる棒の軸に直交する方向の断面力と、断面に生じている偶力¹⁰つまり「曲げモーメント」との二つだと考えなければならない。このような载荷では棒が壁に対して相対的に下方にたわむ¹¹ので、その変形状態を「曲げ」と呼び、 M を「曲げモーメント」と呼んでいる。ちなみに、この二つの断面力も、切

⁹ ちょうどハサミで紙を切るときの切断面における刃による力の作用が、図 2.27 の下段に示した V の作用とほぼ同じになっている。

¹⁰ テコの原理から推測して欲しい。著者も学生時代には理解するのに苦労した。

¹¹ 釣竿を思い描こう。もちろん図 2.25 のトラスも同じようにたわむのだが。

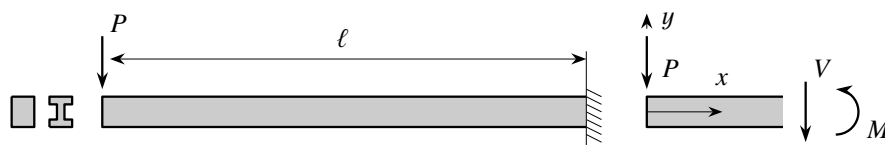


図 2.28 片持ち梁のせん断

断した断面には p.20 に示した「切断の約束」を満足するように、お互いに逆向きで同じ大きさの断面力を作用させなければならない。切断した断面の外向き法線ベクトルが x 方向を向いている面を正の面と呼ぶが、慣習として、その面に作用する y の負方向のせん断力を正とし、反時計回りの曲げモーメントを正とする。これに対して、切断した反対側の面、つまり断面の外向き法線ベクトルが x 方向とは逆向きな面を負の面と呼び、せん断力は y 軸の正方向を正、曲げモーメントは時計回りを正とする。第1章のスポンジの写真で、桁の中に生じる偶力として曲げモーメントを紹介したが、この節の説明でその力学的定義が理解できれば、構造力学の基本的な梁理論の8合目まで到達したも同然である。ここが勉強の最初の踏ん張りどころである。以上、トラスを遠くから見ることによって梁の説明を試みたが、図 2.27 の下段の断面力の発生をすぐに理解できる読者は、トラスとの関係は忘れてもらっていい。

(2) 梁とせん断力・曲げモーメント

前節のように、細長い棒が横荷重¹²つまりせん断外力を受け、曲がって支える構造部材を梁と呼ぶ。そのとき、梁の断面にはせん断力と曲げモーメントという内力つまり断面力が生じて抵抗すると考えていいことがわかった。そして、例えば図 2.28 のように片端が剛な壁に固定さ(埋め込ま)れて、もう片端が自由に移動できる梁を片持ち梁と呼ぶ。断面は第 1.1 節で例に用いたスポンジのように長方形断面であったり、鋳桁やレールのような I 形断面等である。

断面力を求めるには、トラスと同様、断面を仮想的に切断する必要がある。しかしトラスとは異なり、1部材中であっても断面力は場所によって異なるため、場所 x の関数となり一定ではない。したがって断面法を用いざるを得ない。そこで左端から x の位置に切断面を入れ、図 2.28 の右側の図のように断面力を正しい向きで設定し、例えばこの切断面より左側でつり合いをとると

$$-P - V = 0, \quad M + xP = 0$$

となる。モーメントのつり合いは切断面の回りでとった。したがって、断面力は

$$V = -P, \quad M = -xP \quad (b)$$

と求められ、トラスから求めた上式 (a) と一致する。なお、切断面より右側のつり合いを用いても同じ結果を得ることはできるが、その場合にはまず右端の支点反力を求めておく必要がある。求められたこの断面力の結果を図 2.29 に示した。それぞれをせん断力図および曲げモーメント図と呼び、前者は上向きを正に、後者は下向きを正にとる¹³ことが多い。なおこれ以降、梁を1本の線で描き断面の形を具体的には示さない場合が多い。しかし、ある厚さ(高さ)と幅を持った断面の棒であることを、常に忘れないで欲しい。

¹² 棒の軸線に直交する y 方向への荷重を慣習的にそう呼ぶ。 z 方向(梁の側面へ)の荷重ではない。

¹³ 正の曲げに対する引張側に線が描かれるようにしたもので、学ぶ機関や本によってこの規則は異なるので注意すること。



図 2.29 片持ち梁のせん断

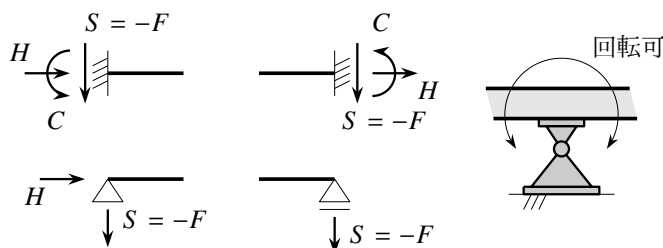


図 2.30 梁の代表的な支持条件と正の外力・反力の向き



写真 2.4 橋脚天端に載っている支承

2.3.2 代表的な例

(1) 荷重と境界条件

梁の場合はトラスと違って、支間のどの位置にも集中荷重を作用させることができると考える。また床版に載った図 2.16 のような活荷重も、そのまま梁に直接載る¹⁴分布荷重と考えていいことになっている。また代表的な支持条件は、前節で取り扱った片持ち梁のように、壁に埋め込まれたようなものや自由なもの以外に、単純に支えているだけのものがある。支持記号と、それぞれの場合の発生可能な支点反力を図 2.30 に示した。三角形で表した支持は、トラスの場合と同様、三角記号だけの場合は水平方向にも固定されていることから荷重によっては水平反力 H が生じる。三角記号の下に線分がある場合は、水平方向は自由に移動可能で水平反力は生じない。なお反力と外力は、水平方向は x 軸の正方向を正の力 H とするが、鉛直方向は重力場の自重を念頭に置き、慣習として y 軸の負の方向を正の¹⁵力 S とする。ただし、この章だけでは地盤反力を念頭に置いて y 軸の正の方向を正として F で表していることに注意して欲しい。また集中（反作用）モーメント C については反時計回りを正とする。埋め込み端で反作用モーメントが生じることは、前節の細長いトラスの端部の状況説明を思い出せば理解できるであろう。

写真 2.4 の支承は、水平方向の移動も固定した単純支持装置で、ピン支承と呼ばれている。これは図 2.30 の右側の図に模式的に描いたように、ピンを中心にして桁が回転できるようになっているため、反作用モーメントは生じない。ただし、この写真の支承はゲルバー梁（牛越橋）の中間支点なので、図 2.42 に示すように内力の曲げモーメントは零にならないことには注意するように。

(2) 片持ち梁

図 2.31 の等分布荷重 q を受ける片持ち梁を解いてみよう。ここでは、トラスの断面法の手順と同じように解くことにする。 y 軸下向きの等分布荷重しか作用していないので、まず支点反力は、鉛直上向きの反力 F と反時計周りの反作用モーメント C だけである。外力と反力のつり合いは

$$F - \int_0^\ell q \, dx = F - \ell q = 0, \quad C - \int_0^\ell x q \, dx = 0$$

であるが、モーメントのつり合いは、等分布荷重をその分布の重心、つまりスパン中央 ($x = \frac{\ell}{2}$) に総力 ($q\ell$) を作用させても同じだから $C - \frac{\ell}{2}(q\ell) = 0$ と考えてもよく、結局

$$F = q\ell, \quad C = \frac{q\ell^2}{2} \tag{c}$$

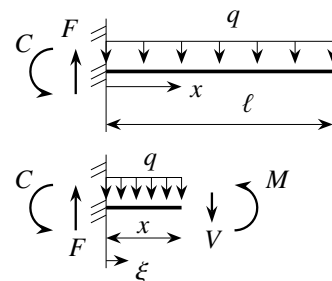


図 2.31 等分布荷重を受ける片持ち梁

¹⁴ より厳密には第 4 章で説明する図心位置に荷重は載ると考えなければならないのだが。

¹⁵ なお第 4 章では z 軸を下向きにとり z - x 面内で梁の挙動を記述する。そしてせん断外力 S は z 軸方向を正とする。

と求められる。もちろん積分を実行しても同じ結果を得る。

次に、埋め込み端から x の位置で断面を切断し、そこに正しい向きの断面力を発生させた上で、梁の左側の部分のつり合いを考える。もちろん、切断面よりも右側部分のつり合いを考えれば式 (c) の反力を求めておかなくてもいいのだが、ここでは後述する単純梁等の場合にも使える一般的な手順をとった。モーメントは切断面回りで考えると

$$F - \int_0^x q \, d\xi - V = 0, \quad C + M + \int_0^x (x - \xi) q \, d\xi - xF = 0$$

になる。 ξ は x 方向の積分をするためのダミーの座

標である。積分してもいいが、反力を求めたときと同様に分布荷重を総力が重心に作用した集中荷重で置き換えれば

$$F - (qx) - V = 0, \quad C + M + \frac{x}{2}(qx) - xF = 0$$

としてもいい (図を見ながら自分で考えて欲しい) から、上式 (c) を代入して解くと

$$V(x) = q(\ell - x), \quad M(x) = -\frac{q\ell^2}{2} + x\ell q - \frac{qx^2}{2} = -\frac{q}{2}(\ell - x)^2 \tag{d}$$

と、せん断力と曲げモーメントの分布が求められる。前節の例と異なり埋め込み端を左端にしたので、せん断力の符号が変わっていることに注意して欲しい。ところで、前節の式 (b) の場合もそうであったが、上式 (d) の場合も

$$V(x) = \frac{dM(x)}{dx}, \quad (\text{せん断力}) = (\text{曲げモーメントの変化率}) \tag{2.9a, b}$$

が成立することは覚えておいて¹⁶欲しい。つまり、曲げモーメント図がわかったときには、その傾きがせん断力図になる。上の結果を図 2.32 に示した。

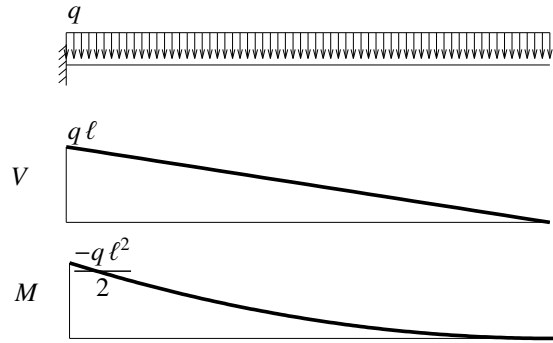


図 2.32 断面力図

(3) 単純梁

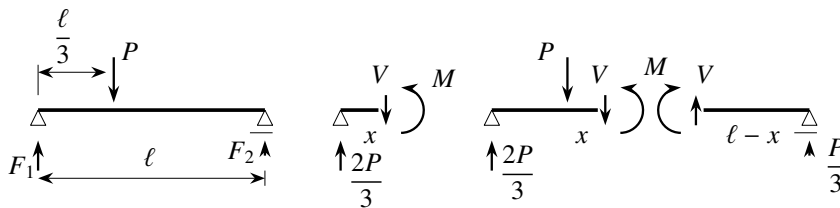


図 2.33 集中荷重を受ける単純梁

集中荷重を受ける場合: 両端が単純に支持されているだけの梁を単純梁あるいは単純支持梁と呼ぶが、ここではその中間部に集中荷重が作用した図 2.33 を対象としよう。まず支点反力を求めるために、反力と外力のつり合いをとると

$$F_1 + F_2 - P = 0, \quad \ell F_2 - \frac{\ell}{3}P = 0 \quad \rightarrow \quad F_1 = \frac{2P}{3}, \quad F_2 = \frac{P}{3}$$

と求められる。モーメントは左端の回りでとった。

¹⁶ 突然の微分方程式に驚く必要は無い。断面力図の検算のために覚えておけばいいということである。

次に、集中荷重を載せた点よりも左側 ($x < \frac{\ell}{3}$) のある断面を切断し、切断面よりも左の部分でつり合いをとると

$$\frac{2P}{3} - V = 0, \quad M - x \frac{2P}{3} = 0$$

となることから、せん断力と曲げモーメントは

$$V = \frac{2P}{3}, \quad M = \frac{2Px}{3}, \quad 0 < x < \frac{\ell}{3} \quad (e)$$

と求められる。これに対し、载荷点よりも右側で切断した場合には、例えば切断面よりも左の部分でつり合いをとると

$$\frac{2P}{3} - P - V = 0, \quad M - x \frac{2P}{3} + \left(x - \frac{\ell}{3}\right) P = 0$$

となるが、(計算ステップを少なくして間違いを避けるために) 図 2.33 の右端のように、切断面よりも右の部分でつり合いをとると

$$\frac{P}{3} + V = 0, \quad -M + (\ell - x) \frac{P}{3} = 0$$

であることから、断面力は

$$V = -\frac{P}{3}, \quad M = \frac{P}{3} (\ell - x), \quad \frac{\ell}{3} < x < \ell \quad (f)$$

と求められる。図 2.34 に結果を示した。単純支持端は回転自由なので曲げモーメントは零になる。またせん断力図の载荷点では、下向きの载荷荷重 P の大きさ分の下向きの不連続が発生する。またこの場合も、曲げモーメント図の傾きがせん断力図になっている。

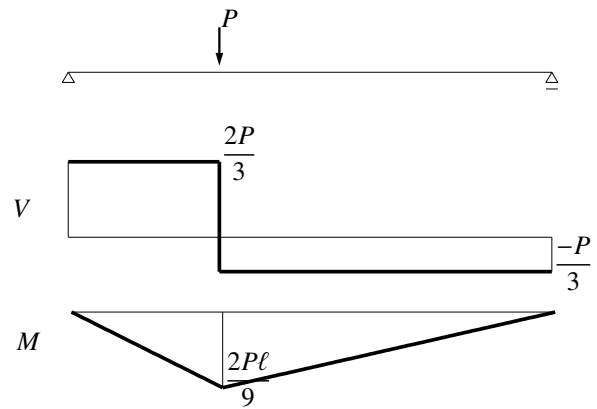


図 2.34 断面力図

非一様な分布荷重の場合: 線形に分布した荷重が図 2.35 のように載っている場合を考えてみよう。この場合の分布荷重は $q(x) = q \frac{x}{\ell}$ で与えられている。まず反力を求めるために全体のつり合いを考えると

$$F_1 + F_2 + \int_0^\ell q(x) dx = 0, \quad \ell F_2 - \int_0^\ell x q(x) dx = 0$$

である。分布荷重は、三角形の重心位置である $x = \frac{2\ell}{3}$ に総力 $(\frac{q\ell}{2})$ が作用しているように考えて¹⁷もいい。上式を算定して反力を求めると

$$F_1 = \frac{q\ell}{6}, \quad F_2 = \frac{q\ell}{3}$$

となる。次に左から x の位置の断面を切断して、その切断面の左の部分でつり合いをとると

$$\frac{q\ell}{6} - V - \int_0^x q(\xi) d\xi = 0, \quad M - x \frac{q\ell}{6} + \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi = 0$$

となる。したがって、断面力は

$$V(x) = \frac{q}{6\ell} (\ell^2 - 3x^2), \quad M(x) = \frac{qx}{6\ell} (\ell^2 - x^2)$$

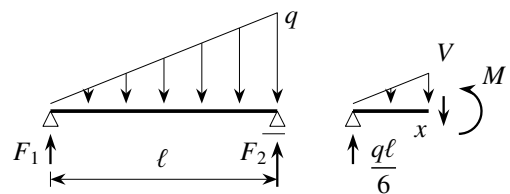


図 2.35 線形分布荷重

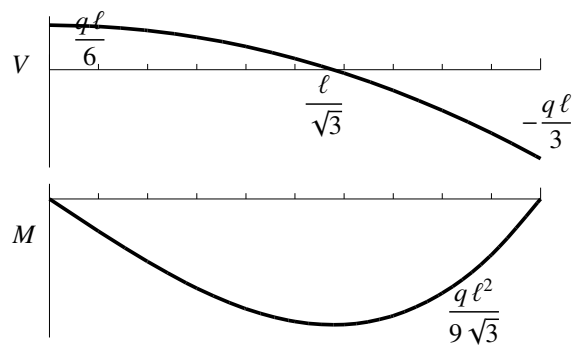


図 2.36 断面力図

¹⁷ 一般にはそういうことをせずきちんと積分した方がいい。

と求められる。あるいは図 2.35 の右図のように、分布荷重は合計 $\frac{1}{2}qx^2/\ell$ の集中荷重が三角形分布の重心位置つまり右の断面から $x/3$ の位置に作用していると考えてもいいから、力のつり合いとモーメントのつり合いの

$$\frac{q\ell}{6} - \frac{qx^2}{2\ell} - V = 0, \quad x \frac{q\ell}{6} - \frac{x}{3} \frac{qx^2}{2\ell} - M = 0$$

からも上に示した断面力が求められる。結果¹⁸を図 2.36 に示した。

軸力も同時に発生するような場合： とはいえ、ちょっと変な梁を対象としてみよう。一般に、トラスの弦材のように圧縮・引張で抵抗する部材を柱と呼び、曲げとせん断で抵抗する部材を梁と称するが、この両方を組み合わせた構造を骨組¹⁹と呼ぶ。骨組の場合は、部材同士はピンではなく剛結（溶接したような状態に）されている。例として図 2.37 を解くが、スパン中央とそこから斜めに立ち上がっている梁の下端も剛結されているものとする。

この構造に図示したような斜めの外力を載せた場合を対象として、これまでに行った切断法がそのまま使えることを示しておこう。まず図 2.37 のように反力を設定してつり合いをとると

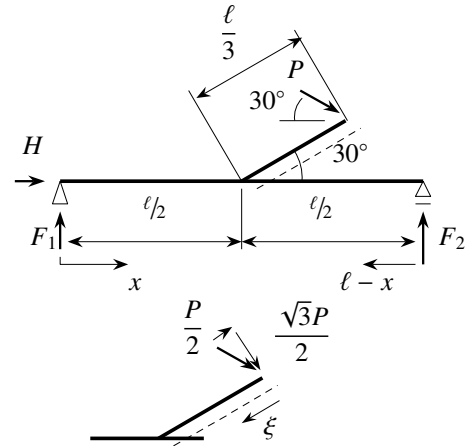


図 2.37 斜め外力を受ける単純梁

$$F_1 + F_2 - P \sin 30^\circ = 0, \quad H + P \sin 30^\circ = 0, \quad \ell F_2 - \frac{\ell}{3} \cos 30^\circ P \sin 30^\circ - \left(\frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{3} \cos 30^\circ \right) P \sin 30^\circ = 0$$

である。モーメントは左端回りでとった。これより

$$F_1 = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{12} P, \quad F_2 = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{12} P, \quad H = -\frac{\sqrt{3}}{2} P$$

のように求められる。単純梁部分の左側は、図示していないが、左から x の位置に切断を入れて、せん断力と曲げモーメントに加えて、軸方向の軸力 N を断面の正方向（この場合は x 方向）に作用させてつり合いをとることによって

$$N(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} P, \quad V(x) = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{12} P, \quad M(x) = \frac{3 - 2\sqrt{3}}{12} P x$$

となる。同様に、右側は右端から $(\ell - x)$ の位置に切断を入れ

$$N(x) = 0, \quad V(x) = -\frac{3 + 2\sqrt{3}}{12} P, \quad M(x) = \frac{3 + 2\sqrt{3}}{12} P(\ell - x)$$

と求められる。最後に中央から右上に張り出した梁部分は、図 2.37 の下段の図のように梁の軸線方向と直角方向に外力 P を分解した上で、先端から左斜め下向きに ξ 軸を取り、断面を切断してつり合いを考えれば

$$N(x) = \frac{1}{2} P, \quad V(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} P, \quad M(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2} P \xi$$

となる。図 2.37 に破線を付けた側が正の曲げモーメント図（負のせん断力図）側になるように設定していることに注意して欲しい。この結果を示したのが図 2.38 であるが、せん断力図と曲げモーメント図に加えて一番左に軸力図も示した。

¹⁸ 最近の学生さんには検算しない人が多いと聞かすが、例えばこの曲げモーメント図が右端でちゃんと零になるかどうか等を調べるのが望ましい。

¹⁹ あるいはラーメン（もちろんドイツ語である）と呼ぶ。梁断面の幅 ' b ' もドイツ語 (Breite) かららしい。

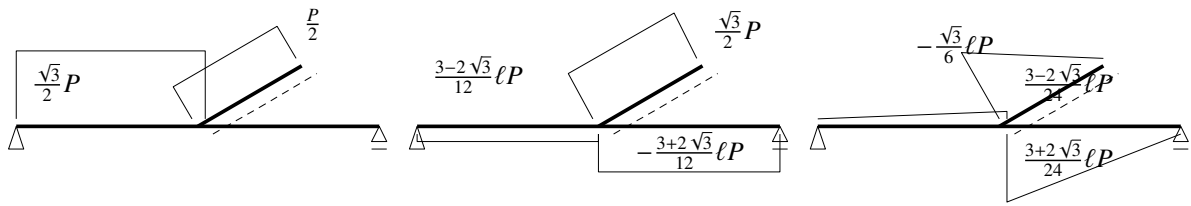


図 2.38 軸力図・せん断力図・曲げモーメント図

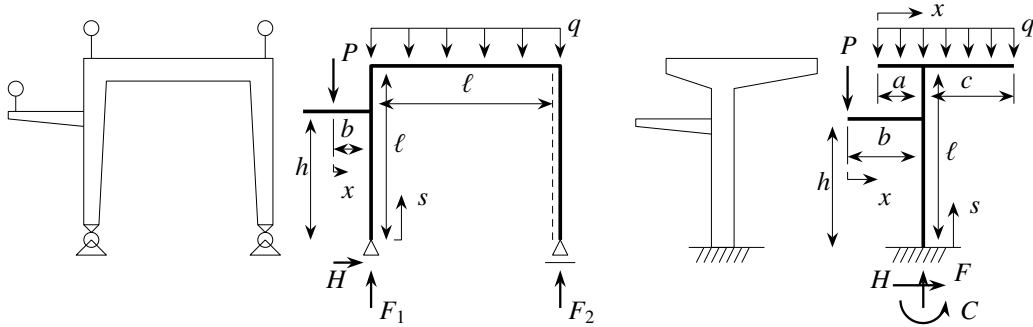


図 2.39 骨組の例

もう一つ、もっと骨組らしい構造を対象としてみよう。例として図 2.39 の左側の構造を解こう。これは高架の高速道路の柱に、アクセスランプのための梁を張り出したものを、ちょっと乱暴だが静定系でモデル化したものである。反力を求めるために全体のつり合いをとると

$$H = 0, \quad F_1 + F_2 - P - q\ell = 0, \quad bP + \ell F_2 - \frac{\ell}{2} q\ell = 0$$

であるから、反力は

$$H = 0, \quad F_1 = \frac{q\ell}{2} + \frac{(\ell + b)P}{\ell}, \quad F_2 = \frac{q\ell}{2} - \frac{bP}{\ell}$$

と求められる。

s 軸は左の柱の基部から右の柱の基部までの軸線に沿った座標とする。したがって、 $0 < s < \ell$ が左の柱部、 $\ell < s < 2\ell$ が上の梁部、 $2\ell < s < 3\ell$ が右の柱部に相当する。また張り出し梁は載荷点から右向きに x 軸をとった。というのも、それよりも左には断面力は何も生じないからである。張り出し部は片持ち梁と同じなので、簡単に

$$N(x) = 0, \quad V(x) = -P, \quad M(x) = -Px, \quad 0 < x < b$$

となる。次に左の柱の張り出し部までは、やはり断面を切断してつり合いをとると

$$N(s) = -\frac{q\ell}{2} - \frac{(\ell + b)P}{\ell}, \quad V(s) = 0, \quad M(s) = 0, \quad 0 < s < h$$

と求められる。その上の部分では、張り出し部の荷重を考慮すればいいだけなので

$$N(s) = -\frac{q\ell}{2} - \frac{bP}{\ell}, \quad V(s) = 0, \quad M(s) = -bP, \quad h < s < \ell$$

である。次に梁の部分についても同様の切断をすれば、つり合いから

$$N(s) = 0, \quad V(s) = \frac{q\ell}{2} + \frac{bP}{\ell} - q(s - \ell), \quad M(s) = -Pb + \left(\frac{q\ell}{2} + \frac{bP}{\ell}\right)(s - \ell) - \frac{1}{2}q(s - \ell)^2, \quad \ell < s < 2\ell$$

と求めることができる。右の柱は基部から考えた方が簡単で、最終的に

$$N(s) = -\frac{q\ell}{2} + \frac{bP}{\ell}, \quad V(s) = 0, \quad M(s) = 0, \quad 2\ell < s < 3\ell$$

と求められる。断面力図は省略する。

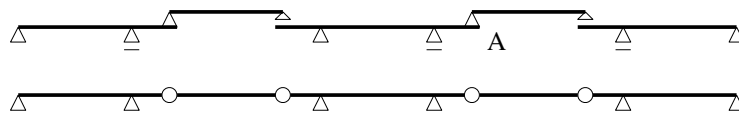


図 2.40 ゲルバー形式の梁（牛越橋のような 5 径間の場合）

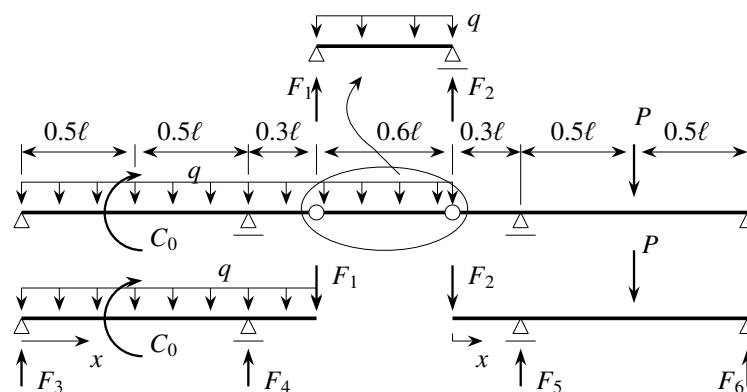


図 2.41 ゲルバー梁の例

(4) ゲルバー梁

実際の橋梁の中には、支点間に桁が一つしか無い単径間形式だけではなく、複数の橋脚の上を渡しているように見えるものもある。もし複数の径間を連続して渡した梁にすると、実は後述する不静定構造になり、ここまでの知識では断面力を求めることはできない。

さて、例えば第 1.1 節で取り上げた牛越橋は 5 径間の橋で、橋脚の上を見ると連続しているように見える。しかし、もっとよく観察するとゲルバー形式の橋梁であり静定系であることがわかる。それを簡単な図にしたのが図 2.40 である。左右から二つ目と三つ目の橋脚の間にある小さい桁は写真 2.5 のようにして隣の桁に支えられている。この写真はちょうど図 2.40 の点 A の位置の様子を示している。写真にある奥の主桁の赤い楕円で囲んだ部分に隙間が空いているのがわかる。つまりここで二つの梁は縁を切って²⁰あって、この写真の場合は、右の桁が左の桁に支えられていることが確認できる。設計の場合は、この図 2.40 の下の図のように、ヒンジでモデル化することが多いが、実際にはこの写真のようにして支えられている。

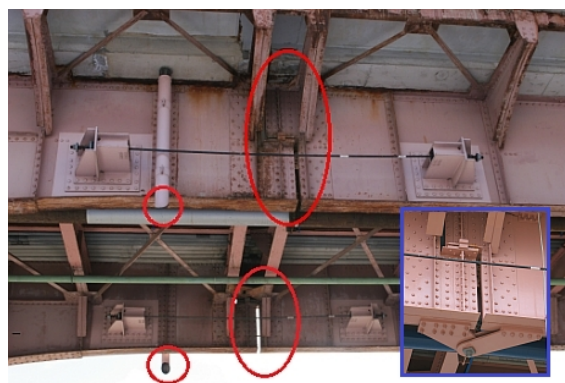


写真 2.5 掛け違い部 — 右の桁が左の桁に乗っている
青枠はあの大地震後に下フランジに設置されたずれ止め

では図 2.41 の 3 径間のゲルバー梁を解いてみよう。 C_0 は集中モーメントである。まず、中央部で支えられた単純梁区間（楕円で囲んだ部分）は、上方の図のような等分布荷重を受ける単純梁なので、演習問題 2-3 の問題 4 の解答（自分でまず求めること）で答は求められている。左右のスパンを解くために必要なのは両端の反力 F_1, F_2 であるが、これも簡単に $F_1 = F_2 = 0.3ql$ と求められる。したがって、左端から x 軸を定義する

²⁰ 縁が切った部分に緩んだケーブルが見えるが、これは落橋防止装置である。赤丸の排水管下端の切り方の向きにも注目。牛越橋の下流側二つ目の仲の瀬橋では旧橋を一部分に流用してあり、そこがゲルバー形式だったのだが、2010 年頃にヒンジが固定された上で補強（写真 K.7 参照）され、連続桁に変更された。美しい構造形式であったが、耐久性・耐震性のために止むを得ず変更されてしまったようだ。少し残念だ。牛越橋も 2011 年のあの大地震に耐えたが、そのあと補強（写真 2.5）された。

と、この中央部の断面力が

$$V(x) = 0.3ql - qx, \quad M(x) = 0.3qlx - \frac{1}{2}qx^2$$

となる。これが求められたあとは、左右の張り出しスパンまでの区間をそれぞれ、左下および右下の図のような別々な系として解けばいいだけである。

まず左側の系の支点反力は、力のつり合いとモーメントのつり合い条件から

$$F_3 = 0.365ql - \frac{C_0}{\ell}, \quad F_4 = 1.235ql + \frac{C_0}{\ell}$$

となる。そこで、左端から x 軸を定義して左から順に解いてみると、まず $0 < x < 0.5\ell$ の間は

$$V(x) = \left(0.365ql - \frac{C_0}{\ell}\right) - qx, \quad M(x) = \left(0.365ql - \frac{C_0}{\ell}\right)x - \frac{1}{2}qx^2$$

と求められる。さらに $0.5\ell < x < \ell$ までの間は

$$V(x) = \left(0.365ql - \frac{C_0}{\ell}\right) - qx, \quad M(x) = C_0 + \left(0.365ql - \frac{C_0}{\ell}\right)x - \frac{1}{2}qx^2$$

である。最後に張り出し部の $\ell < x < 1.3\ell$ の区間は

$$V(x) = 0.3ql + (1.3\ell - x)q, \quad M(x) = -(1.3\ell - x)0.3ql - \frac{1}{2}(1.3\ell - x)^2q$$

と求められる。

次に右側の部分は、まず反力が

$$F_5 = \frac{1}{2}P + 0.39ql, \quad F_6 = \frac{1}{2}P - 0.09ql$$

と求められる。左端から x 軸をとり、順に左から解くと、 $0 < x < 0.3\ell$ では

$$V(x) = -0.3ql, \quad M(x) = -0.3qlx$$

となる。次に $0.3\ell < x < 0.8\ell$ では

$$V(x) = \frac{1}{2}P + 0.09ql,$$

$$M(x) = -0.15Pl - 0.117ql^2 + \left(\frac{1}{2}P + 0.09ql\right)x$$

であり、 $0.8\ell < x < 1.3\ell$ の区間では

$$V(x) = -\frac{1}{2}P + 0.09ql, \quad M(x) = (1.3\ell - x)\left(\frac{1}{2}P - 0.09ql\right)$$

と求められる。各自計算してみたい。図 2.42 に分布図を示したが、それぞれの値は

$$\begin{aligned} V_1 &= -\frac{C_0}{\ell} + 0.365ql, & V_2 &= -\frac{C_0}{\ell} - 0.635ql, & V_3 &= 0.6ql, & V_4 &= -0.3ql, \\ V_5 &= \frac{P}{2} + 0.09ql, & V_6 &= -\frac{P}{2} + 0.09ql, & M_1 &= -\frac{C_0}{2} + 0.0606ql^2, & M_2 &= \frac{C_0}{2} + 0.0606ql^2, \\ M_3 &= -0.135ql^2, & M_4 &= -0.09ql^2, & M_5 &= \frac{P\ell}{4} - 0.045ql^2 \end{aligned}$$

である。ヒンジの部分で曲げモーメントが零になっていることに注意すること。

数値的に近似解を求める手法を第 5 章で説明するが、その方法を用いてまっすぐな梁を解くために著者が作成したプログラムも電子的に入手可能になっている。図 2.42 のような図の値もパーソナルコンピュータ上で設定して求めることができる。スパン途中にヒンジやバネ支持も挿入できるが、入手方法についてはまえがきを参照のこと。ただし、つり合い式を解く練習をするためには是非文献 [145] 等で多くの問題を解いて欲しい。

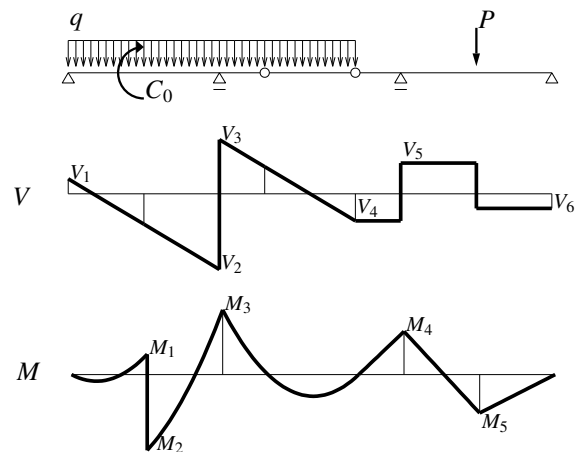


図 2.42 ゲルバー梁の断面力図

演習問題 2-3

3. 左端固定の片持ち梁に線形分布の荷重 $q(x) = q \frac{\ell - x}{\ell}$ が作用したときの断面力図を求めよ。
4. 等分布荷重 $q = \text{const.}$ が作用した単純梁の断面力図を求めよ。
5. 図 2.37 の連結点における断面力同士のつり合いを確認せよ。
6. 図 2.39 の左側の図の結果を確認せよ。
7. 図 2.39 の右側の図も高架橋の脚のモデルである。断面力分布を求めよ。

2.3.3 梁の中の応力分布と断面係数

トラスについての第 2.2.3 (4) 節では、設計に必要な物理量は断面の強度、つまり断面が持つ抵抗力・応力だと述べた。その細長いトラスの第 k パネルの左端に近い部分を抜き出したのが図 2.43 である。p.28 の式 (*) で求めたように、まず上弦材は $(k - 1)P$ の引張の軸力が生じているが、例えば I 形をした断面には、この図に描いたように、一様に分布する単位面積当たりの応力（抵抗力；内力）が生じている。また斜材も一様な引張応力が生じ、下弦材は圧縮なので、例えば箱形断面の場合であっても図のように、やはり一様な圧縮応力が生じて抵抗している。そのため、第 2.2.3 (4) 節で考えたように、その一様な応力（抵抗力）がその材料固有の強度を超えないように断面積を設計すれば、強く安全な構造が設計できるということを学んだ。

梁の断面の設計の場合もほぼ同様はずだが、そのためにはまず梁の断面に生じている応力分布を知る必要がある。そこで再度細長いトラスの例を用いてみよう。図 2.43 のように、上弦材には合計で $(k - 1)P$ の引張の軸力が生じている一方で、下弦材にはやはり一様な応力で kP の圧縮軸力（ $-kP$ の負の引張軸力）が、そして斜材の x 方向には P の引張軸力が生じている。したがって、下弦材に近い下方部分では、下弦材と斜材の軸力の合計で $(k - 1)P$ の圧縮軸力（ $-(k - 1)P$ の引張軸力）が生じていると考えてい

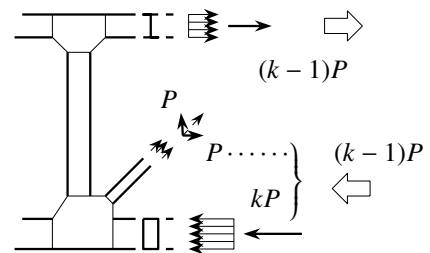


図 2.43 トラスの上下端の内力

ろう。これはちょうど上弦材の引張軸力と同じ大ききで符号だけが異なる。つまり、遠くから眺めたときのトラスの切断面全体を梁の断面として捉えたときには、梁の上端と下端には同じ大ききの内力・応力が逆向きに（圧縮と引張の逆符号で）生じていると考えるのは、素直ではないだろうか。

このことから、梁の中には軸線（ x 軸）を境に逆向きの内力が生じることによって、曲げモーメントという抵抗力を発生させていることが想像できる。それを示したのが図 2.44 である。果たして直線的に分布するかどうかは、今の段階では理解できなくていい。その詳細については第 4 章で説明する。ここでは、第 1 次近似として直線的に応力が分布して生じていると考えておいて欲しい。このような応力分布の合計が、断面全体の抵抗力としての曲げモーメントになっているのだから

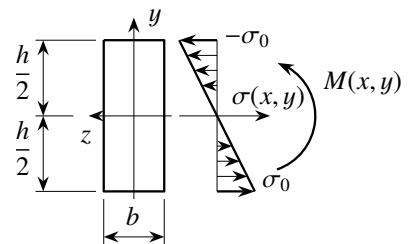


図 2.44 梁の中の応力分布

$$M(x) = \int_{\text{断面の下端}}^{\text{上端}} -y \sigma(x, y) dA, \quad \sigma(x, y) = -\frac{2 \sigma_0(x) y}{h}$$

という関係にあることは容易に理解できると思う。A は断面積である。反時計回りのモーメントを正としているので、上述のトラスの場合とは圧縮・引張が逆になっており、さらに σ の作用線までの距離を $(-y)$ としている。図のように断面が高さ h で幅 b の長方形だとすると $dA = b dy$ になるので、積分すると

$$M(x) = \int_{-h/2}^{h/2} -y \sigma(x, y) b dy = \frac{2 \sigma_0(x) b}{h} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy = \frac{b h^2}{6} \sigma_0(x)$$

となる。したがって、断面の上下縁に発生する最大応力 σ_0 と生じている曲げモーメント M との間には

$$M(x) = W\sigma_0(x), \quad W \equiv \frac{2}{h} \int_{-h/2}^{h/2} b y^2 dy = \frac{bh^2}{6} \quad (2 \text{ 軸対称断面}) \quad (2.10a, b)$$

という関係が成立する。この W は断面係数と呼ばれるもので、断面の形と寸法だけで決まる量である。すなわち、トラスのように断面内の応力分布が一樣な場合に設計対象となる断面の幾何学的な抵抗係数は断面積 A ($N = A\sigma_0$) であったのに対し、梁の曲げの場合に設計しなければならない幾何学的な抵抗係数は断面係数 W ($M = W\sigma_0$) になるというわけだ。この断面係数を大きくすれば梁の曲げ強度を大きくできるからだ。つまり、ある設計荷重に対して設計したい断面に生じる最大の曲げモーメント M_{MAX} による上下縁の応力 σ_0 が、材料そのものの強度である応力 $\sigma^{(b)}$ よりも小さくなるように設計すればいいので、式 (2.10a) を用いて

$$\sigma_0 = \frac{|M_{\text{MAX}}|}{W} \leq \sigma^{(b)} \quad \rightarrow \quad W \geq \frac{|M_{\text{MAX}}|}{\sigma^{(b)}}$$

になるように断面を決めればいいことになる。これが、トラスを設計する場合の式 (2.6) 等に対応した、梁の場合の設計条件になる。あとは上式の最大曲げモーメント M_{MAX} を求める方法がわかればいいが、それは次節で説明しよう。なお、ここでは y, z の 2 軸に対して対称な断面形状の場合に限定した断面係数の定義を示していることに注意して欲しい。任意の断面形の場合は第 4 章で説明する。

2.3.4 影響線と断面設計

(1) 影響線

前節の M_{MAX} を求めるためにはトラスの場合と同様、設計しようとする断面に生じる断面力の影響線を事前に求めておかなければならない。しかし梁の場合は、その長手方向に一樣ではない断面力が生じるため、どここの断面を設計対象とすべきかというステップが最初に加わってくるので注意して欲しい。例として図 2.45 の単純プレートガーダを対象としよう。この左側の図の一番上にあるのはそのプレートガーダの左半分の模式図であるが、合理的な（もしかしたら経済的な）断面にするために、スパン中央区間とその外側区間を異なる断面で設計し、図の断面 A で接合することにしよう。具体的なスパンの様子はその下に示したが、断面 A と A' が接合箇所、中央区間とその外側で断面のフランジ寸法等が異なるように設計しようとしている。

ここでは支点到近い方の桁 (B-A 区間) の断面を設計することを想定して、まず断面 A に着目して設計してみよう。左端から x の位置に単位集中荷重 (単位は無い) を載せた場合の断面 A の曲げモーメントとせん断力は、この断面 A の曲げモーメントとせん断力の影響線と呼ばれる。曲げモーメント図等を求めるときと同じ手順に従うものの、載荷位置 x 毎にまず反力を求めて断面法で A 点の曲げモーメントとせん断力を求めれば影響線が求められる。ここをサラッと読んではいけない。載荷位置 x が変わる毎に支点反力も変化し、また断面 A と x の位置関係によっては曲げモーメントとせん断力の求め方が違って来る等、かなり面倒な作業²¹であることがわかるだろうか。この例の場合はその結果、単位を m とした場合に、曲げモーメントの影響線 \bar{M}_A (単位は m) と、せん断力の影響線 \bar{V}_A (単位は無い) は

$$\bar{M}_A = \begin{cases} \frac{5x}{7}, & 0 < x < 10 \text{ m} \\ \frac{2(35-x)}{7}, & 10 \text{ m} < x < 35 \text{ m} \end{cases}, \quad \bar{V}_A = \begin{cases} -\frac{x}{35}, & 0 < x < 10 \text{ m} \\ \frac{35-x}{35}, & 10 \text{ m} < x < 35 \text{ m} \end{cases} \quad (g, h)$$

となるので各自求めて欲しい。図 2.45 の左下にこの \bar{M}_A と \bar{V}_A を描いておいた。ここで、図 2.34 のせん断力図や曲げモーメント図との違いには十分注意すること。影響線の横軸は単位荷重の作用位置であり、この図は断

²¹ 第 4.5.4 節で導入する相反定理を用いると載荷位置を動かさなくてもいいのだが、まずは正攻法で各自求めて欲しい。

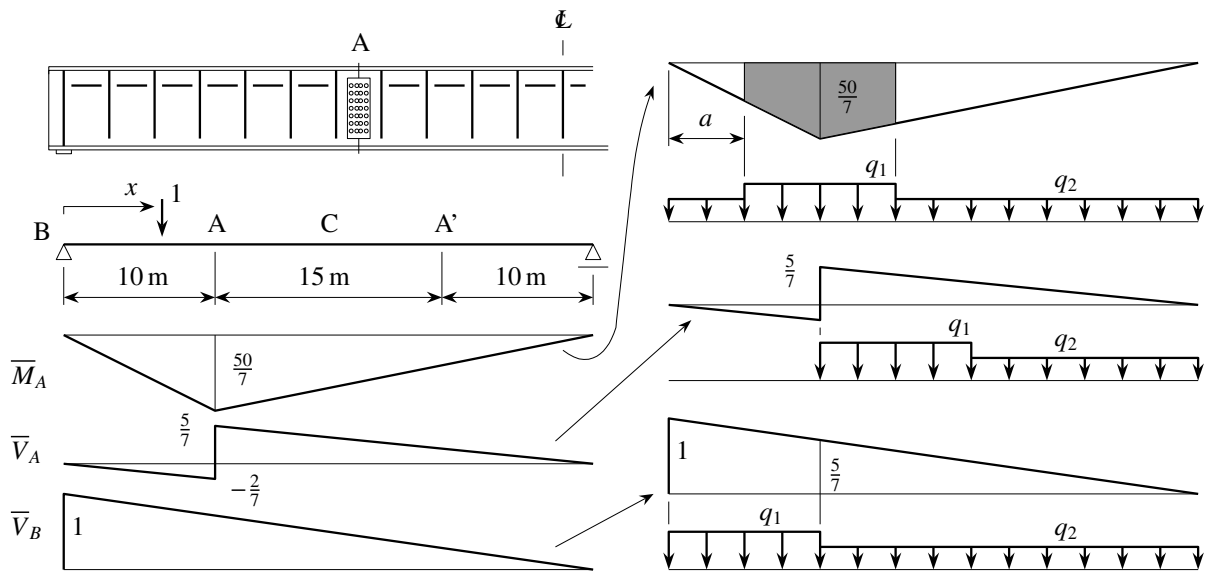


図 2.45 変断面のプレートガーダの設計

面 A に生じている曲げモーメントとせん断力の大きさを示しているからだ。さて、トラスの場合と同様にしてこの影響線を用いれば、断面 A あるいは設計しようとしている左右の支点上に近い方の桁が最も不利に（辛く）なるような荷重位置を決定できる。そのときに着目断面に生じている M_{MAX} 等の最大の断面力に対して安全になるように設計すればいいわけだ。

(2) 最大せん断力と最大曲げモーメント

ここではまず曲げモーメント抵抗に対してこの左右の区間を設計しよう。トラスの場合と同様、分布外力 q_1 と q_2 の値の求め方については第 K.5.3 節に示してあるので、ここでは割愛する。単純梁の場合、荷重がどこに載ろうと支点上では常に曲げモーメントは零なので、この左右区間の場合は、できるだけ支点上から遠い断面で曲げ抵抗の安全を確保すべきであることは予想できると思う。したがってこの例の場合は断面 A を設計断面とすればいいので、その曲げモーメントの影響線 \bar{M}_A を用いて荷重位置を決めよう。図 2.45 の左側に示したように、式 (g) は三角形分布の \bar{M}_A になるので、右側の図の上段に示したように、ある $x = a$ の位置から $D = 10\text{m}$ の区間に大きめの荷重 q_1 を載せ、断面 A が最も不利になるように位置 a を決めればいい。したがって網掛けした部分の影響線面積 A_g （単位は m^2 ）を求めた上で、それが最大になるような位置 a は

$$A_g = \frac{250}{2} - \frac{5}{14}a^2 - \frac{1}{7}(25 - a)^2, \quad \frac{dA_g}{da} = 0 \rightarrow a = \frac{50}{7}$$

となるので、左から 7.1m の位置から 10m の区間に q_1 を荷重し、残りの部分全体に q_2 を載せたときに、断面 A は最も辛い（危険な）状況になることがわかる。このとき網掛けした影響線面積は $\frac{3000}{49}\text{m}^2$ であり、網掛けしていない部分の影響線面積が $\frac{3125}{49}\text{m}^2$ と算定できる。したがって断面 A の最大曲げモーメントは

$$M_{\text{MAX}} = q_1 \frac{3000}{49} + q_2 \frac{3125}{49} \quad (\text{単位は N}\cdot\text{m}) \quad (i)$$

と求められる。

次にせん断抵抗に対する設計をしよう。断面 A のせん断力の影響線 \bar{V}_A は図 2.45 に示した通りであるが、実はせん断力は、断面 A よりも支点上の断面 B の方が厳しい状況になっていることに注意しなければならないのである。図 2.45 の左側の下段に断面 B のせん断力の影響線 \bar{V}_B も描いておいた。この影響線面積の方が、その

上の断面 A のせん断力の影響線面積（正負の二つ）よりも大きいことに気付いて欲しい。したがって、左右区間のせん断抵抗に対する設計の場合には、断面 B の影響線の方を用いなければならないことになる。つまり図の右側の下段に示したように、この場合は左に寄せて大きめの荷重を載せればよい。曲げ抵抗の場合と同様の影響線面積（単位は m）の算定をすると、 q_2 が載った区間の面積が $\frac{125}{14}$ で q_1 が載った区間の面積が $\frac{60}{7}$ になるので、断面 B の最大せん断力が

$$V_{\text{MAX}} = q_1 \frac{60}{7} + q_2 \frac{125}{14} \quad (\text{単位は N}) \quad (j)$$

と求められる。左右区間の梁はこの M_{MAX} と V_{MAX} に対して安全であるように設計されなければならない。このように、一つの部材（区間）を設計するとき、最大曲げモーメントと最大せん断力は異なる断面に着目して異なる 異なる荷荷条件の下で求められていることには十分注意して欲しい。

(3) 断面の強度と設計

曲げ強度の確保: トラスのときと同様、曲げを受ける場合も引張強度と圧縮強度をそれぞれ $\sigma_a^{(bt)}$, $\sigma_a^{(bc)}$ とすると、引張側と圧縮側の断面の曲げ強度は式 (2.10) からそれぞれ $W \sigma_a^{(bt)}$, $W \sigma_a^{(bc)}$ となるので、安全が確保されるためには上式 (i) の最大曲げモーメントに対して

$$W \sigma_a^{(bt)} \geq |M_{\text{MAX}}|, \quad W \sigma_a^{(bc)} \geq |M_{\text{MAX}}|$$

を満足しなければならない。これから断面は

$$W \geq \frac{|M_{\text{MAX}}|}{\sigma_a^{(bt)}}, \quad W \geq \frac{|M_{\text{MAX}}|}{\sigma_a^{(bc)}} \quad (2 \text{ 軸対称断面}) \quad (2.11a, b)$$

を満足するように断面の形や寸法が設計されなければならない。ここでも材料強度が圧縮と引張で異なるのは奇妙に感じられるかもしれないが、曲げを受ける場合も材料によっては、あるいは第 7 章で説明する座屈現象のために、圧縮と引張で強度が異なる（第 7.7.3 節の式 (7.99) (7.102) 参照）こともあるので、このような 2 重の確認が必要になるのだ。

せん断強度の確保: また同時に、最大せん断力を支えられるように、せん断強度に対して断面は設計されていなければならない。まず応力で与えられる許容せん断応力（せん断強度）は、後述の式 (3.109) を根拠にして

$$\tau_a = \frac{\sigma_a^{(t)}}{\sqrt{3}}$$

で与えられている。あとはせん断力とせん断応力の関係、つまり、断面の抵抗係数を知る必要があるが、これは少々難しい。詳細は第 4.6.1 節で説明するが、せん断力の場合は軸力と同様、何らかの断面積が近似的な抵抗係数になっていると考えることが多い。その「せん断抵抗断面積」を A_s とすると、トラスの設計と同様、せん断に対して安全を確保するためには、式 (j) の最大せん断力に対して A_s が

$$\tau_a A_s \geq |V_{\text{MAX}}| \quad \rightarrow \quad A_s \geq \frac{|V_{\text{MAX}}|}{\tau_a} \quad (2.12)$$

を満足するように断面の形や寸法を決定すれば、安全な設計ができたことになる。例えば I 形断面のような場合はウェブの部分だけの断面積を A_s として用いている。

「断面の？」強度： さて第1.1節では、長方形断面のようなものよりI形のような断面の方が力学的に効果的であると述べた。そこで、トラスの断面積比例という抵抗則との対比も念頭に置いて、長方形のときと断面積は同じ（トラス的な強度は同じ）で形状がI形になるようにした場合（フランジが厚過ぎて決して通常のI形断面とは言えないが）の断面係数の特徴を調べておこう。例えば図2.46のようなI形断面の断面積は図2.44の $b \times h$ の長方形の断面積と同じである。そこで図示したように、生じた応力の最大値が σ_1 になったとすると、応力分布は x の位置にある断面で

$$\sigma(x, y) = -\frac{6y}{5h} \sigma_1(x)$$

であるから、曲げモーメントはその定義から

$$M(x) = \int_{\text{断面の下端}}^{\text{上端}} \frac{6y^2}{5h} \sigma_1(x) b(y) dy$$

となる。 $b(y)$ は $|y| < h/2$ では $b/3$ 、 $|y| > h/2$ では b である。これを積分すると

$$M(x) = \frac{6\sigma_1(x)}{5h} \left\{ \frac{b}{3} \int_{-h/2}^{h/2} y^2 dy + b \int_{h/2}^{5h/6} y^2 dy + b \int_{-5h/6}^{-h/2} y^2 dy \right\} = \frac{107bh^2}{270} \sigma_1(x)$$

と求められる。つまり

$$M(x) = W_1 \sigma_1(x), \quad W_1 \equiv \int_{\text{断面の下端}}^{\text{上端}} \frac{6y^2}{5h} b(y) dy = \frac{107bh^2}{270}$$

という関係になる。式(2.11)を念頭に置けば、より強い曲げ部材を作るためには断面係数 W を大きくすればいいことがわかる。したがって、長方形のときの断面係数式(2.10)とI形断面の W_1 を比較すると $\frac{W_1}{W(\text{長方形})} = \frac{107/270}{1/6} = \frac{107}{45} \approx 2.4$ となることから、同じ断面積（コストあるいは軸力に対する性能はほぼ同じ）なのに、曲げに対してはこのI形断面の方が2.4倍強い構造になっていることがわかる。なお、ここでも y, z の2軸に対して対称な断面形状の場合に限定した断面係数の定義を用いていることには注意して欲しい。任意の断面形の場合は第4章で説明する理屈を参照して欲しい。多分多くの読者が「断面が強度を持つのか？」と素直に感じていると思うが、上述のような状況を先輩達が簡単のために「断面の強度」と称してきたのである。

演習問題 2-4

8. 式(i)(j)と対応する影響線を求めてみよ。
9. 同じプレートガーダの中央スパンの中央断面Cの、曲げモーメントとせん断力の影響線を求めよ。
10. それと既に求めた影響線を用いて載荷位置を決定し、中央区間を設計する際の最大曲げモーメントと最大せん断力を求めよ。

2.3.5 微分方程式で表したつり合い式

(1) 局所的なつり合い式と境界条件

梁の二つの断面力であるせん断力と曲げモーメントは位置 x の関数になることがわかったと思う。多くの科学現象はある種の数理モデルで定式化され、それが予測（つまり工学における設計）に用いられるが、ほとん

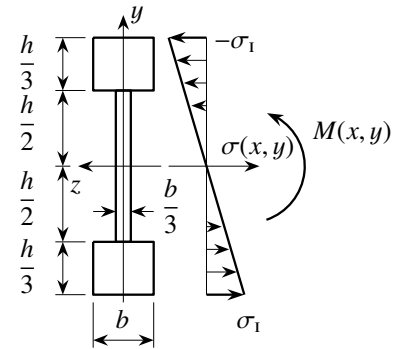


図 2.46 I形断面(?)の断面係数

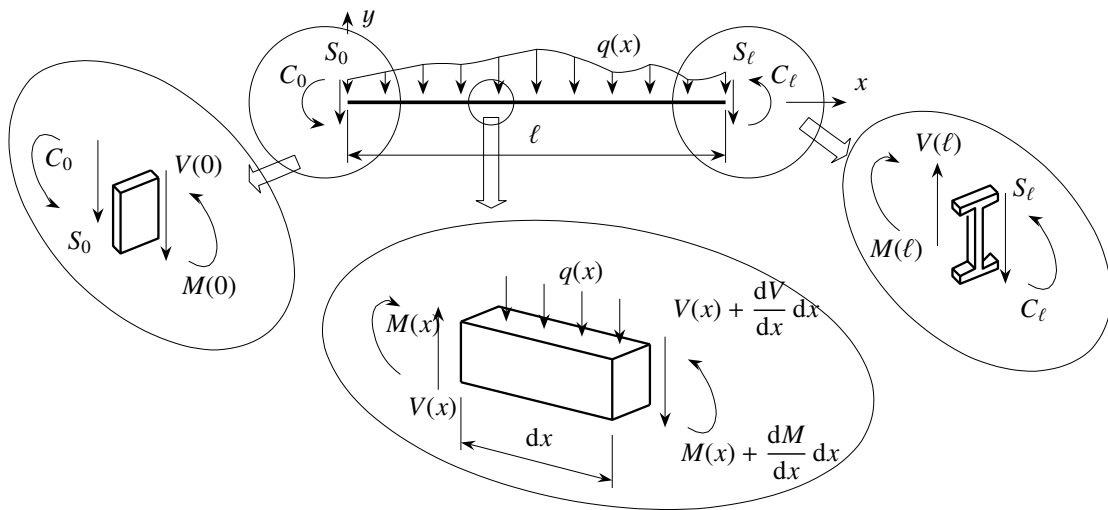


図 2.47 梁のつり合い微分方程式と境界条件

どの場合そのモデルは微分方程式で表される。つまり、せん断力と曲げモーメントという知りたい・予測したい関数が、力学原理としてある微分方程式を満足するものとしてモデル化される。前節までに用いてきたつり合い条件は、ある断面に生じた内力と外力の「巨視的な」つり合いであったが、ここでは「局所的な」、つまり物体中のある点 x の近傍のつり合い条件を考え、その考察から微分方程式で表されるつり合い式を求めておこう。構造力学を初めて学ぶ人の最初の難関が影響線だ。次に曲げモーメント。そしてその次が微分方程式で問題を解くというところだろう。特に「微分方程式を解く」という行為そのものと、「境界条件が解の特性を大きく左右する」ということになかなか慣れることができず、挫折しそうな難関の一つである。何をしているか理解できる（覚えるのではなく）まで、何度も復習して欲しい。

さて図 2.47 には、任意の関数で与えられた単位長さ当たりの分布荷重 $q(x)$ が作用している長さ ℓ の梁を描いた。両端はやや一般化して、どちらにも外力が作用しているように書いてあるが、もし端部が支えられている場合には、ここに描いた外力は反力だと解釈して欲しい。外力の向きは図 2.30 の定義に従った。まずつり合い式を求めるために、下の楕円の中に描いたように、任意の点 x から取り出した長さ dx の微分要素のつり合いを考えよう。まず y 方向の力のつり合いは

$$V(x) - \left\{ V(x) + \frac{dV(x)}{dx} dx \right\} - q(x) dx = 0$$

になる。この式を整理すると、結局 y 方向のつり合い式は

$$\frac{dV(x)}{dx} + q(x) = 0 \tag{2.13}$$

という微分方程式で表される。次にこの dx の右端を中心にした反時計回りのモーメントのつり合いをとると

$$\left\{ M(x) + \frac{dM(x)}{dx} dx \right\} - M(x) - dx V(x) + q(x) \frac{(dx)^2}{2} = 0$$

のようになる。分布荷重によるモーメントは、 dx が微分長さであることから、合計 $q dx$ の力が dx の中央に作用していると捉えて算定してある。この式も整理して dx の 1 次項（最重要項）だけを取り出すと、結局モーメントのつり合い式は

$$\frac{dM(x)}{dx} - V(x) = 0 \tag{2.14}$$

という微分方程式で表される。この式はどこかで見たという記憶は無いだろうか。そう、既に式 (2.9) で示したものと同じで、モーメント図の勾配がせん断力図になるということを示している。最終的に、式 (2.13) と式

(2.14) からせん断力 $V(x)$ を消去すれば、梁の断面 x におけるつり合いを表す局所的な微分方程式は

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + q(x) = 0, \quad \text{ただし} \quad V(x) = \frac{dM(x)}{dx} \quad (2.15a, b)$$

のように、曲げモーメント $M(x)$ だけで表すことができ、せん断力 $V(x)$ は式 (2.15b) を用いて、求められた $M(x)$ を微分すれば得ることができる。

その微分方程式を解くとき、梁の場合は常微分方程式なので、積分する度に積分定数という未定定数が発生する。この定数を適切に決定できなければ、解が唯一に求められたことにはならない。梁の場合には、端部つまり境界の状況がこの定数を決定する。そのような境界の状況を与える条件を境界条件と呼んでいる。まず $x = 0$ の境界条件を求めるために、図 2.47 の左の楕円の中を見て欲しい。これは、長方形断面の梁として端部を薄く切り出したものだ。手前の見えている面は内部の断面なので、そこには二つの断面力を正しい符号で作用させてある。向こう側の面は外側の面で、外力が作用している面である。境界条件は、この薄い部分のつり合いから求められる。つまり、 y 方向の力のつり合いと、モーメントのつり合いから

$$-V(0) = -\frac{dM}{dx}(0) = S_0, \quad -M(0) = C_0 \quad (2.16a, b)$$

が、左端の境界条件式になる。同様に、図 2.47 の右側の楕円に描いた状況から、 $x = \ell$ の境界条件を求めよう。ここでは I 形断面をした梁を想定した図になっている。ここでも力とモーメントのつり合いから

$$V(\ell) = \frac{dM}{dx}(\ell) = S_\ell, \quad M(\ell) = C_\ell \quad (2.17a, b)$$

が、右端の境界条件式になる。このように、つり合い式も境界条件式も曲げモーメント $M(x)$ を未知関数として表すことができる。実際には構造が安定して動かないように端部は適切に支持あるいは固定されているものとする。静定構造の場合は結局式 (2.16) (2.17) の四つの境界条件のうちの一つが与えられる。式 (2.15a) が 2 階の常微分方程式なので二つの積分定数が必要になるが、その二つを端部の二つの境界条件で決定することによって唯一の解を得ることができるのである。

また、梁の中間部に集中せん断力や集中モーメントが作用している場合の条件のことも考えておこう。そこは端部ではないことから、連続条件と呼ばれることが多い。図 2.48 に示したのは、 $x = a$ に集中荷重が作用している状況である。境界条件の場合と同様、この載荷点を挟んで薄い断面を切り出し、そのつり合いを考える。載荷点の前後を区別するために、記号 $0 \leq \epsilon \rightarrow 0$ を付けてある。この薄片の力とモーメントのつり合いをとると

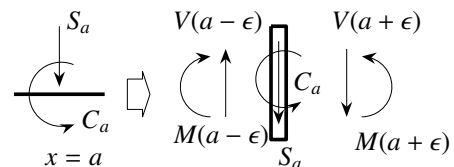


図 2.48 連続条件

$$V(a - \epsilon) - S_a - V(a + \epsilon) = 0, \quad M(a + \epsilon) + C_a - M(a - \epsilon) = 0$$

となる。式 (2.14) から $V = \frac{dM}{dx}$ なので、最終的な連続条件式も曲げモーメント $M(x)$ で表され

$$\frac{dM}{dx}(a - \epsilon) - \frac{\partial M}{\partial x}(a + \epsilon) = S_a, \quad M(a - \epsilon) - M(a + \epsilon) = C_a \quad 0 \leq \epsilon \rightarrow 0 \quad (2.18a, b)$$

と求められる。連続条件を用いて積分定数を決めるやり方については次節の例を参照のこと。

(2) 境界値問題の例

等分布荷重の載った片持ち梁: 前節で求めたように静定梁の問題は、曲げモーメント $M(x)$ についての端部の力の境界条件式と梁の場所場所の微分方程式で表された力のつり合い式とで数理的にはモデル化されている。

このように記述された問題を境界値問題と呼んでいる。その問題の解き方の代表例として、図 2.31 に示した等分布荷重が作用した片持ち梁を解いてみよう。まずつり合い式と境界条件式は、式 (2.15a) (2.17) から

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + q = 0, \quad M(\ell) = 0, \quad V(\ell) = \frac{dM}{dx}(\ell) = 0$$

と表される。左端は外力が与えられていないから境界条件にはならない。 $q = \text{const.}$ だから、この微分方程式の一般解は

$$M(x) = -\frac{q x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

になるので、式 (2.15b) のせん断力と曲げモーメントの関係を考慮して、境界条件に代入すると

$$M(\ell) = 0 = -\frac{q \ell^2}{2} + c_1 \ell + c_2, \quad V(\ell) = \frac{dM}{dx}(\ell) = 0 = -q \ell + c_1$$

となる。したがって $c_1 = q \ell$, $c_2 = -\frac{q \ell^2}{2}$ と決定できる。これを上の $M(x)$ の表現に代入することによって

$$M(x) = -\frac{q x^2}{2} + q \ell x - \frac{q \ell^2}{2} = -\frac{q}{2} (\ell - x)^2, \quad V(x) = \frac{dM(x)}{dx} = q(\ell - x)$$

と求められる。これは p.32 の式 (d) と一致する。求められた結果を $x = 0$ の境界条件式 (2.16) に代入すると

$$S_0 = -V(0) = -q \ell, \quad C_0 = -M(0) = \frac{q \ell^2}{2}$$

となり、左端の反力も正しく求められている。

非一様な分布荷重が載った単純梁: 次に、sine 関数で与えられた分布荷重 $q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$ が作用している単純梁を解いてみよう。 q_0 は分布荷重の最大値である。つり合い式と境界条件式は

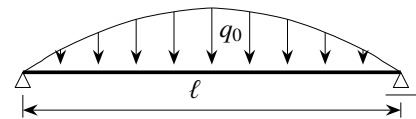


図 2.49 sine 関数分布荷重

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} + q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = 0, \quad M(0) = 0, \quad M(\ell) = 0$$

と表される。境界条件は、両端がピン支承で支えられていることから曲げモーメントが両端で零となる。この場合の一般解は

$$M(x) = q_0 \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + c_1 x + c_2$$

と置いていいので、境界条件に代入した

$$M(0) = 0 = c_2, \quad M(\ell) = 0 = c_1 \ell + c_2$$

から $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ と求められる。したがって曲げモーメント分布は

$$M(x) = q_0 \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^2 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

となる。せん断力分布はこれを x で微分すれば求められ、両端の支点反力はそれを両端のせん断力の境界条件に代入して

$$S_0 = -\frac{q_0 \ell}{\pi}, \quad S_\ell = -\frac{q_0 \ell}{\pi}$$

と求められる。外力の総和が $\frac{2q_0 \ell}{\pi}$ であるから、上向きの力として正しく反力が求められていることがわかる。

集中荷重の載った単純梁: 最後に, スパン三分の一の位置に集中荷重が作用する単純梁 (p.32 の図 2.33) を解いてみよう。この場合は, $0 < x < \frac{\ell}{3}$, $\frac{\ell}{3} < x < \ell$ の両区間のつり合い式は $\frac{d^2 M}{dx^2} = 0$ だから, 一般解は両区間共に

$$M(x) = c_1 x + c_2, \quad 0 < x < \frac{\ell}{3}, \quad M(x) = c_3 x + c_4, \quad \frac{\ell}{3} < x < \ell \quad (k)$$

である。このように四つの積分定数が生じるが, 境界条件は

$$M(0) = 0, \quad M(\ell) = 0$$

の二つであり, 連続条件は式 (2.18) から $a = \frac{\ell}{3}$ として

$$\frac{dM}{dx}(a - \epsilon) - \frac{dM}{dx}(a + \epsilon) = P, \quad M(a - \epsilon) - M(a + \epsilon) = 0, \quad 0 \leq \epsilon \rightarrow 0$$

の二つで表されるため, この四つの条件から四つの積分定数を決定できる。以上の4条件式に上の二つの式で表された一般解を代入して整理すると

$$c_2 = 0, \quad c_3 \ell + c_4 = 0, \quad c_1 - c_3 = P, \quad c_1 \frac{\ell}{3} + c_2 - c_3 \frac{\ell}{3} - c_4 = 0$$

となるので, 第1式の $c_2 = 0$ を他の式に代入すれば

$$\begin{pmatrix} 0 & \ell & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ \ell & -\ell & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix}$$

という連立方程式を解けばいいことになり, 結局

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3\ell} \begin{pmatrix} 3 & 2\ell & 1 \\ 3 & -\ell & 1 \\ 0 & \ell^2 & -\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{P}{3\ell} \begin{pmatrix} 2\ell \\ -\ell \\ \ell^2 \end{pmatrix}$$

と求められるので, 曲げモーメント分布は

$$M(x) = \frac{2Px}{3}, \quad 0 < x < \frac{\ell}{3}, \quad M(x) = \frac{P(\ell - x)}{3}, \quad \frac{\ell}{3} < x < \ell$$

と求められる。これは p.33 辺りの式 (e) (f) と一致する。

演習問題 2-5

11. 微分方程式を用いて演習問題 2-3 の問題 3 と同じ問題を解け。
12. 右図 2.50 のようにスパン中央に集中モーメント Q を受ける単純梁を, 微分方程式を用いて解け。

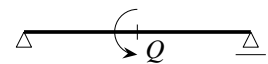


図 2.50 集中荷重を載せる

2.4 不静定とは?

2.4.1 トラス構造の安定性と不静定

写真 2.3 では, 四角いパネルでできたトラスが不安定であることを示した。しかし「安定性」には二通りの捉え方がある。一つは全体的な支持条件に関するもので, 反力の数によって決まるものだが, これは構造全体が動かないように支えられているかどうかに関わるものである。もちろん社会基盤構造としては動き続けるよ

うな構造物は役に立たないが、飛行中の航空機も構造物の一つではある。さてトラス構造の場合、支点反力の数を r とするとき

$$n_o \equiv r - 3 \quad (2.19)$$

によって定義される n_o を外的不静定次数と呼び、 $n_o < 0$ の場合が「外的不安定」、 $n_o = 0$ のときが「外的静定」、 $n_o > 0$ のときが「外的不静定」と呼ばれる。「(不)静定」の意味は今ではわからなくていい。

例えば、前節で扱った図 2.2 のトラスで検討しよう。この場合は反力は三つだったので、 $n_o = 0$ となり外的静定である。ここでもし、右側の支点も左右には移動できないようにできたとしよう。すると A と B を結ぶ長さ ℓ の水平な部材は両端を地盤に固定されてしまっているの、その部材の存在そのものに意味が無くなるが、反力は四つになるから $n_o = 1$ となり、これを外的不静定と呼んでいる。この場合は、建設が終了した時点で温度が上昇した場合、この水平な部材 AB は温度に伴って自由に伸びることを抑制されてしまい、外力が作用していない状態であっても圧縮力が生じてしまう。これも一般的には不都合であろう。しかも、四つの未知の反力に対し、外力と反力の力のつり合いとモーメントのつり合いとで三つの条件式しか無いことから、その反力を求めることができない。さてどうしたらいいだろう。

逆に図 2.2 のトラスで、もし左側の支点も左右に移動できるものとする、反力は 2 箇所の支点の上向きの F_1, F_2 の二つだけになるので、 $n_o = -1 < 0$ となり、外的不安定である。つまり、この三角トラスは左右方向には全く固定されていないため安定ではなく（静止してはいられなくなり）、運動方程式

$$Q = m \frac{d^2 u(t)}{dt^2} \rightarrow u(t) = \frac{Q}{2m} t^2 + c_1 t + c_2$$

を満たす運動をすることが可能になる。ここに m はトラスの全質量、 $u(t)$ はトラス全体の x 方向の移動量である。したがって、短時間の何らかの外乱があれば（風が吹けば）、そのあとは x 方向に等加速度運動をすることになる。これは、この章の始めで「つり合い」の定義を示したときにも述べた。構造自体は外力を支えられるものの、自由に移動できるため、外的に不安定になっていると呼んでいる。

もう一つの「安定性」は内的安定性と呼ばれるもので、構造自体の安定性に関わったものである。こちらが写真 2.3 の四角形のトラスが自立しないことに関係している。部材の総数を q 、節点の総数を j とするとき

$$n_i = q + 3 - 2j \quad (2.20)$$

で定義される n_i を内的不静定次数と呼ぶ。 $n_i < 0$ の場合には「内的不安定」、 $n_i = 0$ の場合には「内的静定」、 $n_i > 0$ の場合には「内的不静定」と呼ばれる。例として写真 2.3 を表した図 2.51 (a) の左図にある四角形トラスを眺めてみよう。この構造に横方向から荷重を作用させるとそのすぐ右の図のように潰れてしまうことから、不安定なのは明らかであるが、この構造は $q = 4$ 、 $j = 4$ なので果たして $n_i = -1 < 0$ である。つまり、支持が適切になされていても、構造自体が不安定なものを内的不安定な構造と呼んでいる。一方図 2.51 (b) のように部材を一つ増やし、二つの三角形からなる構造の場合には、 $q = 5$ なので $n_i = 0$ となる。したがって、荷重を作用させても潰れることなく三角形の形状は保たれる。これを「内的静定」と呼んでいる。さらに図 2.51 (c) のようにもう 1 本部材を増やした場合には $q = 6$ となることから $n_i = 1 > 0$ になり、内的不静定と呼ばれる構造になる。ただし、内的不静定な構造は安定で、内的静定な構造よりもある意味で余裕がある（冗長である）。つまり、図 2.51 (c) の構造から部材を一つ取り外した（壊れた）としても、それは内的静定になるだけで全体構造は壊れないからだ。ということは、最後の例の内的不静定な構造が持つ冗長性

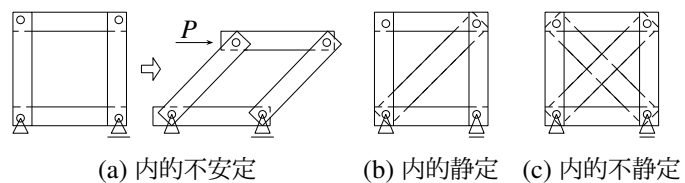


図 2.51 トラスの内的不安定性

には耐震構造等を考える場合には特に重要な意味があるのだ。それは、発生する確率が非常に小さい何らかの作用で1本の部材が万一破断しても、構造全体はまだ安定のままでいられるからである。

この章の最後で説明するが、「内的安定性」を「外的安定性」と同様に力との関係で捉えるならば、内力を力のつり合いのみで求められる場合を「(内的)静定」、そうでない場合を「(内的)不静定」と呼んでいることになる。外的不静定次数と内的不静定次数との和

$$n \equiv n_o + n_i = q + r - 2j \tag{2.21}$$

で表される n をトラスの不静定次数と呼ぶことがある。例えば、図 2.51 (c) の構造が図 2.51 (a) のように载荷された図 2.52 の構造の軸力を求めてみよう。 $q = 6$, $j = 4$ なので $n_i = 1$ となり 1 次の不静定構造である。外的には静定なので、反力は $H = -P$, $F_1 = -P$, $F_2 = P$ のように求められる。部材には 1 から 6 の数字を付けて各軸力を N_i ($i = 1 \sim 6$) とする。節点法で軸力を求めようとする

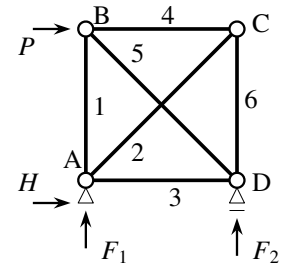


図 2.52 不静定トラス

$$\begin{aligned} \text{A: } N_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_2 &= P, & N_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_2 &= P, & \text{B: } N_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_5 &= -P, & N_1 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_5 &= 0, \\ \text{C: } N_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_2 &= 0, & N_6 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_2 &= 0, & \text{D: } N_6 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_5 &= -P, & N_3 + \frac{1}{\sqrt{2}} N_5 &= 0 \end{aligned}$$

となる。右辺が零になっている四つの式から

$$N_1 = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_5, \quad N_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_5, \quad N_4 = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_2, \quad N_6 = -\frac{1}{\sqrt{2}} N_2$$

という関係を得るので、これを残りの四つの式に代入すると、実はすべての式が同じ式

$$N_2 - N_5 = \sqrt{2} P$$

になってしまい、条件式が一つ足りず軸力を唯一には求めることができない。これが「不静定構造」が持つ特徴なのだ。さてどうしたらいいだろう。

ところで、図 2.53 の一番左側に示したように、部材で閉じていないパネルが存在する場合の内的不静定次数が $n_i = -1$ になることの解釈の仕方はよくわからない。どこが「不安定」なのだろう。それはともかく、この図に示した3種類のトラスの水平と斜めの部材 1, 2 の軸力はどれも

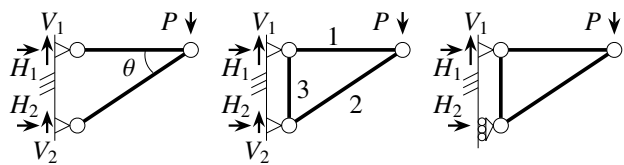


図 2.53 壁に直接固定した場合等の例

$$N_1 = -P \csc \theta, \quad N_2 = P \cot \theta$$

と求められる。そして、一番左側のトラスの場合は支点反力が四つあるにもかかわらず、2部材が壁に直接固定されていることから、すべての反力が求められる。ちょっと不思議だが、確かに $n = 0$ である。もちろん一番右側のトラスも $n = 0$ で支点反力は三つなので、反力とすべての部材の軸力は唯一に求められる。これに対し真ん中のトラスは $n = 1$ なので、支点反力二つと部材 3 の軸力に対して

$$V_1 + V_2 = P, \quad V_1 = N_3$$

の二つの式しか得られない。第1式が正しいことはすぐにわかるが、 V_1 や V_2 , N_3 の個々の値は求められない。これも「不静定構造」なのだ。だが勘が鋭い読者なら「部材 3 は両端が固定されているから軸力なんか生

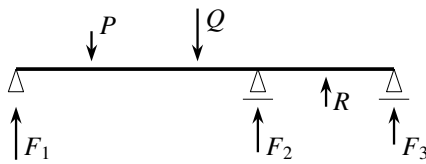


図 2.54 2 径間連続梁

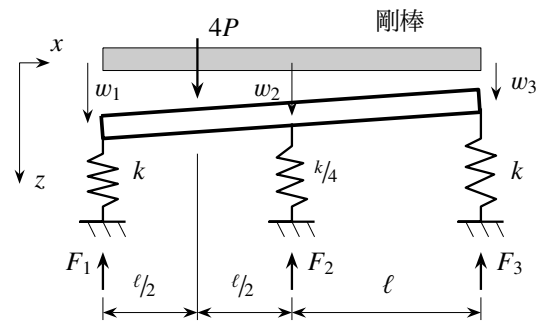


図 2.55 簡単な不静定構造系

じないのはすぐにわかるから、 $N_3 = 0, V_1 = 0, V_2 = P$ が解で、一番左側のトラスと同じ結果になるでしょ。」と指摘するかもしれない。しかしそこでは、部材3が伸びていないから軸力が零だという関係が無意識に使っている。つまり力のつり合い以外の条件式（あとで説明するひずみと抵抗力の関係式：構成方程式）を使っている。もし部材3の初期の長さがその固定端間隔よりも長かったらどうなるだろう。無理やり縮めてからこの固定端の間に挟まざるを得ないから、軸力 N_3 はその長さを縮めるのに必要だった値を持つことになる。そういう初期の状況が明記されない限り、この真ん中のトラスの問題の解は不定なままなのである。

2.4.2 不静定構造が解けるためのヒント

梁の場合も、一本の梁の支点が図 2.54 のように3箇所になると、各支点における反力をつり合いのみからは求めることができない。つまりこの問題の場合には未知の支点反力が三つあるのに、この面内の鉛直方向の力のつり合いとモーメントのつり合いとの二つしか条件が無いから、条件が一つ不足してしまうからだ。したがって断面力も求めることができない。これはトラスの場合と同様不静定な構造になっており、不静定梁の代表例である。

この不静定構造を解くためにはどうしたらいいかを考えるために、少し問題を簡単にして、図 2.55 に示したように棒は変形しない剛なものとし、その代わりに、支点にバネ定数 k あるいは $k/4$ を持つ線形バネを挟んでおいて、どのようにしたら三つの支点反力を求めることができるかを考えてみよう。まず、それぞれの支点反力を F_1, F_2, F_3 と置いて z 方向の力のつり合い条件を表すと

$$4P - F_1 - F_2 - F_3 = 0 \tag{l}$$

となり、一方、左端支点回りの反時計回り方向のモーメントのつり合い条件は

$$lF_2 + 2lF_3 - l/2 \cdot 4P = 0 \tag{m}$$

である。確かにこれだけでは条件が不足しており反力を求めることはできない。

そこでこの支点にはバネが挟んであることを考えると、支点上の剛な棒はそれぞれ z 方向に沈下していることがわかる。この z 方向の各支点の沈下量を w_1, w_2, w_3 とすると、線形バネなので支点反力と沈下量は

$$F_1 = kw_1, \quad F_2 = k/4 w_2, \quad F_3 = kw_3 \tag{n}$$

という関係を満たさなければならない。これで条件式が三つ増えたが、未知数としての支点沈下量もさらに三つ加わったため、まだ一つ条件が不足している。実は不足している条件は、この棒が剛であることから得ることができる幾何学的（運動学的）なものである。

つまり、外力 P が作用する前にまっすぐだった剛な棒は、载荷後に支点が沈下したあともまっすぐなままでなければならないという幾何学的あるいは運動学的な整合性を、ここまでではまだ考慮していないことに気付

く。この条件は、例えば、左の二つの支点間の棒の傾きが右の二つの支点間のそれに等しいという条件式で表すことができる。つまり

$$\frac{w_2 - w_1}{\ell} = \frac{w_3 - w_2}{\ell} \quad \text{あるいは} \quad w_1 - 2w_2 + w_3 = 0 \quad (o)$$

でなければならない。これで六つの未知数に対して六つの条件式を得たから、問題は解けるはずである。

式 (n) を式 (o) に代入すると

$$F_1 - 8F_2 + F_3 = 0$$

となるから、式 (l) (m) と合わせて連立方程式にすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -8 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表されるので、最終的に支点反力を

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \frac{P}{18} \begin{pmatrix} 17 & -9 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{P}{9} \begin{pmatrix} 25 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$$

のように得ることができる。これを式 (n) に代入し直せば、支点沈下量も

$$w_1 = \frac{25}{9} \frac{P}{k}, \quad w_2 = \frac{16}{9} \frac{P}{k}, \quad w_3 = \frac{7}{9} \frac{P}{k}$$

と求められる。

この簡単な例のように、力のつり合い条件だけでは解けない構造を不静定構造と呼んでいると思えばいい。不静定構造の解析に当たっては、式 (n) で与えたような変形できる構造部材の変形と抵抗力の関係と、式 (o) で示したような変形（この場合は剛棒だったので、棒全体の傾きであったが）と変位（沈下量）の関係とが、つり合い条件式以外に必要となる。このように、変形できる物体の力学は一般には

つり合い式: 力およびモーメント（抵抗力）のつり合い条件式 — Newton の法則（上の例では式 (l) (m)）

ひずみの定義: 変形量（ひずみ）と移動量（変位）の関係式 — 変形とは？（上の例では式 (o)）

構成方程式: ひずみと抵抗力の関係式 — 材料の性質（上の例では式 (n)）

の三つの条件を同時に満足する数理問題として表されなければならないのだ。トラスや梁も変形することによって抵抗する構造系なので、同様にこのような三つの条件でその挙動は支配されることになるはずだが、まず次の章では一般論としての変形できる物体の力学（連続体の力学）について説明し、その次の章でより一般的な構造力学に戻ることにしよう。

逆行列の求め方: 3×3 の行列 (A) の逆行列は次のようにして求めることができる。

$$A_{ij}^{-1} = \left((A) \text{ の余因子行列 } \right)_{ij} / \det(A)$$

ここで行列式 $\det(A)$ は、 3×3 の行列の場合は例のたすき掛け式で求めることができる。また、余因子行列は

$$\left((A) \text{ の余因子行列 } \right)_{ij} = (-1)^{i+j} (\underline{j \text{ 行 } i \text{ 列}} \text{ を指で隠した小行列の行列式})$$

を並べた行列である。計算したい要素と対角の位置をかなめとする行と列を隠すことと、符号が一つおきに変わることに注意しなければならない。もちろん、上の公式はサイズに依存しないが、手で計算できるのは4×4くらいが限度であろう。また2×2の場合にはもっと簡単に

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc$$

となる。3×3の場合の公式は式 (I.23) (I.24) を参照のこと。☞

演習問題 2-6

- 13. 図 2.53 のトラスの支点反力と軸力を求めよ。
- 14. 3 本足の椅子の場合は、鉛直方向の力のつり合いと、座板に含まれるある 2 軸回りのモーメントのつり合いとから、足の三つの反力を求めることができる静定系であるが、不静定な 4 本足の椅子の場合を上と同じように解いてみよ。ただし、座板は剛体で、足がバネ定数 k の線形バネと考えていいものとする。また、どの位置に集中外力が作用すると椅子が転倒するかについても求めてみよ。なお、⊗ は外力 P の向きが紙面奥行き方向であることを示すが、これは 4 枚の矢羽根の付いた矢を後ろから見たものをイメージしている。したがって、紙面手前向きの場合は ⊙ となる。

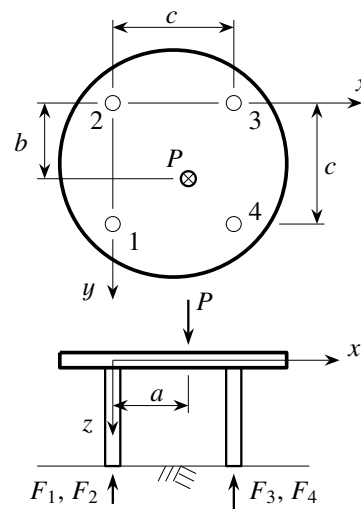


図 2.56 4 本足椅子の反力

‘Vanilla:’ 「スパゲティ」のアクセントは「スパゲティ」だ。アイスクリームは「ヴァニラ」で発音も難しい。第 1 著者留学時の寮の食堂では ‘vanilla’ アイスクリームが基本で、他に 1 種類以上がサービスされた。「今日は何?」と聞いて ‘banana’ があるときは判別し難かったし、サービスしてくれる学生（米国人）も「あー発音し難い」と叫ぶくらいだった。そしてアイスクリームもクッキーも ‘chocolate chips’ は大人気だ。後者は焼き立てを待つ行列ができるほどだ。ところで、‘career’ は「クリア」に聞こえ、‘kilo’ は「ケロ」に聞こえる。どうして？



写真 2.6 Chicago River に架かる可動橋 Wabash Avenue Bridge²², Illinois 州



電話で「岩熊」の漢字表記を伝えるときは「岩手県の岩と熊本県の熊」あるいは「動物の熊」と言うようにしている。米国でも例えば‘N’を‘N as in Nancy’といった表現で伝えることがある。これは‘N’や‘M’の判別が難しいからだ。このアルファベットを音声で伝える方式にはある程度決まりがあるらしい。例えば‘Ted’は‘Tango-Echo-Delta’となる。

A: Alpha	B: Bravo	C: Charlie	D: Delta	E: Echo
F: Foxtrot	G: Golf	H: Hotel	I: India	J: Juliet
K: Kilo	L: Lima	M: Mike	N: November	O: Oscar
P: Papa	Q: Quebec	R: Romeo	S: Sierra	T: Tango
U: Uniform	V: Victor	W: Whiskey	X: X-ray	Y: Yankee
Z: Zulu		9: Niner	‘9’ だけ特殊	

²² 昔のシカゴの写真は<http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/civil/node27.html> に。この写真の右側奥にあのトウモロコシのような有名な Marina City があり、そこにはヨットハーバーもあるため、マストをたためないヨットの通行のために橋が開く。この写真の左手にある Michigan Avenue Bridge (p.801) も開いている。これは確か土曜日の正午だったと思う。

第3章

変形できる物体の力学基礎

3.1 連続体とは

この文書が対象としているのは変形できる物体だと述べたが、通常は連続体と総称される。連続体は固体とは限らず、流体力学が対象としている各種流体もたいていは連続体である。しかし連続体とは何だろう。身の回りの物体は本当に連続体、つまり中身が稠密な物体ばかりだろうか。鋼もコンクリートも顕微鏡でどんどんミクロな部分を観察すると隙間だらけだろう。またこの文書のあちこちの写真にある橋の模型で用いたスポンジは中に空隙が無数に存在していて、部分的にしか連続していない。しかし、この文書で対象とするのは中身が稠密な連続体である。

ところで‘Powers of Ten’ [68] という楽しい「旅」の本¹をご存知だろうか。題目は「10のべき乗」という意味だ。地球から約10億光年(10^{25} m)離れた地点は、地球からの可視宇宙の半径の約 $1/50$ 程度である。その地点²から、シカゴのフットボール場横の公園で昼寝をしている青年の手の甲を見ている。そこから旅を始めて地球への距離を $1/10$ ずつ縮めていく。そして手の甲からは体内へと視点に移る。旅の最後には0.1フェルミ(10^{-16} m)の宇宙に到達し、そこには各種のクォークが分散しているという具合だ。0.1 μm (10^{-7} m)の宇宙には離散的に分布したDNAが密集しているが、それも含めたどの視点における宇宙も、連続体とは呼べないような離散的な空間だ。

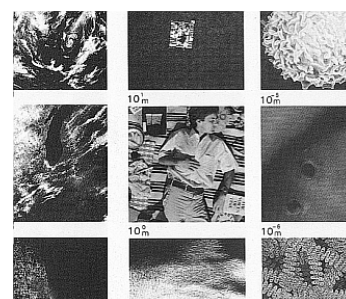


写真 3.1 $1/10$ ずつの旅

しかし我々は、物体の「点」に例えば座標 (x, y, z) で「名前」を付け、その「物質点」が持つ物理的性質や量を関数 $f(x, y, z)$ で表そうとしている。これは実際にはそうではないが、物体の一種の数学的なミクロな極限でも物質が稠密に連続して分布していると仮定していることに他ならない。この文書では、まさにそのような数学的なモデルとしての連続体を取り扱っていることには注意して欲しい。このように物質点の関数として物理量を定義してモデル化する手法を局所理論と呼んでいる。これに対し、連続体として取り扱うものの、物質点のみならずその近傍からの影響も考慮して取り扱う手法を非局所理論と呼ぶことがある。後者はこの文書の守備範囲には含まれていない。

さらに、物体内部の抵抗力をモデル化する段階では、その連続体の中にさらに面積が無い内部表面や体積が無い内部領域を対象とする。それは関数 $g(x)$ の変化率を数学表現する際に用いる微係数 $\frac{dg(x)}{dx}$ の「分母」にある dx の考え方

$$\frac{dg(x)}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta(\cdot) \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x)}{\Delta x}$$

¹ 本と同じ著者が作ったと思われるオリジナルフィルムが YouTube にある。購入目的で以前探したが見つからなかったものだ。

² 「宇宙」は英語で ‘space’ つまり空いた場所、何も無いところ。だから非連続体である。

と同じである。第2.3.5(1)節では、梁の中から長さ dx の部分を取り出してつり合いを考えたあと、この長さ dx を零にする極限をとったことを思い出して欲しい。これはあくまでも理想的な取り扱い方であり、そのくらいの視点からの把握で実際の現象を十分な精度でモデル化できることが明らかな場合に用いられる方法である。したがって、分母が零になる（同時に分子も零になるのだが）ことや原子間には隙間があること等を思い出して、過度に神経質になったりしないようにして欲しい。

3.2 変形の定義

3.2.1 変位ベクトル

応力とひずみのことをある程度知っていて、構造力学の勉強をしたい人は第4章から読めばいい。そうしながら、もし途中でわからなくなったときには、この章に戻ってくるという読み方³でもいい。さて構造力学は変形できる物体の力学の一つであるが、第2章では変形そのものは議論せず、変形によって物体内部に生じる抵抗力つまり内力を導入し、変形できる物体の抵抗の仕方だけを感じてもらった。しかしその最後には、不静定構造の場合には反力すら求められないことがわかり、内力だけではなく変形の仕方も考慮しなければならないことを学んだ。そこでこの章では変形そのものをまず幾何学的に定義し、その変形によって材料はどのような抵抗力を発揮することができるかと考えるのか、という記述の仕方⁴で連続体の力学の基礎を説明しよう。なおこの章は、微小変位・微小変形理論の枠組内のほぼ線形系の理屈だけを説明する。

変形できる物体に外力等の外からの作用を与えると物体は移動し変形するだろう。まず、その移動量を定義する。簡単のために直交直線座標（直角座標）系で説明する。物体がまだ作用を受けていない状態を初期状態と呼び、そのときの座標値の組⁵ (x_1, x_2, x_3) を、その座標位置に存在する「物質点」の「名前」とする。すなわち図3.1のように物体中の点Aの初期の位置ベクトルを

$$\mathbf{p}^0(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 p_i^0 \mathbf{e}_i, \quad p_i^0 = x_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

と表す。 \mathbf{e}_i は座標軸方向の単位基底ベクトルである。さて、外からの作用を受けて物体が変形し移動して図の右の方に示した位置に到達したとする。そして物質点Aの、この状態の位置ベクトルが

$$\mathbf{p}(x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 p_i(x_1, x_2, x_3) \mathbf{e}_i \quad (3.2)$$

になったものとする。初期状態における位置ベクトルの座標成分 (x_1, x_2, x_3) でその物質点の名前を定義しているので、変形した状態の位置ベクトルとその成分も同じように名前 (x_1, x_2, x_3) の関数になる。

この変形前後の位置の差が物体中の任意点Aの移動量であることから点Aの変位ベクトルと呼び、それは

$$\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) \equiv \mathbf{p} - \mathbf{p}^0, \quad u_i \equiv p_i - x_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.3a, b)$$

で定義される。変位ベクトルも点の名前 (x_1, x_2, x_3) の関数である。なお以下、自明過ぎる箇所では諸関数の引数 (x_1, x_2, x_3) を適宜省略することがある。

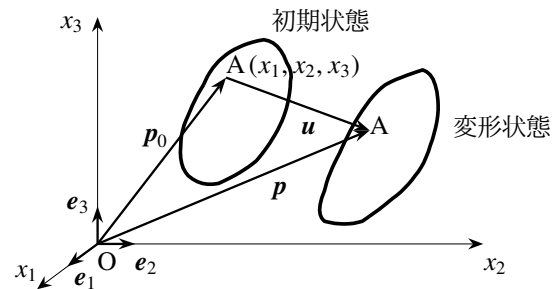


図3.1 物体の位置と変位ベクトル

³ 西野文雄先生は、前から順に読まないといけぬ教科書はあまりよろしくないとおっしゃっていました。

⁴ 抵抗力を先に教える教科書が多いが、抵抗力が（難しい；直接は測定できない）数学的な概念であるのに対し、変形は純粋に幾何学的な定義なので、そちらのわかり易い方を先に説明する。実際、変形が本質なのであって、西野流・Nemat-Nasser流である。

⁵ この章ではこれ以降、 (x, y, z) の代わりに数字の添え字付きの座標値やベクトル成分を用いるが、他の章では (x, y, z) を用いたりその記号を添え字に用いる等、全体としては統一していない。

3.2.2 ひずみテンソル

(1) 形が変わるといふことは

写真 3.2 には、正方形と円を書き込んだ「のびのびサロンシップ H」⁶の初期状態と、左右方向に引張られた状態とを併せて示した。インクで印を付けることによってシート

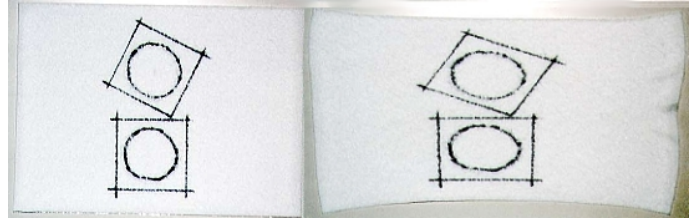


写真 3.2 伸び縮みと角度変化 — 代表的な変形成分

の特定な点に「名前 (式 (3.1) の (x_1, x_2, x_3) という位置で定義した名前)」を付けたことになっていて、その物質点の動きを追跡していることになる。下段の正方形と円が、変形した状態では引張った方向に伸びてそれぞれが長方形と楕円になっている。また、わずかだが引張った方向と直交する上下方向には縮んでいる。一方上段の斜めにした正方形を見ると、変形後には角の直角が変化し、それが伸び縮みと合わさって不等辺の平行四辺形になっている。この簡単な実験から、物体の変形には少なくとも「伸び縮み」と「角度変化」の 2 種類があることがわかる。

(2) 伸び縮み変形

簡単のために図 3.2 に示したように物質点の x_1 軸方向の変位で伸び縮みを定義する。この x_1 方向の伸びひずみ成分を e_1 と表記すると、元々 dx_1 の長さを持っていた微分要素は、変形後には $dx_1 \times (1 + e_1)$ の長さになる。この 1 次元の図の

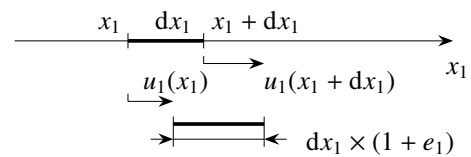


図 3.2 伸び縮み変形

$$dx_1 \times (1 + e_1) + u_1(x_1) = dx_1 + u_1(x_1 + dx_1)$$

という幾何学的関係から $e_1 dx_1 = u_1(x_1 + dx_1) - u_1(x_1)$ となるので、ここで $dx_1 \rightarrow 0$ の極限をとって 3 次元に拡張すれば、任意点 (x_1, x_2, x_3) の伸びひずみ成分 e_1 を

$$e_1(x_1, x_2, x_3) \equiv \lim_{dx_1 \rightarrow 0} \frac{u_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3) - u_1(x_1, x_2, x_3)}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (3.4)$$

と定義することができる。

(3) 角度変形

やはり簡単のために図 3.3 にあるように、平面上の正方形が平行四辺形に変化した場合を考える。初期状態では座標軸と平行な辺でできていて直角だった角が、図のように x_1, x_2 軸とそれぞれ α, β だけの角変化が生じたとすると、左側の太い平行四辺形から

$$\tan \alpha \approx \sin \alpha \approx \alpha = \lim_{dx_1 \rightarrow 0} \frac{u_2(x_1 + dx_1, x_2) - u_2(x_1, x_2)}{dx_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$$

と考えることができ、したがって同様に

$$\beta = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$$

と表現できることもわかる。もちろん角度は非常に小さいものと仮定してある。

ここで注意しなければならないのは、それぞれの辺の回転量に過ぎない α, β の「それぞれ」が必ずしも「変形」としての角変化だけを表しているとは限らないということだ。例えば $\beta = -\alpha$ といった特別な関係にある場

⁶ 第 1 著者が学生のとき、確か Encyclopedia of Physics で (文献 [97, 98] のどちらかだったかもしれない) 正確な実験写真を見たことがある。それを思い出して簡便な実験で再現したのがこの写真である。「のびのびサロンシップ H」® は久光製薬の登録商標である。

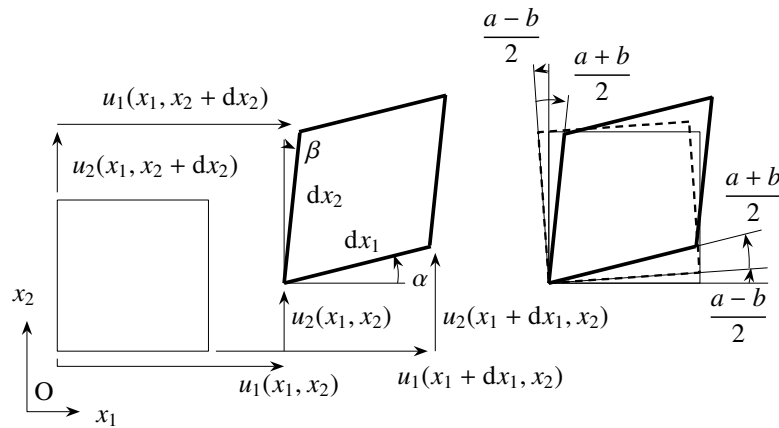


図 3.3 角度変形 — 変形しない回転成分と歪みの角度変化成分

合には、正方形の元の直角は保持されたまま $(\alpha - \beta)/2 = \alpha$ の回転をするだけで、「変形 = 歪み」の角度変化は生じていない。したがって、 $(\alpha + \beta)$ のように加算して単純な回転成分を取り除いたものが角度変化である。このように、 α と β には単純な回転も含まれていることに留意すると、同じ図の右側で説明しているように

1. 正方形は変形しないまま、反時計回りに $\frac{(\alpha - \beta)}{2}$ だけ回転して破線で表した位置にくるが
2. そのあと、二つの辺が $\frac{(\alpha + \beta)}{2}$ ずつお互いに反対方向に回転し、直角が崩れて変形し（歪んで）

最終的な位置に落ち着くと考えた方がよさそうである。つまり、2 辺の回転の「和」が角度変化（歪み）に相当するものと考えないといけない。このことから、この x_1 - x_2 面内の「変形」を伴う角度変化を 2 辺それぞれのせん断ひずみ成分 $\epsilon_{12}, \epsilon_{21}$ と表記することになると、それは上の箇条の 2 番目の成分だけなので

$$\epsilon_{12}(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \epsilon_{21}(x_1, x_2, x_3) \quad (3.5)$$

と定義していいだろう。ただし直角の崩れ自体は二つの成分の和 ($\epsilon_{12} + \epsilon_{21}$)、つまり後述の工学ひずみになる。

(4) ひずみテンソルの定義

式 (3.5) を見ながら、式 (3.4) の伸びひずみ e_1 を見直すと、無理やり

$$e_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)$$

とも書くことができることから、この e_1 を ϵ_{11} と表記することにして ϵ_{12} といっしょにまとめると、任意点の変形状態を

$$\epsilon_{ij}(x_1, x_2, x_3) \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (3.6)$$

で定義した六つ（九つ）のひずみテンソル成分で表すことができることに気付く。第 2.4.2 節の不静定問題の式 (o) が、この変形と変位の関係に相当する。なお定義から明らかなように $\epsilon_{12} = \epsilon_{21}$ であることから対称なテンソルと称され、九つのうち六つがある種独立したひずみ成分である。設定した座標系に限定すれば、 $i = j$ の成分が伸び縮みの変形成分であり、 $i \neq j$ の成分が角度変化の変形成分である。

テンソルという言葉を初めて用いたが、それは大雑把には「ある種の物理的に意味のある量」[25] を指していると考えればいい。スカラーやベクトルもテンソルの一種である。それぞれ 0 階と 1 階のテンソルで、上述のひずみテンソルは 2 階のテンソルである。その表記には、成分を用いて式 (3.6) のように書く場合もあるが、

直接表記と称してベクトルと同様太字⁷で $\epsilon(\mathbf{x})$ と表記する場合もある。またその成分との関係のある種の表記上の規則を別途用意した上で

$$\epsilon = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ij} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

と書く場合（この文書の前半ではほとんど用いない）や、行列表示で

$$\epsilon \sim \left(\epsilon \right) \equiv \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{pmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \left\{ \epsilon \right\} = [\epsilon_{11} \ \epsilon_{22} \ \epsilon_{33} \ \epsilon_{23} \ \epsilon_{31} \ \epsilon_{12}]^T$$

と表す場合もある。右の式の列ベクトル表示の場合の成分の順番にはある合理性がある。

3.2.3 剛体変位成分と微小回転 — 「変形」とは

せん断ひずみを定義した際に見たように、物体の移動量（変位と、その微係数）には「変形」を含んでいない部分がありそうだ。すなわち式(3.6)で定義したひずみ成分を零にするような変位成分とその微係数が存在する。そういった変位を総称して剛体変位（並進変位と回転変位）と呼んでいる。例えば図 3.4 の左の図は 1 本の棒がその

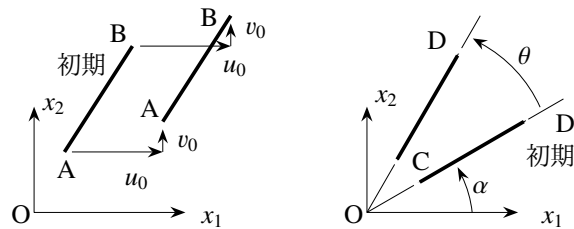


図 3.4 剛体変位成分

のまま平行に移動しているだけなので、変位ベクトルはいたるところ $\mathbf{u} = \text{const.}$ である。したがって、式(3.6)に代入してもひずみ成分はすべて零になる。このような変位成分を剛体並進変位成分（あるいは単に剛体変位）と呼ぶ。その右の図は同じく棒が原点の回りに回転しただけである。したがって棒の任意点の変位成分は、微小回転なので $|\theta| \ll 1$ としてもいい（図ではわかり易いように θ を大きな角度にしてある）から

$$u_1 = r \{ \cos(\alpha + \theta) - \cos \alpha \} \simeq -r \theta \sin \alpha, \quad u_2 = r \{ \sin(\alpha + \theta) - \sin \alpha \} \simeq r \theta \cos \alpha$$

となる。あるいは

$$u_1 = -x_2 \theta, \quad u_2 = x_1 \theta \tag{*}$$

と書ける。これもひずみの定義式(3.6)に代入すると、それはすべて零になる。この変位成分を剛体回転変位成分（あるいは単に剛体回転）と呼ぶ。

このことから、外「形」が「変」わった（広義の変形）ように見えても、それは a) 剛体（並進）変位および b) 剛体回転の和である剛体変位成分と、c) 物体が外力に抵抗して「形」を「変」えた（狭義の）変形成分あるいは歪み成分との和になっていることがわかる。今まで「変形」を正確には定義していなかったが、これ以降は原則としてこの c) の成分だけを「変形」と呼ぶ。さらに、その狭義の「変形」は、i) 伸び縮み成分と ii) 角度変化成分できていることは、ここまでに示した通りである。そういう意味から「変位」と「変形」も厳密に区別して用いる必要がある。

図 3.3 でせん断ひずみを考えたときに、任意の回転変形の中の $(\alpha-\beta)/2$ を剛体回転成分と解釈した。すなわち

$$\omega_{21} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right)$$

⁷ 手書きのときは板書体で ϵ とするか太字指定の校正記号を使って $\underline{\epsilon}$ のように下波線を入れる。

は着目している点の回転成分であろう。実際に上式(*)を代入すると $\omega_{21} = \theta$ になる。これを一般化して

$$\omega_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2, 3), \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad (3.7a, b)$$

で微小回転テンソル ω の成分を定義（添え字の順番が逆で正負が異なる定義も存在するので注意）する。式(3.6)のひずみテンソル成分と併せて考えると

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij} \quad (3.8)$$

となる。すなわち、変位勾配テンソル成分（左辺）の対称成分（右辺第1項; $\epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}$ ）がひずみテンソル成分であり、反対称成分（右辺第2項; $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ ）が微小回転テンソル成分になっていることがわかる。

3.2.4 ひずみの主方向

再度写真 3.2 を見直してみよう。左の写真の上段の傾けた正方形が水平な正方形に見えるように、そのページを反時計回りに若干回転させた状態にして、右の写真を見て欲しい。このとき、どちらの円も同じ楕円にしかなくなっていないが、上段の正方形は平行四辺形になっているように見え、下段の正方形は角度変化が無いまま2方向に伸び縮みが生じただけに見える。しかしこの実験は1枚のシートを一様にそして単純に左右に引張っただけなので、上下段の図形はどちらも本質的には完全に同じ「変形状態」にあるはずである。だからこそ、二つの円は同じ楕円になっていた。にもかかわらず、変形前に同じ形だが異なる向きを持った二つの正方形の変形を観察すると、それはそれぞれ異なった図形になっているので、上段と下段で異なる「変形状態」になっているようにも見えてしまう。このように、本当は同じ「変形状態」なのに観測の仕方によって異なる変形のように見えてしまうことには十分注意する必要がある。すなわち、このシートの変形を表している「ひずみテンソルそのものは一つの状態を表す物理量である」にもかかわらず、見る向きすなわち観測者が立脚している「座標系によってその成分は値が異なる」し、変形の性状も違って見える。このことは、テンソル「成分」を安易に可視化したとしても力学的な本質が見えるとは限らないことを示唆している。特に膨大な数値解析結果を整理するときには、例えば汎用プログラムのポストプロセサの使い方には十分な注意が必要になる。だってそうだろう。成分というのは人間が勝手に設定したある特定の座標系方向の成分であって、それは必ずしも力学的な現象の本質的な方向と一致しているとは限らないからだ。いろいろなテンソルの意味を考えるとその成分だけに着目すると、とんでもない勘違いをする可能性があるので注意すべきである。

この例を逆に考えると、どんな「変形状態」であっても写真の円あるいは下段の正方形のような相直交する方向への単純な伸び縮み状態として捉えることができることもわかる。このような、任意の変形を単純な伸び縮み状態として捉えられる向き（座標系）を見出したとき、その伸び縮みの方向をひずみの主方向と呼んでいる。また、その主方向の伸び縮みのひずみ成分を主ひずみと呼ぶ。任意の「変形状態」は、この主方向三つ（二つが独立）と主ひずみ三つの組で唯一に表現できそうだ。その具体的な求め方は第3.3.6(4)節で説明する。また Mohr のひずみ円についての第3.6.3(3)節でも説明する。写真 3.2 の場合の主方向は、変形後の二つの楕円の主軸が示すように、このシートの2辺に沿った直交する2方向である。

3.2.5 ひずみ成分の座標変換

ひずみテンソルはある「変形状態」を唯一に定義する物理量である。だから「テンソル」と呼ばれている。しかし写真 3.2 でも見たようにその成分は観測者の定義した座標系によって異なる「値」を持つ。したがって「テンソル」と「テンソル成分」という言葉は注意深く使い分ける必要があるが、この文書ではそのあたりはいい加減なので注意して欲しい。ここでは、異なる座標系間のひずみテンソル成分間の関係を求めておく。し

つこいようだが、特に3次元の連続体でテンソル「成分」を解釈するときには、その座標系に物理的・材料的必然性があるのかどうかを注意深く考察しておく必要がある。そうでないときには、前節の主ひずみのように、座標によらない何らかの量を用いて解釈することを検討すべきである。

さて初期状態の任意の微分要素を取り出し、その長さを ds_0 とすると、Pythagoras の定理から

$$(ds_0)^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i dx_i$$

となる。これが変形後に ds になったとすると、式(3.2)(3.3)より

$$(ds)^2 = \sum_{i=1}^3 dp_i dp_i, \quad dp_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial p_i}{\partial x_j} dx_j = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right) dx_j = \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \delta_{ij} \right) dx_j$$

と書くことができる。ここに δ_{ij} は **Kronecker** のデルタと呼ばれ

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{もし } i = j \text{ のとき} \\ 0 & \text{もし } i \neq j \text{ のとき} \end{cases} \quad (3.9)$$

という値を持つ記号（テンソル成分ではない）であり、行列表示すると単位行列になる。 x_1 は x_1 で微分すると1になるが x_2 で微分すると0になる。そういったことを簡単に表すとき等に便利な記号で、この文書でもよく使われる。式(3.8)の関係を上式に代入して少し演算すると、線形部分だけの近似⁸の範囲で

$$\begin{aligned} (ds)^2 - (ds_0)^2 &= \sum_k \left\{ \sum_i \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \delta_{ki} \right) dx_i \right\} \left\{ \sum_j \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \delta_{kj} \right) dx_j \right\} - \sum_i dx_i dx_i \\ &= \sum_i \sum_j \left(\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \delta_{ij} \right) dx_i dx_j - \sum_i \sum_j \delta_{ij} dx_i dx_j \\ &\simeq \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 2\epsilon_{ij} dx_i dx_j \end{aligned} \quad (3.10)$$

と書くことができる。つまり、ひずみテンソルの成分は上式のような形で変形前後の微分要素の長さの差で定義された物理量と考えてもいい。式(3.10)の演算は初学者には今は難しいとは思いますが、慣れると結構簡単なことをしていることもわかる。ところで、上式右辺になぜ‘2’が付いてしまったのか不思議に思う読者もいるだろう。そこで特殊な例としてすべての方向に同じ伸び‘ ϵ ’だけが生じたとしよう。すると

$$\epsilon_{ij} = \epsilon \delta_{ij}$$

のように3方向共に同じ伸び状態だから、上式(3.10)に代入して演算すると

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = \sum_i \sum_j 2\epsilon \delta_{ij} dx_i dx_j = 2\epsilon \sum_i dx_i dx_i = 2\epsilon (ds_0)^2$$

となる。左辺の $(ds_0)^2$ を右辺に移項して辺々平方根をとると、ひずみは非常に小さいため、すべての方向の伸びについて

$$ds = \sqrt{1 + 2\epsilon} ds_0 \simeq (1 + \epsilon) ds_0$$

が成立するので、 ϵ の物理的な意味と式表現が整合する。つまり、長さの2乗同士の差でひずみを定義している⁹ために係数に‘2’が必要だったわけだ。

⁸ 厳密な非線形的表現は第12章に示してあるが、物理的な意味は曖昧になってしまう。

⁹ この長さの2乗を用いていることが、有限変形理論ではある種の困難を産む（第12章参照）。

ここで、異なる座標系 \bar{x}_i を考えた場合、式 (3.10) の左辺は座標系によらず同じ値を持つスカラーなので、新しい座標系でひずみテンソル成分を $\bar{\epsilon}_{ij}$ と表記した場合には

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 2\bar{\epsilon}_{ij} d\bar{x}_i d\bar{x}_j = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l 2\bar{\epsilon}_{ij} \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_k} \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_l} dx_k dx_l$$

と記すことができる。ここで座標変換を

$$T_{ij} \equiv \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial x_j} \quad (3.11)$$

で定義すれば、上式右辺と式 (3.10) の右辺とが等しい条件から、ひずみテンソル成分同士の関係を

$$\epsilon_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \bar{\epsilon}_{kl} T_{ki} T_{lj} \quad (3.12)$$

と得る。座標変換を行列表示すると、その正規直交性から式 (3.12) は

$$\left(\epsilon \right) = \left(T \right)^T \left(\bar{\epsilon} \right) \left(T \right), \quad \left(\bar{\epsilon} \right) = \left(T \right) \left(\epsilon \right) \left(T \right)^T \quad (3.13a, b)$$

のような行列表現もできる。 τ の上付き $()^T$ は転置行列を表す。この関係は、任意の2階のテンソル成分の座標変換則にもなっている。

3.2.6 体積ひずみとせん断ひずみ

伸びひずみ成分 ϵ_{11} 等は微分線要素の長さの伸び変化を示していたから、ひずみが微小である限り、体積ひずみは

$$\begin{aligned} \Delta &\equiv \frac{\text{変形後の体積} - \text{元の体積}}{\text{元の体積}} = \frac{dx_1(1 + \epsilon_{11}) \times dx_2(1 + \epsilon_{22}) \times dx_3(1 + \epsilon_{33})}{dx_1 \times dx_2 \times dx_3} - 1 \\ &\simeq \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \quad \rightarrow \quad \Delta = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk} \end{aligned} \quad (3.14)$$

で定義できるはずだ。 Δ は膨張で正になる。なお、ひずみテンソルを行列表示をしたときの対角項の和を、その行列の跡と呼ぶことから

$$\Delta = \text{tr} \left(\epsilon \right)$$

と表現されることもある。

これに対し、ひずみテンソル成分から体積ひずみ成分を取り除いた成分を偏差ひずみテンソル成分と呼び

$$\epsilon'_{ij} \equiv \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{\Delta}{3} \quad (3.15)$$

で定義する。体積ひずみ成分を '3' で割ったものは3方向の伸びひずみの平均ひずみであり、また当然ではあるが、偏差ひずみ ϵ'_{ij} は体積ひずみ成分を持たない $\left(\sum_{i=1}^3 \epsilon'_{ii} = 0 \right)$ 。

それぞれの物理的意味を理解するために、図に描きやすい2次元空間で考えてみよう。2次元の場合には、体積ひずみ成分の代わりに面積ひずみ成分を考えればいため、少し定義を変えて

$$\epsilon^{(2)'}_{ij} \equiv \epsilon_{ij} - \delta_{ij} \frac{\Delta^{(2)}}{2}, \quad \Delta^{(2)} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}$$

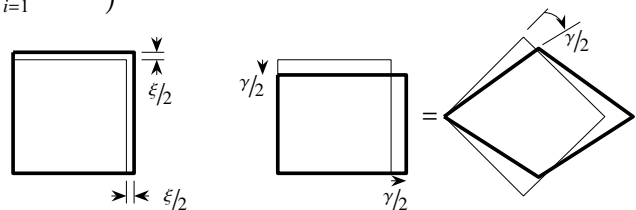


図 3.5 体積ひずみ成分とせん断ひずみ成分

で偏差ひずみと面積ひずみが定義できる。上付きの '(2)' で 2 次元であることを明示した。例えば図 3.5 の左側の図のように 2 方向に同じ伸び $\xi/2$ が生じたあと、そのすぐ右の図のように 2 方向に同じ大きさで異なる向き (伸びと縮み) の $\gamma/2$ が生じたとする。すると、そのひずみ成分は二つの成分を重ね合わせて

$$\epsilon_{11} = \frac{\xi}{2} + \frac{\gamma}{2}, \quad \epsilon_{22} = \frac{\xi}{2} - \frac{\gamma}{2}, \quad \epsilon_{12} = 0$$

となる。これから体積ひずみ成分 $\Delta^{(2)}$ を求めると

$$\Delta^{(2)} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} = \xi$$

であり、偏差ひずみ成分 $\epsilon^{(2)'}_{ij}$ は

$$\epsilon^{(2)'}_{11} = \epsilon_{11} - \frac{\Delta^{(2)}}{2} = \frac{\gamma}{2}, \quad \epsilon^{(2)'}_{22} = \epsilon_{22} - \frac{\Delta^{(2)}}{2} = -\frac{\gamma}{2}$$

となる。つまり等方な同符号の変形が体積ひずみであり、2 方向への大きさの等しい伸び縮み (逆符号の) 変形が偏差ひずみである。特にこの偏差ひずみは少しわかり難いので、異なる座標系からこの変形全体を眺め直してみよう。

まず、体積 (面積) ひずみ成分に相当する成分 (等方成分) に着目しよう。記号的な行列表示をすると

$$\left(\Delta^{(2)} \right) = \begin{pmatrix} \xi/2 & 0 \\ 0 & \xi/2 \end{pmatrix}$$

と書けるから、例えば 45 度だけ座標を時計回りに回転させてみよう。式 (3.13) の座標変換則を用いると

$$\begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \end{pmatrix} = \left(T \right) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \left(T \right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

となるので、上の成分は回転させても

$$\begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi/2 & 0 \\ 0 & \xi/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi/2 & 0 \\ 0 & \xi/2 \end{pmatrix}$$

と無変化である。すなわち、体積 (面積) ひずみはそもそもスカラー量であり、したがってどんな座標系から見てもそれに対応する等方なひずみテンソル成分は不変であるという、当然の結果を示すことができた。単位行列はどんなに回転しても単位行列のままなのと同じである。

では偏差ひずみ成分はどうだろう。同様に行列表示すると

$$\left(\epsilon^{(2)'} \right) = \begin{pmatrix} \gamma/2 & 0 \\ 0 & -\gamma/2 \end{pmatrix}$$

となる。つまり x_1 方向に伸びた分だけ x_2 方向には逆に縮んでいる状態を表していた。体積 (面積) ひずみの場合と同様に 45 度だけ座標を時計回りに回転させると

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma/2 & 0 \\ 0 & -\gamma/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma/2 \\ \gamma/2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{\epsilon}_{12} = \bar{\epsilon}_{21} = \frac{\gamma}{2}, \quad \bar{\epsilon}_{11} = \bar{\epsilon}_{22} = 0$$

を得る。すなわちこの 45 度回転した座標系 \bar{x} で偏差ひずみ成分を眺め直すと、単純に $\gamma/2$ ずつの角度変化 (せん断ひずみ) だけしか生じていないことと同じだということがわかる。このことから、偏差ひずみ成分はせん断変形成分を表していると考えていい。45 度回転した座標系で変形の様子を図 3.5 の一番右に示した。この例

からも、任意の変形は体積ひずみとせん断ひずみの和で表現されていると考えていいことがわかる。また、座標系の選び方によって変形の様子が全く違って見えることも再度実感できたと思う。

さらにこの例では、 x 方向と y 方向がひずみの主軸になっている。体積ひずみは主軸の向きとは無関係なスカラー量なので、任意のひずみ成分の跡 ($\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$) で論ずればいい。それに対し、「変形状態」に含まれる角度変化（せん断変形）について論じるのであれば、その主軸から例えば45度方向の座標系で変形を観察すべきであることを意味しており、それは取りも直さず偏差ひずみ成分を議論すべきであることを示唆している。

3.2.7 ひずみの適合条件

さて、ひずみの定義式(3.6)の定義記号を普通の等号にして左辺右辺を入れ替えると、ひずみ成分が与えられた場合の変位成分に対する連立微分方程式と捉えることができる。つまり、三つの変位成分が満足すべき六つの微分方程式だ。だとすると、微分方程式の数の方が解の数より多いことになる。一体どういうことだろう。それは、六つのひずみ成分を自由に任意に与えたときには、それに対する変位が存在しなかったり、唯一に求められなかったりすることを意味する。つまり、式(3.6)の数行下に「ある種独立した」と書いた六つのひずみ成分の間には、実は何らかの制約条件が存在することになる。このような制約条件をひずみの適合条件式と呼んで¹⁰いる。物理的説明は例えば文献[175]がわかり易いので、ここでは結果のみを示す。

物体のある点Pの変位とひずみとがわかっているとして、その近傍の点Qの変位は式(3.8)を用いて少し演算をすると

$$u_j(Q) = u_j(P) + \sum_k (x_k^Q - x_k^P) \omega_{jk}^P + \sum_k \int_P^Q U_{jk} dx_k$$

で与えられる。ここに

$$U_{jk} \equiv \epsilon_{jk} + \sum_l (x_l^Q - x_l^P) \left(\frac{\partial \epsilon_{kj}}{\partial x_l} - \frac{\partial \epsilon_{lk}}{\partial x_j} \right)$$

と置かれている。上の式の最後の積分はP→Qの積分路の選び方にはよらずに唯一に定まらなければならない。そうでないと点Qの状態が複数存在してしまい、模式図3.6に示した[26]のように、連続体中に孔が空いたり物質が重なったりしてしまうことになる。この積分が経路に依存しない条件から

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} - \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} \right) - \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = 0, \quad (3.16a, b)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} \right) - \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = 0, \quad (3.16c, d)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} - \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) - \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = 0 \quad (3.16e, f)$$

という関係（六つのうち三つが独立）を得る。文献[109]にも数学的表現がなされているが、よくわからないので、これがひずみの適合条件式だと信じよう。特に2次元の場合には式(3.16e)だけでよく

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} = 0 \quad (3.17)$$

となる。この式が正しいことは式(3.6)の2次元の成分だけをこの左辺に代入すれば示すことができる（証明ではない）。このような適合条件を満足するひずみを適合ひずみと呼ぶ。適合ひずみと非適合ひずみについては第3.4.4節にその具体例を示す。

¹⁰ 式(3.6)をひずみの適合条件と呼んでいる文献もあるが、それは適合ひずみならその成分が満たす式だけなので、この文書では式(3.6)の方はひずみの定義式と呼ぶことにしている。

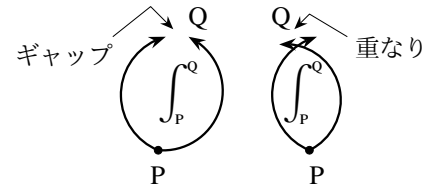


図3.6 ひずみの適合性の模式図

演習問題 3-1

1. 2次元で、次のひずみ成分（アメリカ合州¹¹国 Illinois 州 Evanston, Northwestern 大学の Dundurs 先生の ‘Elasticity’ の講義ノート（1980年頃）から）に対応する変位成分を求めよ。

a) $\epsilon_{11} = 2x_1 x_2^2, \epsilon_{12} = 0, \epsilon_{22} = -6x_1 x_2^2$

b) $\epsilon_{11} = 2x_1 x_2^2, \epsilon_{12} = 2x_1^3 + x_1^2 x_2 - x_2^3, \epsilon_{22} = -6x_1 x_2^2$

3.3 内力と局所的なつり合い式

3.3.1 変形できる物体の抵抗とは

第2章ではトラスと梁を例にして、内力（抵抗力）を断面力として導入したが、ここではその抵抗力をもつと物体の微視的・局所的な根本的な観点で定義し直そう。外力に対し変形して抵抗する物体は、前節のひずみを物体内部に発生させて抵抗しようとする。例えば鉛筆を握るとき、筋肉は脳からの信号を電気的・化学的に処理して指の必要な部分だけを「収縮」させ、指に挟んだ鉛筆を落とさないだけの「力」を発生させている。確かに「原子間力」までたどれば何らかの場とそれに対する内部の力が発生して抵抗していることは理解できるだろうが、現象のみを眺めると、この筋肉の収縮に相当する「変形」が「外力」に直接抵抗していることになる。しかし「変形」が無次元量であるのに対し、この「外力」は力やモーメントの次元を持つことがある。したがって、このようにお互いの次元が異なる量同士が作用反作用し合って抵抗すると考えるのは思考上の困難を伴うだろう。そのため第2章では軸力と曲げモーメント・せん断力といった断面力（内力）を導入して外力に抵抗させた。ここでは前節の変形と関係付けることを念頭に置いて連続体の内力を定義する。

そこで図 3.7 のように、力（あるいは偶力や圧力）の次元を持った「内力」という抵抗力（原子間力の平均値のようなもの）を新しく定義することによって

1. 「外力」が作用すると、内部に「内力」による抵抗力が発生して、つり合って静止する。[A]
2. その「内力」の生じる本来の原因は「変形」であるから、物体の抵抗力は変形と直接関係がある。[B]
3. 「内力」と「変形」の関係 [B] は、物体を構成している材料そのものの特性である。

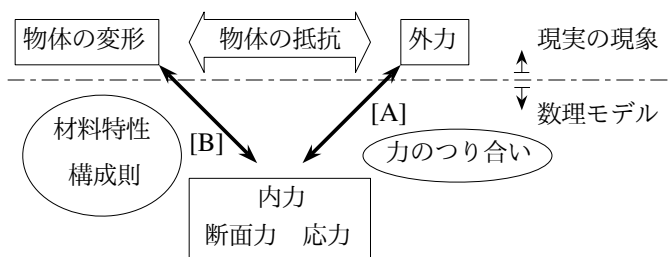


図 3.7 物体の抵抗を力の次元で考えた内力という概念

と考えた方が扱い易いだろう。この箇条 2. と 3. については次の節で説明する。この節では連続体の中に生じる内力、つまり物体の抵抗力を一般的に定義しよう。第2章では主にトラス部材の応力（抵抗力）を、仮想的に部材を切断することによって可視化（外力と同じように）して考えたから、それほど抵抗なくその物理的な意味を想像・理解できたと思う。ここで扱う連続体の中の応力も、物体中に仮想的な切断面を考えることによって定義するが、それは初学者には難しいかもしれないが、少し我慢してじっくり取り組んで勉強して欲しい。難しくなったときは、トラスの軸力のことを思い出せば少しは理解が進むかもしれない。

¹¹ 本多勝一氏の表記法 [187] による。

3.3.2 表面力ベクトルと応力テンソル

物体内部の抵抗力を可視化するために、トラス部材を途中で切断したのと同様に、まずは物体を真っ二つに切ってみよう。図 3.8 のように任意の単位法線方向 \mathbf{n} を持つ内部表面をそのような切断によって作ったとしよう。その内部表面の面積が A で、そこに抵抗するために発生しているであろう単位面積当たりの抵抗力ベクトルを \mathbf{T}_n とすると、外力とのつり合いは切断面より右側の物体 V_2 に対しては

$$\mathbf{T}_n A = \int_{S_2} \mathbf{F} dS + \int_{V_2} \mathbf{X} dV$$

となるはずだ。 \mathbf{F} は右側の物体の実際の表面 S_2 に作用した単位表面積当たりの外力であり、 \mathbf{X} は物体の切断面より右側の内部 V_2 に作用する単位体積当たりの外力である。この抵抗力 \mathbf{T}_n は第2章で導入した軸力等の断面力に相当する。ただし、ここでは次元は単位面積当たりの力とする。この面積 A の「表面」というものが、物体の実際の表面ではなく、仮想的に（頭の中で）物体を部分的に切断して現れた表面を指すことには十分注意する必要がある。

上では第2章の断面力を一般化するために物体を2分するような大きな面 A を考えたが、連続体中の実際の内力は物体内で一様ではなく場所 \mathbf{x} の関数になるため、 A の上の内力も一般的には一様ではない。さらに物体内の内力も \mathbf{x} の関数であるから、局所的な点 \mathbf{x} 近傍における微分面積 dA 毎に内力を考える必要がある。そこで、図 3.8 の切断面上の2箇所と右部分 V_2 の中に3箇所例示したように、ある点近傍の内部微分表面要素 dA に生じた局所的な内力 $\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$ に着目してみよう。この内力 \mathbf{t}_n は表面力と呼ばれる。そのカベクトルを表面力ベクトル¹²と呼ぶこともある。次元は圧力と同じで単位面積当たりの力である。上で導入した断面力に相当する内力 \mathbf{T}_n は、真っ二つにした断面 A の平均的な表面力なので

$$\mathbf{T}_n = \frac{1}{A} \int_A \mathbf{t}_n dA$$

と考えればいい。

このように、ある物質点で定義した表面力はベクトルなのでもちろん三つの座標成分を持つはずだが、その同じ点を含む内部表面の向き \mathbf{n} を変更すると、その成分の値は違って来るだろう。つまり、表面力には、内部表面の向き情報も含めて表現しなければならないことがわかる。そこで図 3.9 には簡単のために2次元で、ある「内部表面」 dA の近傍を描いた。この図の dA は物体内部の微分面積要素であることに注意すること。その単位法線ベクトルが \mathbf{n} である物体内部の任意の位置 \mathbf{x} に定義した微分表面要素に表面力 $\mathbf{t}_n(\mathbf{x})$ が発生している状況に対し、図示したような $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$ で表示したその座標軸方向成分の単位面積当たりの力成分を定義しよう。このとき σ_{11} と σ_{12} を定義した「辺」の面積が $n_1 dA$ であることに注意しよう。ここは初学者にはちょっと難しいからゆっくり考えて欲しい。さて、いずれの力も単位面積当たりの力であることに注意すると、 x_1 と x_2 の座標軸方向の力のつり合いが

$$dA(t_n)_1 = n_1 dA \sigma_{11} + n_2 dA \sigma_{21}, \quad dA(t_n)_2 = n_1 dA \sigma_{12} + n_2 dA \sigma_{22}$$

¹² これを応力ベクトルと呼ぶこともあるが、次に定義する応力テンソルとの区別を明らかにするために、この文書ではそう呼ばないことにした。

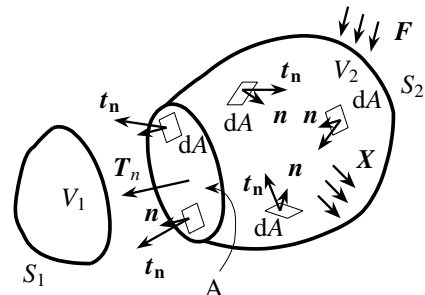


図 3.8 内部表面と表面力ベクトル

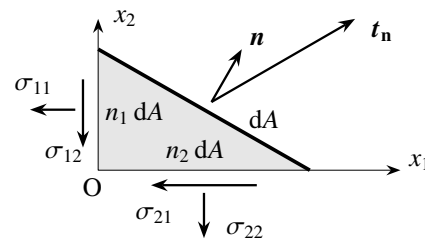


図 3.9 内部表面上の表面力と応力テンソル

のように、それぞれの内力に面積を乗じて算定される力のつり合いになるから、結局、表面力ベクトルの各成分がその面の方向に依存した三つの成分 σ_{ji} を持つことになり

$$(t_n)_1 = n_1 \sigma_{11} + n_2 \sigma_{21}, \quad (t_n)_2 = n_1 \sigma_{12} + n_2 \sigma_{22}$$

という関係になる。つまり

$$(t_n)_i = \sum_{j=1}^2 n_j \sigma_{ji} \quad (i = 1, 2) \tag{3.18}$$

によって重要かつ基本的な内力成分 σ_{ij} を定義する。このように、表面力 $t_n(x)$ には面 n の情報と座標方向の圧力（応力）の情報の両方が含まれていることがわかる。この $\sigma(x)$ を応力テンソルと呼び、上のそれぞれの成分を応力テンソル成分と呼ぶ。3次元の場合に一般化すると

$$(t_n(x_1, x_2, x_3))_i = \sum_{j=1}^3 n_j(x_1, x_2, x_3) \sigma_{ji}(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3) \tag{3.19}$$

が応力テンソルの定義式である。この定義式を **Cauchy** の定理と呼ぶこともある。この式 (3.19) を直接表記あるいは行列表記し

$$t_n(x) = n(x) \cdot \sigma(x), \quad \{t_n\} = \left(\sigma \right)^T \{n\}$$

と考え、応力テンソルをベクトル間の写像として定義する人もいるようだ。第1式のドットはベクトルの内積と同じようなアクションを示す。このように応力¹³はある面の外向き法線ベクトルと関連させて定義されるため、その正の向きは内部表面の向きに依存している。これについては次節で定義する。応力成分 σ_{ij} のうち、内部表面の法線方向 ($i = j$) 成分を直応力と呼び、接線方向 ($i \neq j$) 成分をせん断応力と呼ぶ。

ここまでの図 3.9 や式 (3.18) で用いた応力テンソルの成分の定義、つまり添え字の規則については、まだ明確にしていなかった。これは図 3.10 のようにするのが通例である。法線 n を持つ面に発生する表面力ベクトルを t_n と定義したが、特殊な例として座標の単位ベクトル方向を法線とする微分表面要素を物体内部に設定する。例えば e_2 方向あるいは e_3 方向を法線とする面に生じた表面力ベクトルを、図示したようにそれぞれ t_2 あるいは t_3 と表そう。そこで、このベクトルの各座標方向成分を

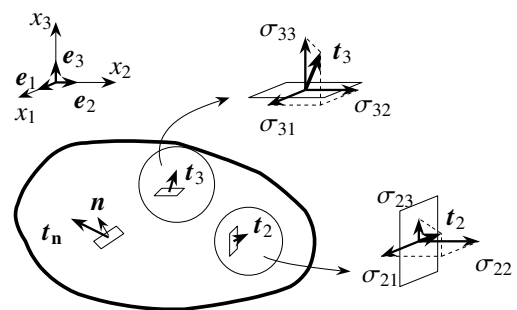


図 3.10 応力テンソル成分の定義

$$t_2 = \sum_{j=1}^3 \sigma_{2j} e_j, \quad t_3 = \sum_{j=1}^3 \sigma_{3j} e_j$$

のように分解して、その成分を σ_{2j} あるいは σ_{3j} ($j = 1, 2, 3$) と定義することにする。すなわち、一般的には

$$t_i(x) = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(x) e_j \tag{3.20}$$

となる。したがって σ_{ij} の添え字のうち、前の添え字 i が表面力ベクトルを定義する物体内の面の法線方向を、後ろの添え字 j が応力成分の力の向きを表している¹⁴ことに注意すべきである。もちろん後述のように、多くの場合応力テンソルは対称テンソルなので、ここに明記したような添え字の区別が重要になることは無いが、

¹³ この文書では「応力度」という unnecessary 表現は用いない。応力そのものが元々単位面積当たりの向きを持った intensity であるから、それを積分した断面力等は「一般化された応力」あるいは「合応力」と呼べば済むからである。同じような意味で、よく「応力ベクトル」と呼ばれる量は英語の 'traction' なので、「表面力ベクトル」と呼ぶことにしている。

¹⁴ 教える機関や教科書によっては逆の順番で定義されていることもあるので注意すること。多分、京大系と東大系が逆だったと思う。

偶応力や分布モーメントが存在する場合 [61], あるいは大変形問題を対象とする場合には, この区別が重要になることがあるので十分注意する必要がある。

ところで, ストレス (応力) という言葉について文献 [122] に面白い記述がある。それを引用すると次のように (原文縦書き) なる。

まず、ストレスとは何か。言葉本来の意味としては、刺激、もしくは固くしめつけることでありますね。〈中略〉

力学のほうでは、物体に外から力が加えられた時、その内部に生じる歪^{ゆが}みをストレスと呼んでおりますね。

その内部に生じる歪みという意味を、カナダの病理学者ハンス・セリエが医学に導入いたしました。これがストレス学説でありまして、〈後略〉

これは確かに間違った記述である。ただ我々にとっても医学用語としての「ストレス」の感覚的認識は、身体の中の何らかの (精神的なものも含めて) 歪^{ゆが}みになってないだろうか。筋肉の動作や図 3.7 を見ると、もしかしたらそれが本質かもしれない。実際には変形を伴わない応力には意味が無く、裏返して考えると『「力」の次元を持った「変形 (歪^{ゆが}み)」』が応力の真義なのかもしれない。呵呵。閑話休題。☆

3.3.3 応力で表したつり合い

上式 (3.19) で定義された物体内部の応力成分は, 外力が作用して静止した状態の物体内のすべての「点」においてもつり合い状態にあるはずだ。それが局所的なつり合いだ。そこで簡単のために再度 2 次元で描いた図 3.11 を用いて, そのつり合い式を誘導する。前節で定義したように応力は作用面外向き方向が正であったため, この図のように, 面の外向き法線が座標の正方向を向いている面 (正の面) では座標の正方向成分を正の応力成分とする。逆に負の面では作用反作用の原理から, 座標の負方向成分を正の応力成分と定義する。「表面」が指定されて初めて定義できるはずの応力が任意の物質「点」 (面積が無い)

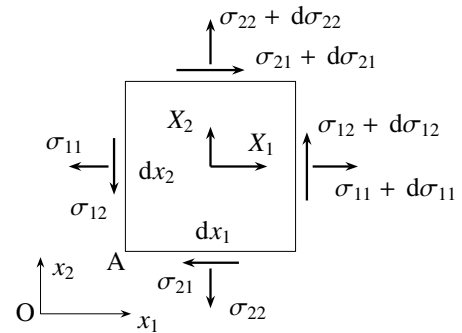


図 3.11 応力テンソル成分と外力の関係

でつり合うというところが, 連続体力学を理解するときの次の難所だろうが, この図のように小さい領域を考えたあとに dx_i を零にする極限をとるという, 数理モデル上の標準的な手法だということを理解して欲しい。

応力が単位面積当たりの力であることを念頭に置いて, この図の奥行き方向の厚さを 1 だと考えれば, 例えば x_1 方向の力のつり合いは

$$dx_2 (\sigma_{11} + d\sigma_{11}) - dx_2 \sigma_{11} + dx_1 (\sigma_{21} + d\sigma_{21}) - dx_1 \sigma_{21} + X_1 dx_1 dx_2 = 0$$

であることから, $dx_1 dx_2$ で除して $dx_i \rightarrow 0$ とすると, つり合い式は

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} + X_1 = 0$$

となる。ここに X_1 は体積力ベクトル \mathbf{X} の x_1 方向成分で, 単位体積当たりに作用する力の次元を持ち, 例えば自重のようなものをモデル化したものだ。 x_2 方向も同様に誘導できることから, 結局

$$\sum_{j=1}^2 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad (i = 1, 2) \quad (3.21)$$

が2次元の応力成分で表したつり合い式になる。3次元の場合は

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x})}{\partial x_j} + X_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{直接表記すると} \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) + \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (3.22a, b)$$

がそのつり合い式である。ここの応力成分の添え字の順番にも注意して欲しい。多くの文献では、この順番が逆になっているが、それは次に求めるモーメントのつり合いが成立する場合にのみ正しい。

一方、図 3.11 の正方形の左下角の点 A 回りのモーメントのつり合いを考えると

$$\begin{aligned} & \frac{dx_1}{2} \{dx_1 (\sigma_{22} + d\sigma_{22}) - dx_1 \sigma_{22}\} - \frac{dx_2}{2} \{dx_2 (\sigma_{11} + d\sigma_{11}) - dx_2 \sigma_{11}\} \\ & - dx_2 dx_1 (\sigma_{21} + d\sigma_{21}) + dx_1 dx_2 (\sigma_{12} + d\sigma_{12}) + \frac{dx_1}{2} dx_1 dx_2 X_2 - \frac{dx_2}{2} dx_1 dx_2 X_1 = 0 \end{aligned}$$

となることから、辺々 $dx_1 dx_2$ で除して $dx_i \rightarrow 0$ とすると $\sigma_{21} = \sigma_{12}$ となる。すなわち3次元のモーメントのつり合い式は

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \sigma_{ji}(\mathbf{x}) \quad (i \neq j, i, j = 1, 2, 3) \quad (3.23)$$

である。式(3.6)で定義されたひずみテンソル成分はその定義によって自動的に対称になっていたが、応力テンソル成分はモーメントのつり合いから対称になると結論付けられる。ただし、大きな変形を扱う場合に用いる応力テンソルには対称にはならないもの(第1 Piola-Kirchhoff 応力 [175])も存在するし、偶応力や分布モーメントが存在する場合 [61] には式(3.23)は成立しないので注意が必要である。

3.3.4 境界条件

図 3.8 のような物体のつり合い状態を解析するには式(3.22)の微分方程式を物体内 V で解けばいいわけ¹⁵だが、その場合には、その物体の外部表面 $S \equiv \partial V$ で境界条件を適切に与える必要がある。そうでないと解が唯一には決まらないか、あるいは存在しなくなるからだ。境界条件には主に2種類の条件がある。一つはその表面の運動を規定するものであり、もう一つはその表面に作用している外力を与えるものである。前者は表面の変位を与えればいいから変位の境界条件と呼ばれ¹⁶れ、後者は表面近傍で表面¹⁷外力ベクトル \mathbf{F} と応力がつり合うようにすればいいから力の境界条件と呼ばれ¹⁸る。具体的にある適切な座標系成分を用いた式で表現すると、表面の $i = 1, 2, 3$ 成分を用いた

$$u_i = \bar{u}_i \quad \text{あるいは} \quad F_i = \sum_{j=1}^3 n_j \sigma_{ji} \quad (3.24a, b)$$

のどちらかが与えられることになる。ここに \bar{u}_i は境界で与える変位成分の値である。また式(3.24b)は、内部の仮想表面で立てた Cauchy の定理式(3.19)を外部(境界)表面で立て直したもので、この \mathbf{n} は境界表面の外向き法線単位ベクトルである。ただし、 $\bar{\mathbf{u}}$ も \mathbf{F} も全座標成分を同時に与える必要は無いが、解の存在と唯一性の条件から上式の両方の同じ座標成分を同時に規定することはできない。図 3.12 の表面 S_2 では剛板を矢印の方向に強制変位させた状況なので、式(3.24a)のすべての i 成分が与えられた場合である。特に固定($\bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$)された表面 S_1 では式(3.24a)の特殊な場合の $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ となる。また表面 S_3 の条件が式(3.24b)である。これに

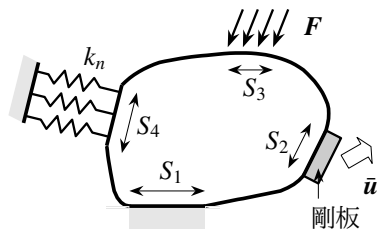


図 3.12 代表的な境界条件

¹⁵ 次節の構成方程式が定義されていないのでまだ解ける準備は整っていないし、変位の境界条件の導入には疑問を感じるかもしれないが、境界条件だけは完全な形で定義しておく。境界値問題については第3.6節で例示する。

¹⁶ 幾何学的境界条件あるいは Dirichlet 条件または第1種条件・本質的境界条件とも呼ぶ。

¹⁷ 物体表面に作用する外力と内部表面の表面力とを混同することは無いので、簡単のために外力も表面力と呼ぶことが多い。

¹⁸ 力学的境界条件あるいは Neumann 条件または第2種条件・自然境界条件とも呼ぶ。

対し, $S_1 \sim S_4$ 以外の表面では変位も外力も規定されていないので, 式 (3.24b) の特殊な場合の $\sum_{j=1}^3 n_j \sigma_{ji} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) で規定される。

式 (3.24) の二つが基本的な境界条件であるが, それを組み合わせられた条件もあり得る。それは第3種の境界条件と呼ばれ¹⁹ることがあり, 弾性的に支持されている表面の条件がその代表である。具体例は図 3.12 の表面 S_4 の状況のように, 単位面積当たりの法線方向 \mathbf{n} の反力バネ定数が k_n のバネを壁との間に挟んだもので

$$k_n u_n + t_n = 0, \quad t_t = 0, \quad u_n \equiv \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}, \quad t_n \equiv \mathbf{t} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{t} \equiv \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad t_t \equiv \mathbf{t} - t_n \mathbf{n} \quad (3.25a, b, c, d, e, f)$$

あるいは

$$k_n \sum_i u_i n_i + \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji} n_i = 0, \quad \sum_j n_j \sigma_{ji} - n_i \sum_j \sum_k n_j \sigma_{jk} n_k = 0$$

という条件式で規定することができる。ここに u_n は表面の外向き法線 \mathbf{n} 方向の変位成分であり, t_n は表面力 \mathbf{t} の外向き法線方向成分である。また t_t は \mathbf{t} の接線方向成分である。

演習問題 3-2

- 式 (3.25) の第3種の境界条件で表現できる境界表面の弾性壁に摩擦があり, その表面の摩擦抵抗を単位面積当たりの接線方向の反力バネ定数 k_t でモデル化できるとき, 接線方向の境界条件を求めよ。

3.3.5 外力のつり合いと内力のつり合い — 巨視的なつり合いと局所的なつり合い

式 (3.22) (3.23) は物体中のある点²⁰で成立する内力のつり合い式なので, この節タイトルに「局所的なつり合い」と書いたが, 初学者には少しわかり難かったかもしれない。そこで第2章で静定トラスや梁を解いたときにまず支点反力を求めたように, 外力同士の力のつり合いを考えて, それと内力 (応力) のつり合い式 (3.22) (3.23) との関係を調べておこう。ある物体の表面 S に単位表面当たり \mathbf{F} という外力表面力 (反力も零外力も含む) が作用し, 物体内部 V の単位体積当たりの分布外力が \mathbf{X} である場合, 物体全体の外力同士の巨視的なつり合い式は

$$\int_S \mathbf{F} dS + \int_V \mathbf{X} dV = \mathbf{0} \quad \text{つまり} \quad \int_S F_i dS + \int_V X_i dV = 0$$

である。積分で書かれるとわからないかもしれないが, 静定トラスや梁の反力を求めるときの力のつり合い式のことである。この第1項の F_i に力の境界条件式 (3.24b) を代入すると

$$\int_S \sum_j n_j \sigma_{ji} dS + \int_V X_i dV = 0$$

となる。第1項に任意のテンソル成分 $T_{mijk\dots}$ に対する Gauss の発散定理

$$\int_S \sum_m n_m T_{mijk\dots} dS = \int_V \sum_m \frac{\partial T_{mijk\dots}}{\partial x_m} dV \quad (3.26)$$

を適用すると, 上式は

$$\int_V \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV + \int_V X_i dV = 0 \quad \rightarrow \quad \int_V \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i \right\} dV = 0$$

¹⁹ Robin 条件あるいは第3種条件または混合条件とも呼ぶ。

²⁰ 「点」で応力を定義したのだろうか・・・と悩むと眠れなくなるのでやめた方がいい。例えば図 3.11 は「点」ではなかったのではないかと思っただ人は実は正しい。しかしそのあと, $dx_i \rightarrow 0$ という操作をして初めて力のつり合い式を微分方程式で表すことができたことを思い出せば, この「点」の意味が少しはわかるかもしれない。否! 原子と原子の間で $dx_i \rightarrow 0$ になると? うん, そこが連続体モデル。

となり、被積分関数は応力のつり合い式(3.22)に一致する。つまり、式(3.22)は物体 V の中の任意の点 \mathbf{x} において局所的に成立すべきつり合い式であることがわかる。

同様に、全外力のモーメントの巨視的なつり合いは

$$\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{F} dS + \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{X} dV = \mathbf{0} \quad \text{あるいは} \quad \int_S \sum_j \sum_k e_{ijk} x_j F_k dS + \int_V \sum_j \sum_k e_{ijk} x_j X_k dV = 0$$

と表される。ここに e_{ijk} は交代記号(テンソル成分ではない)と呼ばれ

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{もし}(ijk) \text{が}(123) \text{の偶置換である場合} \\ -1 & \text{もし}(ijk) \text{が}(123) \text{の奇置換である場合} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (3.27)$$

という値を持つ。偶置換とは (ijk) の組が (123) (231) (312) の順の組のいずれかの場合で、奇置換は (321) (213) (132) の順の組のいずれかの場合である。これはベクトルの外積を成分表示する場合に便利な記号である。さて、上式第1項の F_i に再度力の境界条件式(3.24b)を代入すると

$$0 = \int_S \sum_j \sum_k \sum_l e_{ijk} x_j n_l \sigma_{lk} dS + \int_V \sum_j \sum_k e_{ijk} x_j X_k dV$$

となるので、ここでもまた式(3.26)のGaussの発散定理を第1項に適用すれば

$$= \int_V \sum_j \sum_k \sum_l e_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \sigma_{lk}) dV + \int_V \sum_j \sum_k e_{ijk} x_j X_k dV$$

すなわち

$$= \int_V \sum_j \sum_k e_{ijk} \left(\sigma_{jk} + \sum_l x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) dV + \int_V \sum_j \sum_k e_{ijk} x_j X_k dV$$

を得る。この第1項の被積分関数の第2項につり合い式(3.22)を代入すると、結局

$$= \int_V \sum_j \sum_k e_{ijk} (\sigma_{jk} - x_j X_k) dV + \int_V \sum_j \sum_k e_{ijk} x_j X_k dV = \int_V \sum_j \sum_k e_{ijk} \sigma_{jk} dV$$

を得る。さらに交代記号の性質を活かせば

$$\begin{aligned} &= \int_V \sum_j \sum_k \left(\frac{1}{2} e_{ijk} \sigma_{jk} + \frac{1}{2} e_{ikj} \sigma_{kj} \right) dV = \int_V \sum_j \sum_k \left(\frac{1}{2} e_{ijk} \sigma_{jk} - \frac{1}{2} e_{ijk} \sigma_{kj} \right) dV \\ &= \int_V \sum_j \sum_k \frac{1}{2} e_{ijk} (\sigma_{jk} - \sigma_{kj}) dV \end{aligned}$$

となることから、応力で表したモーメントの局所的なつり合い式(3.23)を被積分関数に得る。このように、「外力の巨視的なつり合い式」を表す積分式の被積分関数が実は「内力の局所的なつり合い式」であることから、物体中のある点 \mathbf{x} (ある微分体積 dV)のつり合い式が式(3.22)(3.23)であることも少しは理解できたのではないだろうか。

3.3.6 応力の主方向と不変量

(1) 主応力

ひずみの説明に使った写真3.2からは、ひずみテンソルには主方向があり、任意のひずみ状態はその主方向への三つの伸び縮み成分だけで表現できることがわかっていた。それならば同様に、応力テンソルにもその主

方向と主応力がありそうだ。つまり、ある向き内部表面にはせん断応力成分は発生しておらず、その面の法線方向のみの直応力成分（圧縮や引張）しか生じていない面がありそうだ。そのような面の法線方向を応力の主方向と呼んでいる。主方向の単位ベクトルを $\tilde{\mathbf{n}}$ としたとき、その面の表面力はこの法線方向と平行になるはずだから、式(3.19)より

$$\mathbf{t}_n \parallel \tilde{\mathbf{n}} \quad \rightarrow \quad (t_n)_i = \sigma \tilde{n}_i \quad \rightarrow \quad (t_n)_i = \sum_{j=1}^3 \tilde{n}_j \sigma_{ji} = \sigma \tilde{n}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

という関係にあるはずだ。ここに \parallel は平行を意味する記号であり、スカラー係数 σ はその主方向の応力成分の大きさを主応力と呼ばれる。すなわち、上式から

$$\left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\} = \sigma \left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\}$$

あるいは

$$\sum_j \tilde{n}_j (\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ji}) = 0 \quad \rightarrow \quad \left(\left(\sigma \right)^T - \sigma \left(I_3 \right) \right) \left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\} = \left\{ 0 \right\}$$

を満足する主方向 $\tilde{\mathbf{n}}$ と主応力 σ が存在すると考えられる。ここに $\left(I_3 \right)$ は 3×3 の単位行列である。式(3.23)のモーメントのつり合いより、応力を行列表示したものは対称行列になることから、上の式の一番右の行列表示式では転置記号が要らなくなって

$$\left(\left(\sigma \right) - \sigma \left(I_3 \right) \right) \left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (3.28)$$

と書いてもいい。この式(3.28)は行列 $\left(\sigma \right)$ の固有値を σ としたときの標準的な固有値問題を形成しており、その固有ベクトル方向が主方向になっていることがわかる。したがって主応力 σ (固有値)は

$$\det \left(\left(\sigma \right) - \sigma \left(I_3 \right) \right) = 0 \quad (3.29)$$

で決定され、その結果を上式(3.28)に代入し直せば主方向 $\tilde{\mathbf{n}}$ を求めることができる。 $\left(\sigma \right)$ が対称行列なので、一般に主応力は実数で三つ存在する。

例えば2次元で計算してみよう。式(3.28)は

$$\left(\left(\begin{array}{cc} \sigma_{11} & \sigma_{21} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{array} \right) - \sigma \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{array} \right) \right) \left\{ \begin{array}{c} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\}, \quad \left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{n}_1 \\ \tilde{n}_2 \end{array} \right\}, \quad (\tilde{n}_1)^2 + (\tilde{n}_2)^2 = 1$$

となり、式(3.29)の最終的な形

$$\sigma^2 - (\sigma_{11} + \sigma_{22})\sigma + (\sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21}) = 0 \quad (3.30)$$

が二つの主応力 σ_I, σ_{II} を決定する。通常、正の大きい方から順番に I, II とする。これを上式に代入し直せば

$$\frac{\tilde{n}_2}{\tilde{n}_1} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma - \sigma_{22}} = \frac{\sigma - \sigma_{11}}{\sigma_{21}} \quad (3.31)$$

という関係になるので、このいずれかの式の σ に主応力 σ_I あるいは σ_{II} を代入すれば、それぞれの主方向 $\tilde{\mathbf{n}}_I, \tilde{\mathbf{n}}_{II}$ の座標成分を求めることができる。ここでは $\left\{ \tilde{\mathbf{n}} \right\}$ を単位ベクトルとしているので、唯一に決定することができる。

もし主応力を決定する式(3.29)が重根を持つ場合、少なくとも2方向の主応力が等しくなり、主方向は唯一には決定できなくなる。2次元の場合のひずみで考察するとわかり易いが、そのような場合には写真3.2の変

形後の楕円が円のままになっていることに相当する。それはすべての方向に一樣に伸びあるいは縮みが生じている状態に等しい。そして円の場合には、楕円の長短軸に相当する主方向を任意の（しかも直交しなくてもいい）方向にとることができるので、その主方向は唯一には決定できないわけである。応力の場合も同様で、重根の場合（面内あるいは3次元的に等方応力状態：静水圧状態が3次元等方状態の例）には、平面的か3次元的に一樣な引張か圧縮が生じているため、主方向を唯一には決定できない。

さて、異なる二つの主応力と主方向は例えば行列表示ではそれぞれ

$$\left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{n}_I \right\} = \sigma_I \left\{ \tilde{n}_I \right\}, \quad \left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{n}_{II} \right\} = \sigma_{II} \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}$$

を満足している。この第1式に左から $\left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T$ を、第2式に左から $\left\{ \tilde{n}_I \right\}^T$ を乗じると、それぞれ

$$\left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{n}_I \right\} = \sigma_I \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left\{ \tilde{n}_I \right\}, \quad \left\{ \tilde{n}_I \right\}^T \left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{n}_{II} \right\} = \sigma_{II} \left\{ \tilde{n}_I \right\}^T \left\{ \tilde{n}_{II} \right\} \quad (*)$$

となる。これはスカラーなので、第2式の転置は行列演算の規則を用いれば

$$\left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left(\sigma \right) \left\{ \tilde{n}_I \right\} = \sigma_{II} \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left\{ \tilde{n}_I \right\}$$

とも書くことができるから、上式(*)₁からこの式を辺々引き算して、応力の対称性を利用すると次式のように左辺は零になる。よって、以下に示すようにその右辺も零になるので

$$\left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left(\sigma \right)^T \left\{ \tilde{n}_I \right\} - \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left(\sigma \right) \left\{ \tilde{n}_I \right\} = (\sigma_I - \sigma_{II}) \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left\{ \tilde{n}_I \right\} \rightarrow 0 = (\sigma_I - \sigma_{II}) \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left\{ \tilde{n}_I \right\}$$

という関係を得る。したがって、主応力同士が異なる $\sigma_I \neq \sigma_{II}$ の場合には

$$0 = \left\{ \tilde{n}_{II} \right\}^T \left\{ \tilde{n}_I \right\}$$

が結論付けられる。つまり異なる主応力に対応する主方向同士は直交している。3次元の一般的な表現をするなら、異なる主応力に対応する主方向同士は

$$\tilde{n}_i \cdot \tilde{n}_j = 0 \quad (i \neq j; \quad i, j = I, II, III) \quad (3.32)$$

を満足し、お互いに直交する。ただし、二つの主応力が同じ場合には、主方向を唯一に定めることはできないが、直交する方向に選ぶことはできるだろう。

(2) 応力行列の一表現

式(3.28)をじいっと眺めていると、次のように応力行列を表示できることがわかる（人はたいしたものです。第1著者は逆算。呵呵）。テンソルのスペクトル表示と呼ばれることもある。

$$\left(\sigma \right) = \sum_{i=I}^{III} \sigma_i \left\{ \tilde{n}_i \right\} \left\{ \tilde{n}_i \right\}^T = \left(\left(\left\{ \tilde{n}_I \right\} \right) \left(\left\{ \tilde{n}_{II} \right\} \right) \left(\left\{ \tilde{n}_{III} \right\} \right) \right) \begin{bmatrix} \sigma_I & \mathbf{0} \\ & \sigma_{II} \\ \mathbf{0} & & \sigma_{III} \end{bmatrix} \left(\left(\left\{ \tilde{n}_I \right\} \right) \left(\left\{ \tilde{n}_{II} \right\} \right) \left(\left\{ \tilde{n}_{III} \right\} \right) \right)^T \quad (3.33)$$

つまり、式(3.33)の両辺に $\left\{ \tilde{n}_j \right\}$ を乗じると

$$\left(\sigma \right) \left\{ \tilde{n}_j \right\} = \sum_{i=I}^{III} \sigma_i \left\{ \tilde{n}_i \right\} \left\{ \tilde{n}_i \right\}^T \left\{ \tilde{n}_j \right\}$$

となるものの、右辺の右端の内積は式(3.32)の直交性を考えると $i = j$ のとき以外は零になるため、結局上式は

$$\left(\sigma \right) \left\{ \tilde{n}_j \right\} = \sigma_j \left\{ \tilde{n}_j \right\} \quad (j = \text{I, II, III})$$

となり、式(3.28)に帰着する。意味を考えてみよう。

応力テンソルは六つの座標成分の組で表すこともできるが、その六つの値は座標系のとり方によって違ってくる。しかし上式のように、三つの固有値とそれぞれに対応する三つの主方向ベクトル（三つの成分が独立した単位直交ベクトルの組）との組み合わせでも表現できるということは、座標系とは全く無関係な六つの量で応力テンソルが決定できることを示している。これが「テンソル」である由縁ではないだろうか。あるいは式(3.33)を、三つの基底のテンソル積 $\left\{ \tilde{n}_i \right\} \left\{ \tilde{n}_i \right\}^T$ で応力テンソルを分解したときのそれぞれの成分が主応力であると見る人もいるようだ。特に等方材料の抵抗則（応力ひずみ関係）を考える場合には、それは本質的に座標系とは無関係でなければならない²¹から、主応力や主ひずみを用いることもある。

(3) 応力の不変量

上で見たように、ひずみテンソルと同様、応力テンソル成分は用いる座標系のとり方に依存して値は違ってくる。しかし、ある応力状態に対して、その主応力はその物質点における抵抗力の物理的な特性の一つであって、座標のとり方とは全く関係の無い値と向きを持っている。したがって、上式(3.30)の2次方程式の根と係数の関係から得ることができる

$$\text{I}(2 \text{ 次元})_\sigma \equiv \sigma_{11} + \sigma_{22} = \sigma_{\text{I}} + \sigma_{\text{II}}, \quad \text{II}(2 \text{ 次元})_\sigma \equiv \sigma_{11}\sigma_{22} - \sigma_{12}\sigma_{21} = \sigma_{\text{I}}\sigma_{\text{II}} \quad (3.34a, b)$$

で定義した二つの量も、座標系に依存しない量になる。このような量を不変量と呼んでいる。

3次元の一般的な表現を示すと、主応力を決定する式は

$$\sigma^3 - \text{I}_\sigma \sigma^2 + \text{II}_\sigma \sigma - \text{III}_\sigma = 0 \quad (3.35)$$

と書け、それぞれ

$$\text{I}_\sigma = \text{I}_1 \equiv \sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} = \text{tr} \left(\sigma \right) = \sigma_{\text{I}} + \sigma_{\text{II}} + \sigma_{\text{III}}, \quad (3.36a)$$

$$\text{II}_\sigma = \text{I}_2 \equiv \frac{1}{2} \left\{ \left(\sum_{i=1}^3 \sigma_{ii} \right)^2 - \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \sigma_{ji} \right\} = \sigma_{\text{II}} \sigma_{\text{III}} + \sigma_{\text{III}} \sigma_{\text{I}} + \sigma_{\text{I}} \sigma_{\text{II}}, \quad (3.36b)$$

$$\text{III}_\sigma = \text{I}_3 \equiv \det \left(\sigma \right) = \sigma_{\text{I}} \sigma_{\text{II}} \sigma_{\text{III}} \quad (3.36c)$$

が応力の第1~3不変量である。第1不変量は行列表示したときの跡に相当する。これに対応させて、ひずみの不変量も定義できる。このような不変量も、特に等方な材料の抵抗則（応力ひずみ関係）を表現するのに適しており、実際に塑性の基礎式でも用いられている。

演習問題 3-3

3. 次の応力状態(?)における主応力と主方向を求めよ。

$$\left(\sigma \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ MN/m}^2$$

²¹ もちろん、内部に微視構造を持つような異方性材料の場合はその限りではない。

(4) 再び、主ひずみと主方向

さて第3.2.4節では、主ひずみとその方向についての概念だけの説明で終わっていたので、ここでは主応力と同様の求め方と意味を追加説明しておく。ひずみの場合も応力の場合の式(3.28)と同様

$$\left(\left(\epsilon \right) - \epsilon \left(I_3 \right) \right) \left\{ \tilde{n} \right\} = \left\{ 0 \right\} \quad (3.37)$$

のような固有値問題の定式化が可能であり、これを解くことによって三つの固有値つまり主ひずみ ϵ_i とそれぞれに対応した固有ベクトルつまり主方向 \tilde{n}_i ($i=I, II, III$)が求められる。一旦主ひずみと主応力が求められれば、応力の式(3.33)と同様のスペクトル表示ができ

$$\left(\epsilon \right) = \left(\left\{ \tilde{n}_I \right\} \left\{ \tilde{n}_{II} \right\} \left\{ \tilde{n}_{III} \right\} \right) \begin{bmatrix} \epsilon_I & \mathbf{0} \\ \epsilon_{II} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \epsilon_{III} \end{bmatrix} \left(\left\{ \tilde{n}_I \right\} \left\{ \tilde{n}_{II} \right\} \left\{ \tilde{n}_{III} \right\} \right)^T \quad (3.38)$$

という関係が成立する。そして、式(3.13)のひずみ成分の座標変換則を念頭に置いて上式を眺めると、右辺の主ひずみで定義される対角行列の前後にある行列は単なる座標変換行列と解釈できる。つまり

$$\left(T \right) = \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \tilde{n}_I \\ \tilde{n}_{II} \\ \tilde{n}_{III} \end{array} \right] \end{pmatrix}$$

がその座標変換行列になる。結局このひずみ状態は、その変換された座標軸3方向への単純な伸び縮み ϵ_i ($i=I, II, III$)だけの変形状態と等価であることを示している。この単純な伸び縮みが主ひずみであり、変換された座標方向が主方向になる。なお、ひずみの場合も応力と同様の不変量を定義でき、特に第1不変量 I_ϵ は式(3.14)の体積ひずみ

$$\Delta = I_\epsilon \equiv \sum_k \epsilon_{kk} = \epsilon_I + \epsilon_{II} + \epsilon_{III} \quad (3.39)$$

である。

3.3.7 応力成分の座標変換

応力テンソルもひずみテンソルと同様、同じ状態であってもその座標方向成分は、異なる座標系に対しては異なる値を持つ。式(3.11)の座標変換行列の定義から

$$\mathbf{e}_k = \sum_i T_{ik} \bar{\mathbf{e}}_i, \quad \bar{\mathbf{e}}_k = \sum_i T_{ki} \mathbf{e}_i, \quad \bar{n}_l = \sum_j T_{lj} n_j$$

という関係があるので、式(3.19)のCauchyの定理より

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_n &= \sum_i (t_n)_i \mathbf{e}_i = \sum_i \left\{ \sum_j n_j \sigma_{ji} \right\} \mathbf{e}_i \\ &= \sum_k (\bar{t}_n)_k \bar{\mathbf{e}}_k = \sum_k \left\{ \sum_l \bar{n}_l \bar{\sigma}_{lk} \right\} \bar{\mathbf{e}}_k = \sum_i \left\{ \sum_j n_j \left(\sum_k \sum_l \bar{\sigma}_{lk} T_{lj} T_{ki} \right) \right\} \mathbf{e}_i \end{aligned}$$

という関係を得る。結局ひずみの座標変換則と同じく

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \bar{\sigma}_{kl} T_{ki} T_{lj} \quad (3.40)$$

を得る。あるいは行列表示して

$$\left(\sigma \right) = \left(T \right)^T \left(\bar{\sigma} \right) \left(T \right), \quad \left(\bar{\sigma} \right) = \left(T \right) \left(\sigma \right) \left(T \right)^T \quad (3.41a, b)$$

と表現できる。2階のテンソル成分はすべて同じ座標変換則に従う。

この応力の座標変換則を踏まえると、前節の主ひずみの場合と同様式(3.33)の意味はもう少し理解し易くなるかもしれない。その式(3.33)の左右から、主方向ベクトルでできた座標変換行列を乗じると

$$\left(\left\{ \begin{matrix} \tilde{n}_I \\ \tilde{n}_{II} \\ \tilde{n}_{III} \end{matrix} \right\} \right)^T \left(\sigma \right) \left(\left\{ \begin{matrix} \tilde{n}_I \\ \tilde{n}_{II} \\ \tilde{n}_{III} \end{matrix} \right\} \right) = \begin{bmatrix} \sigma_I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \sigma_{II} \\ \mathbf{0} & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

という表現も可能になる。左辺は、応力テンソルの主方向を基底ベクトルとする座標方向に、その応力テンソルを変換したものだ。右辺は、その座標系では直応力成分しか生じていないことを示している。この式²²の方が、主応力の意味を理解し易い人は多いかもしれない。

演習問題 3-4

4. x_1 方向の直応力が $\sigma_{11} = \sigma_0$ で他のすべての応力成分が零である 1 軸引張状態を、 x_3 軸の反時計回りに 45 度回転させた座標系の成分で表示せよ。

3.3.8 静水圧成分とせん断応力成分

ひずみテンソルが体積ひずみ成分と偏差ひずみ成分（せん断ひずみ成分）に分解できたように、応力テンソルも、平均応力と偏差応力の 2 成分に分解できる。それを定義しておこう。まず、平均応力を

$$\sigma_{AVE} \equiv \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) = \frac{1}{3} \mathbf{I}_\sigma \quad (3.42)$$

で定義する。引張を正にした静水圧と考えていい。つまり、水中のある深さにおける応力状態はすべての方向から同じ圧力を受けていて、それを静水圧と称していることから、この定義がある。式(3.36)より、平均応力の 3 倍は応力の第 1 不変量である。

応力テンソル成分からこの平均応力成分を取り除いた部分を、式(3.15)と同様偏差応力テンソル成分と呼び

$$\sigma'_{ij} \equiv \sigma_{ij} - \sigma_{AVE} \delta_{ij} \quad (3.43)$$

で定義する。偏差ひずみと同様、この偏差応力テンソル成分もある物質点に発生している抵抗力のうちのせん断応力成分に相当するが、それについては次節の式(3.53)(3.54)前後でも具体的に説明する。

3.4 変形と内力の関係 — 材料特性の記述の仕方

3.4.1 構成方程式

さて図 3.7 を用いて説明したように、材料の抵抗特性を変形そのものではなく抵抗力という内力を通して表現するために、前節では応力という概念を導入した。したがって、材料本来の変形による抵抗特性を、この内力と変形すなわち応力とひずみの関係で表すことができるようになった（図 3.7 の左側の斜め矢印 [B]）。材料

²² 大学 1 年の線形代数の講義で「行列の対角化」といったことを習ったと思うが、ひずみの場合の式(3.38)と同様、まさにこの式もそれに相当する。抽象的な数学の講義は難しかっただろうが、本当は大事なことなのであり、物理的な意味もあるのだ。

特性を表すこのような関係式を構成方程式あるいは構成則と呼ぶ。コンクリート屋さんは随分前からだが、近年では鋼構造解析屋さんの間でも、この「構成関係」という言葉を材料本来の特性のみを記述するものとしてではなく、構造系の見かけ上の抵抗力（合応力）と変形の関係に対しても頻繁に用いるようになってきているので、初学者は注意しないといけない。終局強度解析に断面力を用いるからだろうが、どの部分が系の境界値問題としての挙動で、どの部分が材料本来の特性なのかについて、常に頭の中では整理・区別しておくことが重要である。この節では本質的な構成則つまり材料本来の抵抗力の記述法について説明する。

3.4.2 Hooke の等方弾性体

(1) Hooke の法則

最も基本的な材料特性は、理科でもよくモデルとして用いたバネのように、外力を与えて変形させたあとで外力を取り除くと元の形に完全に戻るような性質だろう。そういった可逆的な材料特性を弾性と呼んでいる。さらに抵抗力が変形に線形比例して生じる場合には線形弾性と呼ぶ。また、例えば引張った方向によらずその抵抗特性が同じになる等、材料特性が方向性を持たない性質を等方性と呼ぶ。

この最も単純で基本的な等方弾性体の主な変形抵抗特性は、第 3.2.6 節で定義したような、i) 体積変形による抵抗と、ii) せん断変形による抵抗とに分解して表現できる、とは考えられないだろうか。つまり、まず式 (3.14) の体積ひずみに比例して式 (3.42) で定義した平均応力が生じ、あるバネ定数 K を通して

$$\sigma_{\text{AVE}} = K \Delta \quad (3.44)$$

という抵抗特性を持つと考えるのである。このバネ定数 K は体積弾性係数と呼ばれる材料定数である。さらにせん断変形についても、式 (3.15) (3.43) で定義されたひずみと応力の偏差成分同士が、等方性のためにどの成分の間でも同じ比例関係にあるものとしてモデル化する。つまり、あるバネ定数 G を通して

$$\sigma'_{ij} = 2G \epsilon'_{ij} \quad (3.45)$$

という抵抗特性を持つと考えるのだ。こちらのバネ定数 G はせん断弾性係数と呼ばれる材料定数である。

式 (3.44) (3.45) をそれぞれ式 (3.43) の右辺と左辺に代入し、さらに式 (3.15) を考慮して整理すると、応力ひずみ関係を

$$\sigma_{ij} = 2G \epsilon_{ij} + \left(K - \frac{2G}{3} \right) \delta_{ij} \Delta = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kk} \quad (3.46)$$

と書くことができる。ここに δ_{ij} は式 (3.9) で定義した Kronecker のデルタであり、 μ と λ は

$$\mu = G, \quad \lambda = K - \frac{2G}{3} \quad (3.47a, b)$$

と定義され、**Lamé 定数**と呼ばれている。このような応力ひずみ関係を **Hooke の法則**と呼ぶ。構造力学ではよく **Young 率**²³ E と **Poisson 比** ν の方を用いるので、上で用いた定数との主な関係を示しておく。

$$E = \frac{9KG}{3K + G} = 2G(1 + \nu), \quad \nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} = \frac{E}{2G} - 1, \quad \lambda = \frac{2G\nu}{1 - 2\nu}, \quad K = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.48a, b, c, d)$$

²³ 道路橋示方書 [176] で「Young 係数」を使っているからだろうが、某検索からの印象では、それは主に建築・木材・コンクリート・橋梁の分野の用語で、工学全般では「Young 率」の方が多そうだ。確かにせん断弾性係数との整合性からは「係数」の方に分がありそうだが、より広い分野の歴史的な呼び方は「率」だろう。そのせん断弾性係数も古くは「剛性率」とか「せん断弾性率」とも呼んでいた。著者が「応力度」を嫌う理由は同じ人が「応力」も使うからであって、歴史的に古い用語だから嫌いなわけではない。現在でも広い分野の共通語であること等からこの文書では「率」の方を採用することにした。一部の方々にとって道路橋示方書は金科玉条のようなものかもしれないが、ある査読意見の「Young 係数に『すべき』」というのはいかがなものかと感じたので、この脚注を追加した。

これ以外の関係は文献 [26] 等を参照のこと。鋼の場合、 $E = 205 \text{ GN/m}^2$ (kN/mm^2), $\nu = 0.3$ 程度の値を持つ。最も基本的な材料定数の K と G の物理的な意味は上の二つの式 (3.44) (3.45) から明らかだが、 E と ν の意味は式 (3.60) の方がわかり易いだろう。

式 (3.46) は、式 (3.9) の Kronecker のデルタを用いて一般に

$$\sigma_{ij} = \sum_m \sum_n C_{ijmn} \epsilon_{mn}, \quad C_{ijmn} \equiv \mu (\delta_{im} \delta_{jn} + \delta_{in} \delta_{jm}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{mn} \quad (3.49a, b)$$

と表されることが多い。これは初学者には難しい²⁴だろうが早めに慣れて欲しい。この係数 C_{ijmn} を、弾性係数テンソルあるいは弾性テンソル \mathbf{C} の成分と呼ぶ。あるいは、応力成分とひずみ成分を適当な 6 行 1 列の行列で

$$\left\{ \sigma \right\} \equiv \left[\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{31} \sigma_{12} \right]^T, \quad \left\{ \epsilon \right\} \equiv \left[\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33} \epsilon_{23} \epsilon_{31} \epsilon_{12} \right]^T \quad (3.50a, b)$$

と定義した上で

$$\left\{ \sigma \right\} = \left(\tilde{\mathbf{C}} \right) \left\{ \epsilon \right\} \quad (3.51)$$

と表すことがある。ここに弾性係数行列 $\left(\tilde{\mathbf{C}} \right)$ は

$$\left(\tilde{\mathbf{C}} \right) \equiv \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ & & & 2\mu & 0 & 0 \\ & & & & 2\mu & 0 \\ \text{Symm.} & & & & & 2\mu \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_{11} = C_{1111}, \quad \tilde{C}_{12} = C_{1122}, \quad \tilde{C}_{44} = 2C_{2323} \quad \text{etc.} \quad (3.52a, b, c, d)$$

と書くことができる。ここでは 2 階・4 階のテンソルを 1 列行列・正方行列で成分表示し、行列要素の順番だけはいわゆる Voigt 定数の表記法に従っているので、例えば $\tilde{C}_{66} = 2C_{1212}$ 等になる。

あ、いや待てよ。確かひずみの座標変換や応力の不変量を説明した節では、式 (3.45) のようにテンソルの成分を用いるのではなく、選んだ座標系によらない不変量等を用いて材料の抵抗則を表すのがよさそうだとほめかしていたじゃないか。せん断抵抗を記述する際に直角座標成分間の関係式 (3.45) で抵抗則を表しても問題は無いのだろうか。この疑問点は、実は等方弾性体の場合には問題にならないのである。しかし参考のために、この関係式と不変量の間を求めておこう。式 (3.45) の辺々の 2 乗和をとると

$$\sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = 4G^2 \sum_i \sum_j \epsilon'_{ij} \epsilon'_{ij} \rightarrow \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = G^2 \sum_i \sum_j 2\epsilon'_{ij} \epsilon'_{ij} \quad (*)$$

を得る。そこで、2 階のテンソル成分の 2 乗和もちょうどベクトル成分の 2 乗和と同様のノルムの 2 乗だと解釈して、上式の両辺の項の平方根を用いて

$$\bar{\tau} \equiv \sqrt{\sum_i \sum_j \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}, \quad \bar{\gamma} \equiv \sqrt{\sum_i \sum_j 2\epsilon'_{ij} \epsilon'_{ij}} \quad (3.53a, b)$$

と定義すると、結局上式 (*) の両辺の平方根をとると

$$\bar{\tau} = G \bar{\gamma} \quad (3.54)$$

²⁴ この係数を $C_{ijmn} \equiv 2\mu \delta_{im} \delta_{jn} + \lambda \delta_{ij} \delta_{mn}$ と定義しても形式的には式 (3.46) と同じにはなるが、この係数は式 (3.55) のような等方テンソルではないので、場合によってはとんでもない事態になることがあるので注意が必要だ。第 1 著者は学生時代に実際痛い目に合った。

という式に帰着する。式 (3.53) の $\bar{\tau}$ と $\bar{\gamma}$ の平方根の中は ($\bar{\gamma}$ の定義中の係数の 2 や符号を気にしなければ) それぞれ偏差応力と偏差ひずみの第 2 不変量に相当し、式 (3.54) はその不変量同士の関係であり、選んだ座標系には依存しない。塑性論を勉強するとわかるが、この $\bar{\tau}$ は相当応力と呼ばれる「せん断応力成分」であり、 $\bar{\gamma}$ は塑性論で定義される相当塑性ひずみに相当する「せん断変形成分」である。したがって Hooke の法則は、応力とひずみの第 1 不変量同士の関係式 (3.44) と、偏差応力と偏差ひずみの第 2 不変量同士 (第 1 不変量は零なので) の関係式 (3.54) で定義されていると解釈しても構わないことになる。とても美しい。

具体的にある面内のせん断ひずみだけが非零の場合、例えば ϵ_{12} 以外がすべて零の場合には上式 (3.53b) からは $\bar{\gamma} = 2 |\epsilon_{12}|$ となることから、この $\bar{\gamma}$ は後述の式 (3.66b) で定義される工学ひずみのせん断ひずみ成分であることがわかる。同様に σ_{12} 以外がすべて零の場合には上式 (3.53a) からは $\bar{\tau} = |\sigma_{12}|$ となるので、この $\bar{\tau}$ がせん断応力成分であることが明らかである。また、写真 3.3 の土質の 3 軸圧縮試験のように、主応力状態で

$$\sigma_{11} = \sigma_a, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_c, \quad \sigma_{ij} \equiv 0 \quad (i \neq j)$$

となっている場合には

$$\sigma'_{11} = \frac{2}{3}(\sigma_a - \sigma_c), \quad \sigma'_{22} = \sigma'_{33} = -\frac{1}{3}(\sigma_a - \sigma_c) \quad \rightarrow \quad \bar{\tau} = \frac{1}{\sqrt{3}} |\sigma_a - \sigma_c|$$

となる。このことから、この軸差応力²⁵ ($\sigma_a - \sigma_c$) がせん断応力成分であることがわかり、せん断抵抗特性を測定する土質試験の結果を軸差応力を用いて整理する理由が、この関係式から理解できる。

(2) 材料定数は二つだけ?

等方弾性はたった二つの材料定数でその特性を代表させることができた。その結果を次のように確かめてみる。ある座標系で表された等方弾性関係式 (3.49a) を、別のある回転させた座標系の成分同士の関係で表すと

$$\bar{\sigma}_{kl} = \sum_m \sum_n \bar{C}_{klmn} \bar{\epsilon}_{mn}$$

と書くことができる。この右辺に式 (3.12) の逆関係を代入すると

$$\bar{\sigma}_{kl} = \sum_p \sum_q \sum_m \sum_n \bar{C}_{klpq} T_{pm} T_{qn} \epsilon_{mn}$$

という関係になる。これを式 (3.40) に代入することによって

$$\sigma_{ij} = \sum_p \sum_q \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n T_{ki} T_{lj} \bar{C}_{klpq} T_{pm} T_{qn} \epsilon_{mn}$$

となる。これと元の式 (3.49a) を等置することにより

$$C_{ijmn} = \sum_p \sum_q \sum_k \sum_l T_{ki} T_{lj} T_{pm} T_{qn} \bar{C}_{klpq}$$

と、弾性係数テンソルの座標変換則を得る。座標変換行列が正規直交行列であることを考慮すれば、この逆関係は

$$\bar{C}_{ijmn} = \sum_p \sum_q \sum_k \sum_l T_{ik} T_{jl} T_{mp} T_{nq} C_{klpq}$$

²⁵ 軸差応力の英訳は 'deviator stress' らしく、まさに偏差応力であることが明白だ。



写真 3.3 3 軸圧縮試験

である。これは4階のテンソルの座標変換則である。そして、これに式(3.49b)を代入すると実はどんな座標変換 (T) に対しても

$$\bar{C}_{ijmn} = C_{ijmn}$$

であることを示すことができる。すなわち、Hookeの法則の弾性係数テンソルは座標をどんなに回転させても成分そのものが全く変化しないことを意味している。等方材料の抵抗則を表しているのだから当然だ。

このことから、式(3.49b)の $\left\{\frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm})\right\}$ と $(\delta_{ij}\delta_{mn})$ あるいは

$$A_{ijmn} \equiv \frac{1}{2}(\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn}, \quad B_{ijmn} \equiv \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{mn} \quad (3.55a, b)$$

を成分に持つ4階のテンソル²⁶を等方テンソルと呼ぶ。後者のテンソル A と B はそれぞれせん断抵抗と体積抵抗に対応した成分と考えてもよく、それぞれの二つの係数が独立した二つの材料定数であることから、等方弾性係数は

$$C_{ijkl} = 2G A_{ijkl} + 3K B_{ijkl} \quad (3.56)$$

とも表現できる。実際、これを式(3.49)の C_{ijkl} と置き換えて、式(3.55)をそれに代入して整理すると式(3.46)を得ることから、式(3.56)が正しいことを示すことができる。また A は次の式(3.57a)(3.57b)の意味で部分的には等方的ではなく(せん断的)、 A と B は次の式(3.57c)の意味で直交²⁷している。

$$\sum_i A_{iimn} = 0, \quad \sum_m A_{ijmm} = 0, \quad \sum_m \sum_n A_{ijmn} B_{mnkl} = 0 \quad (3.57a, b, c)$$

そこで、式(3.56)と4階の単位テンソル $I^{(4)}$ および任意の4階のテンソル S を

$$C_{ijkl} := [2G, 3K]_{ijkl}, \quad I_{ijkl}^{(4)} := [1, 1]_{ijkl}, \quad S_{ijkl} = \alpha A_{ijkl} + \beta B_{ijkl} := [\alpha, \beta]_{ijkl}$$

と書くことにすると、上述の直交性を利用してテンソル積等の加減乗除の演算では

$$\{C_{ijkl}\}^{-1} := \left[\frac{1}{2G}, \frac{1}{3K} \right]_{ijkl}, \quad \sum_m \sum_n C_{ijmn} (I_{mnkl} + S_{mnkl}) := [2G(1 + \alpha), 3K(1 + \beta)]_{ijkl}$$

という関係が成立[73]する。この関係を用いると、式(3.56)の逆テンソルである等方弾性コンプライアンステンソル成分は

$$D_{ijkl} \equiv \{C_{ijkl}\}^{-1} = \frac{1}{2G} A_{ijkl} + \frac{1}{3K} B_{ijkl} = \frac{1}{4G} (\delta_{im}\delta_{jn} + \delta_{in}\delta_{jm}) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2G} \right) \delta_{ij}\delta_{mn} \quad (3.58)$$

と表現できる。ちなみにコンプライアンスとは、式(3.49b)の逆の

$$\epsilon_{ij} = \sum_m \sum_n D_{ijmn} \sigma_{mn} = \frac{1}{2G} \sigma_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2G} \right) \delta_{ij} \sum_k \sigma_{kk} \quad (3.59)$$

というひずみ応力関係の係数のことである。あるいはYoung率とPoisson比も用いて行列で表すと

$$\{\epsilon\} = (\bar{D})\{\sigma\}, \quad (\bar{D}) \equiv \begin{pmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ & & & 1/2G & 0 & 0 \\ & & & & 1/2G & 0 \\ \text{Symm.} & & & & & 1/2G \end{pmatrix} \quad (3.60a, b)$$

となる。 E や ν の物理的な意味は、このコンプライアンスの方がわかり易い(第3.6.3(2)節)だろう。

²⁶ Kroneckerのデルタはテンソル成分ではないのに、これをテンソルと呼んでいいのだろうか。

²⁷ 東京大学地震研究所堀宗朗先生の示唆による。

3.4.3 弾性係数の特性

(1) 対称性と独立な材料定数

等方弾性材料だけではなく、一般的な線形弾性材料に対しても応力ひずみ関係を式 (3.49a) と同じように

$$\sigma_{ij} = \sum_m \sum_n C_{ijmn} \epsilon_{mn} \quad (3.61)$$

と表すことができ、一般化された **Hooke の法則** と呼ばれる。応力テンソルもひずみテンソルも 9 個の成分を持つから、この弾性テンソル \mathbf{C} は 81 個の成分でできていることになるが、応力テンソル成分とひずみテンソル成分が対称であることから、弾性テンソル成分は

$$C_{ijkl} = C_{jikl}, \quad C_{ijkl} = C_{ijlk} \quad (3.62a, b)$$

という対称性を持つように定義することができる。したがって、独立な成分の数は 36 個になる。ちょうど、式 (3.52) の要素がすべて非零であるが非対称である場合に相当する。

さてここで、材料が何らかのポテンシャルを持ち保存的である場合を考えてみる。ここで言う保存的というのは、応力が

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W(\boldsymbol{\epsilon})}{\partial \epsilon_{ij}} \quad (3.63)$$

のようにひずみと関係付けられる材料特性のことで、 $W(\boldsymbol{\epsilon})$ をひずみエネルギー関数あるいは弾性ポテンシャルと呼ぶ。この W の形を求めるために、後述の第 3.5.1 節で定義される仮想仕事を使ってみる。まず、つり合い式 (3.22) に仮想的な変位 $\delta \mathbf{u}$ (つり合っている状態からちょうどだけ²⁸仮想的に与える変位なので δ を付けた) を乗じて得られる全体積中の仮想仕事を算定すると

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \delta u_i \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i \right) dV = 0$$

となる。この左辺がその仮想仕事であり、もともとつり合っているので仮想仕事は零になっている。詳細は省略するが、この式を Gauss の発散定理等と応力やひずみの成分の対称性とを利用すると、最終的に

$$\int_V \sum_i \sum_j \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV - \int_V \delta u_i X_i dV - (\text{境界項}) = 0$$

となる。これに上式 (3.61) の一般化された Hooke の法則を代入すると

$$\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta \epsilon_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl} dV - (\text{外力項と境界項}) = 0$$

と表すことができる。第 1 項を仮想内力仕事と呼び δU と記すことにするが、もし弾性係数が

$$C_{ijkl} = C_{klij} \quad (3.64)$$

を満足したとすると、この仮想内力仕事 δU は

$$\delta U \equiv \frac{1}{2} \left(\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta \epsilon_{ij} C_{ijkl} \epsilon_{kl} dV + \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij} C_{ijkl} \delta \epsilon_{kl} dV \right)$$

と分解することができるため、 δU をひずみ $\boldsymbol{\epsilon}$ についての全微分だと解釈すれば、これをひずみで積分 (関数で積分) することができ、結局

$$U \equiv \frac{1}{2} \int_V W(\boldsymbol{\epsilon}) dV, \quad W(\boldsymbol{\epsilon}) \equiv \frac{1}{2} \sum_k \sum_l \sum_m \sum_n \epsilon_{kl} C_{klmn} \epsilon_{mn} \quad (3.65a, b)$$

²⁸ 仮想仕事としては、特に大きさに制限は無いのではあるが。

のように、ひずみエネルギー U とひずみエネルギー密度関数 W を定義することができる。逆に、この W をひずみで微分して式 (3.64) の対称性を利用すれば、式 (3.63) の応力ひずみ関係式を得ることができる。

もし弾性体が式 (3.65b) のようなエネルギー密度関数を持つ材料としてモデル化できるなら、弾性係数はさらに式 (3.64) の対称性も持っていないから、弾性テンソルは 21 個の独立な材料定数で表される。ちょうど、式 (3.52) の要素がすべて非零で対称の場合に相当する。つまり、一般的な異方性弾性材料は 36 個ないし 21 個の材料定数を用いて構成則を記述できる。さらに、直交する三つの面に対して対称な材料特性（微視構造等）を持つ直交異方性材料の場合には、対称性によって独立な定数の数が減って 12 個になる。ちょうど、式 (3.52) の非零の要素がすべて独立であるが非対称な場合に相当する。2次元なら、藁を直交させて編んだむしろや布目のあるハンカチの、辺方向と対角方向との抵抗が違う状況を思い浮かべる（実験してみる）といいかもしれない。この場合も、もしエネルギー密度関数が存在するモデルなら 9 個が独立になる。これがちょうど、式 (3.52) の非零の要素が独立で対称な場合に相当する。さらに、もう 1 種類の対称面がある（ちょうど立方晶のような）場合には、独立な定数が 3 個になり、最終的に方向性が無くなった場合には 2 個の独立な定数しか必要が無くなる。これがまさに式 (3.52) の等方弾性体である [61, 175]。

具体的な表現を示すために、式 (3.50) のひずみ行列の定義を少しだけ変更して

$$\{\sigma\} \equiv [\sigma_{11} \sigma_{22} \sigma_{33} \sigma_{23} \sigma_{31} \sigma_{12}]^T, \quad \{\gamma\} \equiv [\epsilon_{11} \epsilon_{22} \epsilon_{33} 2\epsilon_{23} 2\epsilon_{31} 2\epsilon_{12}]^T \quad (3.66a, b)$$

と定義する。 $\{\gamma\}$ の要素は工学ひずみと呼ばれる。これを用いると応力ひずみ関係は

$$\{\sigma\} = (C) \{\gamma\} \quad (3.67)$$

と表すこともできる。ここに直交異方性材料の弾性係数行列 (C) は

$$(C) \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{pmatrix}, \quad C_{11} = C_{1111}, \quad C_{12} = C_{1122}, \quad C_{44} = C_{2323} \quad \text{etc.}$$

(3.68a, b, c)

と書くことができる。この行列の要素はいわゆる Voigt 定数と呼ばれる。一般には式 (3.64) の対称性は成立するとは限らないので、この表現では弾性定数行列が非対称 $C_{ij} \neq C_{ji}$ であることには注意する必要がある。

そして、等方弾性の場合には Voigt 定数で独立なのは 2 個だけになり

$$C_{11} = C_{22} = C_{33} = \lambda + 2\mu, \quad C_{12} = C_{23} = C_{31} = \lambda, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66} = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) = \mu, \quad C_{ij} = C_{ji}$$

という関係になる。これに対して独立な定数が 3 個の材料は、単結晶なら Al や Cu, Fe, Ni 等の立方晶²⁹であり

$$C_{11} = C_{22} = C_{33}, \quad C_{12} = C_{23} = C_{31}, \quad C_{44} = C_{55} = C_{66}, \quad C_{ij} = C_{ji} \quad (3.69a, b, c, d)$$

が独立な非零の定数である。一方、Mg や Zn のような単結晶は六方晶である。これは、ある一つの方向の格子構造が他の 2 方向の格子構造とは異なる³⁰と考えればいい。この場合には、その特殊な格子構造方向の軸の

²⁹ 鋼は鉄と主に炭素の合金だが、鉄が等方材料ではないのになぜ鋼を等方材料として扱うことができるのだろうか。それは、一般に土木屋が対象とする結晶金属は単結晶体ではなく多結晶体だからだ。つまり、単結晶は特有の方向性・方位を持っているが、多結晶体中には個々には異なる方位を持った単結晶がほぼ無数にランダムに分布しているので、巨視的にはほぼ等方性を持つことになるのである。

³⁰ 映画 SUPERMAN (@Warner Bros. Entertainment Inc.) で使われる重要な「クリスタル」のような形。

回りに（その軸を法線とする面内のみに）だけ等方性を持つため、独立な材料定数は6個（ $C_{13} \neq C_{31}$ の場合）ないし5個（ $C_{13} = C_{31}$ の場合）になる。例えば x_3 方向がその特徴的な方向なら

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{33}, \quad C_{12} = C_{21}, \quad C_{31} = C_{32}, \quad C_{13} = C_{23}, \quad C_{44} = C_{55}, \quad C_{66} = \frac{1}{2} (C_{11} - C_{12}) \quad (3.70a, b, c, d, e, f, g)$$

の中の5個ないし6個が独立な非零の定数である。このような性質を横等方性と呼ぶ。第3.6.3(4)節で紹介する1方向にのみ繊維で補強した材料は、巨視的にその性質を持つ材料である。

さて式(3.67)の逆関係を

$$\{\gamma\} = (D) \{\sigma\} \quad (3.71)$$

と表すと、一般的な直交異方性材料のコンプライアンス行列 (D) は式(3.60)³¹を一般化して

$$(D) \equiv \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & 0 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 & 0 & 0 \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & D_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & D_{66} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 & -\nu_{13}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 & -\nu_{23}/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ -\nu_{31}/E_1 & -\nu_{32}/E_2 & 1/E_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/C_{66} \end{pmatrix} \quad (3.72)$$

と書くことができる。この E_i や ν_{ij} は一般化された Young 率と Poisson 比と呼ばれる。そこで、横等方性材料の場合の諸量を求めてみると

$$\bar{D} \equiv C_{11} (C_{22} + C_{23}) - 2 C_{12} C_{21} \quad (3.73)$$

と定義しておく、まず

$$D_{23} = D_{32} = -\frac{C_{11} C_{23} - C_{12} C_{21}}{(C_{22} - C_{23}) \bar{D}}, \quad D_{31} = C_{21} = -\frac{C_{21}}{\bar{D}}, \quad D_{12} = D_{13} = -\frac{C_{12}}{\bar{D}} \quad (3.74a, b, c)$$

となることから

$$E_1 = \frac{\bar{D}}{C_{22} + C_{23}}, \quad E_2 = E_3 = \frac{(C_{22} - C_{23}) \bar{D}}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}}, \quad \nu_{23} = \nu_{32} = \frac{C_{11} C_{23} - C_{12} C_{21}}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}}, \quad (3.75a, b, c)$$

$$\nu_{31} = \nu_{21} = \frac{C_{21}}{C_{22} + C_{23}}, \quad \nu_{12} = \nu_{13} = \frac{C_{12} (C_{22} - C_{23})}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}} \quad (3.75d, e)$$

のような関係がある。

例えば第I.3.1節で紹介する森・田中のアプローチを用いて、1方向だけに長い炭素繊維が配置されている複合材料(CFRP)の巨視的な弾性テンソルをモデル化してみよう。文献[30]で用いられた炭素繊維補強ポリマーの積層板としての材料定数は、後述の式(3.190)のように弾性テンソル成分と関係付けられているが、その実測値が $E_1 = 113 \text{ GN/m}^2$, $\nu_{12} = 0.32$, $E_2 = 7.4 \text{ GN/m}^2$, $G_{12} = 3.2 \text{ GN/m}^2$ (G_{12} の添え字は '12' となっているが、これは C_{66} ではなく $C_{44} = C_{55}$ の方) と与えられている。そこで森・田中アプローチを用いて、このような巨視的な炭素繊維補強ポリマー積層板の弾性定数に一致するような、母材と介在物の材料定数を同定してみた。炭素繊維は無限に長い円柱としてモデル化できるものとし、その体積比率を50%としてみた。その結果、母材のビニルエステル樹脂の Young 率と Poisson 比が $E_M = 2.81 \text{ GN/m}^2$, $\nu_M = 0.274$ で、介在物の炭素繊維の弾性定数が $E_1 = 223 \text{ GN/m}^2$, $\nu_1 = 0.352$ であればいい³²ことがわかった。なお、これを用いたとき、巨視的な積層板

³¹ 式(3.60)とはひずみ行列の定義が異なることには注意すること。

³² 著者はその真の値を知らない。多分公開されていない。

の材料定数のうちの ν_{21} は 0.0210 となった。この結果を式 (3.68) の形で示すと次のようになる。

$$\text{横等方性の弾性係数の例: } \left(C \right) = \begin{pmatrix} 8.62 & 3.17 & 3.77 & 0 & 0 & 0 \\ 3.17 & 8.62 & 3.77 & 0 & 0 & 0 \\ 3.77 & 3.77 & 115. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.72 \end{pmatrix} \text{GN/m}^2$$

なお、ここでは炭素繊維が x_3 方向に整列しているものとした。まさに式 (3.70) の関係がすべて成立し、さらに弾性テンソルが対称 ($C_{13} = C_{31}$, $C_{23} = C_{32}$) になっている。

ついでに、第 3.6.3 (4) 節で紹介する 2 方向 (ここでは x_1, x_2 方向) に同じ仕様の繊維を配置した補強材は、巨視的には

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{23}, \quad C_{31} = C_{32}, \quad C_{12} = C_{21}, \quad C_{44} = C_{55} \quad (3.76a, b, c, d, e)$$

のような材料になる。この場合のコンプライアンスを求めるために

$$\bar{D} \equiv C_{33}(C_{11} + C_{12}) - 2C_{13}C_{31} \quad (3.77)$$

と定義しておく、まず

$$D_{23} = D_{13} = -\frac{C_{13}}{\bar{D}}, \quad D_{31} = D_{32} = -\frac{C_{31}}{\bar{D}}, \quad D_{12} = D_{21} = -\frac{C_{33}C_{12} - C_{13}C_{31}}{(C_{11} - C_{12})\bar{D}} \quad (3.78a, b, c)$$

となることから

$$E_2 = E_1 = \frac{(C_{11} - C_{12})\bar{D}}{C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}}, \quad E_3 = \frac{\bar{D}}{C_{11} + C_{12}}, \quad \nu_{23} = \nu_{13} = \frac{C_{13}}{C_{11} + C_{12}}, \quad (3.79a, b, c)$$

$$\nu_{31} = \nu_{32} = \frac{C_{31}(C_{11} - C_{12})}{C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}}, \quad \nu_{12} = \nu_{21} = \frac{C_{33}C_{12} - C_{13}C_{31}}{C_{11}C_{33} - C_{13}C_{31}} \quad (3.79d, e)$$

のような関係がある。

(2) 安定材料の Poisson 比の範囲

Voigt 定数を用いた行列表示を用いると、式 (3.65b) のひずみエネルギー密度関数は

$$W \equiv \frac{1}{2} \left\{ \gamma \right\}^T \left(C \right) \left\{ \gamma \right\} \quad (3.80)$$

のように行列表示できる。ところでエネルギー的考察では、この密度関数が正定値³³であることが材料が安定であるための条件であるとされる。当然 Hooke の等方弾性体は安定な材料のモデルなので

$$\det \left(\left(C \right) \text{のすべての小行列} \right) > 0 \quad (3.81)$$

を満足しなければならない。式 (3.48) を用いて、この弾性係数行列 (C) を μ と ν で表しておく、この安定条件は、まず $\det(\text{右下 } n \times n) > 0$ ($n = 1, 2, 3$) から $\mu > 0$ になるので、それを用いるとそれ以外の各小行列の正定値性のための Poisson 比に対する条件が

$$\begin{aligned} \det(\text{左上 } 1 \times 1) > 0 &\rightarrow [\nu > 1, \quad 1/2 > \nu], \\ \det(\text{左上 } 2 \times 2) > 0 &\rightarrow [1/2 > \nu], \quad \det(\text{左上 } 3 \times 3) > 0 \rightarrow [1/2 > \nu > -1] \end{aligned}$$

³³ 理由はともかく、関数 $\{\gamma\}$ の集合の上で汎関数 W が下に凸である条件。

となるので、Poisson 比がとり得る範囲は

$$1/2 > \nu > -1 \quad (3.82)$$

でなければならないことがわかる。通常の材料では Poisson 比は正の値と考えられ、完全流体やゴムのような非圧縮性材料（次節で説明する）ではその値が $1/2$ になる。複合材料の場合には、内部の微視構造によっては負の Poisson 比を持つことがある。

(3) 非圧縮性材料

我々の身の回りにある弾性体らしきものですぐ思い付くのはゴムだろう。しかしゴムは実は厄介な材料なのである。というのも、ほとんど体積が変化しないからだ。ちょうど水と同じ³⁴だ。つまり、式 (3.14) の体積ひずみが常に零の状態にある。したがって、ひずみ成分および変位成分の間には

$$\Delta = \sum_k \epsilon_{kk} = 0, \quad \text{あるいは} \quad \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.83a, b)$$

という制約条件が適用されなければならない。この性質を非圧縮性と呼ぶ。しかし、ゴムを水中に沈めたときにも零ではない応力が生じるだろう。つまり式 (3.42) の内部抵抗としての平均応力 σ_{AVE} は零にはならないはずだ。ということは、ゴムに対する体積ひずみに関する Hooke の法則式 (3.44) からは

$$|\sigma_{AVE}| < \infty \quad \text{かつ} \quad \Delta = \frac{\sigma_{AVE}}{K} = 0 \quad \rightarrow \quad K \rightarrow \infty$$

という材料がゴムだということになる。式 (3.48a) を式 (3.48d) に代入して、 μ が有界である条件下で K に対する上の条件式が成立するためには、Poisson 比が

$$K = \frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)} \rightarrow \infty \quad \text{つまり} \quad \nu = \frac{1}{2} \quad (3.84)$$

となる。このように非圧縮性材料の Poisson 比は、前節で求めた範囲の片方の極限の $1/2$ であることがわかる。

したがって式 (3.46) の Hooke の法則は、このままでは

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} \quad \text{あるいは} \quad \sigma_{ij} = 2\mu \epsilon'_{ij} \quad (*)$$

となり、上式 (3.83b) の制約条件の下でこの比例関係が成立するのが非圧縮性材料となる。しかしこれでは、未知関数と支配方程式³⁵の数が一致しない。つまり、三つのつり合い式にこの制約条件式 (3.83) を加えた四つの支配方程式を三つの変位成分が満足しなければならず、未知関数の数より支配方程式の数が一つ多くなっている。さて、例えばゴム球を水中に沈めたときにはせん断変形は生じないだろうから、偏差ひずみ ϵ' は零である。だとすると、上式 (*) の Hooke の法則からは応力も零になってしまう。しかし前述のように、体積は不変ではあるものの内部の等方的な抵抗力は零にはならないはずだ。このことから、平均応力 $\sigma_{AVE}(\mathbf{x})$ が式 (3.42) のように応力成分で定義されるのではなく、変位やひずみはもとより応力とも独立した新たな未知関数 $-p(\mathbf{x})$ として存在して、Hooke の法則は

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = 2\mu \epsilon_{ij}(\mathbf{x}) - p(\mathbf{x}) \delta_{ij} \quad (3.85)$$

と定義され直さなければならないことがわかる。この $p(\mathbf{x})$ はいわゆる静水圧³⁶であり、構成則つまり材料の抵抗則とも関係無く新たに導入された未知関数である。これで支配方程式の数と未知関数の数が一致し、問題を

³⁴ 水を注射器に入れて押してもほとんど縮まないの、流体力学では非圧縮性材料に分類される。そして一般に、ゴムの体積変形もほとんど無いとされている。実験したことは無いが、思い切り引張った輪ゴムが細くなることから想像して欲しい。

³⁵ 支配方程式は場の微分方程式と境界条件式の両方を指すと思うが、この文書では前者だけだったりするので注意して欲しい。

³⁶ 固体も含む連続体を対象としているが、わかり易いので流体力学の呼び方を使った。したがって圧縮を正にしてあることに注意すること。

適切に記述できている。この式(3.85)をつり合い式(3.22)に代入すると、非圧縮性材料のつり合い式と制約条件式は

$$\mu \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + X_i = 0, \quad \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (3.86a, b)$$

と表される。したがって支配方程式が四つあり、未知関数は独立した変位成分三つと静水圧の一つの計四つになる。以上のような、結果を知っている者による静水圧の導入過程に疑問を抱いた読者は第3.5.2(4)節の数学的な誘導を参照のこと。

(4) 等方弾性行列の固有値って?

あるとき齊木功先生と、このことについて意見交換をした。眺めた教科書類のどこにも書いてなかったからだ。例えば式(3.52)の $\left(\bar{C} \right)$ の固有値と固有ベクトルは何だろう。力学的センスがいい読者はすぐに予想できるかもしれないが、 G と K だろうということは推測できる。しかし、そもそも4階のテンソルを便宜上行列表記しておいて「固有値」と言われても、それが力学的な結果になるかどうか不安ではある。そこで実際に

$$\left(\left(\bar{C} \right) - \zeta \left(I_6 \right) \right) \{ e \} = 0 \quad (3.87)$$

の固有値 ζ と対応する固有ベクトル $\{ e \}$ を求めてみた。 $\left(I_6 \right)$ は 6×6 の単位行列である。すると、固有値を求める特性方程式はちゃんと因数分解できて

$$-(\zeta - 2\mu)^5 \{ \zeta - (3\lambda + 2\mu) \} = 0 \quad (3.88)$$

となる。つまり固有値は果たして

$$\zeta = 2\mu = 2G, \quad \zeta = 3\lambda + 2\mu = 3K \quad (3.89a, b)$$

のように、せん断弾性係数の5重根と体積弾性係数そのものになった。対応する固有ベクトルは、例えば

$$\{ e \} = \left[1^{-1/2} -1/2 0 0 0 \right]^T, \quad \left[0 1 -1 0 0 \right]^T, \quad \left[0 0 0 1 0 \right]^T, \quad (3.90a, b, c)$$

$$\left[0 0 0 0 1 \right]^T, \quad \left[0 0 0 0 0 1 \right]^T, \quad \left[1 1 1 0 0 0 \right]^T \quad (3.90d, e, f)$$

と求めることができる。式(3.90a)~(3.90e)の五つが5重根のせん断弾性係数に対応した非圧縮変形モード・せん断変形モードである。式(3.90f)が体積弾性係数に対応した等方膨張モードである。そしてこの固有ベクトルはすべて直交している(ように選んである)。美しい。多分対称テンソルならではの特性で、4階のテンソルの行列表記に物理的意味が残っているのではないだろうか。と思っていたところ、Mehrabadi先生による文献[65]³⁷を第2著者が見つけてくれた。これはすごい。読者も式(3.89)(3.90)くらいは求めてみて欲しい。

ところで、式(3.68)のVoigt定数を用いた弾性係数行列 $\left(C \right)$ の場合の固有値は

$$\left(\left(C \right) - \zeta \left(I_6 \right) \right) \{ e \} = 0 \quad (3.91)$$

から

$$-(\zeta - 2\mu)^2 \{ \zeta - (3\lambda + 2\mu) \} (\zeta - \mu)^3 = 0 \quad (3.92)$$

となり、固有値が

$$\zeta = \mu = G, \quad \zeta = 2\mu = 2G, \quad \zeta = 3\lambda + 2\mu = 3K \quad (3.93a, b, c)$$

のようになり、等方材料なのに非圧縮変形モード二つと純せん断変形モード三つが別々のような扱いになってしまう(いや、その方がいいのかな?)ことに注意する必要があるようだ。 6×6 の行列表示した弾性係数行列を料理するときは、Voigt定数行列を用いない方が無難なのかもしれない。

³⁷ 第2著者が文献中に符号の typo を見つけた。表3の横等方の二つ目の固有値は $c_{33} + \sqrt{2}c_{13}(\tan \alpha - \sec \alpha)$ である。Mehrabadi先生にメールでお知らせしたところ、諸事情により研究ノートは未確認だが第2著者の計算は正しいだろうというご返事をいただいた。

演習問題 3-5

5. 式 (3.82) を証明せよ。

3.4.4 非弾性ひずみと非適合ひずみ

ここまでは、物体内のひずみと応力が一対一に対応するような変形による抵抗則について定義して説明してきた。つまり、変形に比例した材料の「弾性」抵抗によって応力が生じていたことから、その変形を弾性ひずみと呼ぶ。しかし、例えば温度変化によって物体が伸び縮みする場合のように、それだけによって生じるひずみが、必ずしもそこに生じるであろう応力とは一対一には対応しない場合がありそうだ。今は何のことを言っているかわからなくてもいいが、例えば自由空間に吊るした半径 a の鋼球を暖めた場合、その半径は大きくなって等方な膨張ひずみが生じるが、内部に応力は生じないということはわかると思う。このようにひずみと応力が一対一には対応しない場合があるというわけだ。そのようなひずみを非弾性ひずみと呼ぶことがある。そこで今度は、図 3.13 の左上の図のように、無限領域中の半径 a の球の領域だけの温度を ΔT だけ上げて、その領域だけを膨張させよう。この場合は周りの物体がその膨張をある程度拘束するので、周りに何も無い自由空間に置いた前述の球（右上の図がそれ）の場合とは同じ膨張量にはならない上に、今度はこの球の領域にも周りの領域にも零ではない応力が生じる。この問題をどうやって解こう。

まず、仮想的に（頭の中で）左上の図にある物体中の球を切り取って右上の図のように自由空間に置き、その温度を ΔT だけ変化させる。そのときの半径が a_T^s になったとしよう。つまり、温度変化だけによるひずみに相当する伸びひずみは

$$e_T^s \equiv \frac{a_T^s - a}{a} = \alpha \Delta T \quad (3.94)$$

となる。ここに α は線膨張係数と呼ばれる材料定数である。これをそのまま元の物体に戻そうとしても、 $a_T^s > a$ なので当然球と周りの物体は「重なって」しまう（はめこむことができない）はずだ。つまりこの伸びひずみだけでは式 (3.16) を満足しない（重なる）ため、このひずみが非適合なひずみ³⁸であることは明らかだ。

この球を元の物体にはめこむためには、球の方に圧力を加えて縮めると同時に同じ圧力で元の物体の孔を拡げればいいので、図の下段に示した左右の二つの図のように一様な圧力 p を球と孔に逆向きに与えてみよう。 p は ΔT に比例していると考えられるが、この段階では p の値は決められないので、とりあえずこれによって孔の半径が a_p になったとしよう。つまり、形式的にこの孔の部分の伸びひずみ³⁹は

$$e_p \equiv \frac{a_p - a}{a} = \frac{p}{\bar{K}} \quad (3.95)$$

と評価できる。この \bar{K} は見かけ上の体積弾性係数であり、孔に等方圧力を作用させたときの抵抗係数であるが、ここではその具体的な表現は省略し、具体例は第 3.6.4 (5) 節に示す。そして同じ圧力 p を逆向きに球にも

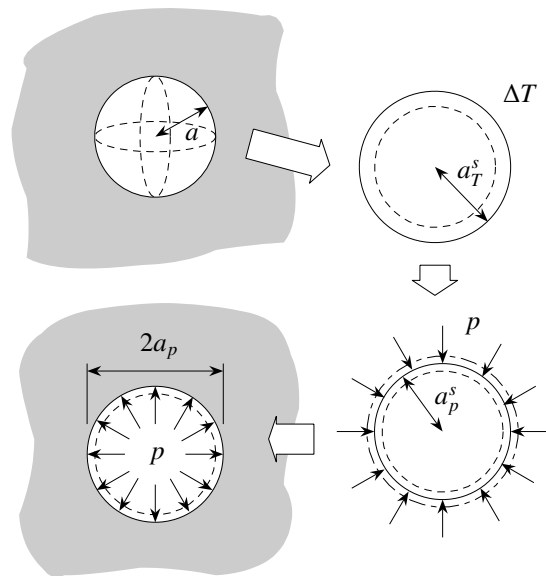


図 3.13 球の領域だけを熱膨張させる

³⁸ 等方弾性体内の球形状だけではなく楕円体形状の領域であれば、内部に生じるひずみが一様であることを Eshelby [24] が発見しており、20 世紀の重要な研究成果の一つとされる。なお村 [69] は、この例のように同じ材料中に非適合ひずみが分布した領域を inclusion (介在物) と呼び、周りとは異なる材料がある領域を inhomogeneity (非均質体) と呼んでいる。

³⁹ 孔はひずみなんか持たないだろう。その通りであるが、ここでは a_p がいくつかということが重要だ。しかしあとでひずみを用いて説明したいので、敢えて「形式的に」ひずみという語句を用いた。

与えて右下の図のように球の半径が a_p^s になったとする。つまり、自由空間で温度変化 ΔT によって半径が a_T^s になった球のその半径が、 p によって a_p^s になると考えればいいので、圧力 p によって生じた変形の変化に相当する伸びひずみは、形式的には

$$e_p^s \equiv \frac{a_p^s - a_T^s}{a_T^s} = \frac{p}{\bar{K}^s} < 0 \quad (3.96)$$

と書くことができる。この \bar{K}^s も具体的な表現は省略するが、見かけ上の体積弾性係数（負）である。この e_p^s は圧力 p に比例したひずみなので弾性ひずみである。最終的に、拡げた孔に重なりも隙間も無くこの球がはめこまれるためには

$$a_p = a_p^s \quad (3.97)$$

でなければならない。したがって、内部の抵抗圧力 p はある変形だけによって生じたのではなく、この条件式 (3.97) を満足するように発生したと考えれば、元の問題が解けたことになる。式 (3.94) (3.95) (3.96) を式 (3.97) に代入して、各ひずみが非常に小さいことを考慮して p と ΔT の線形項だけを用いて近似すると

$$a_p = a(1 + e_p) = a \left(1 + \frac{p}{\bar{K}}\right) = a_p^s = a_T^s \left(1 + \frac{p}{\bar{K}^s}\right) = a(1 + \alpha \Delta T) \left(1 + \frac{p}{\bar{K}^s}\right) \simeq a \left(1 + \frac{p}{\bar{K}^s} + \alpha \Delta T\right) \quad (3.98)$$

となるので、結局下線部の等式から、元の連続体に戻るために必要な圧力 p が

$$p = \left(\frac{1}{\bar{K}} - \frac{1}{\bar{K}^s}\right)^{-1} \alpha \Delta T \quad (3.99)$$

と求められる。これが元の物体内の球の部分に生じる平均（等方）応力である。

実際にはひずみは微小で、温度変化 ΔT と周りからの拘束圧力 p は同時に作用・発生するので、前述のように変形を順番に追跡する必要は無く、この二つの原因による線形解の重ね合わせでこの問題は解くことができる。つまり図 3.14 にあるように、半径 a の球の温度を上げた場合の解とそれに圧力をかけた場合の解との重ね合わせで、球が元の孔にはめこまれるようにすればいい。まず温度変化による球の膨張ひずみつまり非弾性ひずみは式 (3.94) と同じで

$$e_T^s \equiv \frac{\Delta a_T^s}{a} = \alpha \Delta T \quad (3.100)$$

である。一方、圧力による弾性ひずみは

$$e_p^s \equiv \frac{\Delta a_p^s}{a} = \frac{p}{\bar{K}^s} \quad (3.101)$$

となる。したがって、圧力 p と温度変化 ΔT によって球に生じたひずみの合計（総）ひずみは、この2式より

$$e_{T+p}^s \equiv \frac{\Delta a_{T+p}^s}{a} = e_p^s + e_T^s = \frac{p}{\bar{K}^s} + \alpha \Delta T \quad (3.102)$$

と求められ、この球が元に戻る条件式 (3.97) は幾何学的な適合条件であり、ここでは

$$a + \Delta a_{T+p}^s = a_p \quad (3.103)$$

で置き換えられる。これに式 (3.95) (3.102) を代入した式は式 (3.98) に一致し、必要な圧力 p は式 (3.99) になる。ちなみに、式 (3.101) の左辺の e_p^s の代わりに式 (3.102) の e_{T+p}^s と e_T^s を用いると

$$p = \bar{K}^s e_p^s = \bar{K}^s (e_{T+p}^s - e_T^s) \quad (3.104)$$

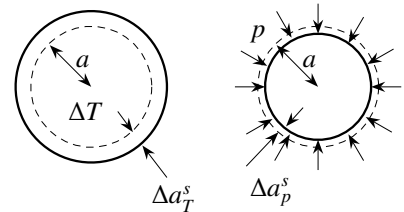


図 3.14 物体中で熱膨張する球領域

と書くこともできる。

最終的に球は孔に戻ったことから、元の物体中には隙間や重なりはもはや存在しない。つまり、この総ひずみ e_{T+p}^s が式 (3.16) を満足する適合ひずみであることは明らかである。しかし前述のように、温度変化 ΔT による非弾性ひずみ e_T^s は非適合ひずみだったことから、実は、埋め込むのに必要な圧力 p (生じた応力) による弾性ひずみ e_p^s も非適合ひずみなのだ。このように考えると二つの式 (3.102) (3.104) はそれぞれ、球の径の伸びひずみを ϵ と記すことによって形式的に

$$\epsilon(\text{総}) = \epsilon(\text{弾性}) + \epsilon(\text{非弾性}), \quad (\text{応力 } p) = (\text{弾性係数 } \bar{K}^s) \times \epsilon(\text{弾性}) = \bar{K}^s \times \{\epsilon(\text{総}) - \epsilon(\text{非弾性})\}$$

と読み替えることができる。したがって、ひずみと変位の関係式 (3.6) と Hooke の法則式 (3.49a) はさらに一般化しておく必要があり、それは上式に対応させることによって

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^e + \epsilon_{ij}^* = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \sigma_{ij} = \sum_k \sum_l C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e = \sum_k \sum_l C_{ijkl} (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \quad (3.105a, b)$$

と表されなければならない。ここに ϵ_{ij}^e は弾性ひずみの成分であり、弾性定数を介して応力と直接関係のある変形成分である。前節までの応力ひずみ関係についての説明はすべてこの弾性ひずみについて述べられていたことに注意しなければならない。一方 ϵ_{ij}^* は非弾性ひずみの成分で、材料の抵抗と直接は関係の無い変形成分である。しかも弾性ひずみも非弾性ひずみも両方共に非適合ひずみであるが、左辺の総ひずみは式 (3.103) のような幾何学的適合性を満足する (つまり式 (3.16) を満足する) 適合ひずみなので、式 (3.105a) の最右辺のように変位勾配と関係付けることができる。この例の温度ひずみが非弾性ひずみの代表だが、次の節で紹介する塑性ひずみ (増分) ももう一つの代表である。温度変化に関係した問題の具体的な計算例は、平面問題の場合の解を第 3.6.4 (5) 節で、棒の伸び縮み問題の解を第 H.2 節で示す。

3.4.5 塑性論の基礎

(1) 非可逆変形と塑性

この節の内容は第 11 章で詳述し、それ以外の章の特に構造力学の章ではほとんど使わないため読まなくても構わないが、頭の体操にはなると思う。あるいは、構造力学を初めて学ぶ読者は平面問題の第 3.6.3 節以降を眺めて次の章に移ってもいい。さて、針金を思いっきり曲げたあと手を離しても元の形には戻らなくなる。それを応力とひずみで模式的に示したのが図 3.15 で、元に戻らない変形分を **残留変形** と呼んでいる。こういった非可逆的特性も非弾性と呼ぶが、特にその残留変形が時間と共に変化しない場合、その変形量を **塑性変形** と呼ぶ。塑性は弾性とは大きく異なり、1) 状態を定義する条件式と、2) 変形の変化則を定義する条件式との二つを規定する必要がある。

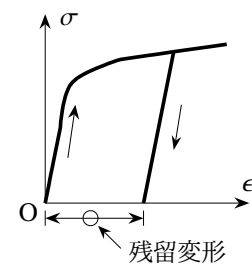


図 3.15 元に戻らない針金

(2) まず摩擦とすべりを考えてみる

上の二つの条件式が必要なことを感じるために、非可逆変形の例として摩擦とそれが切れたときのすべり移動を少し考察してみよう。図 3.16 に示したのは、ある斜めの力 F で消しゴムを押している状況である。この床と消しゴムの間の静止摩擦係数を μ_s とする。1) 消しゴムがすべり始める可能性は

$$f \equiv S - \mu_s N = F (\cos \theta - \mu_s \sin \theta) = 0 \quad (*)$$

で与えられるが、ここでは「便宜上」実際にはすべらないものとする。2) この状態で力の大きさや向きをちょっとだけ変化させた ($+\alpha$) とき、例えば $S \rightarrow S + \Delta S$ とか $\theta \rightarrow \theta - \Delta\theta$ のような変化が与えられたとき、もし f が正になろうとしたとき ($\Delta f > 0$) に初めてすべり始めるものとする。これが二つの条件である。ただし、外力等を変化させても $f < 0$ を保持している状態では、図の破線の形をしていた消しゴムは移動せずに実線の平行四辺形に「弾性変形するだけ」だとする。

例えば $S \rightarrow S + \Delta S, \Delta S > 0$ とした場合には

$$\Delta f = \{S + \Delta S - \mu_s N\} - \{S - \mu_s N\} = \Delta S > 0 \rightarrow \{\Delta(\text{すべり}) > 0\} \parallel S$$

となるから、 ΔS の方向である床方向、あるいは S の方向にすべり始める。では次に、押さえつける力を緩めるように $N \rightarrow N - \Delta N, \Delta N > 0$ とした場合は、もっと弾性との差が明確で、外力を小さくしたのに

$$\Delta f = \{S - \mu_s (N - \Delta N)\} - \{S - \mu_s N\} = \mu_s \Delta N > 0 \rightarrow \{\Delta(\text{すべり}) > 0\} \parallel S$$

となるのですべり始めるのだが、大事なのはすべる方向が変動 ΔN とは関係が無く、それと直交する床方向つまり S の方向である。では $F \rightarrow F + \Delta F, \Delta F > 0$ の場合はどうだろう。このときは

$$\Delta f = (F + \Delta F)(\cos\theta - \mu_s \sin\theta) - F(\cos\theta - \mu_s \sin\theta) = \Delta F(\cos\theta - \mu_s \sin\theta) = 0 \rightarrow \Delta(\text{すべり}) = 0$$

のように、摩擦が切れる条件を満足したままで f には変化が無いのですべらない。最後に力の向きを変えて $\theta \rightarrow \theta - \Delta\theta$ とした場合には、 $0 < \Delta\theta \ll 1, 0 < \theta < \pi/2$ ならば

$$\Delta f = F \Delta\theta (\sin\theta + \mu_s \cos\theta) > 0 \rightarrow \{\Delta(\text{すべり}) > 0\} \parallel S$$

となりすべり始めるが、その向きはやはり S の方向である。

このように、状態を規定する関数 f が負であれば消しゴムは弾性変形するだけであり、関数 f が零になったときに非可逆的な運動が生じる可能性が発生する。そして、その関数 f が増えて正になろうとした ($f = 0$ および $\Delta f > 0$) ときに非可逆的なすべり運動が生じる。しかし、その運動の向きは常に、外力変動や作用の向きの変動とは無関係の床に沿った方向、言い換えればせん断力 S の方向、つまり

$$\Delta(\text{すべり}) \parallel S, \Leftrightarrow (\text{非可逆的なすべり変形の「変化の可能性」の向き}) \parallel (\text{せん断力の向き}) \quad (3.106)$$

のように生じることになる。これに対して弾性的場合はどうだろう。例えば N を増やす ($\Delta f < 0$) と消しゴムは N の方向にさらに縮もうとするだろう。また摩擦抵抗している状態 ($f < 0$) で S を増やすと消しゴムはその S の向きに歪もうとするだろう。つまり、弾性状態 ($f < 0$) あるいは非可逆運動が生じない場合 ($\Delta f < 0$) には弾性変化しか生じず、しかもその変形の変動は外力変動や作用の向きの変動と一対一に関係するのである。

(3) 降伏条件 — 状態の定義

まず必要なのは、どういう状態に至った時点で塑性変形が生じ始める可能性があるのかを規定する条件である。前節の式(*)に相当する条件で、それを降伏条件と呼ぶ。鋼等の構造用の等方均質な(多結晶)金属材料を対象を限った場合、一般に静水圧(等方圧)では塑性変形は発生しないと考えていい。すなわち鋼球を海底深く沈めると直径は小さくなるが、その変形は弾性的であり、海面に戻すと直径は元に戻り残留変形は生じないというのだ。したがって、塑性変形特性を支配しているのはせん断変形およびせん断抵抗が主であると考えるのが適切である。ただし、詳細は省略するが、残留変形は変形履歴に従って累積する。そのため、状態を定義する降伏条件を変形あるいはひずみで規定することは一般には適切ではない。

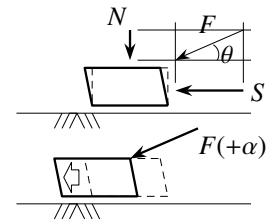


図 3.16 摩擦とすべり

このような事実を踏まえると、せん断抵抗成分を代表している応力、すなわち式(3.43)で定義した偏差応力で降伏条件を与えるのが適切であると考えられる。ただし、ある座標系における偏差応力テンソルの「成分」そのものでその条件を与えることが相応しくないことは明らかである。というのも、今までも何度も書いたように、材料の性質はそれを観察あるいは記述している人間の都合で導入した座標系に依存するとは限らない⁴⁰からだ。したがって、座標とは関係の無い量として主応力⁴¹あるいは偏差応力の不変量を用いるのが適切だということのを思い付く。そこで、式(3.43)の偏差応力の不変量を式(3.36)の応力の不変量に準じて定義すると、その定義から明らかなように第1不変量(通常 J_1 と記すことが多い)は零 $\left(J_1 \equiv \sum_{k=1}^3 \sigma'_{kk} = 0 \right)$ になる。そして第2不変量は、応力そのものの第2不変量とは符号が異なるが

$$\bar{\sigma}^2 = J_2 \equiv \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \sigma'_{ji} \quad (3.107)$$

で定義できる。特別な例として前述のように、 x_1 - x_2 面内の単純なせん断応力状態である場合を考えると応力テンソル成分は $\sigma_{12} = \sigma_{21}$ のみが非零なので、これを上式に代入すると $\bar{\sigma} = |\sigma_{12}|$ となる。このことから、 $\bar{\sigma}$ がせん断抵抗を代表した指標であることがわかる。そこでベクトルのノルムからの類推をすると、 $\bar{\sigma}$ は偏差応力の一種のノルム(絶対値)と考えてもよさそうなので、塑性モデルの一つとして、この $\bar{\sigma}$ がある限界値に達したときに塑性変形が発生すると考えてみよう。つまり

$$\bar{\sigma} = \tau_Y \quad \text{あるいは} \quad f \equiv \bar{\sigma} - \tau_Y = 0 \quad (3.108)$$

が降伏条件になると考えるのだ。ここに τ_Y を初期せん断降伏応力と呼ぶ。例えば x_1 - x_2 面内の単純なせん断応力状態では、上の降伏条件式は単純な関係 ($|\sigma_{12}| = \tau_Y$) になることから、限界値を τ_Y と置いたことに違和感はないと思う。この降伏条件は **Mises** の降伏条件と呼ばれている。

あるいは鋼の引張試験のように、例えば x_1 方向の応力 σ_{11} だけが零でない場合には式(3.107)から $\bar{\sigma}^2 = 1/3(\sigma_{11})^2$ となるので、降伏条件は $|\sigma_{11}| = \sqrt{3}\tau_Y$ となる。このことから、引張降伏応力 σ_Y とせん断降伏応力が

$$\sigma_Y = \sqrt{3}\tau_Y \quad (3.109)$$

という関係にあることがわかる。そのため、式(3.107)(3.108)の代わりに

$$\bar{\sigma}^2 \equiv \frac{3}{2} \sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \sigma'_{ji} = 3\bar{\sigma}^2, \quad \bar{\sigma} = \sigma_Y \quad (3.110a, b)$$

のように降伏条件を定義する場合もある。この $\bar{\sigma}$ は相当応力と呼ばれている。構造力学分野の降伏の代表値には引張降伏応力の方がよく用いられる。ちなみに、三つの主応力方向のすべてと等しい角をなす面上のせん断応力成分つまり八面体応力 τ_o [26] は $\bar{\sigma}$ と

$$\tau_o = \sqrt{2/3}\bar{\sigma} \quad (3.111)$$

という関係にある。

このように、塑性変形が主にせん断で支配されることから類推できるように、塑性変形は物体内部の非可逆的なすべり変形でモデル化できそうだ。つまり図3.17に模式的に示したように、外力の作用によって物体内

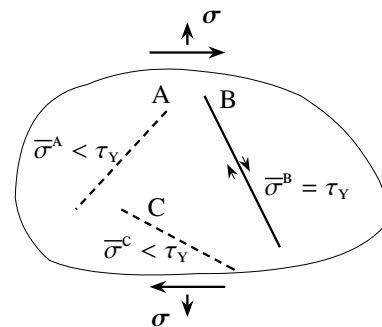


図3.17 降伏条件: すべり系 A, B, C の中の B だけがすべる条件を満足し塑性変形の向きが決定される。

⁴⁰ 客観性の一つ。

⁴¹ 二つずつの主応力差の半分, $1/2|\sigma_i - \sigma_j|$, ($i, j = I, II, III$) のうちの最大値(最大せん断応力)で降伏を規定する条件は **Tresca** の降伏条件と呼ばれる。

部に生じた応力の組み合わせが、ある特定の向きを持った面上⁴²の摩擦抵抗を無力にし、すべりの発生⁴³が可能になると考える。このように、ある面上の応力状態がすべりを可能にした場合に「降伏条件が満足された」と判断でき、そこに塑性変形が生じると考える。したがって、前節の摩擦とすべりの場合と同様、そのあとのすべり変形の向きはこの面の向きで決定されることになる。

(4) 流れ則 — 変形の変化則

次に必要な条件は、一旦降伏条件を満足したあとに変形がどのように生じようとするのかを規定する条件である。そのような抵抗特性の記述には、非線形的な全応力と全ひずみ関係で表す全ひずみ理論と、ひずみ速度（増分）が塑性ポテンシャルで与えられる等とする流れ理論とがある。ここではその詳細は述べないが、前者は単調比例載荷状態で取り扱いが比較的楽な反面、応力とひずみの一対一関係が無い弾塑性現象をうまく表しきれない。一方後者は、応力速度（増分）とひずみ速度（増分）を関係付けた増分理論になり、連続体力学で広く用いられる基本的な非線形モデルである。このように、現在の状態からどのように発展するのか、つまり、どんな増分や変化が生じるのかという記述の仕方を流れ則あるいは発展則と総称している。

その流れ則については、前節の摩擦とすべりの場合にも力や向きの増分を用いてすべる規定を記述していたことに対応させて、ひずみそのものではなくひずみ増分⁴⁴あるいはひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ と応力 σ を用いて記述する。そして塑性変形は実は非適合ひずみに相当する⁴⁵ことから、式(3.105)を増分量に対して拡張し、総ひずみ増分 $\dot{\epsilon}$ も弾性成分 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ と塑性成分 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ に分解した上で増分間を

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.112)$$

のように関係付ける。ここに \dot{u} は変位増分あるいは速度である。このように分解した上で、Prandtl (1924) と Reuss (1930) は流れ則を

$$\frac{\dot{\epsilon}_{xx}^p}{\sigma'_{xx}} = \frac{\dot{\epsilon}_{yy}^p}{\sigma'_{yy}} = \dots = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}^p}{\sigma'_{xy}} \rightarrow \dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \sigma'_{ij}, \quad \lambda \geq 0 \quad (3.113)$$

のようにモデル化 [38] した。つまり塑性変形の変化は偏差応力と同じ方向に発生しようとする。偏差応力が物理的にはせん断応力であることを思い出すと、この流れ則の式(3.113)は摩擦とすべりで説明した式(3.106)と同じで、塑性変形がせん断変形であることもわかる。大事なことは、式(3.113)の左辺のひずみには増分を示すドットがついているのに対し、右辺の偏差応力にはそれが無いということである。文献によっては右辺の λ にドットを付けているものもある。なお式(3.113)は後述する粘性の式(3.122)の記述によく似ているが、粘性とは異なり、右辺の λ は応力状態と応力増分に依存した比例パラメータであり、単純な材料パラメータではないことに注意すべきである。

式(3.113)からは、塑性が弾性と本質的に異なっていることが明らかになる。すなわち、塑性の場合には「塑性ひずみ増分が偏差（せん断）応力そのものと共軸であろうとする」

$$\dot{\Delta}^p \equiv 0, \quad \dot{\epsilon}^p \parallel \sigma'$$

のに対し、弾性の場合には式(3.44)(3.45)から明らかなように「弾性ひずみは応力そのものと、また弾性ひずみ増分は応力増分と共軸であろうとする」

$$\dot{\Delta}^e \propto \sigma_{AVE}, \quad \dot{\epsilon}^e \parallel \sigma'; \quad \dot{\Delta}^e \propto \dot{\sigma}_{AVE}, \quad \dot{\epsilon}^e \parallel \dot{\sigma}'$$

⁴² 単結晶体の場合には結晶格子の稠密面に相当する。

⁴³ その面上を転位と呼ばれる格子欠陥が移動し始めることに相当する。なお、一旦動いた転位は結晶粒界や材料表面に達していない限り、外力の向きを変えたときに反対に動くこともよく知られている。

⁴⁴ 増分なので上付きドットではなく $\Delta \epsilon$ と書く場合もあるが、ここでは簡単のためにすべてを速度表記にした。

⁴⁵ 前述のように、結晶金属の場合の塑性変形は転位という内部欠陥の発生や移動が原因と考えられ、内部に「隙間」が生じて移動することに対応していることから、非適合ひずみになる。

ことになる。ここに、 ϵ^e と ϵ^p はそれぞれ ϵ^e と ϵ^p の偏差成分である。さらに Δ^e と Δ^p はそれぞれ式 (3.14) で定義した体積ひずみの弾性成分と塑性成分であり、 σ_{AVE} は式 (3.42) で定義された平均応力である。言い換えると、変形の増分に着目したときに、「弾性ではその増分変形の向きも大きさも応力増分に直接関係している」が、「塑性では増分変形の向きは応力そのものの向きで支配されるが、増分変形の大きさは応力増分にも関係している」ことになる。これは、次のような塑性の「内部メカニズム」を考えると少しはわかり易いかもしれない。

つまり、図 3.17 を用いて説明したように、応力状態で規定されるある面上で「降伏条件」が満足された場合、その面の向きでそのあとの塑性変形の向きは既に決定されてしまっていると考えられる。したがって、そのあとさらに外力を増やそうとした場合、このすべり面上のすべり変形しか⁴⁶生じようとはしないだろう。このことから、その増分変形の向きはすべり出そうとするすべり面の向きで決定され、結局、増分変形の向きは応力状態そのもので支配されることになる一方で、図 3.18 に示したように、実際にすべり変形（増分）が生じるかどうかは、そこに発生する応力増分の向きと大きさにも依存する。この後半に記述した現象が「流れ則」の部分であり、前半が「降伏条件」に相当する。

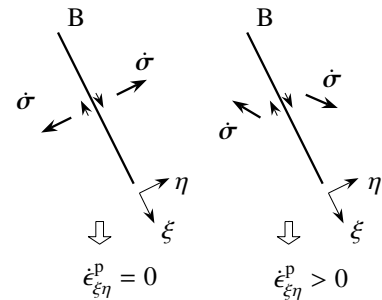


図 3.18 流れ則: 塑性変形の向き ξ - η は応力そのもの σ で決定され、その大きさは $\dot{\sigma}$ にも支配される。

(5) 増分型弾塑性構成方程式

降伏条件が式 (3.108) で与えられ、流れ則が式 (3.113) で与えられる場合の、等方弾塑性材料の増分型の構成方程式を求めておこう。ここでは具体的な例として、降伏条件式 (3.108) を

$$f \equiv \bar{\sigma} - \tau_Y(\epsilon^p) = 0 \tag{3.114}$$

と定義し直しておこう。初期降伏後の履歴依存性を明示するために、せん断降伏応力 τ_Y を塑性ひずみの関数⁴⁷として定義しておく。つまり、塑性ひずみは変形の非可逆の履歴を記憶している状態変数だと考えればいい。この f を降伏関数と呼ぶ。このとき、単調に荷重し続けて塑性変形を発生させ続けた場合には、上式 (3.114) の f は零を満足し続けるから、「荷重」という状況は

$$f = 0, \dot{f} = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}^p > 0 \tag{3.115}$$

という条件で定義できそうである。この条件の意味は初学者には難しいので、じっくり考えて欲しい。これに対し、一旦降伏した材料の外力が取り除かれ、材料が弾性に戻る「除荷」の瞬間には、 τ_Y は不変なまま降伏条件を満足しなくなろうとするので

$$f = 0, \dot{f} < 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}^p = 0 \tag{3.116}$$

で定義できそうだ。ただし、除荷後に材料が弾性状態になった時点には $f < 0$ に⁴⁸なる。なぜなら、 τ_Y が不変なまま $\bar{\sigma}$ が減少するからだ。上の二式のように、同じ応力状態 ($f = 0$ のまま) において 2 種類の変化が可能なることも、構成方程式を増分で与える必要になる理由の一つであるが、荷重の場合のその増分構成方程式は積

⁴⁶ 結晶金属の場合には、結晶格子の稠密面上の転位の移動によるせん断変形が主な塑性変形であるため、塑性的な体積変形は発生しない。これに対し、砂地盤等を連続体として取り扱う場合には、せん断に対して、砂粒が隣の砂粒に乗り上げるような変形も伴いながらすべるため、塑性的な体積変形 (ダイラタンス) が生じることがある。

⁴⁷ 厳密には塑性ひずみそのものではなく単調増加する塑性変形パラメータの関数とする必要があるが、ここでは単調荷重だけを考えることを前提として単純な表現にした。

⁴⁸ $f > 0$ という状態は存在しない。

分不可能である。なぜなら塑性変形は履歴依存性（例えばねじって引張ったときと引張ってねじったときの応答が異なる特性）を持っていて、初期状態と最終状態とだけで決定できる変形履歴ではないからだ。

式(3.115)のように載荷され続ける状態では降伏条件 $f = 0$ は満足され続けるので、式(3.114)の増分は零となり、具体的に式展開すると

$$\dot{f} = 0 = \sum_i \sum_j \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \sum_i \sum_j \frac{\partial \tau_Y}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (3.117)$$

を常に満足する。偏微分の連鎖律を使っていることには慣れて欲しい。この条件は整合条件と呼ばれている。そこで右辺の塑性ひずみ増分に式(3.113)の流れ則を代入し、さらに式(3.107)の偏微分から得られる

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}}$$

という関係を第1項に代入すれば

$$\dot{f} = \sum_i \sum_j \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} \dot{\sigma}_{ij} - \lambda \sum_i \sum_j \frac{\partial \tau_Y}{\partial \epsilon_{ij}^p} \sigma'_{ij} = 0$$

となるので、これから λ を

$$\lambda = \frac{1}{H 2\bar{\sigma}} \sum_k \sum_l \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} \dot{\sigma}_{kl}, \quad H \equiv \sum_k \sum_l \frac{\partial \tau_Y}{\partial \epsilon_{kl}^p} \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}}$$

と表すことができる。ここでは第11章の議論と合わせるために $2\bar{\sigma}$ で調整したもので H を定義しているが、この H は硬化係数と呼ばれる材料パラメータである。つまり、変形履歴においてせん断降伏応力 τ_Y がどのように変化するか（硬化則）という材料特性を実験等で求めておけば、硬化パラメータ H を具体的にモデル化することができる。この λ を流れ則に代入し戻すことによって、増分ひずみの塑性成分は

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} \sum_k \sum_l \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (3.118)$$

と表されることになる。

一方、弾性部分が Hooke の法則の式(3.105b)を増分同士の関係に書き直した関係式で

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \sum_k \dot{\sigma}_{kk} \quad (3.119)$$

のように与えられることにしよう。その関係と上式(3.118)を式(3.112)に代入すれば、増分応力と増分ひずみの間を関係付ける弾塑性関係が

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \sum_k \dot{\sigma}_{kk} + \frac{1}{H} \sum_k \sum_l \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (3.120)$$

と求められる。この逆関係を求めると

$$\dot{\sigma}_{ij} = \sum_k \sum_l \left\{ C_{ijkl} - \frac{\mu}{1+H/\mu} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \right\} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (3.121)$$

となる。ここに C は式(3.49b)で定義された弾性係数である。式(3.120) (3.121) 右辺の塑性に関する項は、降伏条件が成立 ($f = 0$) している場合にのみ考慮し、弾性状態 ($f < 0$) では無視しなければならない。この式を時々刻々積分（比例載荷でない等の一般的な場合には「積分できない」⁴⁹）ので微小なステップで「足し算」をしていけば、図3.15のような非線形挙動をモデル化できるのだ。面白いでしょ。

⁴⁹ 塑性変形は履歴依存性を持っているので、その増分表現は本質的に積分できてはいけない。積分できたら弾性になってしまう。

構造力学では古典的に完全塑性モデルを用いることが多く、降伏応力を定数とし、降伏条件が満足されたあとも硬化等が起こらず ($H = 0$ に相当する), その同じ条件が満足され続けるものとすることが多い。詳細については他の文献等を参照のこと。梁や板の基礎的な構造力学では応力状態が1軸状態であることが普通であり、この文書のほとんどの箇所では複雑な増分形式の塑性理論は用いていない。塑性論については、第11章や第12.5.4節あるいは文献 [38, 72, 126, 127] 等を参照のこと。

演習問題 3-6

6. 別途文献を見ていいので、式 (3.120) から式 (3.121) の関係を求めよ。

3.4.6 ちょっとだけ粘性

塑性とは異なり、非弾性変形が時間と共に変化する性質を粘性と呼ぶ。これは式 (3.113) に似た抵抗則で、1次元状態のせん断モデルの場合は、工学ひずみ γ とせん断応力 τ を用いて

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \tau \quad (3.122)$$

と規定されるが、式 (3.113) の λ とは異なり η は材料パラメータである。例えば、外力が作用して応力が一定の状況にあっても、ひずみが時間と共に大きくなることもある。このような現象をクリープと呼ぶ。逆に、変形が一定の状況で最初に生じた応力が減る方向に変化してしまうこともある。それを応力緩和と呼んでいる。著者は粘性については苦手なのでこのくらいの記述に留めるが、付録 G にちょっとだけ加筆してみた。

3.4.7 材料の抵抗則に用いるひずみと応力

材料の抵抗則については、物理的解釈に基づいて何らかの材料モデルを作り、材料試験結果に基づいてその材料パラメータを同定するのが一般的な方法である。注意しないといけないのは、材料試験が行われる座標系が試験する人間の都合で特別に限定されていることである。それに対して材料モデルの方は、特に等方材料であれば座標系には依存しない表現になっていないといけない。簡単な例を挙げると、 σ_{AVE} や Δ のようなスカラー関数 (テンソルの不変量) を用いることや、主値 (主応力や主ひずみと主方向) を用いてモデルを構築するのが望ましいことになる。そのため、塑性の説明でも相当応力 $\bar{\sigma}$ 等が用いられていたのである。大事なことなので再度ここでコメントしておいた。

3.5 仮想仕事の原理

3.5.1 二つの許容場と仮想仕事の原理

(1) 厳密な仮想仕事式

第3.2節では形を変える物体の幾何学的な関係式だけを定義してまとめた。そして、変形できる物体に力を加えたり歪めたりすると形を変えることによって物体は抵抗するので、第3.3節では物体内部の抵抗力を定義し、力学的な関係式だけをまとめた。そして次の第3.4節では、物体 (材料) の抵抗の仕方 (構成則) を表すためには、第3.2節の変形と第3.3節の抵抗力を関係付けなければならないことを説明した。ただ、現実の問題で構成則を正確にモデル化することにはかなりの困難が伴う。というよりも、経年劣化等の構成則の時間変化までを含めると、そのモデル化はほぼ不可能に近い。そしてそれに対して多くの実験に基づいた経験則を構築しても、設計つまり終局状態までの材料挙動の将来予測という観点からは精度のいい解が得られる確証はほとんど無い。

それにもかかわらず我々は、ある確率の下で安全な構造を設計しなければならない。そういった状況では、力学的な条件あるいは幾何学的（運動学的）な条件の少なくとも片方だけでも満たした上で、近似的に何らかの答を知りたくなるかもしれない。具体的な使用例として第5章の有限要素法や第11章の塑性解析等が挙げられる。この節では、材料によらず成り立つ重要な関係式をまず誘導し、その応用を説明する。

まず二つの許容場を定義する必要がある。変位ベクトル \mathbf{u}^k とひずみテンソル $\boldsymbol{\epsilon}^k$ が

$$\epsilon_{ij}^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i} \right) \quad \text{in } V \quad (3.123)$$

を満足し、境界 S_k で

$$u_i^k = \bar{u}_i^k \quad \text{on } S_k \quad (3.124)$$

を満足しているとき、この場を運動学的許容場と呼ぶ。ここで V は物体内体積部分を表し、 S_k は幾何学的境界条件が与えられている表面部分を表す。これに対し、応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}^s$ が与えられた体積力 \mathbf{X}^s に対して

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}^s}{\partial x_j} + X_i^s = 0, \quad \sigma_{ij}^s = \sigma_{ji}^s \quad \text{in } V \quad (3.125a, b)$$

を満足し、境界 S_s で与えられた表面外力 $\bar{\mathbf{F}}^s$ に対して

$$\sum_{j=1}^3 n_j \sigma_{ji}^s = \bar{F}_i^s \quad \text{on } S_s \quad (3.126)$$

を満足しているとき、この場を静力学的許容場と呼ぶ。なお、 S_s は力が与えられた表面部分で $S_s \cup S_k = S \equiv \partial V$, $S_s \cap S_k = \emptyset$ を満たすものとする。

式 (3.125a) に任意の運動学的許容場の u_i^k を乗じて、物体内全領域で積分すると

$$\int_V \sum_{i=1}^3 u_i^k \left\{ \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}^s}{\partial x_j} + X_i^s \right\} dV = 0$$

となる。これに式 (3.26) の Gauss の発散定理を用いると

$$\int_S \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_i^k n_j \sigma_{ji}^s dS - \int_V \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} \sigma_{ji}^s dV + \int_V \sum_{i=1}^3 u_i^k X_i^s dV = 0$$

となるので、応力のモーメントのつり合い式 (3.125b) で示された対称性⁵⁰ とひずみ変位関係式 (3.123) を用い、境界条件式 (3.124) (3.126) を考慮すると

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij}^k dV = \int_V \sum_{i=1}^3 X_i^s u_i^k dV + \int_{S_s} \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i^s u_i^k dS + \int_{S_k} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (n_j \sigma_{ji}^s) \bar{u}_i^k dS \quad (3.127)$$

という関係式を得ることができる。この関係を仮想仕事の原理と呼ぶ。同じ原理は、式 (3.123) に静力学的許容場の応力 σ_{ji}^s を乗じた全領域積分からも得ることができる。誘導過程から明らかのように、材料が何であるかということとは無関係に仮想仕事の原理は成立する。つまり第3.4節で議論した構成則とは一切関係無く成立する。また、運動学的許容場はつり合っている必要は無く、静力学的許容場も変形の適合場に対応している必要も無い。

⁵⁰ 以下、この対称性は暗黙のうちに用いられることになり、仮想仕事式に陽には組み込まれていない。

(2) 任意の許容場に対する仮想仕事の原理

前節の仮想仕事の原理式 (3.127) の誘導過程から明らかなように、もし式 (3.127) を次式のように解釈して

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} \epsilon_{ij}^k dV = \int_V \sum_{i=1}^3 X_i u_i^k dV + \int_{S_s} \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i u_i^k dS + \int_{S_k} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (n_j \sigma_{ji}) \bar{u}_i^k dS \quad (3.128)$$

が任意の運動学的許容場 \mathbf{u}^k に対して成立した場合には、これを満足する応力場 $\boldsymbol{\sigma}$ が静力学的許容場に一致することは、前節とは逆向きの過程を思い浮かべればわかるだろう。これも仮想仕事の原理と呼ばれるが、多くの文献ではこちらの方をそう呼んでいる。京都大学の西村直志先生は文献 [170] でこちらを「狭義の仮想仕事の原理」と呼んでいる。ではその逆向きの誘導過程を示しておこう。式 (3.123) のひずみ変位関係と応力の対称性を考慮して Gauss の発散定理を用い、式 (3.124) の境界条件を考慮すれば

$$\begin{aligned} & \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji} \epsilon_{ij}^k dV - \int_V \sum_i X_i u_i^k dV - \int_{S_s} \sum_i \bar{F}_i u_i^k dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i^k dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV - \int_V \sum_i u_i^k X_i dV - \int_{S_s} \sum_i u_i^k \bar{F}_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j \bar{u}_i^k n_j \sigma_{ji} dS \\ &= \int_S \sum_i \sum_j u_i^k n_j \sigma_{ji} dS - \int_V \sum_i \sum_j u_i^k \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV - \int_V \sum_i u_i^k X_i dV - \int_{S_s} \sum_i u_i^k \bar{F}_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j \bar{u}_i^k n_j \sigma_{ji} dS \\ &= - \int_V \sum_i u_i^k \left[\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i \right] dV - \int_{S_s} \sum_i u_i^k \left[\bar{F}_i - \sum_j n_j \sigma_{ji} \right] dS = 0 \end{aligned}$$

のような誘導ができる。この式が、任意の運動学的許容場 \mathbf{u}^k に対して成立するためには、それぞれの被積分関数が零であればいいので、結局

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad \text{in } V, \quad \bar{F}_i = \sum_j n_j \sigma_{ji} \quad \text{on } S_s$$

でなければならない。これは静力学的許容場が満足すべき式 (3.125) (3.126) に一致する。

これに対し、今度は式 (3.127) を次のように解釈して

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij} dV = \int_V \sum_{i=1}^3 X_i^s u_i dV + \int_{S_s} \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i^s u_i dS + \int_{S_k} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (n_j \sigma_{ji}^s) \bar{u}_i dS \quad (3.129)$$

が任意の静力学的許容場 $\boldsymbol{\sigma}^s$ に対して成立した場合には、これを満足する変位場 \mathbf{u} は運動学的許容場に一致する。これは補仮想仕事の原理と呼ばれる。式 (3.125a) を用いて X^s を応力 $\boldsymbol{\sigma}^s$ の微係数で表して消去し、Gauss の発散定理と応力の対称性を考慮したあと、式 (3.126) の境界条件を考慮すると

$$\begin{aligned} & \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij} dV - \int_V \sum_i X_i^s u_i dV - \int_{S_s} \sum_i \bar{F}_i^s u_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s \bar{u}_i dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij} dV + \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}^s}{\partial x_j} u_i dV - \int_{S_s} \sum_i \bar{F}_i^s u_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s \bar{u}_i dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij} dV + \int_S \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s u_i dS - \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dV \\ & \quad - \int_{S_s} \sum_i \bar{F}_i^s u_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s \bar{u}_i dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \epsilon_{ij} dV - \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dV - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s (\bar{u}_i - u_i) dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sigma_{ji}^s \left[\epsilon_{ij} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] dV - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji}^s (\bar{u}_i - u_i) dS = 0 \end{aligned}$$

のような誘導ができる。この式が、任意の静力学的許容場 σ^s に対して成立するためには、それぞれの被積分関数が零であればいいので、結局

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{in } V, \quad u_i = \bar{u}_i \quad \text{on } S_k$$

でなければならない。これは運動学的許容場が満足すべき式 (3.123) (3.124) に一致する。

3.5.2 ポテンシャルエネルギー — 厳密解同士の仮想仕事と変分原理

(1) 停留原理

さて、前節の静力学的許容場が解こうとしている問題の厳密解 σ の場であり、また運動学的許容場がその σ に対応したひずみと変位の厳密解のごく近傍の変動（変分）場 δu と $\delta \epsilon$ であるとする。ただし、変位の境界条件は本質的な境界条件であり、解こうとしている問題にとっては最も重要な制約条件なので、その変動だけは導入してはいけないことから

$$\delta \bar{u}_i = 0 \quad \text{on } S_k \quad (3.130)$$

とする。したがって式 (3.127) の仮想仕事の原理は、 S_k 上の境界条件の項が無くなり

$$\delta \Pi(\mathbf{u}) \equiv \int_V \sum_i \sum_j \delta \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV - \int_V \sum_i \delta u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \bar{F}_i dS = 0 \quad (3.131)$$

となる。記号 δ は変動⁵¹であることを示し、 δu は仮想変位と呼ばれ、それに対応した仮想ひずみは

$$\delta \epsilon_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right)$$

と定義した。式 (3.131) が任意の仮想変位に対して成り立つとき、対応する応力場が静力学的許容場になることは、前節で示した通りである。そして、上式 (3.131) の左辺にあるスカラー量（関数の関数：汎関数） Π の変動（第1変分）と置いてみたのだが、これは、仮想仕事の原理があるスカラー量の変動が零になる条件として解釈できるかどうかをここでは検討してみようとしているからである。

そこで、材料が式 (3.61) の一般化された Hooke の法則を満足し、弾性係数は式 (3.64) の対称性も満足しているものとする

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\mathbf{u}) &= \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta \epsilon_{ij} C_{jkl} \epsilon_{kl} dV - \int_V \sum_i \delta u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \bar{F}_i dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \frac{1}{2} \{ \delta \epsilon_{ij} C_{jkl} \epsilon_{kl} + \epsilon_{ji} C_{jkl} \delta \epsilon_{lk} \} dV - \int_V \sum_i \delta u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \bar{F}_i dS \\ &= \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \frac{1}{2} \delta \{ \epsilon_{ij} C_{jkl} \epsilon_{kl} \} dV - \int_V \sum_i \delta u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \bar{F}_i dS \end{aligned}$$

となる。そこで、式 (3.65) のひずみエネルギーを誘導したときと同じように、上式 $\delta \Pi$ を変位 \mathbf{u} についての全微分のようなものと解釈して、それを変位で積分（関数で積分）すると

$$\Pi(\mathbf{u}) \equiv \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij} C_{jkl} \epsilon_{kl} dV - \int_V \sum_i u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i u_i \bar{F}_i dS \quad (3.132)$$

を得る。ただし、外力 \mathbf{X} , $\bar{\mathbf{F}}$ は与えられたもので変位には依存しない量であるとしている。この式で定義される Π を全ポテンシャルエネルギーと呼ぶ。右辺第1項はひずみエネルギーであり、右辺第2, 3項はそれぞれ体積力・

⁵¹ 第3.5.1節の厳密な仮想仕事の原理の二つの場の絶対値の大きさには制限が無かった。西野文雄先生は、「つり合っている系は力が作用していないのと同じだから、それを何メートル動かしても仕事をしない、というのが仮想仕事の原理」とおっしゃっていた。ただこの節では、あとで積分と同じ操作をするのでこれを「微分量」に相当する「関数のちょっとした変動（変分）」と捉える。

表面力の外力ポテンシャルと⁵²呼ばれる。そして式(3.131)は、その汎関数 Π の第1変分が零という(ちょうどある関数 $f(x)$ の微係数が零というのと同じ)条件と捉えることができるので、式(3.131)を全ポテンシャルエネルギーの停留原理

$$\delta\Pi = 0 \quad \leftrightarrow \quad \Pi \rightarrow \text{停留}$$

と呼んでいる。つまり、このような厳密解によって表された仮想仕事の原理は停留原理である。「変分」という言葉については第5.4.3節等で勉強して欲しい。

(2) 停留原理から得られる支配方程式

特に、ここで仮定したように弾性係数が式(3.64)の対称性を満足して、かつ安定な材料であれば、ひずみエネルギーは形式的に正定値の2次形式となるので、この停留原理は「最小原理」

$$\delta\Pi = 0, \quad \delta^2\Pi > 0 \quad \leftrightarrow \quad \Pi \rightarrow \text{最小}$$

になる。 $\delta^2\Pi$ を汎関数 Π の第2変分と呼ぶが、ちょうどある関数 $f(x)$ が下に凸になる条件が関数 f の2階の微係数が正であることと同じである。そして、第3.5.1(2)節の前半にその具体的な誘導過程を示した(\mathbf{u}^k と ϵ^k を $\delta\mathbf{u}$ と $\delta\epsilon$ に置き換えればいい)ように、この最小原理からはその被積分関数に静力学的許容場が満足すべき支配方程式、つまり、つり合い式(3.125)と境界条件式(3.126)を得る。この被積分関数に得られる微分方程式は、変分原理のEuler方程式と呼ばれている。

では、 Π を最小にした厳密解による Π の最小値 Π_{MIN} を求めるために、上のつり合い式の \mathbf{X} を式(3.132)の右辺第2項に代入すると

$$\Pi_{\text{MIN}} = \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV + \int_V \sum_i \sum_j u_i \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV - \int_{S_s} \sum_i u_i \bar{F}_i dS$$

を得る。この第2項にGaussの発散定理を適用して力の境界条件を考慮すると

$$(\text{第2項}) = \int_{S_s} \sum_i u_i \sum_j n_j \sigma_{ji} dS - \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV = \int_{S_s} \sum_i u_i \bar{F}_i dS - \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV \quad (*)$$

となる。さらに上式(*)の第2項を無理やり二つに分けて

$$[\text{式(*)第2項}] = \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV = \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV + \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \sigma_{ij} dV$$

のように書き直すことができる。そこでモーメントのつり合い式(3.23)から応力は対称なので

$$[\text{式(*)第2項}] = \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji} dV + \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \sigma_{ji} dV = \int_V \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \sigma_{ji} dV$$

と書いてもいいから、式(3.6)のひずみと変位の関係をこれに代入すると、結局 Π_{MIN} の第2項は

$$(\text{第2項}) = \int_{S_s} \sum_i u_i \bar{F}_i dS - \int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV$$

となる。これを上の Π_{MIN} の第2項に代入し直すことによって

$$\Pi_{\text{MIN}} = -\frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV \quad (3.133)$$

のように、最小値はひずみエネルギーの値を負にしたものになる。ちょっとだけ興味深くないですか。

⁵² ひずみエネルギーは弾性ポテンシャルエネルギーとも呼ばれ、負符号付きの外力ポテンシャルは外力のポテンシャルエネルギーとも呼ばれる。そのため、この文書ではその和に「全」を付けて呼ぶことにした。

(3) 全補ポテンシャルエネルギー

今度は逆に、式(3.127)の運動学的許容場の方が解こうとしている問題の厳密解 \mathbf{u} の場であり、静力学的許容場がその \mathbf{u} に対応した応力の厳密解のごく近傍の変動場 $\delta\boldsymbol{\sigma}$ である場合を考えてみよう。すると仮想仕事の原理式(3.127)は

$$\delta\Pi^*(\boldsymbol{\sigma}) = \int_V \sum_i \sum_j \delta\sigma_{ji} \epsilon_{ij} dV - \int_V \sum_i \delta X_i u_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta \bar{F}_i u_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j (n_j \delta\sigma_{ji}) \bar{u}_i dS = 0$$

と書くことができる。ここに $\delta\mathbf{X}$ と $\delta\bar{\mathbf{F}}$ は応力変動に対応した外力の変動である。前節で示したように、この式が任意の変動 $\delta\boldsymbol{\sigma}$ に対して成立する条件からは、運動学的許容場が満足すべき式(3.123) (3.124) が求められる。これも(狭義の)補仮想仕事の原理と呼ばれる。そこで、材料が式(3.61)の一般化された Hooke の法則を満足するとする。また、弾性係数は式(3.64)の対称性も満足しているものとする、式(3.58)のコンプライアンス \mathbf{D} も同様の対称性を持つ。これを用いると上式は

$$\delta\Pi^* = \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \delta\sigma_{ji} D_{ijkl} \sigma_{kl} dV - \int_V \sum_i \delta X_i u_i dV - \int_{S_s} \sum_i \delta \bar{F}_i u_i dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \delta\sigma_{ji} \bar{u}_i dS = 0$$

と書くこともできる。そこで、もし第2,3項の外力に関して

$$u_i = \frac{\partial \Psi_X}{\partial X_i} \quad \text{in } V, \quad u_i = \frac{\partial \Psi_{\bar{F}}}{\partial \bar{F}_i} \quad \text{on } S_s \quad (3.134)$$

を満足する二つのスカラーポテンシャル Ψ_X と $\Psi_{\bar{F}}$ が存在する場合には、上式は積分できて

$$\Pi^*(\boldsymbol{\sigma}) \equiv \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \sigma_{ji} D_{ijkl} \sigma_{kl} dV - \int_V \Psi_X dV - \int_{S_s} \Psi_{\bar{F}} dS - \int_{S_k} \sum_i \sum_j n_j \sigma_{ji} \bar{u}_i dS \quad (3.135)$$

というスカラー量が定義できるようになる。この Π^* を全補ポテンシャルエネルギーと呼び、停留(最小)原理は全補ポテンシャルエネルギーに対しても成立する。

(4) 非圧縮性弾性体の支配方程式

第3.4.3(3)節で誘導した非圧縮性材料の構成方程式(3.85)は、結果を知っている人だからこそ求められたと感じた読者がいるかもしれない。ここではもう少し客観的な誘導を行っておこう。Hooke の法則に従う弾性体の全ポテンシャルエネルギーは式(3.132)で表されていた。そこで、式(3.83b)で表される非圧縮性の制約条件付きで、この全ポテンシャルエネルギーを停留させることによって、非圧縮性弾性体の支配方程式等を誘導してみる。そのために、式(3.83b)の制約条件にペナルティ p を乗じて式(3.132)に付加した汎関数

$$\Pi_i \equiv \frac{1}{2} \int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij} \sigma_{ji} dV - \int_V \sum_i u_i X_i dV - \int_{S_s} \sum_i u_i \bar{F}_i dS - \int_V p \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV \quad (3.136)$$

を考えてみる。このペナルティ p は Π_i を最小化するときの高額な罰金と考えればよく、その罰金を払いたくなくなるような最小化によって、式(3.83b)を是が非でも満足させようとしていると考えればよい。数学の言葉を使うと p は **Lagrange** の未定乗数と呼ばれる。これに対して変位 \mathbf{u} と未定乗数 p を変動させた停留原理から支配方程式を求めよう。式(3.136)の最初の3項の変分は第3.5.1(2)、3.5.2(2)節で求めてあるので、第4項だけの変分をとると

$$\begin{aligned} -\delta \left[\int_V p \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV \right] &= - \int_V \delta p \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV - \int_V p \sum_i \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_i} dV \\ &= - \int_V \delta p \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV - \int_S \sum_i \delta u_i n_i p dS + \int_V \sum_i \delta u_i \frac{\partial p}{\partial x_i} dV \\ &= - \int_V \delta p \sum_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} dV - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \sum_j n_j \delta_{ji} p dS + \int_V \sum_i \delta u_i \sum_j \delta_{ji} \frac{\partial p}{\partial x_j} dV \end{aligned}$$

となる。なお、第2行から第3行への式変形では式(3.130)のように S_k で δu_i が零であることを用いている。第2, 3項では Kronecker のデルタの定義を利用して、無理やり

$$n_i = \sum_j n_j \delta_{ji}, \quad \frac{\partial p}{\partial x_i} = \sum_j \delta_{ji} \frac{\partial p}{\partial x_j}$$

と置いたが、初学者は今ではわからなくてもいい。これと式(3.136)の最初の3項の変分とを統合すると、最終的に仮想仕事式

$$\begin{aligned} \delta \Pi_i = & - \int_V \sum_i \delta u_i \left[\sum_j \frac{\partial (\sigma_{ji} - p \delta_{ji})}{\partial x_j} + X_i \right] dV \\ & - \int_{S_s} \sum_i \delta u_i \left[\bar{F}_i - \sum_j n_j (\sigma_{ji} - p \delta_{ji}) \right] dS - \int_V \delta p \sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} dV = 0 \end{aligned}$$

を得る。

これが変位と罰金の任意の変動 δu , δp に対して成立するためには、それぞれの被積分関数が零であればいい。したがってまず第3項からは、非圧縮性の条件式(3.83b)

$$\sum_k \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad \text{in } V \quad (3.137)$$

を得ることができる。次に第2項の括弧の中は力の境界条件になっているはずなので、ここでは「実質的な応力」 σ^* を新たに

$$\sigma_{ij}^* \equiv \sigma_{ij} - p \delta_{ij} \quad (3.138)$$

で定義すると、その力の境界条件が

$$\sum_j n_j \sigma_{ji}^* = \bar{F}_i \quad \text{on } S_s \quad (3.139)$$

と表され、式(3.24b)に形式的には一致する。最後に、第1項からつり合い式が

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}^*}{\partial x_j} + X_i = 0 \quad \text{in } V \quad (3.140)$$

と求められる。式(3.46)の Hooke の法則を式(3.138)に代入し、式(3.137)の非圧縮性を考慮すると

$$\sigma_{ij}^* = 2\mu \epsilon_{ij} - p \delta_{ij} = 2\mu \epsilon'_{ij} - p \delta_{ij} \quad (3.141)$$

を得る。これは式(3.85)に形式的に一致する。したがって、変位で表したつり合い式は式(3.86a)に一致し、力の境界条件式(3.139)も

$$\sum_j n_j \left\{ \mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - p \delta_{ij} \right\} = \bar{F}_i \quad \text{on } S_s \quad (3.142)$$

と求められる。この定式化からは Poisson 比が $\nu = 1/2$ であるといった構成則についての情報が得られないどころか必要も無く、体積弾性係数 K の関与が自動的に消滅するだけというのは非常に興味深い⁵³。

3.5.3 相反定理 — 異なる問題同士の仮想仕事式

ここは読み飛ばしてもいいが面白いよ。物体中の点 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ に大きさ $p^{\boldsymbol{\xi}}$ の集中外力だけが作用しているとき、式(3.22)のつり合い式にある分布外力 \mathbf{X} を

$$X_i(\mathbf{x}) = p_i^{\boldsymbol{\xi}} \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}), \quad \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \equiv \delta(x_1; \xi_1) \delta(x_2; \xi_2) \delta(x_3; \xi_3)$$

⁵³ 非圧縮性弾性体で近似モデル化される空気と水もそれぞれ $K_{\text{air}} = 0.14 \text{ MN/m}^2$ や $K_{\text{water}} = 2.06 \text{ GN/m}^2$ 等の体積弾性係数の値を持つ。

と表すことができる。この $\delta(x_i; \xi_i)$ は Dirac のデルタ関数と呼ばれる。1次元の場合の直感的な解釈を図 4.49 に示し、その正確な定義を式 (4.57) に与えた。最も重要な性質は

$$\int_V f(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dV = f(\boldsymbol{\xi}) \quad \text{if } \boldsymbol{\xi} \in V \quad (*)$$

になるということである。 $\delta(x_i; \xi_i)$ を「関数」と書いたが、本当は「超関数」と呼ばれる特殊な数学的概念で、集中外力を表現するときによく用いられるので、ここでは「あー、そういうものか」と受け止めるに留め、上式 (*) が成立することを信用⁵⁴して欲しい。さて図 3.19 の左側の図のように、この集中外力だけが作用したときに生じた応力と変位をそれぞれ $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ とすると、つり合い式と境界条件式は

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial x_j} + p_i^\xi \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ on } S_K, \quad \sum_j n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = 0 \text{ on } S_S \quad (a)$$

となる。ここに表面 S のうち、 S_K は変位を固定した境界であり、 S_S は表面外力を与えていない自由表面で、 $S_K \cap S_S = \emptyset$, $S_K \cup S_S = S$ とする。一方、同じ境界条件が与えられた同じ物体の $\mathbf{x} = \boldsymbol{\eta}$ に集中外力 \mathbf{q}^η のみ⁵⁵が作用したときの応力と変位をそれぞれ $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})$, $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})$ とすると、そのつり合い式と境界条件式は

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})}{\partial x_j} + q_i^\eta \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) = 0, \quad u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ on } S_K, \quad \sum_j n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) = 0 \text{ on } S_S \quad (b)$$

である。

そこで、前節で説明した仮想仕事をこの二つの問題の間で考えてみる。すなわち、式 (a) のつり合い式にもう一つの問題の変位 $u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})$ を乗じて仕事を算定し、それを物体全体で合計すると

$$\int_V \sum_i u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) \left\{ \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})}{\partial x_j} + p_i^\xi \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \right\} dV = 0$$

となる。第1項に Gauss の発散定理を用い、第2項に上式 (*) を用いると

$$\int_S \sum_i \sum_j u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dS - \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta})}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dV + \sum_i p_i^\xi u_i(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}) = 0$$

となる。特にデルタ関数の使い方については、式をじっくり眺めて比べて欲しい。式 (a) の力の境界条件と式 (b) の変位の境界条件を第1項に代入すれば、それは零になる。第2項の被積分関数にある応力が対称であることとひずみの定義式 (3.6) を考慮すれば、結局上式は

$$\int_V \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \sigma_{ji} dV = \int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dV = \sum_i p_i^\xi u_i(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta})$$

となる。これに式 (3.61) の応力ひずみ関係を代入すると

$$\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) C_{jilk} \epsilon_{lk}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dV = \sum_i p_i^\xi u_i(\boldsymbol{\xi}; \boldsymbol{\eta}) \quad (c)$$

と表すことができる。これと全く同じような仮想仕事を、式 (b) のつり合い式に式 (a) の問題の変位 $u_i(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ を乗じて算定すると、最終的に

$$\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) C_{jilk} \epsilon_{lk}(\mathbf{x}; \boldsymbol{\eta}) dV = \sum_i q_i^\eta u_i(\boldsymbol{\eta}; \boldsymbol{\xi}) \quad (d)$$

⁵⁴ Northwestern 大学の村外志夫先生は講義でときどき 'Believe me!' とおっしゃった。多分、説明するのが面倒だったのだらうと思う。

⁵⁵ 異なる位置の集中外力には異なる記号 \mathbf{p}, \mathbf{q} を用いているが、相反定理が視覚的に理解し易くなるように上付き添え字を付けてある。

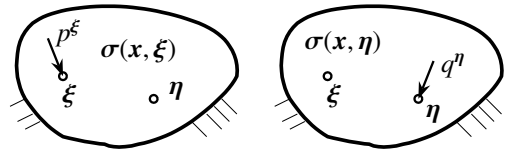


図 3.19 相反定理：載荷点と観測点の入れ替え

を得る。この両式 (c) (d) を辺々引き、左右の辺を入れ替えると

$$\sum_i p_i^\xi u_i(\xi; \eta) - \sum_i q_i^\eta u_i(\eta; \xi) = \int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \eta) (C_{jilk} - C_{lkji}) \epsilon_{lk}(\mathbf{x}; \xi) dV \quad (e)$$

という関係が成立する。

ここで、もしエネルギー密度関数が存在するモデルで材料特性を表すことができるのであれば、式 (3.64) の対称性が成立する（自己随伴系になる）ので、上式 (e) の右辺が零になることから、結局

$$\sum_i p_i^\xi u_i(\xi; \eta) = \sum_i q_i^\eta u_i(\eta; \xi) \quad \rightarrow \quad \mathbf{p}^\xi \cdot \mathbf{u}(\xi; \eta) = \mathbf{q}^\eta \cdot \mathbf{u}(\eta; \xi) \quad (3.143)$$

が成り立つ。これは **Betti** の相反定理と呼ばれている。さらに \mathbf{p}^ξ と \mathbf{q}^η は任意なので、 $\mathbf{p}^\xi = \mathbf{q}^\eta = \mathbf{1}$ とすれば

$$\mathbf{u}(\xi; \eta) = \mathbf{u}(\eta; \xi) \quad (3.144)$$

という関係が成立し、これは **Maxwell** の相反定理と呼ばれる。つまり、「ある物体の $\mathbf{x} = \xi$ に単位の集中外力を作用させたときの $\mathbf{x} = \eta$ の位置の変位は、逆に $\mathbf{x} = \eta$ に同じ向きの単位の集中外力を作用させたときの $\mathbf{x} = \xi$ の位置の変位と等しくなる」ことを意味している。ちょっと不思議でなかなか信じられないような結論であるが、これが自己随伴系を持つ著名な特性である。逆に考えると、複合材料のように内部に微視構造が存在して複雑な異方性が存在する材料の場合には、式 (3.64) の対称性が成立しない場合があり、そのときには相反定理は成立しない。そして、随伴系のひずみ ϵ^* で表した見かけ上のつり合い式と力学的境界条件式も

$$\sum_j \frac{\partial \left(\sum_k \sum_l \epsilon_{lk}^* C_{lkji} \right)}{\partial x_j} + X_i = 0, \quad \sum_j n_j \left(\sum_k \sum_l \epsilon_{lk}^* C_{lkji} \right) = F_i$$

となるので、一般 ($C_{ijkl} \neq C_{klij}$ の場合) には随伴系は物理的な意味を持たない。

ところで、この節における相反定理の証明には応用数学の講義からの知識を用いてある。多分、我が国の多くの構造力学・材料力学の教科書（第1著者が学生のときに指定された著名な材料力学の教科書も含み）では、簡単に言うと、式 (3.64) の代わりに剛性行列のような影響係数の対称性で変位の相反性を証明してあったと記憶する。しかし本当は、なぜ剛性行列が対称になるかを証明していない（自己随伴系であることを明記していない）から、あまり正確な証明にはなっていないと感じた。それがここに証明を載せた理由である。

さて、東京工業大学の森勉先生と勉強していたときに先生が証明した相反性（次節で紹介する）が面白かったのだが、それは上の相反定理を一般化したものの一つだとわかった。そのような一般化は文献 [26] でも行われているが、ここではその一部に

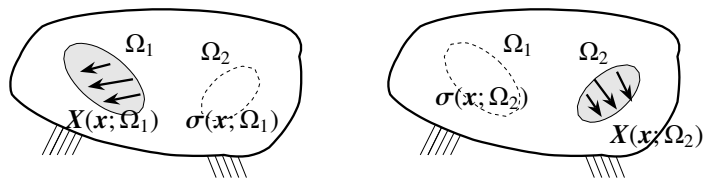


図 3.20 やや一般化した相反定理

ついて考察する。図 3.20 にあるように、物体中のある領域 $\mathbf{x} \in \Omega_1$ に分布外力 $\mathbf{X}(\Omega_1)$ が作用していたとき、生じる応力と変位をそれぞれ $\sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1)$, $u_i(\mathbf{x}; \Omega_1)$ と表すことにすると、つり合い式と境界条件式は

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1)}{\partial x_j} + X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) = 0, \quad u_i(\mathbf{x}; \Omega_1) = 0 \text{ on } S_K, \quad \sum_j n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1) = 0 \text{ on } S_S \quad (f)$$

となる。一方、同じ境界条件が与えられた同じ物体の $\mathbf{x} \in \Omega_2$ の領域に集中外力 $\mathbf{X}(\Omega_2)$ のみが作用したとすると、そのつり合い式と境界条件式は

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_2)}{\partial x_j} + X_i(\mathbf{x}; \Omega_2) = 0, \quad u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) = 0 \text{ on } S_K, \quad \sum_j n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_2) = 0 \text{ on } S_S \quad (g)$$

である。

前述の相反定理の誘導と同様、この二つの系同士の仮想仕事を求めてみる。すなわち、式 (f) のつり合い式にもう一つの問題の変位 $u_i(\mathbf{x}; \Omega_2)$ を乗じて仕事を算定し、それを物体全体で積分すると

$$\int_V \sum_i u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) \left\{ \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1)}{\partial x_j} + X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) \right\} dV = 0$$

と表される。この第1項に Gauss の発散定理を用いると

$$\int_S \sum_i \sum_j u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1) dS - \int_V \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i(\mathbf{x}; \Omega_2)}{\partial x_j} \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1) dV + \int_{\Omega_1} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) dV = 0$$

となる。第3項は、荷重が Ω_1 にしか作用していないことから積分範囲は Ω_1 の中だけになる。式 (f) の力の境界条件と式 (g) の変位の境界条件を第1項に代入すれば、それは零になり、さらに第2項の被積分関数にある応力が対称であることとひずみの定義式とを考慮すれば、結局上式は

$$\int_V \sum_i \sum_j \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_2) \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_1) dV = \int_{\Omega_1} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) dV$$

となる。これに Hooke の法則を代入すると

$$\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_2) C_{jilk} \epsilon_{lk}(\mathbf{x}; \Omega_1) dV = \int_{\Omega_1} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \quad (h)$$

と表すことができる。さて同様に、式 (g) のつり合い式に式 (f) の問題の変位 $u_i(\mathbf{x}; \Omega_1)$ を乗じた仮想仕事を算定すると、最終的に

$$\int_V \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) C_{jilk} \epsilon_{lk}(\mathbf{x}; \Omega_2) dV = \int_{\Omega_2} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_2) u_i(\mathbf{x}; \Omega_1) dV \quad (i)$$

を得る。この両式 (h) (i) を辺々引き、もし $C_{ijkl} = C_{klij}$ が成立すれば

$$\int_{\Omega_1} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_1) u_i(\mathbf{x}; \Omega_2) dV = \int_{\Omega_2} \sum_i X_i(\mathbf{x}; \Omega_2) u_i(\mathbf{x}; \Omega_1) dV \quad (3.145)$$

という関係が成立する。もし荷重 \mathbf{X} が集中荷重のときは、この式は前述のような二つの「点」の間で成立する Betti の相反定理になる。この物理的な意味に思いを巡らすと面白くないですか。こんな等式が成立するはずがないとも感じるし、だから何なの? というのも正直な気持ちだろう。が、ひよっとするとこれがとても便利な関係式を生み出さないとはい限らないのだが。

3.5.4 非弾性ひずみに関する相反性

さて唐突ではあるが、前節で導入した仮想仕事のもう一つの例として、図 3.21 の左図のような等方弾性無限体 D 中に二つの異なる領域 Ω_1, Ω_2 を設定し、そこに例えば熱ひずみが導入され

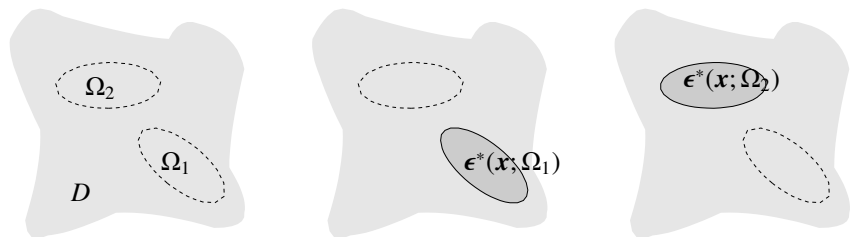


図 3.21 対象とする二つの問題と相反性

た（製造過程で熱等の作用による残留ひずみが発生した）ような、次の二つの異なる問題を考えよう。外力は作用しないものとし、図 3.21 の右側の二つの図のように、片方の領域 Ω_m ($m = 1, 2$) だけに非弾性ひず

み $\epsilon^*(\mathbf{x}; \Omega_m)$ (熱ひずみ) が分布したときの全領域の変位と応力・総ひずみ・弾性ひずみをそれぞれ $\mathbf{u}(\mathbf{x}; \Omega_m)$, $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}; \Omega_m)$, $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}; \Omega_m)$, $\boldsymbol{\epsilon}^e(\mathbf{x}; \Omega_m)$ と表す。 $m = 1, 2$ の場合のそれぞれを「問題1」「問題2」と呼ぶことにすると、各問題 m の Hooke の法則とひずみ変位関係式(3.105)で示したように

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_m) = \sum_k \sum_l C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_m), \quad \epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_m) = \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_m) + \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_m) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i(\mathbf{x}; \Omega_m)}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j(\mathbf{x}; \Omega_m)}{\partial x_i} \right) \quad (a, b)$$

である。外力が作用していないので、無限遠点の力の境界条件式と物体内のつり合い式については

$$\sum_j n_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_m) = 0 \quad \text{on } \partial D, \quad \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}(\mathbf{x}; \Omega_m)}{\partial x_j} = 0 \quad \text{in } D \quad (c)$$

が成り立つ。ここに \mathbf{n} は物体無限遠境界の(概念的な)外向き法線ベクトルである。

問題1で生じた応力と問題2で生じた弾性ひずみがする仕事 $W(\Omega_1; \Omega_2)$ を

$$W(\Omega_1; \Omega_2) \equiv \int_D \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \quad (d)$$

と定義する。この式に Hooke の法則式 (a) を代入すると

$$W(\Omega_1; \Omega_2) \equiv \int_D \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \{C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1)\} \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2) dV$$

となるが、等方弾性体の場合は $C_{ijkl} = C_{klij}$ という対称性を持つので、上式の (ij) と (kl) の組を入れ替えてもいいから、被積分関数にその演算を続けると

$$\begin{aligned} \sum_{ijkl} \{C_{ijkl} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1)\} \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2) &= \sum_{ijkl} C_{klij} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2) = \sum_{ijkl} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1) \{C_{klij} \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2)\} \\ &= \sum_{ijkl} \{C_{klij} \epsilon_{ij}^e(\mathbf{x}; \Omega_2)\} \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1) = \sum_k \sum_l \sigma_{kl}(\mathbf{x}; \Omega_2) \epsilon_{kl}^e(\mathbf{x}; \Omega_1) \end{aligned}$$

のように Ω_1 と Ω_2 が入れ替えられることに帰着するので

$$W(\Omega_1; \Omega_2) = W(\Omega_2; \Omega_1) \quad (3.146)$$

が成立する。異なる問題の解同士の内積(前節の仮想仕事)なので物理的な意味はよくわからないし、この式自体も非常に不思議な関係だと感じて構わない。確かに不思議だ。

一方、式 (d) に式 (b) を代入して応力の対称性 ($\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$) を利用し、Gauss の発散定理を用いると

$$\begin{aligned} W(\Omega_1; \Omega_2) &= \int_D \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) (\epsilon_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_2) - \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_2)) dV \\ &= \int_D \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \frac{\partial u_j(\mathbf{x}; \Omega_2)}{\partial x_i} dV - \int_D \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \\ &= \int_{\partial D} \sum_i \sum_j \{n_i \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1)\} u_j(\mathbf{x}; \Omega_2) dS - \int_D \sum_i \sum_j \left\{ \frac{\partial \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1)}{\partial x_i} \right\} u_j(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \\ &\quad - \int_{\Omega_2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \end{aligned}$$

を得る。 $\epsilon^*(\mathbf{x}; \Omega_2)$ が領域 Ω_2 だけで定義されていることから右辺第3項は Ω_2 上だけの積分になっている。さらに、式 (c) の境界条件式とつり合い式によって上式右辺の最初の2項の括弧の中は零になるので、結局

$$W(\Omega_1; \Omega_2) = - \int_{\Omega_2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_2) dV \quad (e)$$

という関係式を得る。逆に、問題2で生じた応力と問題1で生じた弾性ひずみがする仕事 $W(\Omega_2; \Omega_1)$ に対しても同様の演算をすると

$$W(\Omega_2; \Omega_1) = - \int_{\Omega_1} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_2) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_1) dV \quad (f)$$

を得る。ところが、式(3.146)が成立していたので、最終的に式(e)と式(f)は等しくなり

$$\int_{\Omega_2} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_1) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_2) dV = \int_{\Omega_1} \sum_i \sum_j \sigma_{ij}(\mathbf{x}; \Omega_2) \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}; \Omega_1) dV \quad (3.147)$$

が成立する。「因果」の入れ替え可能という観点からは、これも相反性と呼んでもよさそうだ。奇妙だが興味深い。これは東京工業大学の森勉先生が遊びにいらしたときに教えてくださった証明である。何に利用できるかって? 森勉先生に聞いてください。

3.5.5 弾性体の単位荷重法と Green 関数

第4章で定義する単位荷重法は構造力学でよく用いられる便利な手法だが、それを3次元の弾性体に対して定式化しておく。対象とする物体のある力学問題Aの変位とひずみ・応力がそれぞれ \mathbf{u} , $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ で、式(3.6)のひずみ変位関係を満足し、構成則の式(3.49)あるいは式(3.59)を満足しているものとする。簡単のために変位は

$$u_i = 0 \quad \text{on } S_K$$

のように、幾何学的な「零」境界条件を満足しているものとする。ただし、とりあえずこの段階では条件はこれだけであり、必ずしも問題Aがなんらかの境界値問題の解である必要は無い。構成則は満足しているが、本質的には運動学的許容場である。

これに対し、同じ対象の物体中に単位の集中外力「だけ」を作用させたときに生じるひずみが $\boldsymbol{\epsilon}''$ で応力が $\boldsymbol{\sigma}''$ で、問題Aと同じ構成則を満足し、さらにこちらは

$$\sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}''}{\partial x_j} + f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \sigma_{ij}'' = \sigma_{ji}'' \quad (a)$$

のつり合い式を満足しているものとする。これも構成則は満足しているが、変位つまり幾何学的な場については何も条件を付けていないので、本質的には静力学的許容場である。ここに $f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ は $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ に作用している単位の集中外力ベクトル成分で、大きさが単位、つまり

$$f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = 1$$

を満足するので、この単位集中外力ベクトル \mathbf{f} は

$$\mathbf{f} = \sum_i f_i \mathbf{e}_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = \mathbf{e}_f \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}), \quad \mathbf{e}_f \equiv \sum_i f_i \mathbf{e}_i \quad (b)$$

で与えられる。つまり大きさが1で \mathbf{e}_f の方向に作用する集中外力である。外力はこの単位集中外力だけなので、境界条件は力学的境界条件の

$$\sum_j n_j \sigma_{ji}'' = 0 \quad \text{on } S_s$$

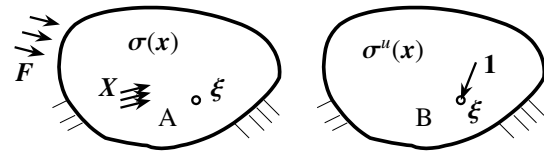


図 3.22 単位荷重法

だけが与えられているものとする。こちらを便宜上問題 B と呼ぶ。

問題 B のつり合い式 (a) と問題 A の変位 \mathbf{u} との仮想仕事をとり、 Gauss の発散定理を用いると

$$\sum_i \int_V u_i \left\{ \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}^u}{\partial x_j} + f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \right\} dV = \sum_i \sum_j \int_S u_i n_j \sigma_{ji}^u dS - \sum_i \int_V \left\{ \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji}^u - u_i f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \right\} dV = 0 \quad (c)$$

となるが、第 1 項の面積積分の境界項は両方の問題の境界条件から零になる。一方、体積積分中の第 2 項は \mathbf{u} と \mathbf{f} の内積なので、式 (b) を用いてデルタ関数の性質を用いると

$$\sum_i \int_V u_i f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) dV = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{e}_f = u_f(\boldsymbol{\xi})$$

と書くことができる。この $u_f(\boldsymbol{\xi})$ は $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ の変位 \mathbf{u} の \mathbf{e}_f 方向成分、つまり作用させた単位外力方向の変位成分である。さらに、式 (c) の体積積分中の第 1 項は、ひずみ変位関係式 (3.6) と構成則式 (3.59) を考慮すると

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \int_V \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \sigma_{ji}^u dV &= \sum_i \sum_j \int_V \epsilon_{ji} \sigma_{ji}^u dV = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V D_{jikl} \sigma_{kl} \sigma_{ji}^u dV \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \sigma_{ij}^u D_{ijkl} \sigma_{kl} dV \end{aligned}$$

となるので、これを上式に代入して左右の辺を入れ替えれば

$$u_f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \sigma_{ij}^u D_{ijkl} \sigma_{kl} dV \quad (3.148)$$

という関係を得る。つまり、問題 A のある点の変位は、その点に単位の集中外力を作用させて得られる問題 B の応力と問題 A の応力を用いて、この積分公式で求めることができることを示している。これを「弾性体の単位荷重法」と呼ぶことにする。

もし問題 A の境界上の点 $\boldsymbol{\xi}$ の変位を求めるために単位集中外力を境界上に与える場合には、上述の問題 B の分布外力 $f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ は不要で、境界表面の点 $\boldsymbol{\xi}$ の境界条件を式 (b) で定義した外力 \mathbf{f} を用いて

$$\sum_j n_j \sigma_{ji}^u = f_i \delta(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$$

のように与えればよい。結局、仮想仕事式 (c) の境界項が

$$\sum_i \sum_j \int_S u_i n_j \sigma_{ji}^u dS = \sum_i u_i(\boldsymbol{\xi}) f_i = \mathbf{u}(\boldsymbol{\xi}) \cdot \mathbf{e}_f = u_f(\boldsymbol{\xi})$$

となるので、最終的には式 (3.148) と同じ結果を得る。

さらに、もし $C_{ijkl} = C_{klij}$ が成立する自己随伴系の場合には、上の体積積分の第 1 項は

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \int_V \epsilon_{ji} \sigma_{ji}^u dV &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \epsilon_{ji} C_{jikl} \epsilon_{kl}^u dV = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V C_{klji} \epsilon_{ji} \epsilon_{kl}^u dV \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \sigma_{kl} D_{klmn} \sigma_{mn}^u dV = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \sigma_{ij} D_{ijkl} \sigma_{kl}^u dV \end{aligned}$$

と書き直してもいいから、式 (3.148) の被積分関数の順番が可換になって

$$u_f(\boldsymbol{\xi}) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \sigma_{ij} D_{ijkl} \sigma_{kl}^u dV \quad (3.149)$$

という関係も成立する。例えば静力学的な応力だけの解を（ある意味で近似的あるいはいい加減に）求められれば、それを用いた式 (3.148) あるいは式 (3.149) から任意点の変位を求めることができる。具体的な利用法については構造力学の「単位荷重法」を参照のこと。

ここまでは問題 A を何らかの境界値問題としては設定しなかったが、問題 A が式 (3.22) (3.23) のつり合い式を満足し、外力 \mathbf{F} が与えられた表面では力学的境界条件を満足しているものとする。これに対し、問題 B の変位 \mathbf{u}^u もひずみ変位関係と問題 A と同じ幾何学的境界条件との

$$\epsilon_{ij}^u = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^u}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^u}{\partial x_i} \right), \quad u_i^u = 0 \quad \text{on } S_K$$

を満足するものとする。この場合には、式 (3.149) の右辺はそのすぐ上に示した誘導過程から

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \int_V \epsilon_{ji} C_{ijkl} \epsilon_{kl}^u dV &= \sum_i \sum_j \int_V \sigma_{ji} \epsilon_{ij}^u dV = \sum_i \sum_j \int_V \sigma_{ji} \frac{\partial u_i^u}{\partial x_j} dV \\ &= \sum_i \sum_j \int_S u_i^u n_j \sigma_{ji} dS - \sum_i \sum_j \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} u_i^u dV = \sum_i \int_S u_i^u F_i dS + \sum_i \int_V u_i^u X_i dV \end{aligned}$$

となるので、結局、 \mathbf{u}^u の幾何学的境界条件を考慮すれば

$$u_f(\xi) = \sum_i \int_S u_i^u F_i dS + \sum_i \int_V u_i^u X_i dV = \sum_i \int_{S_s} u_i^u F_i dS + \sum_i \int_V u_i^u X_i dV \quad (3.150)$$

を得る。すなわち、ある単位集中外力に対する問題の変位の解 \mathbf{u}^u が求められていれば、任意の外力が作用した場合の問題は上式 (3.150) で解くことができることを示している。この $\mathbf{u}^u(\mathbf{x}; \xi)$ は、この問題が対象としている物体の **Green** 関数であるが、構造力学の影響線と同じである。例えば第 3.6.4 (6) 節や第 3.6.5 節には単位集中外力に対する解を示した。具体的な利用法については、付録 F を読めば雰囲気はわかってもらえるかもしれない。

演習問題 3-7

7. 式 (3.123) から式 (3.127) を求めてみよ。

3.6 弾性問題の例

3.6.1 固体中を伝播する波

静的な問題はあとでやることにして、式 (3.22) の応力のつり合い式を動的な問題に対して拡張しよう。そのためには Newton の法則に従って右辺に慣性項を加えればよい。つまり、質量 m の物体の Newton の運動方程式 (2.1a) を微分体積要素 dV に対して適用すればいいので、密度を ρ とするとその Newton の法則は

$$(dV \text{ に作用している力の総和 ; 式 (3.22) の左辺})_i dV = (\rho dV) \ddot{u}_i \Rightarrow \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + X_i = \rho \ddot{u}_i \quad (3.151)$$

と表される。上付きドットは時間微分である。これに式 (3.46) の Hooke の法則を代入し、式 (3.6) のひずみの定義を代入すると

$$\mu \sum_j \left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} \right) + \lambda \sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + X_i = \rho \ddot{u}_i, \quad (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{X} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \quad (3.152a, b)$$

となる。ここで、変位場が **Helmholtz** 分解定理を用いて 2 種類のポテンシャルで与えられるとすると

$$\mathbf{u} = \nabla \phi + \nabla \times \boldsymbol{\psi}, \quad u_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} + \sum_j \sum_k \epsilon_{ijk} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j}, \quad \text{ただし } \nabla \cdot \boldsymbol{\psi} = 0, \quad \sum_i \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i} = 0 \quad (3.153a, b, c, d)$$

と置くことができる。同様に分布外力も分解できるものとして

$$\mathbf{X} = \nabla F + \nabla \times \mathbf{G}, \quad \text{ただし} \quad \nabla \cdot \mathbf{G} = 0 \quad (3.154a, b)$$

と置くことができるものとする。

この2式を上運動方程式に代入して若干の演算をすると、最終的に次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ (\lambda + 2\mu) \sum_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} + F - \rho \ddot{\phi} \right\} + \sum_k \sum_l \epsilon_{ikl} \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \mu \sum_j \frac{\partial^2 \psi_l}{\partial x_j^2} + G_l - \rho \ddot{\psi}_l \right\} = 0$$

これより、2種類の変位のポテンシャルが満足すべき式は二つの中括弧の中がそれぞれ零になる条件であるが、分布外力が無い場合 ($F \equiv 0, \mathbf{G} \equiv \mathbf{0}$) にはそれは

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c_L^2} \ddot{\phi}, \quad \nabla^2 \psi = \frac{1}{c_T^2} \ddot{\psi} \quad (3.155a, b)$$

となり、2種類の基本的な波動方程式を得る。ここに

$$c_L \equiv \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}, \quad c_T \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad (3.156a, b)$$

は位相速度（波の伝わる速度）と呼ばれる量で、 c_L は縦波あるいは体積波・疎密波（Pressure 波；地震波なら Primary 波，P 波）の位相速度， c_T は横波あるいはせん断波（Shear 波；地震波なら Secondary 波，S 波）の位相速度である。具体的な問題と解については第10章を参照のこと。でもどうして体積波の位相速度は体積弾性係数 K を使った $\sqrt{\frac{K}{\rho}}$ にならず、第10.2.2節の平面波の縦波の速度⁵⁶なのだろう。膨張する波なので点源からの波と考えればいいから、波動方程式を球座標で表現すれば等と想像をめぐらすと、うーむ、もしかしたら分散するのか、エネルギー一定では広がっていかないかな、と考えると、うーむ。でも無限遠点では球面波もほとんど平面波だしなあ。線源ならどうだろう。極座標かあ。この場合はひよっとすると、かもしれないなあ。勉強しないとわからないなあ。

3.6.2 流体力学の基礎

(1) 非圧縮性流体

そういえば流体もゆっくり動いているときはほぼ連続体なので、弾性体ではないが、もう一つの動いている連続体力学の例として流体を対象としてみよう。しかし学生時代の水理学の授業はわからなかった。例えば跳水の問題は運動量保存則で答を得るのに、跳水の間にはエネルギーが散逸されてエネルギーは保存されないとか、よくわからないことをあとで習う。運動方程式と運動量保存則およびエネルギー保存則は同じものだと思うのだが、どうして？そして使っているのは運動方程式なのか、あるいは他の保存則等なのか、よくわからないまま解き方を覚えたような印象もある。構造力学・材料力学に比べて支配方程式がたくさんあって適用範囲がそれぞれ異なっているのではないだろうかという印象である。またエネルギー散逸のある運動を対象としているのに、出てくる式は運動量保存則と等価な Bernoulli の式の左辺だったりする。できるだけ偏微分方程式を出さずに教育する方針があるのだろうか。著者のような頭の悪い人間にはとても難しい学問であるが、確かに学部2,3年生の時点で偏微分方程式がたくさん出てくると駄目になっていたかもしれないなあ。しかし米国の3年生の弾性論の授業では微分方程式が使われる。しかも極座標で。ということで、水理学は苦手で単位を取れたかどうか覚えていないが、前節までの固体の場合と同様、運動方程式つまりつり合い式を解いてわかる問題だけに限定して、社会基盤構造の設計で必要になるかもしれない情報に限定していくつか列挙しておく。

⁵⁶ 式(3.152)で体積力を無視して x_i で両辺を微分しても結局縦波の波動方程式 $(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \Delta = \rho \ddot{\Delta}$ にしかならない。

一般に流体は弾性体ではなく粘性体でモデル化されるので、構成則にはひずみの代わりにひずみ速度を用いる。そして、ほぼ非圧縮性を持つ（体積が変わらない）連続体としてモデル化されるので、式(3.14)の体積ひずみが常に零である。したがって、変位ではなく速度で非圧縮性を定義し直すと、式(3.83b)の代わりに

$$\sum_j \frac{\partial v_j}{\partial x_j} = 0, \quad \mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{u}} = \sum_j v_j \mathbf{e}_j \quad (3.157a, b)$$

となる。ここに \mathbf{v} は速度ベクトルであり、この非圧縮性の条件式を主に流体屋さんには連続の式と呼ぶ。以下、第3.4.3(3)節で定式化した非圧縮性材料の支配方程式の変位を速度に置き換えて運動方程式を求めてみる。上の非圧縮性の条件が成立すると、式(3.46)のHookeの法則の右辺第2項は意味が無くなるが、体積が変化しないように流体が抵抗をしており、それが材料の抵抗特性（材料定数）とは関係の無い独立な関数「水圧 $p(\mathbf{x}, t)$ （静的あるいは定常問題では静水圧）」として存在することになる。したがって、応力ひずみ関係式(3.85)のひずみをひずみ速度に置き換えて

$$\sigma_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} - p \delta_{ij}, \quad \sum_j \dot{\epsilon}_{jj} = 0 \quad (3.158a, b)$$

が流体の抵抗則である。二つ目の式(3.158b)は式(3.157a)をひずみ速度で表したものである。また、この場合の μ はひずみ速度に比例した比例抵抗係数なので粘性係数と解釈される。Hookeの法則を式(3.158)で置き換えた上で運動方程式(3.152)に代入し、分布外力が流体の自重だけなら（そうでない場合も形式的には） $\mathbf{X} = \rho \mathbf{f}$ と置けるので、それは

$$\mu \sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho (f_i - \dot{v}_i) = 0 \quad (3.159)$$

となる。これはNavier-Stokesの式として知られている。 \dot{v}_i は加速度 \ddot{u}_i である。

ところで流体の場合の速度は固体的場合とはアプローチが異なり、流体中の物質点（水粒子）の速度ではなく観察している「場所の」速度であることの方が多い。つまり、ガラスの水槽の側面にマークを記し、その場所の現象を定点カメラで観測している。しかし、慣性項の速度の時間微分は「水粒子の」加速度でなければならず、時刻 t に \mathbf{x} にあった水粒子（その名前を $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ とすると）が時間と共に移動していくので、 $\bar{\mathbf{x}}(\mathbf{x}(t), t)$ のように「 t の瞬間にいた位置 $\mathbf{x}(t)$ 」と t の関数と捉えないといけない。したがって「水粒子の」速度も

$$v_i \equiv \frac{\partial \bar{x}_i}{\partial t}(\mathbf{x}(t), t) = \dot{x}_i(\mathbf{x}(t), t) = v_i(\mathbf{x}(t), t)$$

となる（瞬間的には「場所の」速度と同じな）ので結局、「水粒子の」加速度は物質導関数つまり偏微分の連鎖律を用いて

$$\dot{v}_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \dot{x}_j = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \quad (3.160)$$

と表現する必要がある。式(3.160)の最右辺第2項は移流項と呼ばれる。通常、固体力学が物質点（ \mathbf{x} が固体中の粒子に付けた名前）を追跡するLagrange的記述をとることが多いのに対し、流体力学では空間位置（ \mathbf{x} は水粒子の名前ではなく空間のある観測位置の名前）で現象を捉えるEuler的記述を用いることの方が多い。何のことかわからないかもしれないが、第12章を勉強すると少しはわかるようになるかもしれない。

したがって、移流項も含めたNavier-Stokesの式(3.159)の陽な表現は

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j \right) = \mu \sum_j \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho f_i \quad (3.161)$$

となる。ところで、社会基盤工学分野で流体を対象とする問題に思いを巡らせると、例えば河川幅や管径・橋梁部材寸法・橋脚寸法等の長さの単位を持つ量がたいの場合存在する。このような長さの単位を持つ量の

代表寸法を「代表長さ L 」と呼び、また水路等を通る代表的な流速を「代表流速 U 」と呼ぶことにして、独立変数や速度・水圧・外力をそれで無次元化しよう。つまり

$$\xi_i \equiv \frac{x_i}{L}, \quad \tau \equiv \frac{tU}{L}, \quad V_i \equiv \frac{v_i}{U}, \quad P \equiv \frac{p}{\rho U^2}, \quad \bar{f}_i \equiv \frac{f_i L}{U^2}$$

と定義して、連続の式 (3.157a) と Navier-Stokes の式 (3.161) を無次元化すると、それぞれ

$$\sum_i \frac{\partial V_i}{\partial \xi_i} = 0, \quad \frac{\partial V_i}{\partial \tau} + \sum_j \frac{\partial V_i}{\partial \xi_j} V_j = \frac{1}{Re} \sum_j \frac{\partial^2 V_i}{\partial \xi_j^2} - \frac{\partial P}{\partial \xi_i} + \bar{f}_i \quad (3.162a, b)$$

となる。式 (3.162b) の右辺第 1 項の係数の分母にある Re は **Reynolds 数** と呼ばれる無次元パラメータで

$$Re \equiv \frac{\rho L U}{\mu} \quad (3.163)$$

と定義される。つまり、例えば粘性係数が比較的小さい場合や流速が大きい場合等には Reynolds 数が大きくなり、右辺第 1 項の影響は相対的に小さくなる。

(2) 定常状態の代表的な解

円管の中の層流: 最初に半径 a の円管の中の定常流を取り上げよう。まず第 D.4 節を参考にして極座標系で Navier-Stokes の式等を書き直し、 x_3 軸方向に無限に長い円管の中の流れを考える。外力が作用していない定常状態の軸対称問題なので

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \quad v_r = v_r(r), \quad v_\theta = 0, \quad v_3 = v_3(r), \quad f_i = 0, \quad p = p(r, x_3)$$

と考えていい。この条件下で第 D.4 節に注意しながら連続の式を極座標で書くと

$$\frac{dv_r(r)}{dr} + \frac{v_r(r)}{r} = 0$$

となるので、これを積分すると

$$v_r(r) = A \frac{1}{r}$$

を得る。しかし $A \neq 0$ は湧き出しか吸い込みの解であり、ここでは考慮する必要が無いから $A = 0$ となるので、結局、非零の速度成分は v_3 のみになる。以上の結果を用いると Navier-Stokes の式 (3.161) の慣性項はすべて零になり、 θ 方向の式は無意味になる。残りの r 方向と x_3 方向の運動方程式からはそれぞれ

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = \mu \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_3}{dr} \right) \quad (*)$$

を得る。第 1 式から水圧 p は x_3 のみの関数になる。すると第 2 式の左辺は x_3 のみの関数になり、右辺は r のみの関数なので、両辺共に定数でなければならない。したがって

$$\frac{dp}{dx_3} = \text{const.}$$

つまり圧力勾配は一定になる。流体は管の壁面 ($r = a$) では滑らないとするのが一般的であり、また図のように x_3 軸上 ($r = 0$) で流速は最大になるので

$$v_3(a) = 0, \quad \frac{dv_3}{dr}(0) = 0$$

という境界条件の下で式 (*) の (第 2 式右辺 = const.) を積分すると、流速が

$$v_3(r) = \frac{1}{4\mu} \frac{dp}{dx_3} (r^2 - a^2)$$

のような放物線分布をすることがわかる。これは **Hagen-Poiseuille** の流れと呼ばれている。十分大きな粘性係数を持っていて Reynolds 数の小さい層流の場合に生じる流れだと考えられている。

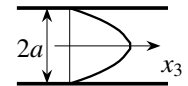


図 3.23 円管の中の流れ

(3) 定常状態にある完全流体の代表的な解と関係式

回したコップの水面形状: 次に, 粘性を持たず $\mu = 0$ である完全流体を入れた円柱状のコップを回転させた場合の水面形状を求めよう。上の例と同様, 流体はコップの壁面で滑らないものとする。この例も定常状態の軸対称問題で, 一定のスピン ω で回転させているものとするれば

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \theta} = 0, \quad v_r = v_r(r), \quad v_\theta = r\omega, \quad v_3 = 0, \quad f_1 \equiv 0, \quad f_2 \equiv 0, \quad f_3 = -g$$

と考えていい。前節同様湧き出しや吸い込みは考慮する必要が無いので, 結局, 非零の速度成分は v_θ のみになる。

この条件下で Navier-Stokes の式 (3.161) の加速度項を極座標で求めると, r 方向の (負の) 向心力への貢献分だけが非零で

$$\dot{v}_r = -\frac{1}{r} (v_\theta)^2 = -r\omega^2, \quad \dot{v}_\theta = 0, \quad \dot{v}_3 = 0 \quad (3.164a, b, c)$$

を得る。以上の結果をまとめると Navier-Stokes の式の θ 方向の式は意味が無くなり, 残りの r 方向と x_3 方向の運動方程式は

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho \frac{1}{r} (v_\theta)^2 = \rho r \omega^2, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

となる。第1式を積分すると $p(r, x_3) = \frac{1}{2}\rho r^2 \omega^2 + q(x_3)$ となり, これを第2式に代入して積分すると $q(x_3) = -\rho g x_3 + \text{const.}$ を得るので, 結局圧力分布が³

$$p(r, x_3) = \rho \left(\frac{1}{2} r^2 \omega^2 - g x_3 \right) + c$$

と求められる。水面の水圧は零であるから, 上式の左辺を零と置くことによって水面では

$$x_3 = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + \frac{c}{\rho g}$$

が成立する。コップ中心 $r = 0$ の水面の高さを h_0 として積分定数を決定すれば, 最終的な水面形状が

$$x_3 = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + h_0$$

のような放物線形状になる。

Bernoulli の式: では, 外力がスカラーポテンシャル $F(\mathbf{x})$ で与えられた (非回転流に対応した) 場合, つまり

$$f_i = -\frac{\partial F}{\partial x_i}$$

だけが作用していて, 定常状態にある完全流体の Navier-Stokes の式 (3.161) を整理すると

$$-\frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{1}{2} \rho \sum_j v_j v_j + p + \rho F \right\} = 2\rho \sum_j \dot{\omega}_{ij} v_j \quad (*)$$

となる。ただし $\dot{\omega}_{ij}$ はスピントレンソル成分を形式的に表したもので, 反対称な量

$$\dot{\omega}_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) = -\dot{\omega}_{ji} \quad (3.165)$$

である。上式 (*) の括弧内第1項は速度ベクトルの大きさの2乗になっているので単に v^2 と記すことにする。

もし非回転の運動しかしていない場合には右辺の $\dot{\omega}_{ij}$ は零になり, 結局いたるところで

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho F = \text{const.} \quad (3.166)$$

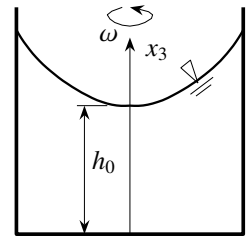


図 3.24 回転するコップの水面

が成立する。もし分布外力が重力場の自重のみであれば、重力加速度 g を用いて $F = g x_3$ と置いていいことから、上式は

$$\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g x_3 = \text{const.} \quad (3.167)$$

となる。これは **Bernoulli** の式である。一方回転流の場合には、上式 (*) 右辺を成分とするベクトルと速度ベクトルの内積が零になる

$$\sum_i v_i \sum_j \dot{\omega}_{ij} v_j = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j (v_i \dot{\omega}_{ij} v_j + v_j \dot{\omega}_{ji} v_i) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j v_i v_j (\dot{\omega}_{ij} + \dot{\omega}_{ji}) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j v_i v_j (\dot{\omega}_{ij} - \dot{\omega}_{ij}) = 0$$

ことから、流線に沿った速さと座標をそれぞれ v と s とすると

$$\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i} = v \frac{\partial}{\partial s} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{1}{2} \rho v^2 + p + \rho g x_3 \right) = 0 \quad (3.168)$$

となるので、結局、その流線に沿って **Bernoulli** の式が成立する。運動方程式を 1 回積分してあるので運動量保存則に相当する。

浮力: 最後に、運動していない完全流体が重力場にある場合の静水圧分布を算定しておこう。外力は

$$f_1 = 0, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = -g$$

ただだとして、慣性項と粘性項の両方共無視することによって、Navier-Stokes の式 (3.161) は

$$\frac{\partial p}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\rho g$$

になる。したがって、静水圧分布は **Bernoulli** の式 (3.167) と同じく $p(x_3) = -\rho g x_3 + c$ となるが、図 3.25 のように座標の原点を水面にとることによって積分定数 c を零にすることができ

$$p(x_3) = -\rho g x_3 > 0 \quad \text{for } x_3 < 0 \quad (\text{水中})$$

のような静水圧分布が得られる。このとき水中に、面積 A の平板の片方の面に作用している静水圧の総和を求めるために、その面の外向き法線単位ベクトルを \mathbf{v} とする。上の静水圧状態は応力で表すと

$$\sigma_{ij}(x_3) = -p(x_3) \delta_{ij}$$

となるので、法線方向を \mathbf{v} とする表面の単位面積当たりの表面力ベクトル f_i は、Cauchy の定理式 (3.19) から

$$f_i(x_3) = \sum_j v_j \sigma_{ji} = - \sum_j v_j p(x_3) \delta_{ji} = -p(x_3) v_i < 0 \quad \text{圧縮}$$

である・・・といったことをしなくても、面の法線内向き方向の圧力が p だからこの表現になるとわかるべきだが、上の応力成分が書けることも重要だ。したがって、 x_i 方向の総圧力 F_i (圧縮正) は

$$F_i \equiv - \int_A f_i(x_3) dA = \int_A p(x_3) v_i dA = \int_A \rho g x_3 v_i dA = \int_{A_i} \rho g x_3 dA_i, \quad A_i \equiv v_i A$$

と求められる。ここに A_i は面積 A を座標の x_j-x_k 面 ((ijk) は (123) の偶置換) に投影した面積である。

さて、ある物体が図 3.25 の水槽の中の左の物体のように完全に水没している場合には、上述と同様にして、この物体に作用している静水圧の総和は

$$F_i = \int_S \rho g x_3 v_i dS$$

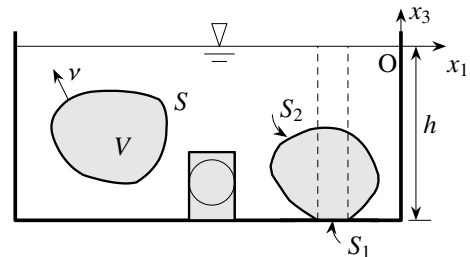


図 3.25 浮力

で算定できるが、右辺の表面積分項に Gauss の発散定理を用いると

$$F_i = \rho g \int_V \frac{\partial x_3}{\partial x_i} dV = \rho g \int_V \delta_{3i} dV = \rho g V \delta_{3i} \quad \rightarrow \quad F_1 = 0, \quad F_2 = 0, \quad F_3 = \rho g V$$

と求められる。この δ_{3i} は Kronecker のデルタなので、結局 F_3 のみが非零で、物体の体積に流体の密度 ρ と重力加速度 g を乗じた力が x_3 方向に作用している⁵⁷ことがわかる。これは取りも直さず浮力である。

ところで、ある物体が図 3.25 の水槽の中の右の物体のように、表面の一部 S_1 が深さ h にある水平な底面に密着している場合を考えよう。そこには糊は付いておらず、底と物体の間に流体が無いだけだとする。物体の全表面を S とし $S_1 \cup S_2 = S \equiv \partial V$, $S_1 \cap S_2 = \emptyset$ であるものとする。この場合に物体に作用している静水圧の総和は

$$F_i = \int_{S_2} \rho g x_3 v_i dS = \int_S \rho g x_3 v_i dS - \rho g h S_1 \delta_{3i} = \rho g (V - h S_1) \delta_{3i}$$

と求められる。 $h \times S_1$ は、図 3.25 に示した底面積が S_1 で高さ h の破線で表した柱の体積である。この結果から、もし $V < h \times S_1$ の場合にはこの物体には x_3 の正方向の力つまり浮力は働かない。例えば図 3.25 の水槽の中央にある円柱のような場合には、この円柱は浮いてこないことを意味する。どう、面白くない? いずれにしても、流体力学（水理学）も変形できる物体の力学であることがこういった例からもわかると思う。

(4) 速度ポテンシャル

ここでは 2 次元 ($v_3 \equiv 0$ の 3 次元状態：次節の平面ひずみ状態と同じ) の完全流体の定常運動を対象としよう。完全流体の場合は微分方程式で表した運動方程式は途中まで解けていて、それは式 (3.168) の Bernoulli の式である。この式と非圧縮性（連続）の式 (3.157a) を連立させれば問題が解ける。このとき後者が微分方程式であることから、それを満足する速度場を求めた上で Bernoulli の式 (3.168) によって水圧等を求めるという手法も可能である。その一つの方法として、もし速度場があるスカラー関数 $\phi(\mathbf{x})$ によって

$$v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \quad (3.169)$$

のように表されるとすると、非圧縮性の式 (3.157a) にこれを代入して

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_2^2} = 0 \quad (3.170)$$

を得る。つまり、ある問題に対してその速度場を表現できるような調和関数 ϕ を見つけられれば、問題がほぼ解けたことになる。この $\phi(x_1, x_2)$ を速度ポテンシャルと呼ぶ。

一方、もし速度場が別の関数 $\psi(x_1, x_2)$ と

$$v_1 = \frac{\partial \psi}{\partial x_2}, \quad v_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} \quad (3.171a, b)$$

⁵⁷ 浮心は本当に水没領域の体積中心（図心線の交点）だろうか。浮心位置を $\mathbf{B}(B_1, B_2, B_3)$ とすると $\mathbf{B} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}$, $\mathbf{M} \equiv \int_A \mathbf{x} \times \mathbf{f} dA$ でそれは決まる。上で得た \mathbf{f} と \mathbf{F} を代入して V を水没領域の体積だとすると

$$M_i = \sum_j \sum_k \int_A e_{ijk} x_j \rho g x_3 v_k dA = \sum_j \sum_k \rho g e_{ijk} \int_V \frac{\partial(x_j x_3)}{\partial x_k} dV = \sum_j \rho g e_{ij3} \int_V x_j dV \quad \rightarrow \quad B_2 = \frac{1}{V} \int_V x_2 dV, \quad B_1 = \frac{1}{V} \int_V x_1 dV$$

と B_3 は不定だが、水没領域の x_1, x_2 方向の図心線の交線上に浮心がある。同じ物体を回転しないように支え（物体の密度は一樣とは限らないから）ながら、例えば x_1 軸回りに 90 度回転させて物体の x_2 方向が水深方向になるようにすれば、同様の計算から $B_3 = \frac{1}{V} \int_V x_3 dV$ となり、確かに浮心は水没領域の体積中心に一致するようになる。しかし、回転前後の V は同じであっても水没部の形状は異なるから、上記の $\int_V x_1 dV$ と回転させた物体の $\int_V x_1 dV$ とは同じとは限らないのだ。浮力は常に x_3 方向なので、浮体が傾いたときの浮力の作用線の移動量は上の B_1 と B_2 を求め直せばいいはずだ。 B_3 を敢えて特定しておいて浮心が回転移動すると考えてもいいのだろうか。相似断面形の錐状・柱状物体ならよさそうな気がするが。水理学はやはり難しい。

のような関係を満足する場合には非圧縮性の式 (3.157a) は自動的に成立する。そのとき ψ の全微分を算定して零と置いた式から

$$d\psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\psi}{\partial x_2} dx_2 = -v_2 dx_1 + v_1 dx_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dx_2}{dx_1} = \frac{v_2}{v_1}$$

という関係が成立することになるので、 $\psi = \text{const.}$ で表される曲線 $x_2 = x_2(x_1)$ は流線を表していることがわかる。そのため ψ は流れ関数と呼ばれる。そこで、この二つの関数を実部と虚部を持つ複素関数 $f(z)$ を

$$f(z) \equiv \phi(x_1, x_2) + i\psi(x_1, x_2), \quad z = x_1 + ix_2$$

と定義すると、式 (3.169) と式 (3.171) から

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} = \frac{\partial\psi}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial\phi}{\partial x_2} = -\frac{\partial\psi}{\partial x_1} \quad (3.172a, b)$$

を満足するが、この条件式は、 $f(z)$ という複素関数の実部と虚部の間の **Cauchy-Riemann** の関係式と⁵⁸呼ばれている。これが成立する場合には $f(z)$ は微分可能で1階の微係数 $f'(z)$ が存在できる [15] ことがわかっている。ここにプライムは z による微分を表す。したがって、この複素関数 $f(z)$ の微係수에式 (3.169) (3.172) を用いると

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = v_1 - iv_2$$

のようにして速度場を求めることができるので、 $f(z)$ を複素速度ポテンシャルと呼んでいる。さらに非回転の流れの場合には、式 (3.165) のスピンを零と置いて流れ関数の式 (3.171) を代入すると

$$\omega = \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x_2^2}\right) = -\nabla^2\psi = 0$$

を満足するので、流れ関数 ψ も調和関数である。調和関数はたくさんあるので、その中から適切な調和関数を選んで ϕ あるいは ψ に用いて流線と流速を求めれば、それがどのような流れの解なのか確認できる。あとは、その結果を Bernoulli の式に代入することによって、流体による圧力等を算定することができる。このあたりの定式化等は習ったはずだが全く覚えていない。興味がある読者は例えば文献 [196] 等で準備体操をした上で、本格的な勉強をするといいかもかもしれない。

基本的な具体例をいくつか挙げておこう。と言ってもわかるのは x_1 方向への一様流れの

$$f(z) = Uz \quad \rightarrow \quad v_1 = U, \quad v_2 = 0$$

くらいだ。 U がその流速である。さらに社会基盤構造分野で大事な基本的な現象は、橋脚が河川流から受ける力や橋梁が風から受ける力等である。その最も基本的な問題は、一様流 U 中に置いた半径 a の静止した円柱周りの流れである。この問題の複素速度ポテンシャルは

$$f(z) = U\left(z + \frac{a^2}{z}\right) = U\left(r + \frac{a^2}{r}\right)\cos\theta + iU\left(r - \frac{a^2}{r}\right)\sin\theta \quad (3.173)$$

らしい。少なくとも $r\sin\theta$ や $\frac{\cos\theta}{r}$ 等は調和関数だ。さらに、これに **Joukowski** 変換と呼ばれる等角写像

$$\zeta = z + \frac{a^2}{z}$$

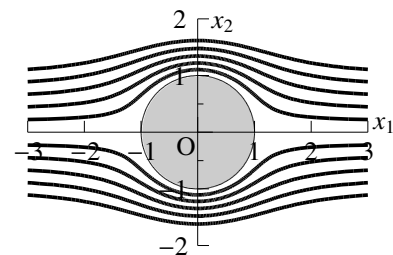


図 3.26 円柱 ($a = 1$) 周りの流線

⁵⁸ 工学部の学生にとって複素関数論は必修科目だと思うが、最近ではほとんどの学生が履修しない。第1著者は再履修でようやく単位をもらえたのだが、今後の工学研究の進展はどうなるのか少しだけ心配である。

を適用して z 複素平面から ζ 複素平面へと変換すると、その複素速度ポテンシャルは ζ 複素平面にある平板周りの流れの解⁵⁹になるらしい。あとは Bernoulli の式から構造に作用する揚力や抗力を求めれば、速度の2乗に比例した流体力が算定できる。ただし、風による橋梁等の振動問題の場合には構造自体も運動することから風との相互作用が生じるので、とても難しい不安定な動的問題になる、らしい。具体的にある問題が出されたときにどうやって複素速度ポテンシャルを求めるかについては経験が必要であるが、流れ関数の関化等が比較的容易になった昨今のコンピュータおよびソフトウェアの利用状況下では、昔よりは試行錯誤が少なくて済むかもしれない。次の節以降で紹介する応力関数やポテンシャルの導出でも同じような困難をかかえている。

以上は、固体の力学とほぼ同じように、非圧縮性の拘束条件下の運動方程式を解くという標準的な工学的アプローチで解くことができる流体力学の基本的な例だけをいくつか抽出してみたものであり、連続体力学を理解するための参考になればと思って付加した節である。なお勉強不足のため、この節に間違いがある可能性はかなり高いので、鵜呑みにはしないで各自勉強して欲しい。呵呵。

演習問題 3-8

8. 式 (3.155) を誘導せよ。
9. 式 (3.159) を誘導せよ。
10. 式 (3.167) を誘導せよ。

3.6.3 平面問題

(1) 平面ひずみ問題

これ以降は固体の静的問題に限定し、まずは3次元問題でありながら見かけ上はある平面内の問題として捉えることができる問題を対象とする。それを平面問題と総称するが、物体は3次元的に抵抗して運動するので決して2次元⁶⁰問題と呼んではいけない。まず x_3 方向への物体の伸び方が一様でかつ他の2方向より極端に大きい物体に、やはり x_3 方向には一様な作用しか無い場合、 x_3 方向の変位は無視できるほど小さく、また応力やひずみ・変位を x_3 には依存しない関数 (x_3 方向には一定) として捉えることができる。あるいは x_3 方向にある距離で離れた2枚の摩擦の無い剛な壁に挟まれた領域に、同様の作用が存在する場合も近似的には同じになる。つまり切る前の「金太郎飴」のある断面内の現象を対象にするようなものである。このような状況を平面ひずみ状態と呼ぶ。すなわち、変位に対して

$$u_3 \equiv 0, \quad u_i = u_i(x_1, x_2) \quad (i = 1, 2) \quad \rightarrow \quad \epsilon_{3j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3) \quad (3.174a, b, c)$$

という制約がある場合に相当する。最後の式のように $\epsilon_{3j} = 0$ なので平面ひずみ状態と呼んでいる。したがって式 (3.46) に代入して

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda + 2G & \lambda \\ \lambda & \lambda + 2G \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix}, \quad \sigma_{12} = 2G \epsilon_{12}, \quad (3.175a, b)$$

$$\sigma_{33} = \lambda (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \neq 0, \quad \sigma_{23} = 0, \quad \sigma_{31} = 0 \quad (3.175c, d, e)$$

という関係を得る。これから、 x_1 - x_2 平面内の逆関係は、式 (3.48) で定義した Poisson 比を用いると

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2G} \{\sigma_{11} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}, \quad \epsilon_{22} = \frac{1}{2G} \{\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})\} \quad (3.176a, b, c)$$

⁵⁹ 第1著者が3年生のときだったと思うが、期末試験でこの誘導が出た。授業中にはわけがわからなかった定式化を誘導尋問のように導き出させられて感動したことがある。単位が取れたかどうかは不明。

⁶⁰ 歴史書 [76] を参照すると、2367年に Enterprise-D (TM Paramount Pictures) が遭遇するまでは未知の生命体である。

となる。この関係を上式 (3.175c) の σ_{33} の右辺に代入することによって、応力は 2 次元的ではなく

$$\sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \neq 0 \quad (3.177)$$

という拘束条件が存在しているものと考えなければならない。このように σ_{33} が零でないことには十分注意する必要がある。

ちなみに式 (3.46) の Hooke の法則を、ひずみを与える式として書き直して、式 (3.48) で定義した Young 率と Poisson 比を用いると、3 次元的には

$$\epsilon_{33} = \frac{1}{E} \{ \sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \} \quad (3.178)$$

とも書くことができるので、 $\epsilon_{33} = 0$ という平面ひずみ条件に代入すると式 (3.177) を求めることができる。なお、平面ひずみ場の平面内の弾性係数は同じ面内の 3 次元のそれに等しいが、コンプライアンスは同じにはならないことには十分注意すること。また次の平面応力状態とは異なり、上述のような剛な壁で対象を挟むような実際の実験によって、工学的に良好な精度の範囲でこの状態を実現することは可能である。

(2) 平面応力問題

逆に、鋼の平板引張試験のように、外力が作用していない自由表面同士の間隔が小さい物体つまり平板試験片の厚さが比較的薄い場合等では、その厚さ方向に x_3 軸をとると、他の 2 方向に比べて x_3 方向の応力がそれほど大きくはならないだろうということは容易に想像できる。したがって、その（高精度では実現できない）近似として応力状態が平面的であるような場合を平面応力状態と呼ぶ。この条件を応力成分で表すと

$$\sigma_{3i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.179)$$

となる。これを式 (3.46) に代入すれば

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{1-\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}) \neq 0, \quad \epsilon_{23} = 0, \quad \epsilon_{31} = 0 \quad (*)$$

という面外ひずみに対する制約条件を得るので、 x_1 - x_2 面内の構成関係は

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \frac{2G}{1-\nu} \begin{pmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix}, \quad \sigma_{12} = 2G \epsilon_{12} \quad (3.180a, b)$$

となる。この逆関係が

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{E} (\sigma_{11} - \nu \sigma_{22}), \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12}, \quad \epsilon_{22} = \frac{1}{E} (\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}) \quad (3.181a, b, c)$$

となる。

この関係を用いれば、上式 (*) のひずみ成分は面内応力成分と

$$\epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \neq 0, \quad \epsilon_{23} = 0, \quad \epsilon_{31} = 0 \quad (3.182a, b, c)$$

のように関係付けられる。平面ひずみの場合と同様、3 次元の式 (3.178) に平面応力の拘束条件式 (3.179) を代入しても、これと同じ関係を得ることができる。この式 (3.182) あるいは上の式 (*) は面外ひずみに対する拘束条件と捉えることができ、そういう意味でも実際厳密に設定できる状態とは考え難いため、近似的な状態であると考えられている。なお、平面応力場の平面内のコンプライアンスは同じ面内の 3 次元のそれに等しいが、弾性係数は同じにはならないことには十分注意すること。

また x_1 方向を長手方向とする丸鋼の引張試験のように、ほぼ応力が σ_{11} のみの 1 軸状態になっている場合には、この式 (3.181) からさらに

$$\epsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{E}, \quad \epsilon_{22} = -\nu \epsilon_{11}, \quad \epsilon_{12} = 0 \quad (3.183a, b, c)$$

という関係になり、試験片中央の 2 方向に貼付したひずみゲージの読みと外力から Young 率と Poisson 比が直接測定できる。この最後の関係式 (3.183a) をこの文書では 1 次元の **Hooke** の法則と呼ぶことにする。

(3) ロゼットゲージと Mohr のひずみ円

肉厚が比較的薄い試験片で曲げ試験をする場合等で、任意点のせん断応力や主応力を測定したいときには、任意の 3 方向のひずみをひずみゲージで測定して三つのひずみ成分を求め、それを平面応力の応力ひずみ関係式に代入することによってひずみと応力を算定できそうだ。この 3 方向のひずみを測定するひずみゲージにロゼットゲージがある。ロゼットゲージは図 3.27 の右側の図のような 3 枚のひずみゲージの組でできている。斜めものは水平軸に対して 45 度方向を向いている。まず図 3.27 の左側の図のような座標系間のひずみテンソル成分の変換則を陽に示すと、式 (3.11) から

$$\begin{pmatrix} T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (3.184)$$

であるから、式 (3.13) は

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_{11} &= \epsilon_{11} \cos^2 \alpha + \epsilon_{12} \sin 2\alpha + \epsilon_{22} \sin^2 \alpha, & \bar{\epsilon}_{12} &= \epsilon_{12} \cos 2\alpha - \frac{1}{2}(\epsilon_{11} - \epsilon_{22}) \sin 2\alpha, \\ \bar{\epsilon}_{22} &= \epsilon_{11} \sin^2 \alpha - \epsilon_{12} \sin 2\alpha + \epsilon_{22} \cos^2 \alpha \end{aligned}$$

と書くことができる。図 3.27 のロゼットゲージの場合の ϵ^{45} は上の $\alpha = \pi/4$ の場合の $\bar{\epsilon}_{11}$ に相当するから

$$\epsilon^{45} = \epsilon_{12} + \frac{1}{2}(\epsilon_{11} + \epsilon_{22})$$

となる。もちろん $\epsilon_{11} = \epsilon^0$, $\epsilon_{22} = \epsilon^{90}$ であるから、結局この測定点のせん断ひずみ成分を測定値から

$$\epsilon_{12} = \epsilon^{45} - \frac{1}{2}(\epsilon^0 + \epsilon^{90})$$

と得る。さらに、主ひずみ方向（主応力方向も同じ）は、上のひずみ成分間の座標変換で $\bar{\epsilon}_{12} = 0$ になる方向であることから

$$\tan 2\alpha = \frac{2\epsilon_{12}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \frac{2\epsilon^{45} - (\epsilon^0 + \epsilon^{90})}{\epsilon^0 - \epsilon^{90}}$$

で決まる方向 α である。また薄片であることから平面応力場で近似できるので、式 (3.181) の逆関係から

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon^0 + \nu\epsilon^{90}), \quad \sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon^{90} + \nu\epsilon^0), \quad \sigma_{12} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \epsilon^{45} - \frac{1}{2}(\epsilon^0 + \epsilon^{90}) \right\} \quad (3.185a, b, c)$$

と応力は求められる。主応力方向は主ひずみ方向と同じであり、主応力は式 (3.30) の解に式 (3.185) を代入して

$$\sigma_i = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 4\sigma_{12}^2}$$

で求められる。正の符号をとったものが $i=I$ であり、負の符号の場合が $i=III$ （平面応力問題なので $\sigma_{II} = 0$ ）である。

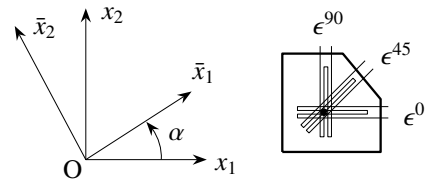


図 3.27 応力・ひずみ成分の座標変換とロゼットゲージ

ところで上の座標変換則は

$$\begin{aligned}\bar{\epsilon}_{11} &= \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} + \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2} \cos 2\alpha + \epsilon_{12} \sin 2\alpha, \\ \bar{\epsilon}_{12} &= \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} - \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2} \sin 2\alpha + \epsilon_{12} \cos 2\alpha, \\ \bar{\epsilon}_{22} &= \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2} - \frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2} \cos 2\alpha - \epsilon_{12} \sin 2\alpha\end{aligned}$$

とも書くことができる。したがって

$$r^2 \equiv \left(\frac{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}}{2}\right)^2 + (\epsilon_{12})^2, \quad e \equiv \frac{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}}{2}$$

と定義しておく、上の関係は

$$\{\bar{\epsilon}_{11} - e\}^2 + \{\bar{\epsilon}_{12}\}^2 = r^2 \quad (3.186)$$

という関係を満足する。この式は、第1項の $\bar{\epsilon}_{11}$ を $\bar{\epsilon}_{22}$ で置き換えても同様に成立する。この関係を示したのが図 3.28 である。つまり、任意点の伸びひずみ成分とせん断ひずみ成分との関係は図示したような円上の2点 A と B で指定できている。また、横軸と円との交点がそれぞれ主ひずみになっていることは、 $\bar{\epsilon}_{12} = 0$ になる方向を $\alpha = \alpha_0$ として、そのときの $\bar{\epsilon}_{11}, \bar{\epsilon}_{22}$ がそれぞれ主ひずみ $\epsilon_I, \epsilon_{III}$ であることを上式に代入して得ることができる $\epsilon_I = e + r, \epsilon_{III} = e - r$ という関係からも明らかである。このような円を **Mohr のひずみ円** と呼ぶ。応力についても同様の円が描ける。

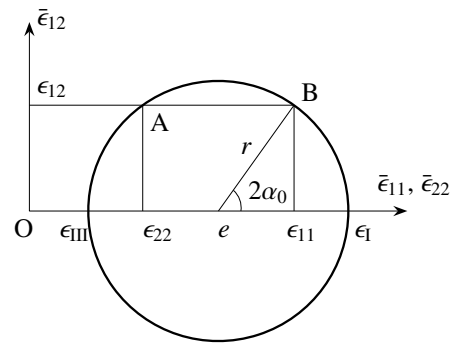


図 3.28 Mohr のひずみ円

(4) 積層板の見かけ上の Young 率

第8章で紹介する平板理論では、板の面内の拵がりに比べて厚さが非常に薄いことを前提にしているため、平面応力状態の構成則が用いられる。実際鋼構造であれば肉厚が薄いため、そのような近似は許容できそうである。また、図 3.29 のような繊維補強材でできた複数の平板を、その繊維の向きが板毎に異なるように層状に重ねて積層板を作り、それを補強や橋梁自体に使うことがある。多くはポリマーにガラス繊維 (GFRP) や炭素繊維 (CFRP) を配合してある。この板も平面応力問題の構成則が用いられ、式 (3.181) を一般化して

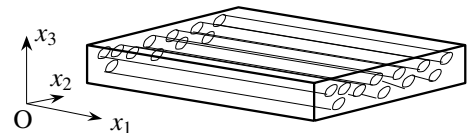


図 3.29 繊維補強材でできた平板

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 1/E_1 & -\nu_{12}/E_2 \\ -\nu_{21}/E_1 & 1/E_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2\mu_{12}} \sigma_{12} \quad (3.187a, b)$$

と表されることが多い。ここに E_1, E_2 が2方向の Young 率で、 ν_{12}, ν_{21} が Poisson 比、さらに μ_{12} が板の面内のせん断弾性係数

$$\mu_{12} = C_{66} \quad (3.188)$$

である。したがって、この板の独立な材料定数は五つ ($\nu_{12}E_1 \neq \nu_{21}E_2$ の場合) ないし四つ ($\nu_{12}E_1 = \nu_{21}E_2$ の場合) になる。あるいは逆関係なら

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} \begin{pmatrix} E_1 & \nu_{12}E_1 \\ \nu_{21}E_2 & E_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \end{Bmatrix}, \quad \sigma_{12} = 2\mu_{12}\epsilon_{12}$$

と書くこともできる。

では、3次元の弾性テンソルとこの積層板の材料定数との関係を求めておこう。せん断については式(3.188)でいいので、Young率とPoisson比についてのみ以下で求める。まず x_3 方向の応力が零になるような平面応力状態にあるものとする、式(3.68)から

$$\sigma_{33} = 0 = C_{31} \epsilon_{11} + C_{32} \epsilon_{22} + C_{33} \epsilon_{33} \quad \rightarrow \quad \epsilon_{33} = -\frac{C_{31}}{C_{33}} \epsilon_{11} - \frac{C_{32}}{C_{33}} \epsilon_{22}$$

が成立する。これを他の二つの直応力と伸びひずみ間の関係式に代入して整理すると

$$\sigma_{11} = \left(C_{11} - \frac{C_{13} C_{31}}{C_{33}} \right) \epsilon_{11} + \left(C_{12} - \frac{C_{13} C_{32}}{C_{33}} \right) \epsilon_{22}, \quad \sigma_{22} = \left(C_{21} - \frac{C_{23} C_{31}}{C_{33}} \right) \epsilon_{11} + \left(C_{22} - \frac{C_{23} C_{32}}{C_{33}} \right) \epsilon_{22}$$

を得る。この逆関係を求めて式(3.187)と比較することによって

$$E_1 = \frac{D}{C_{33} (C_{22} C_{33} - C_{23} C_{32})}, \quad \nu_{12} = \frac{D}{C_{33} (C_{33} C_{12} - C_{13} C_{32})}, \quad (3.189a, b)$$

$$E_2 = \frac{D}{C_{33} (C_{11} C_{33} - C_{13} C_{31})}, \quad \nu_{21} = \frac{D}{C_{33} (C_{33} C_{21} - C_{23} C_{31})}, \quad (3.189c, d)$$

$$D \equiv (C_{11} C_{33} - C_{13} C_{31}) (C_{22} C_{33} - C_{23} C_{32}) - (C_{33} C_{12} - C_{13} C_{32}) (C_{33} C_{21} - C_{23} C_{31}) \quad (3.189e)$$

と求められる。

例えば、同じ補強繊維を x_1 方向と x_2 方向に直交させて同じ仕様で配置されている場合には、その2方向の材料特性が同じになるため

$$C_{11} = C_{22}, \quad C_{13} = C_{23}, \quad C_{31} = C_{32}, \quad C_{12} = C_{21}, \quad C_{44} = C_{55}$$

が成立する材料と捉えられる。このとき式(3.189)から

$$E_1 = \frac{(C_{11} - C_{12}) \{C_{33} (C_{11} + C_{12}) - 2C_{13} C_{31}\}}{C_{11} C_{33} - C_{13} C_{31}} = E_2, \quad \nu_{12} = \frac{C_{33} C_{12} - C_{13} C_{31}}{C_{11} C_{33} - C_{13} C_{31}} = \nu_{21}$$

となり、弾性テンソルは対称になる。なお当然であるが、平面応力場の面内のコンプライアンスは、3次元のそれ、つまり式(3.77)~(3.79)と一致する。

最後に図3.29のように、1種類の繊維が x_1 方向を長手方向にして並んでいる繊維補強板の場合には、材料は3次元的には x_2 方向と x_3 方向が同じ材料特性を持ち、 x_1 軸を対称軸とする横等方性材料として捉えることができる。したがって、式(3.70)の添え字(1, 2, 3)を(2, 3, 1)に遇置換すればいいので、3次元の材料定数は

$$C_{11}, \quad C_{22} = C_{33}, \quad C_{12} = C_{13}, \quad C_{21} = C_{31}, \quad C_{23} = C_{32}, \quad C_{44} = \frac{1}{2} (C_{22} - C_{23}), \quad C_{55} = C_{66}$$

のうち六つ($C_{12} \neq C_{21}$ の場合)ないし五つ($C_{12} = C_{21}$ の場合)が独立な定数になる。この場合には式(3.189)から

$$E_1 = \frac{\bar{D}}{C_{22} + C_{23}}, \quad E_2 = \frac{\bar{D} (C_{22} - C_{23})}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}}, \quad \nu_{12} = \frac{C_{12}}{\bar{D}}, \quad \nu_{21} = \frac{C_{21}}{\bar{D}}, \quad (3.190a, b, c, d)$$

$$\nu_{12} = \frac{C_{12} (C_{22} - C_{23})}{C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21}}, \quad \nu_{21} = \frac{C_{21}}{C_{22} + C_{23}}, \quad \bar{D} \equiv C_{11} (C_{22} + C_{23}) - 2C_{12} C_{21} \quad (3.190e, f, g)$$

となる。図に示したような繊維の微視構造上、一般には $C_{12} \neq C_{21}$ と考えるのが素直であるが、このような繊維補強板では(とても不思議なことにエネルギー密度関数が存在して)、弾性テンソルは対称 $C_{12} = C_{21}$ および

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2}$$

になる。多くの文献では対称性($C_{12} = C_{21}$)を最初から仮定している⁶¹ので注意すること。なお当然であるが、平面応力場の面内のコンプライアンスは、3次元のそれ、つまり式(3.73)~(3.75)と一致する。

⁶¹ その理由はたいていは「相反定理により」とあるが、それは間違い。正しくは、式(3.65b)のようなエネルギー密度関数が存在する材料だけで対称性が成立するのである。相反定理は対称性からの帰結である。第3.5.3節を参照のこと。

演習問題 3-9

11. 平面ひずみ問題の応力ひずみ関係式 (3.176) を誘導せよ。
12. ひずみを応力で表す関係式 (3.178) を誘導せよ。
13. 平面応力問題と平面ひずみ問題の応力ひずみ関係を、ひずみで応力を与える式 (平面応力の場合は式 (3.185) 相当) に変換せよ。
14. Mohr のひずみ円における主ひずみの関係式を証明せよ。

3.6.4 Airy の応力関数で平面問題を解く

(1) 応力で表した適合条件

前節では平面問題を定義しただけなので、ここではその解析的解法の一つを紹介し、社会基盤構造に関する代表的で重要な解をいくつか列挙しておく。なお以下はすべて、Northwestern 大学の Dundurs 先生の 'Elasticity' の講義ノート (1980 年頃) から引用・複写した。解析的な解が重要であることはこの文書の随所に書いてあるが、前節で誘導した二つの平面問題は応力関数を導入することによって解析的に解くことができる場合がある。いずれの問題も形式的には x_1 - x_2 面内の問題として閉じており、その結果を用いて x_3 方向の非零な成分の算定が付带的にできる。二つの平面状態の応力ひずみ関係は次のようにも表すことができる。

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2G} \left\{ \sigma_{11} - \frac{3-\kappa}{4} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right\}, \quad \epsilon_{22} = \frac{1}{2G} \left\{ \sigma_{22} - \frac{3-\kappa}{4} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right\}, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12} \quad (3.191a, b, c)$$

ただし

$$\kappa = \begin{cases} 3-4\nu & (\text{平面ひずみ状態}) & \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \\ \frac{3-\nu}{1+\nu} & (\text{平面応力状態}) & \epsilon_{33} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \end{cases} \quad (3.192)$$

と定義されている。

この関係を面内ひずみ成分間のひずみの適合条件式 (3.17) に代入して、つり合い式を考慮すると

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = -\frac{4}{\kappa+1} \left(\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) \quad (3.193)$$

を得る。これを「応力で表したひずみの適合条件式」と呼ぶ。さらに、分布外力が何らかのポテンシャル関数 $V(x_1, x_2)$ を用いて

$$X_1 = -\frac{\partial V}{\partial x_1}, \quad X_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_2}$$

と置ける場合には、上式 (3.193) は

$$\nabla^2(\sigma_{11} + \sigma_{22}) = \frac{4}{\kappa+1} \nabla^2 V \quad (3.194)$$

となる。

(2) Airy の応力関数

さて、もしある関数 $U(x_1, x_2)$ によって

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_2^2} + V, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x_1^2} + V \quad (3.195a, b, c)$$

のように応力を表すことができたとすると、これは実は応力のつり合い式 (3.21) を自動的に満足する。したがって、解きたい物理問題に対して U を求めることができれば応力がわかり、式 (3.191) からひずみが求められる。さらに U がひずみの適合条件式 (3.194) を満足するようになっていれば式 (3.6) のひずみ変位関係は積分でき、

任意点の変位も算定でき、対象としている問題が正しく解けた⁶²ことになる。したがって、 U を用いて最終的に唯一の解が求められるためには、式(3.195)で表される応力がひずみの適合条件式(3.194)を満足している必要がある。代入して整理すると、 U と V が満たすべき式として

$$\nabla^4 U = -\frac{2(\kappa-1)}{\kappa+1} \nabla^2 V \quad (3.196)$$

を得る。すなわち、この式(3.196)を満足するような関数 U を求める(探し出す)ことができれば、固体の平面問題は解けたことになる。この関数 U を **Airy** の応力関数と呼び、分布外力が無い場合には、上式(3.196)は

$$\nabla^4 U = 0 \quad (3.197)$$

となる。つまり応力関数の斉次解は重調和関数である。重調和関数は非常にたくさん存在し、最も簡単なものは多項式である。この応力関数 U を探し出すことによって問題を解く手法は、第3.6.2(4)節の速度ポテンシャルを用いた流体問題の解法とほぼ同じアプローチである。ただし以下の例を読めばわかるように、それぞれの応力関数がどのようにして選ばれてのかについてはあまり学習できないので、解析解が必要な場合には別途例えば機械工学系の文献等を参照して欲しい。

(3) 代表的な例

まず、直角座標系の多項式で応力関数が表現できるような例として両端単純支持板を文献[96]から引用しておこう。この解を知っておくと、梁理論の仮定と精度を理解し易くなるからだ。代入すれば明らかのように

$$U = A \left(\frac{x_2^5}{30} - \frac{x_1^2 x_2^3}{6} \right) + \frac{B}{2} x_1^2 - \frac{C}{2} x_1^2 x_2 - \frac{D}{6} x_2^3$$

は式(3.197)の解の候補である。これと $V=0$ を式(3.195)に代入すると任意点の応力を算定できる。もちろん他の多項式も解の候補ではあるが、ここに挙げたのは図3.30の単純支持された板($|x_1| < \ell$, $|x_2| < c$, $|x_3| < \infty$)の応力を与える可能性がある項だけを抽出したものである。この問題の境界条件は

$$\sigma_{22}(x_2 = c) = q, \quad \sigma_{12}(x_2 = \pm c) = 0, \quad \sigma_{22}(x_2 = -c) = 0$$

および、本当は $x_1 = \pm \ell$ で $\sigma_{11} = 0$ としたいところだが、それを満足する応力関数を探し出すのが困難なので、少し緩めて

$$\int_{-c}^c \sigma_{11}(x_1 = \pm \ell) dx_2 = 0, \quad \int_{-c}^c x_2 \sigma_{11}(x_1 = \pm \ell) dx_2 = 0 \quad (3.198a, b)$$

のように断面力としての軸力と曲げモーメントが作用していないものにしておこう。

以上の境界条件に上の U を代入することによって、各係数を

$$A = -\frac{3q}{4c^3}, \quad B = -\frac{q}{2}, \quad C = \frac{3q}{4c}, \quad D = \frac{3q}{20c} \left\{ 5 \left(\frac{\ell}{c} \right)^2 - 2 \right\}$$

と決定できるので、対応する応力分布が^s

$$\sigma_{11} = \frac{3qx_2}{4c^3} (x_1^2 - \ell^2) - \frac{qx_2}{10c^3} (5x_2^2 - 3c^2), \quad (3.199a)$$

$$\sigma_{12} = \frac{3qx_1}{4c^3} (c^2 - x_2^2), \quad (3.199b)$$

$$\sigma_{22} = \frac{q}{4c^3} (x_2 + c) (x_2^2 - cx_2 - 2c^2) \quad (3.199c)$$

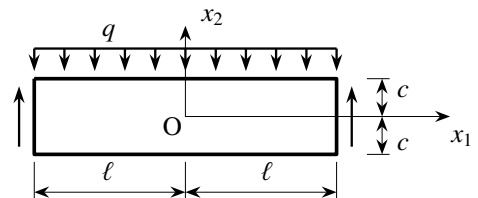


図 3.30 両端単純支持された板

⁶² 境界条件を正確に満足するような解(応力関数)を探し出すことは一般にはとても難しい。

と求められる。応力成分 σ_{11} の第 1 項は次章で定式化する初等梁理論の解であり、第 2 項は第 1 項に比べると c/ℓ の 2 乗に比例して小さくなる。すなわち細長い梁であれば第 2 項は無視できるほど小さくなる。もう一つの直応力 σ_{22} の大きさも同様に、 σ_{11} と比較したとき c/ℓ の 2 乗に比例して小さくなることを示すことができる。またせん断応力 σ_{12} は放物線分布しており、これも次章で定式化する理論で求められるものに等しい。

ただし式 (3.198) で示したように、両端部 $x_1 = \pm\ell$ の境界条件は梁の条件としては厳密なものではなく、平均的なものとしてしか与えられていない。そのため、結果的には図 3.31 の右側にあるような応力 σ_{11} が左右端に生じている。また分布外力を $x_2 = c$ の面に直接載せたので、 σ_{22} がその面で零ではなく q になっていることも梁理論とは異なる。しかし、少なくとも構造力学としての境界条件として軸力と曲げモーメントが零になる条件を式 (3.198) は満足し

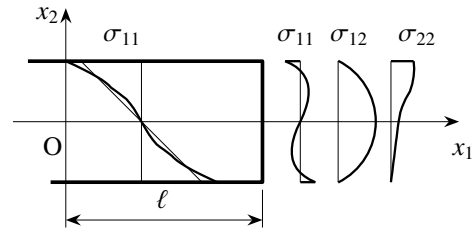


図 3.31 両端単純支持された板の応力分布

ている。この結果で重要なことは、梁が細長くなって c/ℓ が十分小さくなると梁理論の結果にほぼ一致することである。さらに **Saint-Venant** の原理によって、端部からの距離が離れば離れるほど端部の比較的小さい乱れ成分の影響が小さくなることもわかっている。その乱れの減衰と梁中央部の応力分布は、3次元有限要素解を用いて定量的に図 4.75 にも示した。また式 (3.199) の結果は第 5.6 節の図 5.41 に平面ひずみ有限要素解と比較して示した。最終的に上の応力分布を式 (3.191) に代入し、それを式 (3.6) に代入して積分すれば、適切な境界条件の下で変位成分を決定できる。応力関数 U が適合条件を満足するように求められているので、この積分は唯一の変位成分を決定する。変位の結果については文献 [96] を参照のこと。

演習問題 3-10

- 15. 式 (3.193) を誘導せよ。
- 16. 式 (3.196) を誘導せよ。
- 17. 式 (3.199) を誘導し、変位成分 u_i ($i = 1, 2$) を求めよ。

(4) 極座標系の Airy の応力関数

Airy の応力関数: 軸対称問題はもちろん、集中外力が作用した場合や亀裂先端のように特異性を持つ問題の場合には、極座標を用いた方が便利なが多い。その場合も、Airy の応力関数 $U(r, \theta)$ と分布外力のポテンシャル関数 $V(r, \theta)$ が満たすべき関係は式 (3.196) と同じである。ただし

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{3.200}$$

であり、応力は応力関数 U および分布外力のポテンシャル関数 V を用いて

$$\sigma_{rr} = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + V, \quad \sigma_{r\theta} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + V \tag{3.201a, b, c}$$

のように関係付けられる。ここに r と θ 方向の外力成分は

$$X_r = -\frac{\partial V}{\partial r}, \quad X_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \tag{3.202a, b}$$

と定義した。応力ひずみ関係は、式 (3.191) の応力 ($\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{22}$) を ($\sigma_{rr}, \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta\theta}$) で置き換え、ひずみも同様の置換をするだけである。またひずみ変位関係は

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left\{ r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right\}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_r \right) \tag{3.203a, b, c}$$

表 3.1 極座標系の代表的応力関数: 剛体変位成分は $u_r = c_1 \cos \theta + c_2 \sin \theta$, $u_\theta = -c_1 \sin \theta + c_2 \cos \theta + c_3 r$

U	σ_{rr}	$\sigma_{r\theta}$	$\sigma_{\theta\theta}$	$2G u_r$	$2G u_\theta$
r^2	2	0	2	$(\kappa - 1)r$	0
$\ln r$	$1/r^2$	0	$-1/r^2$	$-1/r$	0
$r^2 \theta$	2θ	-1	2θ	$(\kappa - 1)r\theta$	$-(\kappa + 1)r \ln r$
$r\theta \sin \theta$	$2 \cos \theta / r$	0	0	$\frac{1}{2} [(\kappa - 1)\theta \sin \theta + (\kappa + 1) \ln r \cos \theta - \cos \theta]$	$\frac{1}{2} [(\kappa - 1)\theta \cos \theta - (\kappa + 1) \ln r \sin \theta - \sin \theta]$
$r \ln r \cos \theta$	$\cos \theta / r$	$\sin \theta / r$	$\cos \theta / r$	$\frac{1}{2} [(\kappa + 1)\theta \sin \theta + (\kappa - 1) \ln r \cos \theta - \cos \theta]$	$\frac{1}{2} [(\kappa + 1)\theta \cos \theta - (\kappa - 1) \ln r \sin \theta - \sin \theta]$
$r^2 \cos 2\theta$	$-2 \cos 2\theta$	$2 \sin 2\theta$	$2 \cos 2\theta$	$-2r \cos 2\theta$	$2r \sin 2\theta$
$r^2 \sin 2\theta$	$-2 \sin 2\theta$	$-2 \cos 2\theta$	$2 \sin 2\theta$	$-2r \sin 2\theta$	$-2r \cos 2\theta$
$\cos 2\theta / r^2$	$-6 \cos 2\theta / r^4$	$-6 \sin 2\theta / r^4$	$6 \cos 2\theta / r^4$	$2 \cos 2\theta / r^3$	$2 \sin 2\theta / r^3$
$\cos 2\theta$	$-4 \cos 2\theta / r^2$	$-2 \sin 2\theta / r^2$	0	$(\kappa + 1) \cos 2\theta / r$	$-(\kappa - 1) \sin 2\theta / r$

となる。ここに u_r と u_θ は r および θ 方向の変位成分である。

前節の直角座標の例では構造力学的な境界条件を厳密には満足させられない点に注目してもらった。その例のように、応力関数を用いた解法では変位を応力関数 U で陽には表すことができないため、例えば Dundurs 先生の講義では、主要な応力関数から得られる応力や変位のリストが準備されていた。特に極座標における表は秀逸である。多分先生の著作のどこかにすべて書いてあると思われるので、いくつかの例だけを表 3.1 に引用した。つまり、このような表をデータベースとして頭の中に入れておいて、解きたい問題の境界条件や応力状態、さらに変位の境界条件等を表と見比べて適切な応力関数を選択するという手法にならざるを得ない場合が多いのだ。したがって応力関数を用いて問題を解くためにはかなりの経験が必要になる。

さて、外力の無い軸対称問題の場合は θ に関する微係数もすべて無くなり、応力関数 $U(r)$ は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right\} \right] = 0 \quad (3.204)$$

を満足する関数になるので、これを積分すれば明らかなように、解は

$$U = \mathcal{L} \{1, r^2, \ln r, r^2 \ln r\} \quad (3.205)$$

のように四つの関数の線形和 $\mathcal{L}(\dots)$ になる。それぞれ表 3.1 から

$U = 1 \Rightarrow$ 無応力なので無視。

$U = r^2 \Rightarrow$ 等方な一様応力だが、無限遠で変位は発散する。ただし気にしなくていい。

$U = \ln r \Rightarrow$ 原点で応力と変位が特異になるものの、無限遠では零になる。

$U = r^2 \ln r \Rightarrow$ 原点と無限遠で応力が特異である。変位は原点では零だが、無限遠では発散する。

さらに u_θ は 2 値関数になるため、不連続になったり物体が重なる状況に対応する。

といった性質を持つことから、どのような問題に適した応力関数かが少しではあるが想像できる。

軸対称な代表例: まず代表例として図 3.32 に示した問題を応力関数式 (3.205) を用いて解いてみよう。ひょっとしたら、山岳トンネルの状況はこの図のような問題からある程度推測できるかもしれない。まずこの図の左側に示した円(柱)孔のある輪の問題に対する応力関数は

$$U = -\frac{pb^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{2} r^2 - a^2 \ln r \right) \quad (3.206)$$

で与えられる。すると周方向応力 $\sigma_{\theta\theta}$ は表 3.1 から

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = -\frac{pb^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) \quad (3.207)$$

と求められる。そこでこの孔周辺 $r = a$ の周方向応力を求めると

$$\sigma_{\theta\theta}(a, \theta) = -\frac{2pb^2}{b^2 - a^2} \quad (3.208)$$

となる。この結果を使って図 3.32 の右側の図のような無限体を考えるために、 $b \rightarrow \infty$ の極限をとるとその応力は

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \sigma_{\theta\theta}(a, \theta) = -2p \quad (3.209)$$

のように、応力集中係数が2になることがわかる。しかもそれが孔の半径に依存しないので、トンネル断面の大小にかかわらず応力集中係数は同じである。んー本当かな? また例えば $b = 3a, 1.5a$ の場合の応力集中係数は式 (3.208) からそれぞれ 2.25, 3.6 となるので、土被りが小さいトンネルが危険なことを、この応力集中係数の違いが示しているのだろう (か?)。

では逆に、孔の側に圧力 p が作用している図 3.33 の場合の応力関数は

$$U = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(\frac{1}{2} r^2 - b^2 \ln r \right) \quad (3.210)$$

となるので、周方向応力は

$$\sigma_{\theta\theta}(r, \theta) = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right), \quad \lim_{b \rightarrow \infty} \sigma_{\theta\theta}(a, \theta) = p \quad (3.211a, b)$$

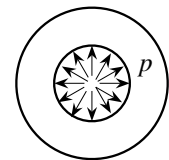


図 3.33 内圧の場合

となり、無限体の場合は応力集中係数は 1 である。トンネルが開いた場合には、それまで作用していた地山の圧縮の圧力 p が零になると考えてもいいだろうから、上の結果の正負を入れ替えたのが答だと解釈できるかもしれない。もしそうだとすると、孔周辺の周方向応力は圧縮の $-p$ である。一方上述のように、孔が開いた状態に地山の圧縮圧力 p が (均等なわけはないが) 作用していると考え、式 (3.209) からは周方向応力が $-2p$ になって、倍の違いがある。さて、実際のトンネルではどんな応力状態になっているのだろう。

(5) 非弾性ひずみと Airy の応力関数

非弾性ひずみがある場合の平面問題: ここでは熱膨張等による熱ひずみのような非弾性ひずみが存在する問題を、Airy の応力関数を用いて解く例を示しておく。非弾性ひずみが存在する場合のひずみ変位関係と Hooke の法則は式 (3.105) で与えられていた。これに対する平面ひずみ状態および平面応力状態の面内の応力ひずみ関係は

$$\epsilon_{11} = \frac{1}{2G} \left\{ \sigma_{11} - \frac{3-\kappa}{4} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right\} + \epsilon_{11}^* + \eta \epsilon_{33}^*, \quad \epsilon_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12} + \epsilon_{12}^*, \quad (3.212a, b)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{1}{2G} \left\{ \sigma_{22} - \frac{3-\kappa}{4} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \right\} + \epsilon_{22}^* + \eta \epsilon_{33}^* \quad (3.212c)$$

のように表される。ここに、 ϵ_{ij}^* が非弾性ひずみの成分であり

$$\eta = \begin{cases} \nu & (\text{平面ひずみ状態}) \\ 0 & (\text{平面応力状態}) \end{cases} \quad (3.213)$$

と定義した。これを用いて、Airy の応力関数 U が満足すべき式 (3.196) に相当する条件式を求めると

$$\nabla^4 U = -\frac{2(\kappa-1)}{\kappa+1} \nabla^2 V - \zeta \left(\frac{\partial^2 \epsilon_{22}^*}{\partial x_1^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}^*}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}^*}{\partial x_2^2} + \eta \nabla^2 \epsilon_{33}^* \right) \quad (3.214)$$

となる。ここに

$$\zeta = \frac{8\mu}{\kappa+1} = \begin{cases} \frac{2\mu}{1-\nu} = \frac{E}{1-\nu^2} & (\text{平面ひずみ状態}) \\ 2\mu(1+\nu) = E & (\text{平面応力状態}) \end{cases} \quad (3.215)$$

と定義した。したがって一般的には、与えられた V と ϵ^* に対して境界条件も考慮した上で、この式 (3.214) を満足する Airy の応力関数 U を求めればよいことになる。

ただし、非弾性ひずみが一様に分布する場合には上式 (3.214) の右辺第 2 項は無視してもいいことになり、前節までの定式化で求めた Airy の応力関数の解がそのまま使えることになる。実際、解析的な解を求めることができる範囲の問題の多くでは、Eshelby [24] による著名な成果で示されたように、楕円体形状の領域内の非弾性ひずみは一様分布すると捉えていいし、あるいはそのように近似できるので、上式 (3.214) の右辺第 2 項は無視できる場合も多い。

熱膨張による変形と応力: では第 3.4.4 節で説明に用いた熱膨張問題を具体的に解いてみよう。ただし平面問題を対象とし、図 3.34 の上段に示したように、無限体中にある半径 a の円柱領域（以下「円」領域と略す）だけが ΔT の温度上昇を受けた場合の、この無限体内の応力を求める。図の中段に描いたように、この円部分はまず ΔT の温度変化を受けていることから、この領域の非弾性ひずみが

$$\epsilon_{11}^* = e^* \equiv \alpha \Delta T, \quad \epsilon_{22}^* = e^*, \quad \epsilon_{33}^* = e^*, \quad \text{他の成分} = 0 \quad (3.216a, b, c, d)$$

で与えられる。ここに α は線膨張係数である。したがって、式 (3.212) のひずみ変位関係を念頭に置くと、この円の半径方向の伸びひずみ e_r^c と半径の膨張分 Δa_r^c は

$$e_r^c = \epsilon_{11}^* + \eta \epsilon_{33}^* = (1+\eta) e^*, \quad \Delta a_r^c = e_r^c a = (1+\eta) e^* a \quad (3.217a, b)$$

となる。

次にこの膨張した円を元の物体に戻すために、図 3.34 の中段右図のように圧力 p を作用させて半径を縮め、同時に下段の図のように孔にも同じ圧力 p を作用させて拵げよう。等方圧力 p による円の半径の縮み分を $\Delta a_p^c < 0$ とし、孔の半径の拡大分を Δa_p とすると、この円が元に戻るためには

$$\Delta a_r^c + \Delta a_p^c = \Delta a_p \quad (3.218)$$

であればいいことがわかる。これは式 (3.103) と同じ条件である。

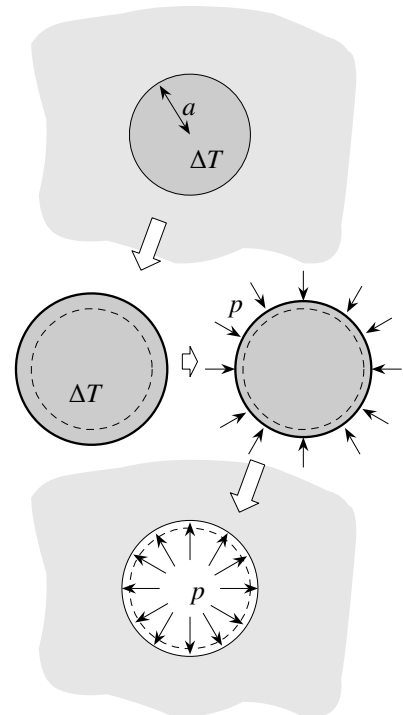


図 3.34 円柱領域の熱膨張

いずれにしても非弾性ひずみが一樣なので、前節までの応力関数³が使える。まず円に p を作用させた問題は、図 3.32 の問題で $a \rightarrow 0, b \rightarrow a$ とすればいいので、応力関数と周方向の変位は式 (3.206) と表 3.1 から

$$U = -\frac{1}{2} p r^2, \quad 2\mu u_\theta = -\frac{1}{2} p (\kappa - 1) r$$

と求められる。したがって、この円の半径の縮み分は $u_\theta(a, \theta)$ に等しいので

$$\Delta a_p^c = -\frac{(\kappa - 1)}{4\mu} p a \quad (3.219)$$

と求められる。一方孔に p を作用させた問題も図 3.33 の問題で $b \rightarrow \infty$ とすればいいので、応力関数と周方向の変位は式 (3.210) と表 3.1 から

$$U = -p a^2 \ln r, \quad 2\mu u_\theta = p a^2 \frac{1}{r}$$

と求められる。したがって、この孔の半径の伸び分も $u_\theta(a, \theta)$ に等しいので

$$\Delta a_p = \frac{p a}{2\mu} \quad (3.220)$$

と求められる。以上の式 (3.217b) (3.219) (3.220) を式 (3.218) に代入することによって、元の孔に円が納まるための適合条件が³

$$(1 + \eta) e^* a - \frac{(\kappa - 1)}{4\mu} p a = \frac{p a}{2\mu}$$

となる。つまり、式 (3.95) と式 (3.96) の \bar{K} と \bar{K}^s の具体的な表現は、この平面問題では

$$\bar{K} = 2\mu, \quad \bar{K}^s = -\frac{4\mu}{\kappa - 1} < 0 \quad (3.221a, b)$$

だったことになる。したがって、円が隙間無く元に戻るのに必要な圧力 p が

$$p = \frac{4\mu (1 + \eta)}{\kappa + 1} e^* = \frac{4\mu (1 + \eta)}{\kappa + 1} \alpha \Delta T \quad (3.222)$$

と求められる。この結果をそれぞれの応力関数に代入し直せば、表 3.1 から応力分布が

$$\begin{aligned} \text{外側 } (r > a) \text{ では } \sigma_{rr} &= -\frac{a^2}{r^2} p = -\frac{a^2}{r^2} \frac{4\mu (1 + \eta)}{\kappa + 1} \alpha \Delta T, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\sigma_{rr}, \\ \text{内側 } (r < a) \text{ では } \sigma_{rr} &= -p = -\frac{4\mu (1 + \eta)}{\kappa + 1} \alpha \Delta T, \quad \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{rr} \end{aligned}$$

と求められる。後者は一樣応力になっていて、Eshelby の解が示す一樣性を表している。

演習問題 3-11

18. 式 (3.212) を誘導せよ。
19. 式 (3.214) を誘導せよ。

(6) 極座標系の Airy の応力関数の適用例

半無限領域への載荷: 前節の問題には円の半径等の特徴的な長さがあったが、それが無い無限体の問題を考えてみよう。それは、任意の問題の基本解あるいは Green 関数としても使える可能性があるからだ (今はわからなくていいが、興味がある読者は式 (3.150) 前後を

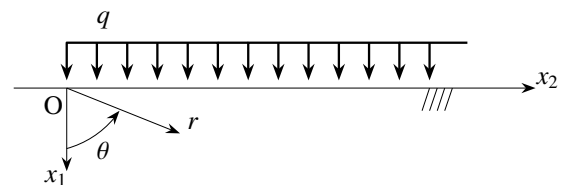


図 3.35 半無限の一樣載荷

参照)。そこで図 3.35 のように、 $x_2 > 0$ 側の表面 ($x_1 = 0, |x_3| < \infty$) に一様な分布表面外力 q が作用している問題を対象としよう。注意しなければならないのは、この問題も平面問題なので分布外力は x_3 方向にも一様に分布しているということである。したがって q の次元は [力][長さ]⁻² である。そこで次元解析を利用してみよう。まず、長さの次元を持っているのは r のみなので、求めたい無次元の応力関数は $\frac{U}{qr^2}$ と考えてよさそう。この関数が複数の無次元の独立変数の関数になるとした場合、考えられる無次元変数は θ くらいだろうから、例えば

$$U = qr^2 F(\theta)$$

と仮定してみよう。物体中には分布外力は無いので、この関数 U は重調和関数でなければならず、したがって関数 $F(\theta)$ は

$$\nabla^4 U = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} + 4 \right) F(\theta) = 0$$

を満足しなければならない。これより一般解は

$$F(\theta) = \mathcal{L}(1, \theta, \cos 2\theta, \sin 2\theta)$$

という線形和で与えられる。このとき

$$U = r^2 \Rightarrow \text{一様な応力状態を表す。}$$

$$U = r^2 \theta \Rightarrow -\pi/2 < \theta < \pi/2 \text{ の半無限領域なので特に問題は無い。}$$

$$U = r^2 \sin 2\theta, r^2 \cos 2\theta \Rightarrow \text{これも直角座標系の一様な応力状態を表す。}$$

となることから、すべてを候補と考えることができるので

$$U = q(Ar^2 + Br^2\theta + Cr^2\cos 2\theta + Dr^2\sin 2\theta) \quad (*)$$

と置き、 $x_1 = 0$ の表面の境界条件

$$\sigma_{r\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = -q, \quad \sigma_{r\theta}\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}\left(r, -\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

に代入する。このとき第 1 式と第 3 式は同じ条件式になるので、結局、残りの三つの式から得られる

$$-B + 2D = 0, \quad 2A + \pi/4 B - 2C = -1, \quad 2A - \pi/4 B - 2C = 0 \quad (**)$$

を解くことによって、上の応力関数は

$$U = q \left\{ A(r^2 + r^2 \cos 2\theta) - \frac{1}{2\pi} r^2 \theta + \frac{1}{4} r^2 \cos 2\theta - \frac{1}{4\pi} r^2 \sin 2\theta \right\}$$

となる。しかし、係数 A が付いた項は $\sigma_{11} = \text{const.}$ の応力に対応しているだけなので、この問題では無視していい。したがって最終的に、この問題の応力関数が

$$U(r, \theta) = q \left(-\frac{1}{2\pi} r^2 \theta + \frac{1}{4} r^2 \cos 2\theta - \frac{1}{4\pi} r^2 \sin 2\theta \right) \quad (3.223)$$

と求められる。

これを用いて算定できる応力等は表 3.1 から

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= q \left(-\frac{1}{\pi} \theta - \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{2\pi} \sin 2\theta \right), & \sigma_{r\theta} &= q \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{2} \sin 2\theta + \frac{1}{2\pi} \cos 2\theta \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= q \left(-\frac{1}{\pi} \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{2\pi} \sin 2\theta \right) \end{aligned}$$

のように特異性は無い。また変位にも特異性は無く

$$u_r = \frac{qr}{4\mu} \left(-\frac{1}{\pi}(\kappa - 1)\theta - \cos 2\theta + \frac{1}{\pi} \sin 2\theta \right), \quad u_\theta = \frac{qr}{4\mu} \left(\frac{1}{\pi}(\kappa + 1) \ln r + \sin 2\theta + \frac{1}{\pi} \cos 2\theta \right)$$

と求められる。ちなみに、分布外力が x_2 方向のせん断力である場合には、 $x_1 = 0$ の表面の境界条件が

$$\sigma_{r\theta} \left(r, \frac{\pi}{2} \right) = q, \quad \sigma_{\theta\theta} \left(r, \frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad \sigma_{r\theta} \left(r, -\frac{\pi}{2} \right) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} \left(r, -\frac{\pi}{2} \right) = 0$$

となるが、これに上式(*)の応力関数の候補を代入して得られる式(**)に相当する連立方程式は、その第1式と第3式とが互いに矛盾することから、係数 A, B, C, D を求める連立方程式の解は不能となる。つまりこのせん断力の問題では次元解析の手法が使えないことになる。うーむ、これは何か重大なことらしいが。

半無限領域の分布外力の有限幅载荷: 次に、図 3.36 のように有限の幅 c の部分だけに等分布外力 q が作用している場合を考えよう。この場合は図 3.37 (a) のような座標を定義して、上で得た解を図 3.37 (b) のように幅 c だけずらして重ね合わせればよいから、式 (3.223) の応力関数を用いて

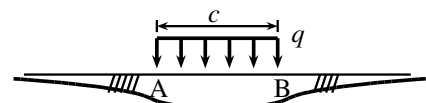


図 3.36 有限幅の等分布载荷と変位

$$U = U(r_1, \theta_1) - U(r_2, \theta_2)$$

がその応力関数になる。しかし、式 (3.223) をこの式に代入して整理すると、それぞれの第 2, 3 項同士の差は結局 x_1 と x_2 の 1 次項と定数になるので、式 (3.201) に代入しても応力を生み出さない。したがってそれに関する項は意味がなくなり、この問題の応力関数は二つの応力関数の第 1 項同士の差だけで

$$U(r, \theta) = \frac{q}{2\pi} (-r_1^2 \theta_1 + r_2^2 \theta_2) \tag{3.224}$$

と求められる。例えば表面の応力は表 3.1 から

$$\sigma_{11} = \frac{q}{\pi} (\theta_2 - \theta_1)$$

となるので、表面の力の境界条件を正しく満足していることが確かめられる。その他の応力や変位は各自求めてみて欲しい。

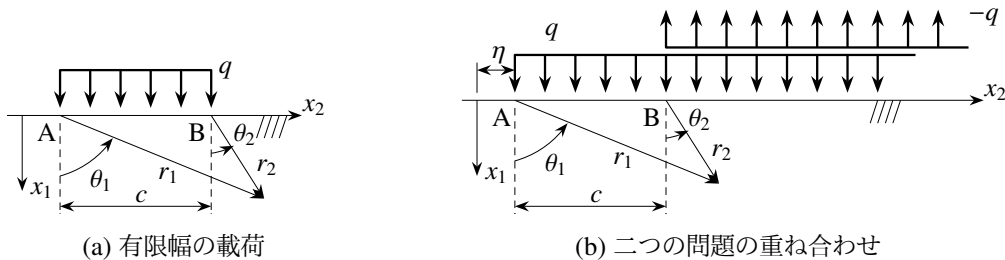


図 3.37 半無限領域表面への有限幅の载荷

半無限領域の集中载荷: この分布外力の特別な場合として、図 3.38 に示したように、 $x_1 > 0$ 側の半無限領域の原点 ($x_1 = 0, x_2 = 0, |x_3| < \infty$) に x_1 方向の集中線外力 P (以下「線」を略す) が作用した問題を考えよう。ただし、平面問題なので集中外力 P は x_3 方向には一様な線外力であることに注意するように。この場合はまず、図 3.37 (b) の点 A が $x_2 = \eta$ の位置にあり、分布長さ c が非常に小さい微分長さ

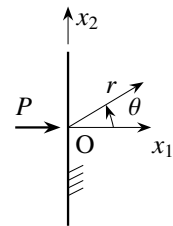


図 3.38 Flamant の解

$c = \Delta\eta$ であると考え、 「ある条件下」 で $\Delta\eta$ を零にした極限が解きたい問題に一致する。つまり、点 A から右への分布外力 q に関する応力関数を $U(r_1, \theta_1; \eta)$ と記すことにすると、点 B から右への分布外力の応力関数は $U(r_2, \theta_2; \eta + \Delta\eta)$ と記すことができるので、前節の重ね合わせた解は

$$U = U(r_1, \theta_1; \eta) - U(r_2, \theta_2; \eta + \Delta\eta) = \frac{q}{2\pi} \{f(r_1, \theta_1; \eta) - f(r_1, \theta_1; \eta + \Delta\eta)\}, \quad f(r_1, \theta_1; \eta) \equiv -r_1^2 \theta_1$$

と表してもいいことになる。 $\Delta\eta$ が微分長さなので、座標 r_2, θ_2 は r_1, θ_1 に置き換えてある。上述の「ある条件」というのは、ここで考える集中外力 P を

$$P \equiv \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} q \Delta\eta,$$

のような極限で定義することである。 $\Delta\eta$ は零になるものの、 q を乗じた項が有界で P になると考えるのであるが、これは集中外力を数学的に取り扱うときの常套手段であり、直感的には q が無限大になるものの積 $q \Delta\eta$ が有界になると考えればいい。これを上式に代入すると

$$U = \frac{P}{2\pi} \lim_{\Delta\eta \rightarrow 0} \frac{f(r_1, \theta_1; \eta) - f(r_1, \theta_1; \eta + \Delta\eta)}{\Delta\eta} = -\frac{P}{2\pi} \frac{df(r_1, \theta_1; \eta)}{d\eta}$$

と表すことができる。そこで

$$x_1 = r_1 \cos \theta_1, \quad x_2 - \eta = r_1 \sin \theta_1 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial r_1}{\partial \eta} = -\sin \theta_1, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} = -\frac{\cos \theta_1}{r_1}$$

という関係になるので、上式の微係数は

$$\frac{df(r_1, \theta_1; \eta)}{d\eta} = 2r_1 \theta_1 \sin \theta_1 + x_1$$

と求められる。しかし、この第2項の x_1 は応力には寄与しないので無視すると、最終的な応力関数は

$$U_F(r_1, \theta_1; \eta, P) = -\frac{P}{2\pi} 2r_1 \theta_1 \sin \theta_1 = -\frac{P}{\pi} r_1 \theta_1 \sin \theta_1 \quad (3.225)$$

となる。もし図 3.38 のように原点に外力が作用している場合 ($\eta = 0$) には

$$U = -\frac{P}{\pi} r \theta \sin \theta \quad (3.226)$$

が、この集中外力 P に対する応力関数である。これは **Flamant** の解として知られている。あるいは平面問題における **Boussinesq** 問題の解である。このとき生じる応力は表 3.1 から

$$\sigma_{rr} = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = 0$$

のように、原点で特異になる。これを有限要素法等で数値的に求める方法は専門家にご相談ください。変位にも $\ln r$ があるんだが、さて? Green 関数とはそういうものか。

以上、外力が幅 c 内で一様な q の場合の押し込み問題を解き、さらにその極限として集中外力 P に対する解を得た。しかし逆に、ここで得た Flamant の解において $P = 1$ として、その q 倍を例えば $x_2 = \eta$ から $\eta + c$ ままで並べて重ね合わせた解 (概念的に)

$$U \sim \int_{\eta}^{\eta+c} q U_F(r, \theta; x_2, 1) dx_2 = q \int_{\eta}^{\eta+c} U_F(r, \theta; x_2, 1) dx_2$$

は、当然であるが (確かめてはいないが) 前節で求めた応力関数式 (3.224) にならなければならない。つまり式 (3.225) は **Green** 関数である。あるいは構造力学で用いる影響線である。つまり、ある単位の刺激 $P = 1$ が $x_2 = \eta$ に作用したときの解を Green 関数と呼び、その重ね合わせでほとんどの一般的な載荷状態の解を求める

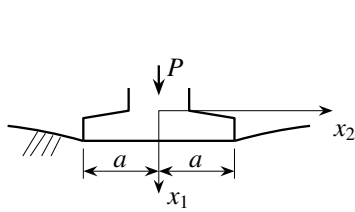


図 3.39 剛体による押し込み問題

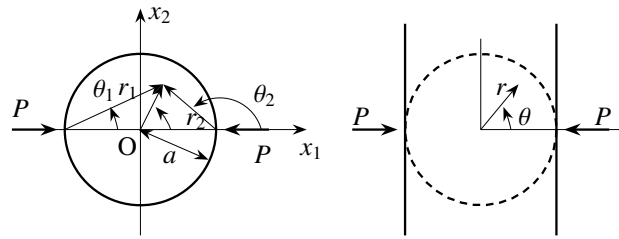


図 3.40 Flamant の解と円領域の Hertz 問題

ことができるようになる。このことから、単位外力に対する解が非常に重要であることがわかり、無限体の解を基本解と呼び、ある境界条件を満足する解を Green 関数と呼んでいる。

では、例えば橋脚の支持地盤に生じる応力を検討する場合には脚が外力として作用するのではなく、図 3.39 のように押し込む部分の変位が一定になる。この場合も、ここで求めた Flamant の応力関数を使って、分布外力の大きさ q の方を x_2 の関数 $q(x_2)$ として捉えて、上式のような重ね合わせ（概念的に）

$$U \sim \int_{-a}^a q(x_2) U_F(r, \theta; x_2, 1) dx_2$$

によって得られる表面の変位 u_θ が $-a < x_2 < a$ で一定になるように、被積分関数の中にある分布外力の未知関数 $q(x_2)$ を求めるという手法で解けることになる。最終的に解くべき式は積分方程式になるが、結果だけを文献から引用すると

$$q(x_2) = \frac{P}{\pi \sqrt{a^2 - x_2^2}}$$

を得る。この分布外力は式から明らかなように $x_2 = \pm a$ で特異である。これとよく似た問題として、転位と亀裂の問題を第 3.6.4 (7) 節で紹介し、積分方程式の解き方を具体的に示す。

Hertz 問題: 次に、図 3.40 の左側の図のように、円領域を左右から集中外力 P で圧縮した問題を解いてみよう。これはちょうどローラーベアリングや橋梁の金属支承部の局所的な応力を検討するときに必要であろうし、コンクリートの引張試験⁶³がこの解を直接利用している。また平面問題の **Hertz** の解とも呼ばれる。ここでも P は x_3 方向に一樣な線外力である。この問題を図 3.40 の右側の図のように三つに分解しよう。一つは左側の外力についての Flamant の解であり、もう一つも同様の右側の外力に対する解である。つまり式 (3.226) を用いて、座標と外力の向きを考慮すると、それぞれ

$$U_1 = -\frac{P}{\pi} r_1 \theta_1 \sin \theta_1, \quad U_2 = \frac{P}{\pi} r_2 \theta_2 \sin \theta_2$$

という応力関数で解けるはずだ。しかし、この二つの応力関数からは、図に破線で示した円上の応力は零にはならず、元の問題の自由表面がまだ実現されていない。

そこで三つ目の応力関数 U_3 を、この破線円上の応力を零にするように選ぶことにする。上式からこの破線部の応力を求めると、そこは

$$\sigma_{rr} = -\frac{P}{\pi a}, \quad \sigma_{r\theta} = 0, \quad \sigma_{\theta\theta} = -\frac{P}{\pi a}$$

のような、等方応力状態にあることがわかる。したがって、表 3.1 から等方応力状態を生じさせる応力関数

$$U_3 = A r^2$$

⁶³ あれを Brazilian test と呼ぶことをご存知だろうか。

を選択すればいいことがわかる。これを用いて破線円上を自由表面にする条件から A を求めれば、最終的な応力関数が

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{P}{\pi} \left(-r_1 \theta_1 \sin \theta_1 + r_2 \theta_2 \sin \theta_2 + \frac{1}{2a} r^2 \right) \quad (3.227)$$

と求められる。

したがって、Hertz 問題の応力状態は表 3.1 の応力を直角座標に変換して

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{2P}{\pi} \left\{ -\frac{(x_1 + a)^3}{r_1^4} + \frac{(x_1 - a)^3}{r_2^4} + \frac{1}{2a} \right\}, \\ \sigma_{12} &= \frac{2P}{\pi} x_2 \left\{ -\frac{(x_1 + a)^2}{r_1^4} + \frac{(x_1 - a)^2}{r_2^4} \right\}, \\ \sigma_{22} &= \frac{2P}{\pi} \left\{ -\frac{(x_1 + a)x_2^2}{r_1^4} + \frac{(x_1 - a)x_2^2}{r_2^4} + \frac{1}{2a} \right\} \end{aligned}$$

となる。図 3.41 の右向きの横軸が $x_1 = 0$ の断面に生じた圧縮応力 $\sigma_{11}(0, y)$ であり、中央で最も大きな値を持つ。そしてこの応力の積分値が、左側に作用している外力 P とつり合っている。一方、同じ図の左側の半円の中のインセットに示したのが、 $x_2 = 0$ の面に生じた引張応力 $\sigma_{22}(x, 0)$ であり、それは $\frac{P}{\pi a}$ の等分布になっている。したがって、コンクリートの割裂試験で割れる予定の断面に等分布応力が生じていると想像できることから、材料試験としてはとても的確なものだと判断できる。ただし写真 3.4 (図 3.41 を 90 度回転した状態) のように、当たり前だが破断面は滑らかにはならない。ところで、この図 3.41 の左側のインセットを眺めると、上半分の半円の左右方向の力は左右端の $P/2$ 同士でつり合っている。しかし上下方向の力はつり合っていないじゃないか。とんでもない解が得られているとは思わないだろうか。そこで、Flamant の解から得られる応力分布が σ_{rr} のみであったことを思い出そう。つまり、数学的にはこの集中外力は、この図の左下に描いたように载荷点近傍ではそこから r 方向への分布外力として取り扱われているのである。したがって、この r 方向の外力の上方向成分の積分値と、 $x_2 = 0$ の断面に発生した応力の積分値とがつり合うのである。特異性を持つ問題の数学はとても面白い。

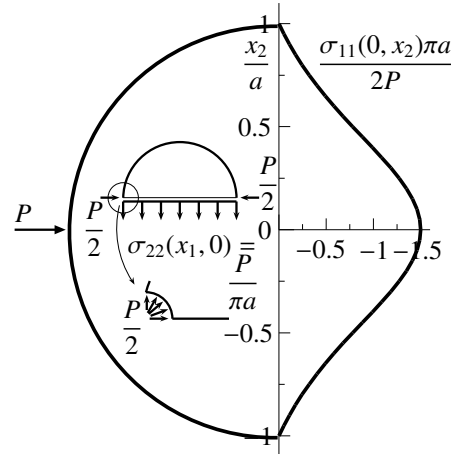


図 3.41 Hertz 問題の応力分布



写真 3.4 コンクリートの割裂試験

円孔のある無限体: さらに図 3.42 のような問題は、橋梁鋼桁の接合で使うボルト接合のボルト孔周辺の応力等を検討するときの参考になるだろう。これは Kirsch (1898) によって応力集中効果が発見された問題である。まず x_1 方向に一樣な応力場に対する Airy の応力関数 U_1 が

$$U_1 = \frac{1}{2} T x_2^2 = \frac{1}{2} T r^2 \sin^2 \theta = \frac{1}{4} T (r^2 - r^2 \cos 2\theta)$$

であることは容易に求めることができる。しかし、これは円孔表面の自由境界条件を満足しない。そこで、孔の存在によってその孔周辺だけが乱される場に対応した応力関数の候補 U_2 を探すと

$$U_2 \sim r^2, \ln r, \theta, r^2 \ln r, r^2 \cos 2\theta, r^4 \cos 2\theta, \frac{\cos 2\theta}{r^2}, \cos 2\theta$$

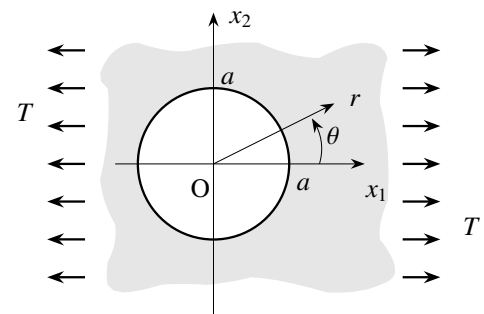


図 3.42 円孔周りの応力分布

が挙げられるが、a) θ は $\sigma_{r\theta}$ が一様になるし、b) $r^2 \ln r$ は 2 値の変位を持つ場になるので、どちらも候補から除外される。さらに、c) r^2 と $r^2 \cos 2\theta$ と $r^4 \cos 2\theta$ は無限遠点で応力が乱れるのでこれも候補から除外される。したがって、 U_2 で最終的に残った下線を付した候補と U_1 を採用して、円孔表面の自由境界条件を満足するように各項の係数を求めると、最終的な応力関数が

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{4} T \left(\overbrace{r^2 - r^2 \cos 2\theta}^{\text{一様な引張場}} - \underbrace{2a^2 \ln r - a^4 \frac{\cos 2\theta}{r^2} + 2a^2 \cos 2\theta}_{r^{-2} \text{ で減衰する乱された場}} \right) \quad (3.228)$$

のように求められる。これを用いると、表 3.1 等からその応力状態は

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{T}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left\{ 1 + \left(1 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta \right\}, & \sigma_{r\theta} &= \frac{-T}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left\{ 1 + 3 \frac{a^2}{r^2} \right\} \sin 2\theta, \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{T}{2} \left\{ 1 + \frac{a^2}{r^2} - \left(1 + 3 \frac{a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta \right\} \end{aligned}$$

となる。そこで、孔表面 $r = a$ における値を求めると

$$\sigma_{rr}(r = a) = 0, \quad \sigma_{r\theta}(r = a) = 0, \quad \sigma_{\theta\theta}(r = a) = T(1 - 2 \cos 2\theta)$$

と求められるので、円孔表面の $\theta = \frac{\pi}{2}$ の位置で

$$\sigma_{\theta\theta}(r = a, \theta = \pi/2) = 3T \quad (3.229)$$

となり、3 倍の応力集中が発生することがわかる。つまり応力集中係数が 3 になる。しかもそれが孔の半径には依存しない。ちょっと面白いのは、 $\theta = 0$ における x_1 方向の直応力 σ_{rr} は

$$\sigma_{rr} = \frac{T}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) \left(2 - 3 \frac{a^2}{r^2} \right)$$

となることから、孔のすぐそばの $a < r < \sqrt{3/2} a$ の区間では圧縮が生じることがわかる。無限遠では引張られているが、孔が縦方向に縮もうとすることで応力の流れがこの辺りで滞るのであろう。

(7) 転位と亀裂 — 積分方程式

最後に、集中外力が作用した場合の解を Green 関数として用いた重ね合わせ手法の例の一つを取り上げよう。 $r^2 \ln r$ や表 3.1 の $r \ln r \cos \theta$ は、 θ 方向の変位成分 u_θ が 2 値関数になっている。つまり、物体が重なるか孔が空いている状況に相当する。この後者を用いた

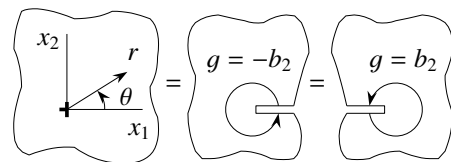


図 3.43 1 個の数学的転位

$$U = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} r \ln r \cos \theta$$

という応力関数からは、表 3.1 の応力を直角座標に変換して

$$\sigma_{11} = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} \left\{ -\frac{x_1}{r^2} + \frac{2x_1^3}{r^4} \right\}, \quad \sigma_{22} = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} \left\{ \frac{3x_1}{r^2} - \frac{2x_1^3}{r^4} \right\}, \quad \sigma_{12} = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} \left\{ -\frac{x_2}{r^2} + \frac{2x_1^2 x_2}{r^4} \right\}$$

という応力分布が求められる。上述のように、対応する変位 u_θ は表 3.1 から

$$u_\theta(r, \theta = 0) = 0, \quad u_\theta(r, \theta = 2\pi) = b_2, \quad \text{あるいは} \quad u_\theta(r, \theta = \pi) = -b_2/2, \quad u_\theta(r, \theta = -\pi) = b_2/2$$

となり、図 3.43 に示したように b_2 の大きさのギャップ g が生じている。これは図 K.10 に示した転位の図を反時計回りに 90 度回転させた状況を表していることから、上式の応力関数は $r = 0$ に 1 個の数学的転位が存在する場の解を与える。したがって $\{b\} \equiv [0 \ b_2 \ 0]^T$ は転位のずれ、つまり結晶格子 1 面分の厚さを表しており Burgers ベクトルと呼ばれている。 $x_1 > 0$ の区間ではギャップは x_2 の負方向（ギャップではなく重なり）であることから $g = -b_2$ のように負にしてある。上式の応力のうち、 σ_{12} と σ_{22} の $x_2 = 0$ における値を求めると

$$\sigma_{12}(x_1, 0) = 0, \quad \sigma_{22}(x_1, 0) = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} \frac{1}{x_1}$$

となる。

そこで、この転位を x_1 軸上に適切に並べることによって亀裂をモデル化してみよう。つまり、図 3.44 のように（図では正のギャップの向きと合わせるために転位の記号を上とは逆向きにしてある）例えば 4 個の転位を 2 個ずつ逆向きに 1 列に並べると、ギャップは x_1 を左から右に

$$g = - \sum_{\text{左から右へ}} b_2 \quad (*)$$

と計算していけばいいので、左右端の転位の位置ではギャップは閉じる。これで、この長さの亀裂をモデル化できたことになるだろう。そこで、長さが $2L$ の亀裂が 1 個だけ存在する、無限に大きい領域を一様な応力 T で引張った場合の問題を、転位を $|x_1| \leq L$ に適切に並べることによって解いてみよう。ちなみに、 x_1 軸上の任意の点 $x = \xi$ に転位が 1 個ある場合の、この軸上の応力 σ_{22} は、上式の原点を移動すればいいから

$$\sigma_{22}(x_1, 0) = \frac{2\mu b_2}{\pi(\kappa + 1)} \frac{1}{x_1 - \xi}$$

である。

ここで $|\xi| \leq L$ に並べる転位の個数分布（転位密度）を $B_2(\xi)$ とすると、上式の b_2 を関数 $B_2(\xi)$ で置き換えて重ね合わせればよいから、 x_1 軸上の応力 $N(x_1) \equiv \sigma_{22}(x_1, 0)$ は

$$N(x_1) = T - \frac{2\mu}{\pi(\kappa + 1)} \int_{-L}^L \frac{B_2(\xi)}{\xi - x_1} d\xi, \quad T > 0$$

となることは理解できるだろう。また $-L \leq \xi \leq x_1$ の間のギャップは上の式 (*) を拡張して

$$g(x_1) = - \int_{-L}^{x_1} B_2(\xi) d\xi$$

となる。したがって、この $|x_1| \leq L$ の部分が亀裂である条件は、そこが自由表面で σ_{12} も σ_{22} も零になり、ギャップは両端で閉じていることだ。つまり $N(|x_1| < L) = 0$ と $g(L) = 0$ がその条件になる。したがって上 2 式からこの条件が

$$\int_{-L}^L \frac{B_2(\xi)}{\xi - x_1} d\xi = \frac{T\pi(\kappa + 1)}{2\mu} \quad (|x_1| \leq L), \quad \int_{-L}^L B_2(\xi) d\xi = 0$$

であればいいことになる。最初の式は、 $\frac{1}{\xi - x_1}$ という特異な核を持つ第 1 種の Cauchy の特異積分方程式と呼ばれ⁶⁴。つまり、未知関数 $B_2(\xi)$ が被積分関数の中であってその積分が右辺の与えられた関数になるように、

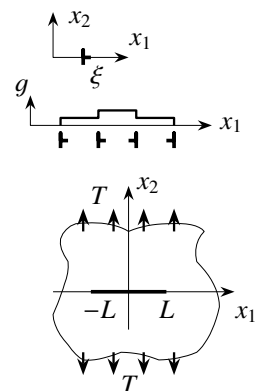


図 3.44 並んだ転位

⁶⁴ 代数方程式や微分方程式というのは、大学工学部で教育を受けるとほぼ全員が接する方程式であり、その解法も学ぶことになっている。そして積分もできないと種々の工学的問題は解けない。しかし、被積分関数の中に未知関数があってそれを決定するような問題（現実社会には数えきれないくらいたくさんあるのに）には、滅多に遭遇しないというのが昨今の工学部の教育現場の状況である。著者も学部では接したことが無かった。米国ではそれが工学部の 3 年次で教えられているというのは、なかなか面白いことである。なぜなら、大学 1 年生の学力（知識）レベルは多分に日本人の方が上だからである。また米国大学で卒業するために必要な単位数は我が国のそれよりもかなり少ない。日本の大学教育の内容やその質はこのままで大丈夫なのだろうか。大学院では Wiener-Hopf technique も教えてもらえ（ても、さっぱり理解できないのであ）るが、日本ではもはやどの機械工学系学科・専攻でも教えてないだろう。米国大学では研究大学であっても教育をかなり重視しているように感じる。と、自分のことは棚に上げてメモしておきたい。

未知関数 $B_2(\xi)$ を求めなければならないわけだ。そしてさらに二番目の式はその未知関数に対する制約条件である。どうですか、読者のほとんどがこういった積分方程式を解いたことは無いのではないだろうか。ちなみにこれは Northwestern 大学の3年生 (2-quarter 科目の2学期目には3年生はいなかったかも) と修士学生を対象とした講義内容である。さて、その積分方程式の解き方については次のような公式がある。

第1種の Cauchy の特異積分方程式に関する公式: 次の積分方程式

$$\int_{-1}^1 \frac{\phi(\xi)}{\xi - s} d\xi = f(s), \quad |s| < 1$$

の解は

$$\phi(s) = -\frac{1}{\pi^2} w(s) \int_{-1}^1 \frac{f(\xi)}{w(\xi)(\xi - s)} d\xi + C w(s)$$

となる。ここに $w(s)$ は特性関数で C は定数である。 $|s| = 1$ で有界な解が存在するためには、次の適合条件

$$\int_{-1}^1 \frac{f(\xi)}{w(\xi)} d\xi = 0$$

が成立しなければならない。そして特性関数は

有界な解の場合	$w(s) = \sqrt{1 - s^2}, \quad C = 0,$
$s = -1$ で特異な解の場合	$w(s) = \sqrt{\frac{1-s}{1+s}}, \quad C = 0,$
$s = 1$ で特異な解の場合	$w(s) = \sqrt{\frac{1+s}{1-s}}, \quad C = 0,$
$ s = 1$ で特異な解の場合	$w(s) = \frac{1}{\sqrt{1 - s^2}}$

となる。 Dundurs 先生が講義で配付した資料 ‘Navigator’s Guide of the High Seas; Cauchy singular integral equations’ から抜粋。 ☐

この公式を踏まえて、答 (ただし無次元化して $L = 1$ と記した場合) を示すと $|x_1| \leq 1$ で

$$B_2(x_1) = -\frac{T(\kappa + 1)}{2\pi\mu} \frac{1}{\sqrt{1 - x_1^2}} \int_{-1}^1 \frac{1 - \xi^2}{(\xi - x_1)\sqrt{1 - \xi^2}} d\xi$$

となるので、最終的に $|x_1| \leq L$ の区間で

$$B_2(x_1) = \frac{T(\kappa + 1)}{2\mu} \frac{x_1}{\sqrt{L^2 - x_1^2}}, \quad g(x_1) = \frac{T(\kappa + 1)}{2\mu} \sqrt{L^2 - x_1^2}$$

と求められる。つまり、転位分布は亀裂両端で無限大の値を持ち、亀裂は開くと楕円形になることを示している。このときの x_1 軸上の応力を求めると、こちらは $|x_1| \geq L$ で

$$N(x_1) = T \frac{|x_1|}{\sqrt{x_1^2 - L^2}}, \quad \lim_{x_1 \rightarrow \infty} N(x_1) = T$$

となる。亀裂から遠く離れる ($x_1 \rightarrow \infty$) と一様な外力 T に等しくなる。一方、この応力の亀裂先端 ($x_1 \rightarrow L + r; 0 < r \ll 1$) 付近における値を求めると

$$\lim_{r \rightarrow 0} N(x_1) = K_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}, \quad r \equiv x_1 - L, \quad K_1 \equiv T \sqrt{\pi L} \tag{3.230a, b, c}$$

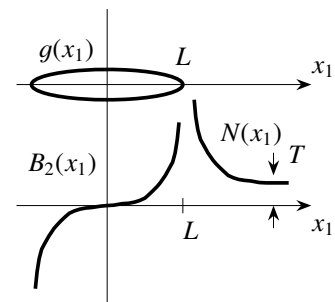


図 3.45 開口変位と転位・応力分布

となり，亀裂先端からの距離の平方根の特異性を持っていることがわかる。ここに K_I は破壊モード I の応力拡大係数と呼ばれるもので，破壊力学の基本的なパラメータである。最も基本的な破壊規準は，この応力拡大係数が破壊靱性⁶⁵と呼ばれる基準値 K_{Ic} に達したときに亀裂が進展するとしている。読者のほとんどが，積分方程式というものには初めて接したと思うが，例えば臓器の超音波探査や構造部材の非破壊試験等は，実は積分方程式を解いている（付録 F 参照）のである。

演習問題 3-12

20. 式 (3.228) を誘導せよ。

3.6.5 3次元問題とポテンシャル

(1) Papkovitch-Neuber のポテンシャル

3次元問題の厳密解に触れる機会は非常に少ないのではないだろうか。主に亀裂問題に接している人達の分野では普通の対象なのだろうが，実際には3次元問題を対象としているにもかかわらず，その勉強を学部ではほとんどしていないのが土木分野の教育の現状かもしれない。また，文献 [96] の3次元問題の部分には間違いがあると聞いたこともある。そこでここでも Dundurs 先生の講義ノートから引用・複写しておく。

変位で表した Hooke 弾性体の3次元のつり合い式 (3.152) は，分布外力が無い場合には Lamé 定数と Poisson 比の関係を用いて

$$\sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} + \frac{1}{1-2\nu} \sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} = 0 \quad (3.231)$$

と書くことができる。このとき Papkovitch (1932) と Neuber (1934) は，変位が2種類のポテンシャル \mathbf{B} と β で

$$2\mu u_i = 4(1-\nu) B_i - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_k x_k B_k + \beta \right) \quad (3.232)$$

と表されれば，上式を自動的に満足することを示した。ここに，それぞれのポテンシャルは

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0, \quad \sum_j \frac{\partial^2 B_i}{\partial x_j^2} = 0, \quad \nabla^2 \beta = 0, \quad \sum_j \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_j^2} = 0 \quad (3.233a, b, c, d)$$

を満足する調和関数である。与えられた問題に対してこのポテンシャルが求められれば，変位とひずみおよび応力は

$$2\mu u_i = (3-4\nu) B_i - \sum_k x_k \frac{\partial B_k}{\partial x_i} - \frac{\partial \beta}{\partial x_i}, \quad (3.234a)$$

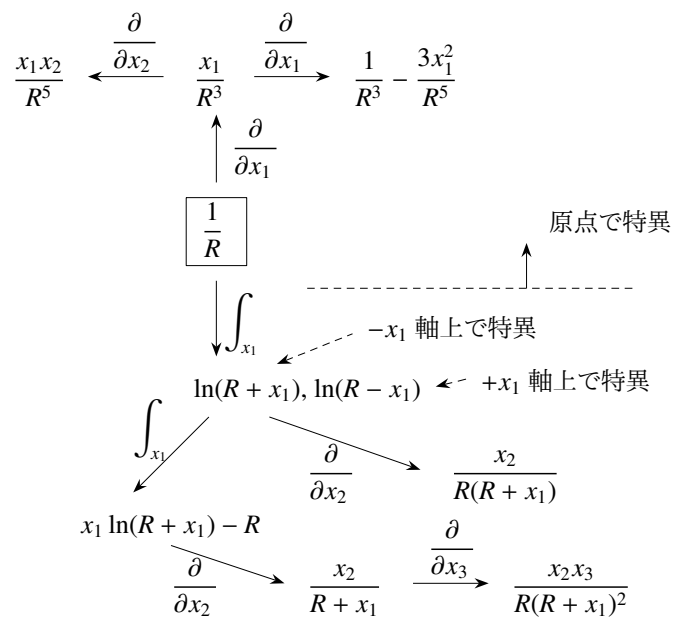


図 3.46 $1/R$ から派生する調和関数

⁶⁵ 「靱性」の「靱」の字体には「鞣」というのもあり，いくつかの国語辞典では「強靱」には後者が使われているが，ある漢字字典によると「鞣」が正字で「靱」と同字，「靱」は俗字と分類されているので，この文書では前者を用いている。

$$2\mu \epsilon_{ij} = (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} + \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) - \sum_k x_k \frac{\partial^2 B_k}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (3.234b)$$

$$\sigma_{ij} = (1 - 2\nu) \left(\frac{\partial B_i}{\partial x_j} + \frac{\partial B_j}{\partial x_i} \right) + 2\nu \delta_{ij} \sum_k \frac{\partial B_k}{\partial x_k} - \sum_k x_k \frac{\partial^2 B_k}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j} \quad (3.234c)$$

と表される。

Helmholtz 分解定理で定義されるポテンシャルに似て、一つがベクトルポテンシャルでもう一つがスカラーポテンシャルであるが、どちらも調和関数であることから、問題に適したポテンシャルを見つけることは（経験さえあれば）少しだけ楽になるかもしれない。例えば低次の多項式の 1 や x_i , $(x_i x_j)$ ($i \neq j$), $R^2 - 3x_i^2$ ($R^2 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$) 等は調和関数である。また R^{-1} が調和関数であることも容易に証明できる。そのとき、この微係数と積分したものがどちらも調和関数⁶⁶となり、図 3.46 [89] のような性質を持つ。このようなデータベースを持っておけば、ポテンシャルの解をうまく見出せるかもしれない。ただし、ポテンシャルが座標の原点の選択に依存してしまうということが難点らしい。どうということだろう。

(2) 無限体の基本的な問題の例

まず、無限領域に一樣な 1 軸外力が作用している図 3.47 (a) の場合のポテンシャルは

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{\sigma_0}{2(1+\nu)} x_3, \quad \beta = \frac{\sigma_0 \nu}{2(1+\nu)} (R^2 - 3x_3^2) \quad (3.235a, b, c, d)$$

である。そこに球状の孔が開いた図 3.47 (b) の場合のポテンシャル (Southwell, 1926) は

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{\sigma_0}{2} \left\{ \frac{1}{(1+\nu)} x_3 + \frac{5a^3}{7-5\nu} \frac{x_3}{R^3} \right\}, \quad (3.236a, b, c)$$

$$\beta = \frac{\sigma_0}{2} \left[\frac{\nu}{1+\nu} (R^2 - 3x_3^2) - \frac{a^3}{7-5\nu} \left\{ \frac{6-5\nu}{R} - a^2 \left(\frac{1}{R^3} - \frac{3x_3^2}{R^5} \right) \right\} \right] \quad (3.236d)$$

となる。第 1 項は上述の一樣場に対応したポテンシャルであり、第 2 項が球によって乱された場であり、原点では特異だが、幸い原点は球孔の中なので問題は無い。乱された場の応力と変位はそれぞれ R^{-3} か R^{-2} で減衰する。このポテンシャルを式 (3.234c) に代入して、 σ_{33} の孔表面の応力集中係数を求めると

$$\frac{\sigma_{33}(a, 0, 0)}{\sigma_0} = \frac{27 - 15\nu}{2(7 - 5\nu)} \quad (3.237)$$

となる。この大きさはほぼ 2 であり、例えば $\nu = 1/3$ の場合には 2.0625 で、平面問題の円孔の式 (3.229) の 3 よりはかなり小さいことがわかる。しかし、溶接部のブローホール等のように鋭角部や亀裂が無い場合であっても、2 倍程度の応力集中が発生することには留意しなければならないことを示している。

次に、基本的な問題の解、つまり基本解あるいは Green 関数を示しておこう。最も基本的な解は原点への集中荷重である。この解は Kelvin の解 (1848) と呼ばれ、ポテンシャルは

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{P_3}{8\pi(1-\nu)} \frac{1}{R}, \quad \beta = 0 \quad (3.238a, b, c, d)$$

で与えられている。

(3) 半無限体の基本的な問題の例

最後に $x_3 = 0$ に表面がある半無限体の基本的な解を列挙しておく。まず図 3.48 (a) の解は Boussinesq の解 (1885) と呼ばれていて、ポテンシャルは

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{P_3}{2\pi} \frac{1}{R}, \quad \beta = \frac{P_3(1-2\nu)}{2\pi} \ln(R + x_3) \quad (3.239a, b, c, d)$$

⁶⁶ 重調和関数や調和関数については 'Michell's general solution' で検索すると多くのことが学べるかもしれない。

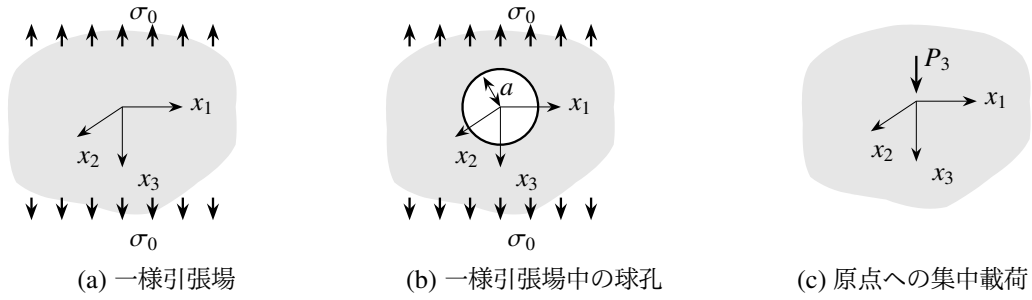


図 3.47 無限領域の無限遠点あるいは原点への载荷

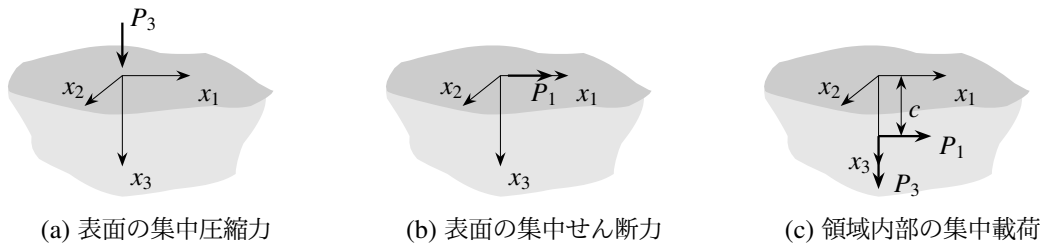


図 3.48 半無限領域の表面あるいは内部における载荷

である。次の、図 3.48 (b) の解は Cerruti の解 (1882) と呼ばれていて、ポテンシャルは

$$B_1 = \frac{P_1}{4\pi(1-\nu)R}, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{P_1(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1}{R(R+x_3)}, \quad \beta = -\frac{P_1(1-2\nu)^2}{4\pi(1-\nu)} \frac{x_1}{R+x_3} \quad (3.240a, b, c, d)$$

である。三つ目の図 3.48 (c) の解は Mindlin の解 (1936) と呼ばれている。\$R_1\$ は \$x_3\$ 軸上の \$x_3 = c\$ からの距離で、\$R_2\$ はその鏡像点の \$x_3 = -c\$ からの距離である。このときポテンシャルは、\$P_3\$ に対しては

$$B_1 = 0, \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{P_3}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{1}{R_1} + (3-4\nu) \frac{1}{R_2} + 2c \frac{x_3+c}{R_2^3} \right\}, \quad (3.241a, b, c)$$

$$\beta = \frac{P_3}{8\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{c}{R_1} - (3-4\nu) \frac{c}{R_2} + \frac{1}{2} [(3-4\nu)^2 - 1] \ln(R_2 + x_3 + c) \right\} \quad (3.241d)$$

である。一方、\$P_1\$ に対しては

$$B_1 = \frac{P_1}{8\pi(1-\nu)} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right), \quad B_2 = 0, \quad B_3 = \frac{P_1}{8\pi(1-\nu)} \left\{ \frac{2(1-2\nu)x_1}{R_2(R_2+x_3+c)} - \frac{2cx_1}{R_2^3} \right\}, \quad (3.242a, b, c)$$

$$\beta = \frac{P_1(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)} \left\{ -\frac{(1-2\nu)x_1}{R_2+x_3+c} + \frac{cx_1}{R_2(R_2+x_3+c)} \right\} \quad (3.242d)$$

である。いずれも応力は特異になる。

演習問題 3-13

21. 微分の練習みたいなものだが、式 (3.237) を誘導せよ。

‘whatchamacallit:’ 会話中の「あれ」とか「名前忘れたけどあのあれ」という意味で使う。元は ‘what-do-you-call-it’ とか ‘what-you-may-call-it’ とされる。これを商品名とする candy bar があったが、その TV CM が面白かった。子供が数人出てきて、その candy bar を食べている子が「やっぱ ‘whatchamacallit’ が一番だよなあ」に対し、他の子が「え! その『あれ』って何なんだよお」がしばらく続く・・・だったと思うのだが。YouTube に動画あり。



写真 3.5 酒田みらい橋 繊維補強コンクリート外 PC ケーブル歩道橋 2002 年竣工



‘On the house.’ とときどき日本人学生数名で O ホテルのバーに行って飲んだ。Evanston は dry town だったからだ。一人 2 (?) ドルくらいをテーブルの上に出してビールを注文し、残ったのを適当に tip にする。これが慣例よりはよかったのか、ウェイトレスは僕らを覚えてくれていた。あるとき最後にある銘柄を頼んだところ、それが売り切れていたからと別銘柄のビールの pitcher を持ってきた彼女はこう言って、テーブルの上にあるお金を持って行かなかった。これは「つけ」という意味だろうか、皆ちょっとオドオドしながら帰った記憶がある。



写真 3.6 安治川（多分，天保山）橋梁 斜張橋の桁側ケーブル定着部 1991 年竣工



‘あいがともしゃげもした.’ 鹿児島弁というのは津軽弁と同様ほとんど外国語だが，古い言葉が残っている点と丁寧な言い方をする点が特徴ではないだろうか。また一語中のイントネーションがほとんど無い代わりに，語尾はたいていは上がる。標準語でいいから，抑揚を極力抑えた上で，息継ぎと句読点の直前だけちょっと上げてみれば，それでほとんど鹿児島弁，呵呵。

「さつま芋」というのがある。薩摩から伝わったからだろう。では伝えた薩摩では何と呼ぶか。「から芋」である。唐から伝わったから（？おっと中南米原産らしいが）。じゃ薩摩がオリジナル発信地の「さつま揚げ」はどうだろう。鹿児島では「つけあげ」「つつけあげ」と呼ぶ。後者の「つけ」は短く小さく発音し，「げ」以外は抑揚は無く最後が上がる。TVCMによると「無塩^{ぶえん}を家庭ですり身にして作ったという。つまり塩漬けではない生の魚で作ったということらしく，方言というのは奥が深い。さて東京弁じゃないか（標準語じゃなくて）と思うのだが，「ありがたいなら芋虫や鯨」ってのはわかるだろうか。もう一つ「ありがた^{はたち}うなら芋虫や二十」（この二十ってのはいろいろあるようだ。友人は百五と言った。3音節なら調子がいい）ってのもある。面白い。

第4章

面内曲げと軸力を受ける棒の力学

4.1 初等梁理論

4.1.1 梁とは

第2章では静定トラスと静定梁を用いて内力（抵抗力）の必要性和重要性を説明し、変形して抵抗する細長い構造部材の三つの抵抗力として、軸力と曲げモーメント・せん断力を導入した。しかし、その章の最後の例のように3箇所が支持された2径間連続梁の場合には、曲げモーメントはおろか支点反力すら求めることができなかつた。それは、材料がどのように変形するのかということと、どういう抵抗をするのかということとの、二つの情報¹が組み込まれていなかったことが原因だったことも、第2.4.2節の例で少しだけ説明した。そのため第3章では、変形そのものと抵抗力の定義と、それを用いた材料の抵抗の仕方の記述とモデルの基本について学んできた。ここではその知識を活かして、静定ではないトラスや梁でも解けるような理論の定式化と解法を説明する。ただし、梁を主な対象として重要な「線形系の重ね合わせの原理」という概念を説明する。

さて棒は非常に細長いもの、少し定量的に書くと、3次元空間に横たわる物体のある1方向への拡りが他の2方向への拡り方よりもかなり大きなものとして定義される。このような物体であれば、寸法が一番長い方向への力学諸量の変化に比べて他の2方向への変化はそれほど大きくはならず、何らかの簡略化すなわち近似ができるというのだ。もしそういった近似によって得ることができる理論が明解で、かつ解が実用上問題が無いくらいの精度を持つことができれば、変形できる物体の力学として平面的あるいは3次元解析するよりも、少なくとも設計段階ではとても実用的²である。この章では、そういった工学的に有用な理論としての、主に曲げを受ける棒の力学の定式化を行う。曲げを受ける棒部材を梁と呼んで³いる。ただし基礎理論を詳述したいので、アーチや曲線橋のように曲がった棒（曲がり梁）の力学⁴については触れない。またトラスの弦材のように主に軸力を受ける棒部材を柱と呼ぶ。この軸方向の力学については最初の定式化では含めるが、いわゆる梁の力学についての節では無視する。なお、この文書には力学理論の背景と基本的な応用だけが記されているので、静定ではないトラスと骨組については第4.8節に代表的な解法例をいくつかは列挙しておいたが、抵抗力の発生の仕方等設計で重要な「感性」を十分に身に付けるためには、必ず文献[145]等の多くの演習問題を自分の手を動かして解いて欲しい。

¹ つまり幾何学的運動学的な条件と構成則。第2.4.2節の例で棒が傾いてバネが縮むこととバネが抵抗力を生み出すことに相当する。

² ある程度設計が進めばコンピュータ上の数値解析による3次元計算も有用であるが、類似の昔の設計図面等が無い限り、数値解析だけでは設計はできない。

³ 著者は、作用や変形の状態によって対象の呼び名が変わることにはかなり抵抗があるが、いわゆる工学分野あるいは現場の先輩達とスムーズに仕事をしていく上では、そういった慣習も少しは知っておく必要があるかもしれない。第3章でも述べた「応力度」という呼び方と同様の状況である。ちなみに、後述の座屈が問題になるような大きな軸力を受ける曲げ部材を梁-柱と呼び、座屈の成否とは関係無く空間の任意の方向に向いた多軸状態の細長い部材群から成る構造を骨組と呼ぶ。

⁴ 著者は極座標が苦手だ。

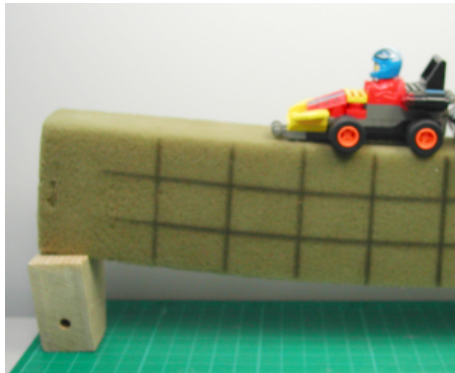


写真4.1 曲がったスポンジの梁

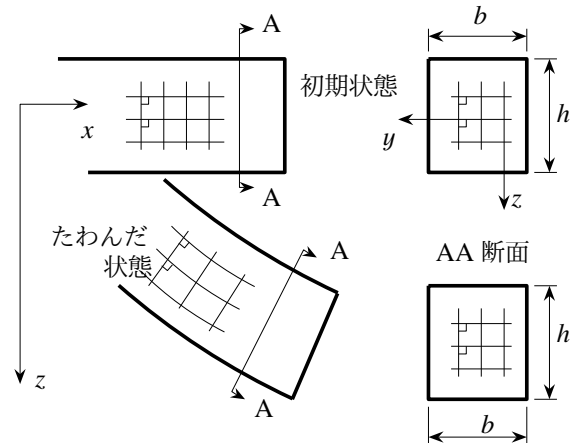


図4.1 曲げを受けた細長い棒の変形状態

4.1.2 支配方程式

(1) 基本的な仮定

曲げを受ける非常に細長い棒を梁と呼ぶことにしたが、簡単なスポンジの実験（写真4.1）を始め多くの実験から、図4.1に示したような、次の二つの基本的な仮定を設けることができそうなことがわかっている。

断面形不変の仮定: 断面形は、梁がたわんだあとも変化しない。図4.1の右側の図のように h と b は変化せず、断面に仮想的に引いた交わる二つの線分の成す角度はたわんだあとも変化しない。

Bernoulli-Euler の仮定: 梁を側面から見た場合、その面内ではせん断変形が生じず、直交していた2直線は梁がたわんだあとも直交を保つ（図4.1の左側の下図）。スポンジの側面に引いた線分が変形後も直交したままに見える。

この基本的な仮定を満足しながら曲げを受ける梁を **Bernoulli-Euler 梁** あるいは **初等梁** と呼び、この節で定式化される理論を **初等梁理論** と呼ぶことがある。あとの図4.4でも説明するが、第3.6.4(3)節の例で求めた梁の応力成分の解の式(3.199)からひずみ成分を計算すれば、曲げを受ける細長い棒で上の二つの仮定が近似的に成立することを確かめることができる。ここでは簡単のためにも、また梁理論の基礎を示すためにも、第2章で例として扱ったような z - x 面内（第2章では x - y 面内）で変形する梁のみを対象とする。

(2) ひずみ場の仮定

図4.1に示したように x 軸を梁の細長い方向に定義し、それを変位前の梁の軸線と呼ぶことにする。また、自重や荷重が鉛直下向きに作用することや、後述の曲げモーメントの正の向きを念頭に置いて、 z 軸を鉛直下向きに⁵定義し、 z - x 面内の曲げ変形をこの章では対象とする。図では z 軸が断面の対称軸としては描かれていないが、以下、特に断らない限り、 z 軸が断面の対称軸に一致するように配置された、奥行き y 軸方向には対称な断面を持つ梁のみを対象とする。梁をモデル化するに当たっての上の二つの仮定を第3章で導いたひずみで表すと、第1の仮定は

$$\epsilon_{yy} = 0, \quad \epsilon_{zz} = 0, \quad \epsilon_{yz} = 0 \quad (4.1a, b, c)$$

⁵ これは西野文雄先生流のやり方で、ほとんどすべての教科書とは異なる。第1著者の qualifying exam で、弦の振動方程式を書くように言われたとき、下向きに z 軸を描いたところ、審査委員の Achenbach 先生から上向きに y 軸を描くように言われた。

である。つまり、断面形状が変化しないことは y - z 面内の 2 方向の伸びと角変化が零になることである。また第 2 の仮定は

$$\epsilon_{xy} = 0, \quad \epsilon_{xz} = 0 \quad (4.2a, b)$$

となる。つまり、ここでは一般論として x - y , z - x 面の両方を取り上げてみたが、曲げを受ける面内の角変化が無い条件が Bernoulli-Euler の仮定である。

(3) 変位成分と伸びひずみ分布

図 4.2 に示したように梁の細長い方向を x 方向に一致させると、二つのひずみ場の仮定式 (4.1) (4.2) からは同図のようなたわんだ状態を描くことになる。すなわち断面形不変の仮定により、ある断面の x 軸から z だけ離れた点 A は、たわんだあとまたわんだ状態の軸線（一点鎖線）から同じ距離だけ離れた点 B に変位する。また Bernoulli-Euler の仮定により、 x 軸に直交していた任意の断面はたわんだあと軸線と直交する。したがって、点 A の 2 方向の変位成分は幾何学的な関係から

$$u_x(x, z) = u(x) + z \sin \theta(x) \simeq u(x) + z \theta(x) \quad (4.3a)$$

$$u_z(x, z) = w(x) + z \{\cos \theta(x) - 1\} \simeq w(x) \quad (4.3b)$$

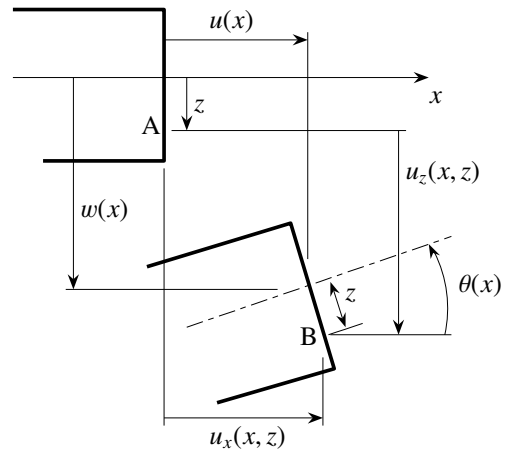


図 4.2 梁の変形と変位成分

となることが明らかである。 $u(x)$ を断面の軸方向変位、 $w(x)$ をたわみ、さらに $\theta(x)$ をたわみ角と⁶呼ぶ。上式の最後の表現ではたわみ角 $\theta(x)$ が非常に小さいので

$$|\theta| \ll 1 \Rightarrow \sin \theta(x) = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots \simeq \theta(x), \quad \cos \theta(x) = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots \simeq 1$$

のように展開した上で、たわみ角の 2 次項以上を無視して近似（線形化）してある。

次に Bernoulli-Euler の仮定式 (4.2b) にこの成分を代入すると

$$2\epsilon_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = \theta(x) + \frac{dw(x)}{dx} = 0$$

となり、たわみ角がたわみの 1 階の微係数で近似表現できることを教えてくれる。つまり

$$\theta(x) = -\frac{dw(x)}{dx} \quad (4.4)$$

である。この文書ではたわみ角を反時計回りを正として定義したため、右辺にマイナス記号がある。これを式 (4.3) に代入し直すことによって、微小な変位しか生じない範囲内で梁の変位成分は

$$u_x(x, z) = u(x) - z \frac{dw(x)}{dx}, \quad u_z(x, z) = w(x) \quad (4.5a, b)$$

と⁷なる。大切なことは、任意点の変位が軸線上 ($z = 0$) の点の変位 $u(x)$ と $w(x)$ と、 z の 1 次項だけで表現でき

⁶ 右手系で向きを決めているため、モーメントと正の仕事をするように、通常のとわみ角と逆符号であることに注意すること。

⁷ z - x 面内の運動なので $u_y(x, y, z) = \text{const.}$, $u_x(x, y, z) = u_x(x, z)$, $u_z(x, y, z) = u_z(x, z)$ と考えればいい。これをひずみの定義式 (3.6) に代入すると式 (4.1a) (4.1c) (4.2a) は成立する。そして式 (4.1b) からは

$$\frac{\partial u_z(x, z)}{\partial z} = 0 \rightarrow u_z(x, z) = u_z(x) = w(x)$$

となり、式 (4.2b) からは

$$\frac{\partial u_x(x, z)}{\partial z} = -\frac{\partial u_z(x, z)}{\partial x} = -\frac{dw(x)}{dx} \rightarrow u_x(x, z) = u(x) - z \frac{dw(x)}{dx}$$

となるように、図 4.2 の幾何学的な考察をしなくても、ひずみの仮定を積分して式 (4.5) を得ることができる。

ていることである。このことから3次元物体の物理的挙動が、1次元の(xだけを独立変数とする)理論で表現でき、多分解き易くなりそうだ。

前節の仮定より、零でないひずみ成分は梁の場合には ϵ_{xx} だけになる。定義に従って、式(4.5a)を式(3.6)に代入すると

$$\epsilon_{xx}(x, z) = \epsilon(x) + z\kappa(x), \quad \epsilon(x) \equiv \frac{du(x)}{dx}, \quad \kappa(x) \equiv -\frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (4.6a, b, c)$$

となる。つまり梁を曲げた場合に発生するひずみは、図4.3に示したように $x = \text{const.}$ の任意の断面でz方向に線形分布をすることがわかる。いわゆるひずみの三角形分布と呼ばれるものである。

$\epsilon(x)$ は軸線の「伸び」であり、 $\kappa(x) = \left(\frac{d\theta}{dx}\right) = \frac{1}{\rho}$ は変形して曲がった梁の軸線の「曲率」を表している。 ρ はその曲率半径⁸である。式(4.6)も、梁の断面内の任意点のひずみを軸線上の二つの量とzの1次項だけで表すことができることを示している。このあたりが構造力学の特徴である。つまり、未知関数はxだけの関数になるので、第3章の連続体の力学とは異なり、最終的な支配方程式が常微分方程式になるのである。

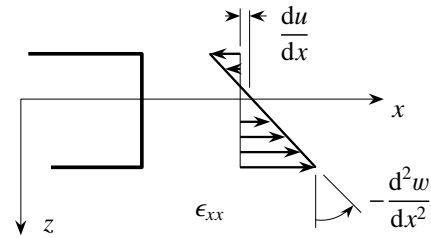


図4.3 伸びひずみの線形分布

(4) 直応力分布

ここでは弾性材料の基本的な梁理論を定式化したいので、材料はHookeの法則に従うものとし、梁の断面寸法が軸方向の長さ比べて非常に小さいので、yとz軸の両方向に平面応力状態と考えた1次元のHookeの法則、つまり式(3.183a)が成立するものとする。これに式(4.6)を代入すれば、直応力が

$$\sigma_{xx}(x, z) = E \epsilon_{xx} = E(\epsilon + z\kappa) = E\left(\frac{du}{dx} - z\frac{d^2w}{dx^2}\right) \quad (4.7)$$

となる。 E はYoung率である。ひずみが図4.3のように線形分布しているから、応力も同様に線形分布する。これは第3章の式(3.199a)の右辺第1項に相当している。この式が、材料の抵抗則を表す構成則であり、この関係式が不静定構造の解析では必要になるのである。つまり、実際にどういった変形が生じ、その材料がどのような抵抗力を發揮して断面力を発生させるのかという情報を、この式(4.7)が与えてくれる。これによって、2径間連続梁のような不静定構造が解けるようになる。

ところが、ひずみに対して仮定した式(4.2b)をそのまません断のHookeの法則式(3.181b)に代入するとせん断応力も生じないことから、もしせん断力を素直に次式で定義すると

$$\epsilon_{xz} = 0 \rightarrow \sigma_{xz} = 0 \rightarrow V \equiv \int_A \sigma_{xz} dA = 0$$

のようにせん断力も生じないことになる。これは式(3.199b)の結果に反するし、第2章でトラスの挙動を拡張したときに斜材の抵抗から得られたような、外力につり合うために

静定梁の断面に生じていたせん断力Vの存在を否定してしまう。ひょっとすると間違っているのではないだろうか。しかし実は細長い物体では、 σ_{xx} の大きさに比べて比較的小さいせん断応力 σ_{xz} しか発生しないことを、これも式(3.199)から示すことができる。図4.4は式(3.199)から算定される応力(座標系が異なるので

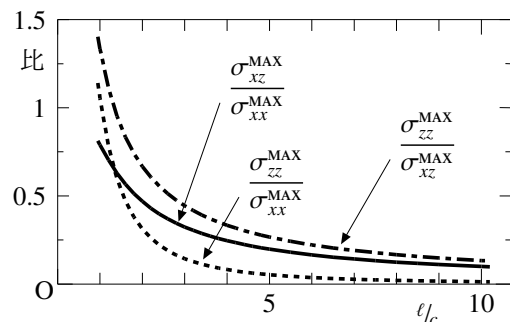


図4.4 細長さと応力成分比の関係

⁸ 直線の曲率半径 ρ は $\rho = +\infty$ なので曲率 κ は零である。ところで、既刊教科書の中には任意の曲線 $y = y(x)$ の図を用いて曲率半径 ρ と関数 $y(x)$ の微係数との関係を説明しているものがあるが、正確な定義はp.700に示したようにそれほど単純ではないので、とりあえず、線形の範囲ではたわみ角と曲率がある直接的な関係にあることを覚えるだけでいい。

この章のそれに合わせて変更した) の最大値同士の比を比べたもので, $\sigma_{xx}^{\text{MAX}} \equiv |\sigma_{xx}(x=0, z=\pm c)|$, $\sigma_{xz}^{\text{MAX}} \equiv |\sigma_{xz}(x=\pm l, z=0)|$, $\sigma_{zz}^{\text{MAX}} \equiv |\sigma_{zz}(z=c)|$ と定義して, それぞれの比を細長さ l/c に対して示したものである。それぞれ異なる位置で生じた最大値なので, オーダー比較くらいの意味しか無いことには注意して欲しい。このように細長い梁では, σ_{xx} に比べて他の2成分が少なくとも一桁くらい小さい量

$$\sigma_{xx}^{\text{MAX}} \gg \sigma_{xz}^{\text{MAX}} \gg \sigma_{zz}^{\text{MAX}} \quad (4.8)$$

であることがわかる。つまり, 式(4.7)で得た直応力は二つの基本的な仮定を厳密に用いたことによる結論であるが, 本当は零ではないせん断応力については別途検討する必要があることには留意する必要がある。つまり, 初等梁理論が細長い物体に対する近似解に過ぎないことは明らかである。ただこの理論を用いる限り, 実験等との比較から, 特に式(4.7)の直応力 σ_{xx} を工学的に十分な精度で計算できることもわかっている。したがって大胆ではあるが適切な仮定で現象をモデル化することにより, 常微分方程式で表現されて取り扱いが楽な理論がここに構築されようとしている。せん断応力の算定法については第4.6節で説明する。

(5) 合応力と応力

第2.3.3節ではトラスからの大胆な類推で梁の中の応力分布を示し, それによって生じる梁の抵抗力の一つの曲げモーメントを定義した。ここでは前節で求めた応力分布を用いて, 曲げモーメントに加えて軸力もきちんと定義し直す。さらにそれが, ひずみおよび変位とどのような関係を持っているかについても求めておく。まず, 軸力は断面内の直応力の総和なので, 断面積を A としたとき

$$N(x) \equiv \int_A \sigma_{xx}(x, z) dA = \int_A E \left(\frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) dA = EA \frac{du(x)}{dx} - EJ_z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (4.9)$$

となる。ここに

$$A \equiv \int_A dA, \quad J_z \equiv \int_A z dA \quad (4.10a, b)$$

で定義され, J_z は断面1次モーメントと呼ばれる断面定数⁹で, 純粋に断面の形状のみに依存した定数である。

一方, 曲げモーメントは y 軸回りの偶力による抵抗力なので

$$M(x) \equiv \int_A z \sigma_{xx}(x, z) dA = \int_A z E \left(\frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} \right) dA = EJ_z \frac{du(x)}{dx} - EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} \quad (4.11)$$

という関係になる。ここに I は断面2次モーメントと呼ばれる断面定数¹⁰で

$$I \equiv \int_A z^2 dA \quad (4.12)$$

で定義される。この二つの関係式(4.9)(4.11)が, 断面力と軸線上の変位成分との間の関係式として表現した広義の構成則¹¹であり, 不静定構造を解くのに必要な関係式だ。

なお前節でも述べたように, 仮定によってせん断ひずみを零としているため, その仮定の範囲ではせん断応力も零になるから, 断面力として確かに存在するはずのせん断力は, 変形と関係付けられる内力としては定義

⁹ トラスや梁の力学を教える前に「断面の性質」と称してこういった断面定数を教える教科書は(第1著者も関わった文献[157]も)よくない。初学者にとってはその意味や目的が全くわからないからだ。断面定数を求めることは(少なくとも大学における)構造力学教育の本質ではなく, 断面2次モーメントがなぜ重要なのかを教えることこそがその本質だからである。

¹⁰ 第1著者が学部2年生のときの専門科目で経験した最初の衝撃は, 東京大学の国分正胤先生のコンクリート工学の宿題だった。学生全員がビニール袋に入った両手一杯くらいのセメントをもらって, 何でもいからレポートせよだ。しかも万年筆で書かねばならない。下宿の近くの工事現場から砂とベニヤ板をもらい, 箆箱くらいの無筋コンクリートを作って3点曲げをした。しかし, 同時並行の構造力学の勉強をしていなかったため, グラフの荷重軸は断面2次モーメントではなく断面積で割ってまとめた。提出当日になってそれに気づき, 万年筆で加筆してグラフも直した。もう滅茶苦茶だ。講義中に国分正胤先生は何人かのレポートを取り出して批評したが, よりによってそのレポートも見つかって怒られた。まさに Murphy の法則である。

¹¹ 構成則はあくまでも微視的な応力とひずみの関係式を指すのであり, 断面内の積分で定義した断面力と軸線の変形との関係で表した材料の抵抗則を, ここでは「広義の」という形容詞を付けて区別している。

できない。これは比較的簡単な境界値問題で直応力 σ_{xx} を精度よく求めるために定式化された初等梁理論を持つ矛盾点である。したがってこの節では、変位や変形と直接関係付けられた断面力としてのせん断力は定義することはできないが、次節以降ではもちろん考慮する。もしこういった天下りのせん断力の導入がお気に召さない読者は、第4.9節に示した仮想仕事による支配方程式の誘導を参照して欲しい。

さてさらに、もし x 軸が断面の図心を通るように設定¹²されていれば、図心の定義¹³が「その点を原点とした断面1次モーメントが零になる点」であることから

$$J_z \equiv 0$$

と¹⁴なる。この図心を通る y 軸を中立軸と呼ぶ。このような軸の選択によって、上の二つの断面力と変位成分の関係には連成する項が無くなり

$$N(x) = EA\epsilon = EA \frac{du(x)}{dx}, \quad M(x) = EI\kappa = -EI \frac{d^2w(x)}{dx^2} = EI \frac{d\theta(x)}{dx} \quad (4.13a, b)$$

と表すことができる。式(4.13b)では式(4.4)の関係を用いている。つまり、軸力が伸び剛性 EA を抵抗係数として軸線の伸び ϵ という変形による抵抗力であるのに対し、曲げモーメントは軸線の曲率 κ という変形による抵抗力でその抵抗係数が曲げ剛性 EI であることを示している。したがって同じ断面積を持つ断面同士で比較したとき、レール断面のように断面2次モーメントが大きくなる形の方がより大きな曲げ抵抗力を持つ理由がここにある。

さて、合応力とひずみおよび直応力との関係を求めるために式(4.6)(4.7)に式(4.13)を代入すると、伸びひずみと直応力は

$$\epsilon_{xx}(x, z) = \frac{N(x)}{EA} + z \frac{M(x)}{EI}, \quad \sigma_{xx}(x, z) = \frac{N(x)}{A} + z \frac{M(x)}{I} \quad (4.14a, b)$$

と表現¹⁵できる。このように、曲げを受ける部材に生じる応力は断面の上下縁で最大になるため、例えば、中立軸から z 軸方向の最も離れた断面の縁までの z 座標値を用いて、 z の負方向（上方）に $z = e_U (< 0)$ 、正方向（下方）に $z = e_L$ と表すことにすると、その断面 x の正負の最大応力（最外縁応力 $\sigma_{\max}^\alpha(x)$, $\alpha = U, L$ ）は

$$\sigma_{\max}^\alpha(x) = \frac{N(x)}{A} + e_\alpha \frac{M(x)}{I}, \quad \alpha = U, L$$

となる。そこで

$$W_U \equiv \frac{I}{e_U} (< 0), \quad W_L \equiv \frac{I}{e_L} \quad (4.15a, b)$$

のように（この文書特有の）符号付き断面係数を定義すると、曲げ M と軸力 N を受ける梁に発生する（正負の）最大応力は

$$\sigma_{\max}^\alpha(x) = \frac{N(x)}{A} + \frac{M(x)}{W_\alpha}, \quad \alpha = U, L \quad (4.16)$$

と表すことができる。ここの定義では W_α は符号を持つ¹⁶ため、公式集の定義とは異なる（絶対値は同じ）ことに注意して欲しい。

¹² 文献[108, 152]では、曲げ変形のみときに断面にひずみが生じない境界線を梁の軸方向につないだ線を「中立軸」と呼んでいるが、文献[131]ではそれを「中立軸」または「中立面」と呼んでいる。一方文献[195]では、その断面の境界線の方だけを「中立軸」と呼んでいる。また比較的新しい文献[103]でも同様に、断面の境界線を「中立軸」と呼び、それを梁の軸方向につないだ面を「中立面」と呼んでいる。学会出版物[159]では、軸力が生じた場合も含めて断面にひずみが生じない境界線を『中立軸』と呼んでいて、軸力が生じていない場合にのみ『中立軸』が図心を通ると定義している。著者は文献[103]と同じ考えを持っているので、混乱を避けるためにこの文書では「中立軸」という言葉をできるだけ使わないようにした。

¹³ 質量が一樣で断面形状と同じ形をした等厚薄板の「重心」は断面の図心に一致するが、ここで定義したいのは断面1次モーメントが零になる単なる幾何学的な特性を持った点なので、もしかしたら質量が関係するかもしれない「重心」という言葉は使わない。

¹⁴ 微妙な表現になっているが、本来は「 $J_z = 0$ になるように x 軸の位置を決めると、それは図心を通る」となる。

¹⁵ x 軸が断面の図心を通らない一般的な場合には、式(4.9)(4.11)から

$$\epsilon = \frac{1}{1-\phi} \left\{ \frac{N}{EA} - \phi \frac{M}{EJ_z} \right\}, \quad \kappa = \frac{1}{1-\phi} \left\{ -\phi \frac{N}{EJ_z} + \frac{M}{EI} \right\}, \quad \phi \equiv \frac{(J_z)^2}{AI}$$

となることには注意すること。なぜか他の文献には掲載されていないようだ。

¹⁶ 断面係数ってテンソルではないような気がするんですがねえ。断面「定数」という物理量ではないような。

(6) 支配方程式 — 局所的なつり合い式

ここで誘導するつり合い式は梁の中のある点 x の近傍における局所的なつり合い式であり、第2章の前半で対象としていた外力と支点反力のつり合いのような梁全体の巨視的なものとは異なる。つまり第2.3.5節で誘導した微分方程式で表したつり合い式を、もう一度、梁のある微分線要素 dx を取り出して、軸力も含めてそこに生じている内力（断面力）と分布外力のつり合い条件から求めようとしている。

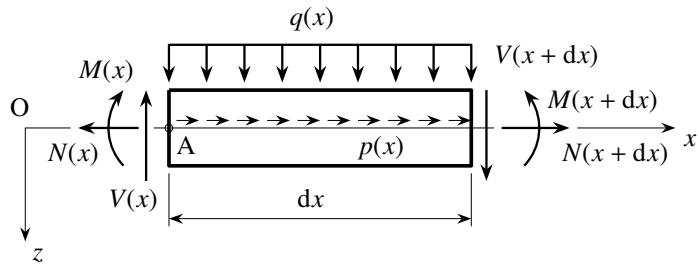


図 4.5 梁の局所的なつり合い

そこで、図 4.5 のように分布外力が作用し、前節で述べたように合応力としてのせん断力 $V(x)$ も発生しているとすると、この微分線要素の z 方向の力のつり合いは

$$V(x+dx) - V(x) + q(x)dx = \left\{ V(x) + \frac{dV(x)}{dx} dx \right\} - V(x) + q(x)dx = 0$$

となることから

$$\frac{dV(x)}{dx} + q(x) = 0, \quad 0 < x < \ell \quad (4.17)$$

がせん断力のつり合い式である。次に点 A の反時計回りのモーメントのつり合いをとってみると

$$M(x+dx) - M(x) - V(x+dx)dx - q(x)dx \frac{dx}{2} = 0$$

となるが、分布外力による項は2次の微小項となるため、結局

$$\frac{dM(x)}{dx} - V(x) = 0 \quad (4.18)$$

がモーメントのつり合い式になる。この式を逆に $V = \frac{dM}{dx}$ と見て、せん断力が曲げモーメントの変化率で定義されていると考えても差し支え無い。これは第2章でも出てきた関係式である。式(4.18)を式(4.17)に代入することによって、わけのわからないせん断力 V を見かけ上消去してしまうと、曲げに関するつり合い式は

$$\frac{d^2M(x)}{dx^2} + q(x) = 0, \quad 0 < x < \ell \quad (4.19)$$

でいいことがわかる。

最後に x 方向の力のつり合いから

$$N(x+dx) - N(x) + p(x)dx = \left\{ N(x) + \frac{dN(x)}{dx} dx \right\} - N(x) + p(x)dx = 0$$

となるので、軸力のつり合い式が

$$\frac{dN(x)}{dx} + p(x) = 0, \quad 0 < x < \ell \quad (4.20)$$

と求められる。

(7) 変位で表したつり合い式

前節で求めたつり合い式のうち曲げに関するものは当然第2.3.5(1)節で求めた静定系のそれと同じであり、このままでは2径間連続梁のような不静定構造を解くことはできない。そのため、第2.4.2節の例でも示した

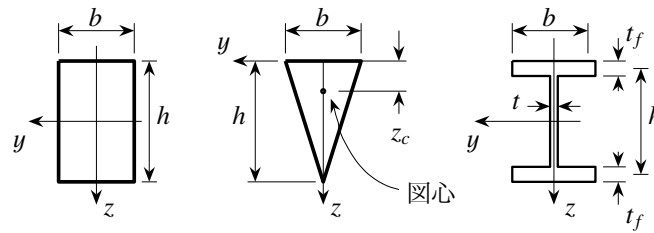


図 4.6 種々断面の断面定数

ように、つり合い式に加えて変形の定義と構成則を考慮する必要がある。そこで式 (4.19) (4.20) のつり合い式に合応力と変形の関係式 (4.9) (4.11) を代入すると、つり合い式を変位成分 $u(x)$, $w(x)$ だけで表すことができる。最終的に x 方向と z 方向のつり合い式はそれぞれ

$$\frac{d}{dx} \left\{ EA \frac{du(x)}{dx} - EJ_z \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right\} + p(x) = 0, \quad (4.21a)$$


$$\frac{d^2}{dx^2} \left\{ EJ_z \frac{du(x)}{dx} - EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2} \right\} + q(x) = 0 \quad (4.21b)$$

と表現できる。もし断面が一様でかつ x 軸が図心を通るように設定されれば、この二つの式は

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + p(x) = 0, \quad -EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + q(x) = 0 \quad (4.22a, b)$$

と書くことができる。第 2.3.5 節のつり合い式は曲げモーメント $M(x)$ を未知関数とするものだったが、それを変位成分 $u(x)$, $w(x)$ を未知関数とするつり合い式に書き直して用いることによって不静定構造が解けるようになるのである。

演習問題 4-1

1. 第 1 章の毛利元就の逸話に関連して示した 3 本の矢を組んだ断面  をこの図の向きに置いた場合、その中立軸の位置と断面 2 次モーメント・断面係数を求めよ。
2. 図 4.6 の幅 b ・高さ h の矩形断面で、高さの中央に引いた軸を y 軸とする場合の断面 2 次モーメントと断面係数を求めよ。
3. 図 4.6 のように逆三角形の上辺に y 軸があるとして、断面 2 次モーメントおよび断面 1 次モーメントを求め、 y 軸をどれだけ z 方向に移動したら図心を通るようにできるのか求めよ。その上で、図心を通る軸回りの断面 2 次モーメントと断面係数を求めよ。
4. 図 4.6 のような 2 軸対称 I 形断面の場合の図心は断面の中心に一致するが、その図心を含む軸回りの断面 2 次モーメントと断面係数を求めよ。さらに、上下のフランジ部分の断面 2 次モーメントは

$$I(\text{フランジ部分}) = (\text{フランジ自体のその図心回りの断面 2 次モーメント}) \\ + (\text{フランジ断面積}) \times (\text{軸からフランジ図心までの距離})^2$$

で算定できることを示せ。さらに、鋼の板構造のように肉厚が非常に薄い場合 ($h, b \gg t, t_f$) には、上式右辺の第 1 項を無視した簡便な表現で近似できることも確認せよ。

4.1.3 境界条件

(1) 3 種類の境界条件

前節で求めたつり合い式は、長さ l の梁なら $0 < x < l$ の任意点で成立しなければならない常微分方程式である。その一般解には微係数の階数に相当する数の積分定数という未定定数が含まれる。この積分定数を決定す

るのは支持条件であり、それは境界条件と呼ばれる。まず基本的な境界条件として、長さ l の 1 本の梁の両端の支持条件から境界条件を誘導しておこう。

基本的な境界条件には 2 種類ある。一つは変位を与えるものである。すなわち梁の場合には、この与える変位成分として x 方向の水平移動量 u と z 方向のたわみ w が考えられるが、実はもう一つある。それは第 2 章でも例として解いた片持ち梁の壁側の条件を考えてみれば明らかであるが、たわみだけではなくたわみ角 θ も零になる境界が埋めこみ端である。以上の幾何学的な考察から、 u と w および θ を与えるのが変位の境界条件で、幾何学的境界条件とも呼ばれ¹⁷る。

もう一つの条件は外力が作用している境界のものである。第 3 章で定義したように、内力の符号は発生している面の外向き法線方向を正にすると定義されているため、その応力の断面内の合計として考えている断面力も、断面の法線が向いている方向が正の向きになる。これに対し、外力の成分の正の向きは常に座標の正の方向で定義するのが普通である。曲げについては既に第 2.3.5 節で説明したが、再度、この力の境界条件については図を用いて注意深く誘導することにしよう。

図 4.7 に示したのは $x = 0$ つまり座標値の小さい方の端の条件である。梁の端部の厚さの無い部分を切り出すと、その梁内部側の面は x 軸の正方向を法線ベクトルとする正の面であるから、断面力も座標の正の方向がすべて正の内力である。一方、外力は図のように座標方向をすべて正の向きとして定義した。この厚さの無い部分の力のつり合いより

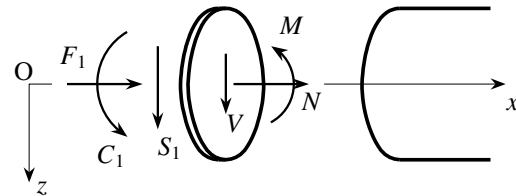


図 4.7 梁の左端の力の境界条件

$$N + F_1 = 0, \quad V + S_1 = 0, \quad M + C_1 = 0$$

とならなければならないから、左端の力の境界条件は次のようになる。

$$-N = F_1, \quad -V = S_1, \quad -M = C_1 \tag{4.23a, b, c}$$

一方図 4.8 は $x = l$ 側、つまり座標値の大きい端の条件である。この場合、内力が生じている面が負の面であることに注意すれば、右端の力の境界条件は

$$N = F_2, \quad V = S_2, \quad M = C_2 \tag{4.24a, b, c}$$

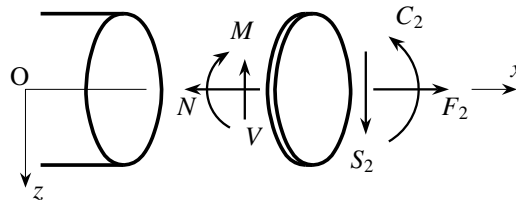


図 4.8 梁の右端の力の境界条件

となることは明らかである。力の境界条件は力学的境界条件とも呼ばれる¹⁸が、式 (4.23) と式 (4.24) を比較すればわかるように、端部の断面が正の面なのか負の面なのかで内力成分の符号が逆になっていることに注意すべきである。

以上 2 種類の境界条件がそれぞれの端部でそれぞれ六つずつあるが、その任意の組み合わせ、あるいはすべてを与えることができるだろうか。その答は否であり、ある種の組み合わせで境界条件を与えない限り解が唯一に定まることは無いし、場合によっては解が存在しないこともある。例えば支承上はたわみを零にする条件だが、同時にその反力（この場合は z 方向外力 S_i ）も与えることができるだろうか。静定構造でない限りこの支点反力を予め与えることはできないから、一般論として両方を同時に与えることができないことは容易に想像できる。このように考えると、正しい組み合わせの境界条件は

以上の 2 種類の境界条件がそれぞれの端部でそれぞれ六つずつあるが、その任意の組み合わせ、あるいはすべてを与えることができるだろうか。その答は否であり、ある種の組み合わせで境界条件を与えない限り解が唯一に定まることは無いし、場合によっては解が存在しないこともある。例えば支承上はたわみを零にする条件だが、同時にその反力（この場合は z 方向外力 S_i ）も与えることができるだろうか。静定構造でない限りこの支点反力を予め与えることはできないから、一般論として両方を同時に与えることができないことは容易に想像できる。このように考えると、正しい組み合わせの境界条件は

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i N = F_i, \tag{4.25a}$$

¹⁷ Dirichlet 条件あるいは第 1 種条件または本質的境界条件とも呼ぶ。

¹⁸ Neumann 条件あるいは第 2 種条件または自然境界条件とも呼ぶ。

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i V = S_i, \quad (4.25b)$$

$$\theta = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M = C_i \quad (4.25c)$$

($i = 1, 2$) であり、それぞれの端部で適切に三つずつ与えられなければならないことが明らかになる。上式では簡単のために

$$n_i \equiv \begin{cases} -1, & \text{左端 } x = 0 \text{ で } (i = 1) \\ +1, & \text{右端 } x = \ell \text{ で } (i = 2) \end{cases} \quad (4.26)$$

という記号を用いた。 n_i は端部断面の外向き単位法線ベクトルと x の正方向の単位ベクトルとの内積の値と考えればいい。境界条件のこの組み合わせがなぜ正しいのかについて疑問を覚えた読者は第4.9節の数学的誘導を参照して欲しいが、この式(4.25)の「あるいは」で挟んだ変位と外力の組については、仕事 (u と F_i , w と S_i , θ と C_i のそれぞれの積がそれぞれの外力がする仕事である) という観点から眺めれば、それほど不思議なものではないことが理解できるかもしれない。これも例えば後述する式(4.111)の外力の仮想仕事をみて欲しい。

以上が基本的な二つの境界条件であるが、例えば浮体に載せられた梁や弾性的な支持条件等の場合には、この幾何学的境界条件と力学的境界条件が分離されず、二つが組み合わせられて与えられることになる。例えば図4.9 (図は右端の場合の例)のように、バネ定数 k の線形バネで支持された場合のせん断力についての境界条件は、この端部の力のつり合いから

$$n_i V + k w = S_i \quad (4.27)$$

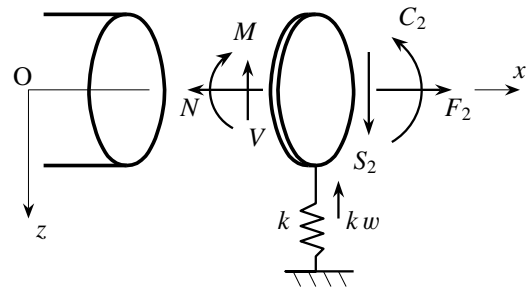


図4.9 変位と力が組み合わされた境界条件

となることがわかる。この境界条件を、基本的な2種類の境界条件が組み合わさった条件であることから、第3種の境界条件と呼ぶ¹⁹ことがある。

(2) 変位で表した境界条件

不静定構造を解くためにはつり合い式と同様、力の境界条件も変位成分 $u(x), w(x)$ で表しておく必要がある。そこで式(4.25)に式(4.9)(4.11)を代入し、式(4.18)のせん断力と曲げモーメントの関係を用い、さらに一様断面で図心を通るように x 軸を選んだ場合には、両端 ($i = 1, 2$) の境界条件式は

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(EA \frac{du}{dx} \right) = F_i, \quad (4.28a)$$

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(-EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right) = S_i, \quad (4.28b)$$

$$-\frac{dw}{dx} = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(-EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = C_i \quad (4.28c)$$

と表現できる。また、式(4.27)のように幾何学的なものと同様の力学的なものが混在する境界条件の場合も同様な演算で変位表示できるが、この例の場合にはせん断力に関する境界条件式が³

$$n_i \left(-EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right) + k w = S_i \quad (4.29)$$

になる。

¹⁹ Robin 条件あるいは第3種条件または混合条件とも呼ぶ。

(3) 解は無い、あるいは唯一ではない?

最後に、式(4.25)では詳しくは説明しなかった境界条件の組み合わせ方についてさらに理解を深めるために、図4.10に示したように、両端に同じ大きさ P の軸方向外力が逆向きに作用している棒を解いてみよう。この場合の境界条件は



図4.10 同じ力で両端を圧縮した棒

$$-EA \frac{du}{dx}(0) = F_1 = P, \quad EA \frac{du}{dx}(l) = F_2 = -P$$

となる。一方、軸方向変位 u で表したつり合い式(4.22a)の分布外力 $p(x)$ は零だから一般解は $u(x) = ax + b$ である。上の境界条件にこれを代入して二つの積分定数 a, b を決めようとしても、最終的には

$$a = -\frac{P}{EA}, \quad b = \text{不定} \quad \rightarrow \quad u(x) = u(0) - \frac{P}{EA}x, \quad u(0) = \text{棒全体の任意の移動量} = \text{不定}$$

となってしまふ。これは解が存在しないのではなく無数に存在する(唯一には存在しない)ことを意味している。つまり、この棒は相対的に縮んでいれば(上式 $u(x)$ の第2項の $\{P/EA\}$ が縮みひずみで、 $\{P/EA\}$ が左端に対する相対的な縮み変位)、水平方向のどの位置に剛体的に移動(上式の $u(0)$ の分)しても、その位置でつり合って静止できることを示しているに過ぎない。また左右の軸力が異なる場合には解が存在しない(外力同士すらつり合っていないのだから当然で、運動してしまう)ことになる。

すなわち、境界条件が式(4.28)のような三つの組み合わせで与えられている必要がある上に、両端で適切な与え方をしないと解が唯一ではなかったり存在しなくなったりすることには十分注意する必要がある。数値計算等で境界条件の与え方を間違えると結果が出ない(計算がエラーで終わる)ことがあるので注意が必要である。一般論として、解が存在するか否か、存在する場合に唯一であるかどうかについては、第5.4.2節でも例示する。

4.1.4 境界値問題の例

(1) 変位で表したつり合い式と境界条件

変形できる細長い棒の支配方程式と境界条件が前節までに求められたが、構造力学の問題はこの支配方程式を境界値問題として表して解くことである。ところで、図心を通るように x 軸を選んだ場合には式(4.22)のように軸の伸び縮みと曲げを分離して表現できることから、前述のように、軸の伸び縮みで主に抵抗する部材を柱、主に曲げとせん断で抵抗する部材を梁と称する。そしてこの文書では文献[172]に倣って、その両方の抵抗を持つ部材を棒と呼ぶ²⁰が、その棒を組み合わせた構造は骨組²¹と呼ばれることも既に述べた。以下では主に梁だけを対象とする。柱(つまりトラス)については[170]に厳密な解説があるので参照して欲しいが、いくつかの解析例を第4.8節に示した。ただし、実際の骨組部材は通常立体的に配置されていることから、ねじりも含む曲げも軸力も連成した構造部材になっていることには留意する必要がある。これについては第7章の立体骨組の節で説明する。

一様断面で x 軸が図心を通る梁に限定してつり合い式と境界条件を再度列挙しておく、まずつり合い式は

$$-EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + q(x) = 0 \quad (4.22b) \text{ 再掲}$$

であった。また基本的な境界条件式は

$$w = \text{与える} \text{ あるいは } n_i \left(-EI \frac{d^3 w}{dx^3} \right) = S_i, \quad (4.28b) \text{ 再掲}$$

²⁰ 「柱」と「梁」を合体させた「梁-柱」という呼び名が別の特殊な部材に使われるからだ。第6.4節を参照のこと。

²¹ あるいはラーメン(もちろんドイツ語である)と呼ぶが、一般に試験等に出てくる骨組(呵呵)では柱としての抵抗が無視されることが多い。第4.8節を参照のこと。

$$-\frac{dw}{dx} = \text{与える あるいは } n_i \left(-EI \frac{d^2w}{dx^2} \right) = C_i \quad (4.28c) \text{ 再掲}$$

であった。さらに、式(4.27)のように幾何学的なもの力学的なものが混在する例の場合には、せん断力に関する境界条件式は

$$n_i \left(-EI \frac{d^3w}{dx^3} \right) + k w = S_i \quad (4.29) \text{ 再掲}$$

であった。この節では以下、基本的な境界値問題の例を対象にして、この微分方程式を解くことによってたわみや曲げモーメント等を求める標準的手法をまずは説明しておこう。

(2) 標準的な境界値問題の解法

最初の例では、微分方程式と境界条件で設定された問題の標準的な解法を説明するために、図4.11に示した等分布外力を受ける左端固定右端単純支持の不静定梁を解いておく。支点反力が左で二つ右で一つ計3個なので、力のつり合いだけでは解けない不静定構造であることはわかると思う。境界条件は

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\ell) = 0, \quad -EIw''(\ell) = 0$$

と与えられる。なお(′)は x に関する微係数を表しており、以下頻繁に用いる。

最後の境界条件は、右端は回転自由で、その代わり集中モーメントが作用していないというものである。式(4.22b)の $q(x)$ が定数 q_0 であるから特解は $\left(\frac{q_0 x^4}{24EI}\right)$ となる。 $q(x)$ が無い場合の(斉次あるいは同次)式(4.22b)に $w \sim \exp(\xi x)$ を代入して得ることができる特性方程式の根は $\xi = 0$ の4重根になるので、その斉次解は x の3次多項式である。したがって一般解を

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} (x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d) \quad (4.30)$$

と表すことができる。微係数を算定しておく

$$w'(x) = \frac{q_0}{24EI} (4x^3 + 3ax^2 + 2bx + c), \quad w''(x) = \frac{q_0}{24EI} (12x^2 + 6ax + 2b)$$

となる。これを上の境界条件に代入すると

$$d = 0, \quad c = 0, \quad \ell^4 + a\ell^3 + b\ell^2 + c\ell + d = 0, \quad 12\ell^2 + 6a\ell + 2b = 0$$

を得る。これから a と b を未知数とする条件式が

$$\begin{pmatrix} \ell & 1 \\ 3\ell & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \ell^2 \\ 6\ell^2 \end{pmatrix}$$

となるので、これを解けば a, b が

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \frac{1}{2\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3\ell & \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell^2 \\ 6\ell^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5\ell/2 \\ 3\ell^2/2 \end{pmatrix}$$

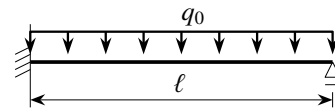


図4.11 等分布外力を受ける片端固定・片端単純支持梁

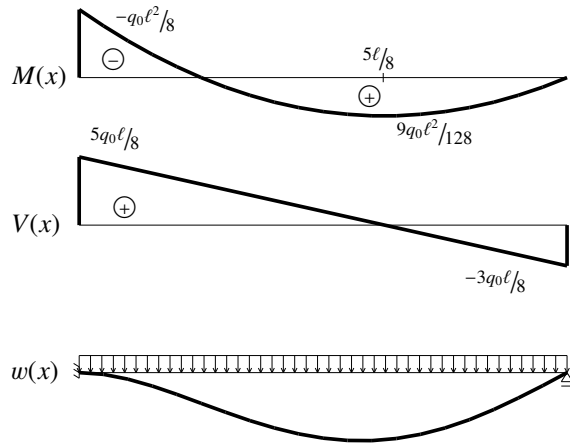


図4.12 等分布外力が作用した不静定梁の例

と求められる。この結果を式 (4.30) に代入し直せば、任意点の変位が

$$w(x) = \frac{q_0 x^2}{48EI} (3\ell - 2x)(\ell - x) \tag{4.31}$$

となる。上式を 2 回微分すれば曲げモーメント分布が

$$M = -EIw''(x) = \frac{q_0}{8} (\ell - x)(4x - \ell) = -\frac{q_0}{2} \left\{ \left(x - \frac{5\ell}{8} \right)^2 - \frac{9\ell^2}{64} \right\} \tag{4.32}$$

となり、さらにもう 1 回微分すれば、せん断力分布が $V = -EIw'''(x) = q_0 \left(\frac{5\ell}{8} - x \right)$ となる。これをたわみ形状と共に示したのが図 4.12 である。これより、左端の支点反作用モーメントは式 (4.32) に $x = 0$ を代入して、境界条件式 (4.28c) の符号に気を付ければ

$$C_1 = \frac{q_0 \ell^2}{8} \tag{4.33}$$

となる。また上のせん断力に $x = 0, \ell$ を代入して、これも境界条件式 (4.28b) の符号に気を付ければ

$$S_1 = -\frac{5q_0 \ell}{8}, \quad S_2 = -\frac{3q_0 \ell}{8}$$

と支点反力が求められる。このように不静定梁の場合は、構造全体の変形が求められたあとにしか支点反力も求められない。曲げモーメント図とせん断力図の左右端の値と反力の値の符号の違いには十分注意すること。

(3) 両端固定梁

次の例は図 4.13 の両端固定の梁である。境界条件は両端で

$$w = 0, \quad -w' = 0$$

となる。分布外力条件は前の例と同じなので、一般解は式 (4.30) と同じである。また左端の境界条件も前の例と同じなので、中間的な解の表現として

$$w(x) = \frac{q_0}{24EI} (x^4 + ax^3 + bx^2)$$

と置いていい。これとこの 1 階の微係数を右端の境界条件に代入すると

$$\begin{pmatrix} \ell & 1 \\ 3\ell & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \ell^2 \\ 4\ell^2 \end{pmatrix}$$

を得る。これを解けば結局 $a = -2\ell, b = \ell^2$ となり、たわみが

$$w(x) = \frac{q_0 x^2}{24EI} (\ell - x)^2$$

と求められる。この 2 階の微係数から曲げモーメント分布を得ることができるが、特に端部の不静定モーメントは

$$C_1 = -C_2 = \frac{q_0 \ell^2}{12} \tag{4.34}$$

となる。また支点反力も

$$S_1 = S_2 = -\frac{q_0 \ell}{2}$$

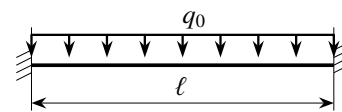


図 4.13 等分布外力を受ける両端固定梁

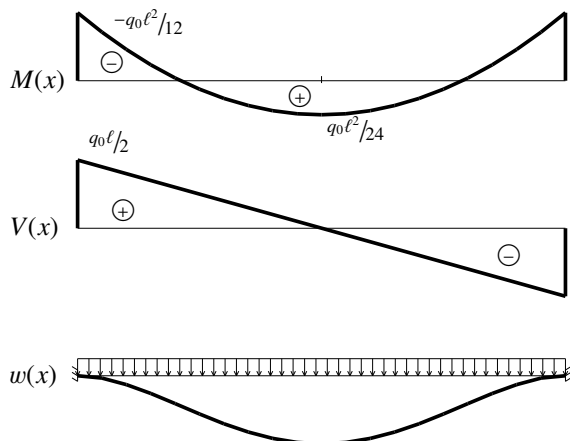


図 4.14 等分布外力が作用した両端固定梁の各量

となる。これは実は、構造が左右対称なので静定系と同じように力のつり合いでも求められる。図 4.14 に各図を示しておいた。

以上の二つの結果の図 4.12, 4.14 から明らかなように、1 スパンの不静定梁の場合には、両端の不静定モーメントを求めさえすれば、それに静定梁の曲げモーメント分布を重ね合わせることによって答を得ることができている。その重ね合わせによる解法は後述するが、不静定モーメントを求めるだけなら第 5 章で解説する方法が便利であり、現在では実用的にも広く用いられている。歴史的には他にも数多くの手法が考案されてきたが、この文書ではそういった古典的な方法については適切に取捨選択した。以上のように、不静定構造の場合には変位を未知数とした境界値問題を解くことによって、その支点反力や不静定モーメントおよび曲げモーメント分布等を求めることができることは理解してもらえたと思う。

(4) 単純梁のたわみ

静定梁を扱った第 2 章では求めることができなかったたわみを求めておこう。というのも、後述の重ね合わせ手法を用いて不静定梁を解くときにその情報が利用できるからだ。さて、単純梁のような静定構造の場合は曲げモーメント分布が簡単に算定できるので、たわみを未知数とする 4 階の微分方程式から解き始める必要は無い。図 4.15 は最も基本的な静定梁である。この場合は第 2.3.5 (2) 節で曲げモーメント分布が求められており

$$M(x) = \frac{q_0}{2} (\ell x - x^2)$$

となっていた。したがって式 (4.22b) のつり合い式まで遡らずとも、式 (4.13b) の曲げモーメントと曲率の関係に上のモーメント分布を代入すればいい。つまり

$$-EIw'' = \frac{q_0}{2} (\ell x - x^2)$$

を解けばいい。

両端の幾何学的境界条件は共に $w = 0$ であるから、上式を 2 回積分した一般解

$$w(x) = \frac{q_0}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{\ell x^3}{6} + ax + b \right)$$

を境界条件に代入すれば $a = \ell^3/12$, $b = 0$ となり、たわみが

$$w(x) = \frac{q_0 x}{24EI} (\ell - x) (\ell^2 + \ell x - x^2) \quad (4.35)$$

と求められる。1 回微分すると、特に両端のたわみ角は

$$-w'(0) = -\{-w'(\ell)\} = -\frac{q_0 \ell^3}{24EI} \quad (4.36)$$

となる。図 4.16 にたわみ形状を示した。

(5) 端部集中モーメントの作用

次の例は図 4.17 にあるように、単純梁の左端に集中モーメントを加えたものである。これも静定構造であり、曲げモーメント分布が $\{C_0(x/\ell - 1)\}$ と求められる。これを曲げモーメントとたわみの関係に代入して微分

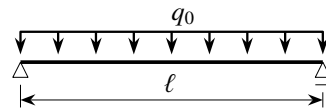


図 4.15 等分布外力が作用した単純梁

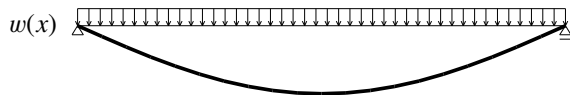


図 4.16 等分布外力が作用した単純梁のたわみ

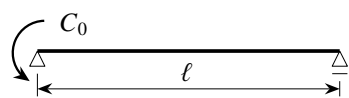


図 4.17 片端に集中モーメントが作用した単純梁

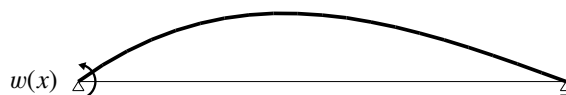


図 4.18 そのたわみ形状

方程式を解き、両端でたわみが零になる条件で積分定数を決めれば、最終的にたわみの解が

$$w(x) = \frac{C_0 x}{6EI} (x - 2\ell)(\ell - x)$$

となる。1 回微分すると、両端のたわみ角が

$$-w'(0) = \frac{C_0 \ell}{3EI}, \quad -w'(\ell) = -\frac{C_0 \ell}{6EI} \tag{4.37a, b}$$

と算定される。図 4.18 にたわみ形状を示しておいた。静定系なので支点反力はつり合い式で求められる。

(6) 片持ち梁のたわみ

次の例も代表的な静定構造で、先端にせん断外力が作用した図 4.19 の片持ち梁である。曲げモーメント分布は $\{Q(x-\ell)\}$ だから、これを 2 回積分して積分定数を左端の幾何学的境界条件から決定すると、たわみは最終的に

$$w(x) = \frac{Qx^2}{6EI} (3\ell - x) \tag{4.38}$$

となる。先端のたわみとたわみ角は

$$w(\ell) = \frac{Q\ell^3}{3EI}, \quad w'(\ell) = \frac{Q\ell^2}{2EI} \tag{4.39a, b}$$

となる。図 4.20 にはたわみ形状を示した。

あるいは、先端に集中モーメントだけが作用した場合には、モーメント分布は $M(x) = C_0$ と一定になるのでこれも簡単に微分方程式が解け、固定端の幾何学的境界条件に代入することによってたわみが、そしてその微係数から先端のたわみ角が

$$w(x) = -\frac{C_0}{2EI} x^2, \quad -w'(\ell) = \frac{C_0 \ell}{EI} \tag{4.40a, b}$$

と求め²²られる。たわみ形状を図 4.21 に示した。

(7) 弾性支持された片持ち梁

最後に、弾性支持された図 4.22 の不静定梁を解いておこう。一般解は式 (4.30) と同じになり、右端の力学的境界条件が式 (4.29) で表現されることだけに注意すれば、境界条件は

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad -EIw''(\ell) = 0, \quad -EIw'''(\ell) + kw(\ell) = 0$$

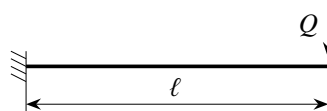


図 4.19 先端にせん断外力が作用した片持ち梁



図 4.20 せん断を受ける片持ち梁のたわみ

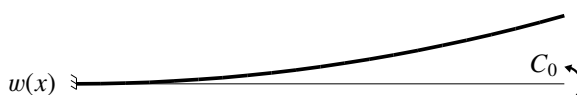


図 4.21 先端に集中モーメントが作用した片持ち梁

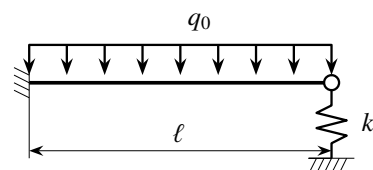


図 4.22 弾性支持された片持ち梁

²² 式 (4.39) (4.40b) 等は、分母の数字と分子のべき乗が一致していて覚え易い。公務員試験（著者は受けたことがないが）等への対策のためにこれは記憶しておいた方がいい。

である。以上の四つの条件に一般解を代入すると $c = d = 0$ と

$$6\ell^2 + 3a\ell + b = 0, \quad \frac{k\ell^2}{EI} (\ell^2 + a\ell + b) - (24\ell + 6a) = 0$$

という関係を得、これを解くと

$$a = -\frac{\ell}{2\left(3 + \frac{k\ell^3}{EI}\right)} \left\{24 + \frac{5k\ell^3}{EI}\right\}, \quad b = \frac{3\ell^2}{2\left(3 + \frac{k\ell^3}{EI}\right)} \left\{12 + \frac{k\ell^3}{EI}\right\}$$

を得る。これよりバネ支持された点のたわみを求めると

$$w(\ell) = \frac{3q_0\ell^4}{8EI(3 + \alpha_s)} \quad (4.41)$$

となる。ここに

$$\alpha_s \equiv \frac{k\ell^3}{EI} \quad (4.42)$$

は弾性支持バネの影響を代表する無次元パラメータである。支点反力は得られたたわみ $w(x)$ の微係数を求めれば計算することができるが、ここでは省略する。弾性支持という状況は最初はあまり理解できないかもしれないが、実際の支持条件を観察した場合に、よほど強固な岩盤に直接設置された支持でない限り、荷重によっては一時的に沈下する支持条件も存在する。それよりも、強固な地盤・岩盤で支持されていない部分を近似的にモデル化するような場合等にも、この弾性支持という条件は用いられることがあることは覚えておいて欲しい。身近な例は写真 1.4 の電気機関車を載せたレール（梁）の枕木がバラストで支持されている状況である。

(8) 連続梁

不静定構造の代表例として連続梁を挙げていたので、順序としてはここでその例を解くべきであろうが、特に理由も無いままその例は第 4.2.2 (4) 節で示すことにしたい。

演習問題 4-2

- 図 4.19 の片持ち梁のたわみを求め、式 (4.39) を確認せよ。
- 図 4.23 に示した等分布外力が作用した片持ち梁のたわみと支点反力を求めよ。静定構造ではあるが、両端の四つの境界条件を用い 4 階の微分方程式を解くことによって求めよ。それで求められるモーメント分布が、力のつり合いから求めたものと一致することを確認せよ。また先端のたわみは

$$w(\ell) = \frac{q_0\ell^4}{8EI} \quad (4.43)$$

になるが、これは式 (4.41) において支持バネ定数を零つまり $k = 0$ あるいは $\alpha_s = 0$ とした解でもある。

- 図 4.17 の例を参考にして図 4.24 の問題を解き、両端のたわみ角が図 4.17 の例の逆で

$$-w'(0) = -\frac{C_0\ell}{6EI}, \quad -w'(\ell) = \frac{C_0\ell}{3EI} \quad (4.44a, b)$$

となっていることを示せ。

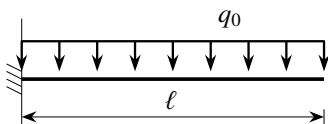


図 4.23 等分布外力が作用した片持ち梁

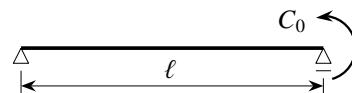


図 4.24 右端に集中モーメントが作用した単純梁

4.2 梁中間の集中せん断力や集中モーメントの作用

4.2.1 梁中間の集中外力の作用と連続条件

ここまでは1径間の梁に分布外力や端外力が与えられた系を対象として、一般的な梁の境界値問題の解法の基礎と特徴を説明してきた。第2章の静定梁ではつり合いから曲げモーメント分布が容易に求められるので、部材の中間に集中外力が載っている例も簡単に解くことができた。しかし同じ第2章でも、中間に集中外力が作用している梁を微分方程式を用いて解く場合には、その中間位置における連続条件を考慮する等、少し面倒な作業になった。その面倒な作業は一般的な不静定梁の場合には避けられなくなる。ただここでは、微分方程式で梁を解くことをまずは学んで欲しいので、その正攻法を説明しておきたい。ところで集中モーメント²³というのはわかり難いかもしれない。例えばいかだのように井桁に組んだ梁（立体骨組）に任意のせん断外力を載せると、直角に交わっている梁同士は、作用反作用で互いにねじりモーメントも伝達することになる。このとき、片方の梁にとってのねじりモーメントは、もう一方の梁にとっては見かけ上の集中モーメントになる。つまり、片方の梁の曲げモーメントが接合点ではもう一方の梁のねじりモーメントに伝達されている。このような作用をモデル化したのが集中モーメントである。あー、これでもわかり難いか。

さてここでは、その中間位置を端部境界と同じように、図 4.25 のような厚さ零の部分²⁴が支持されるか、あるいはそこに集中的に外力が作用しているものと捉えて、連続条件を求める。この厚さ零の部分の両面はそれぞれ棒の断面であり、そこには断面力が図示した方向を正にして発生している。棒はここで離れたり重なったり、あるいは折れ曲がったりはしないであろうから、最低限変位成分は連続している必要がある。境界条件の幾何学的境界条件の成分と対応させて考えると、その連続条件は

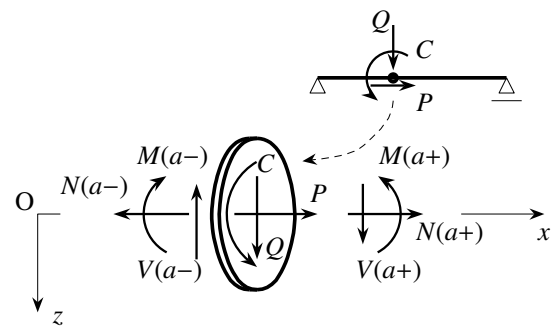


図 4.25 集中外力が作用する点の（不）連続条件

$$u(a-) = u(a+), \quad w(a-) = w(a+), \quad -w'(a-) = -w'(a+) \quad (4.45a, b, c)$$

となることは容易に理解できるだろう。ここに $a-, a+$ というのは点 $x = a$ の直前直後の座標値²⁴を意味している。一方力の不連続条件については、図の厚さ零の部分の内力と外力のつり合いを考えれば

$$N(a-) - N(a+) = P, \quad V(a-) - V(a+) = Q, \quad M(a-) - M(a+) = C \quad (4.46a, b, c)$$

となることも容易に理解できるだろう。あるいは、載荷点前後で図心が共通していてそこを x 軸が通り、両側共に一様な棒である場合には、式 (4.13) (4.18) を用いて上式は

$$(EA u')|_{a-} - (EA u')|_{a+} = P, \quad -(EI w''')|_{a-} + (EI w''')|_{a+} = Q, \quad -(EI w'')|_{a-} + (EI w'')|_{a+} = C \quad (4.47a, b, c)$$

と変位成分で表すことができる。

もしこの中間点がさらに連続した棒の中間支点上である場合には、もちろんその支点反力²⁴に相当する Q は未知になるから、上の式 (4.47b) を条件として用いることはできない。逆にこの式はその中間支点における支点反力を求めるための式になる。これでは条件が足りなくなるので式 (4.47b) に代わる条件が必要になるが、それは

²³ 第 A.6 節参照。

²⁴ 元々は $\{a \pm \epsilon; 0 < \epsilon \rightarrow 0\}$ という意味で $a \pm 0$ と書くが、煩雑なので零を省略している。

表 4.1 代表的な境界条件 (Δ_x は支点の強制水平変位, Δ_z は支点沈下変位, β は支点の強制回転角. P, Q, C は集中外力。)

	<p>ヒンジ</p> $u = \Delta_x,$ $w = \Delta_z,$ $-(-EIw'') = C$		<p>ヒンジ</p> $u = \Delta_x,$ $w = \Delta_z,$ $(-EIw'') = C$
	<p>ヒンジ & ローラー</p> $-(EAu') = P,$ $w = \Delta_z,$ $-(-EIw'') = C$		<p>ヒンジ & ローラー</p> $(EAu') = P,$ $w = \Delta_z,$ $(-EIw'') = C$
	<p>固定</p> $u = \Delta_x,$ $w = \Delta_z,$ $-w' = \beta$		<p>固定</p> $u = \Delta_x,$ $w = \Delta_z,$ $-w' = \beta$
	<p>スライダ</p> $u = \Delta_x,$ $-(-EIw''') = Q,$ $-w' = \beta$		<p>スライダ</p> $u = \Delta_x,$ $(-EIw''') = Q,$ $-w' = \beta$
	<p>自由</p> $-(EAu') = P,$ $-(-EIw''') = Q,$ $-(-EIw'') = C$		<p>自由</p> $(EAu') = P,$ $(-EIw''') = Q,$ $(-EIw'') = C$
	$u(a-) = u(a+), \quad \{EAu'(a-)\} - \{EAu'(a+)\} = P,$ $w(a-) = \Delta_z, \quad w(a+) = \Delta_z, \quad \text{中間支点}$ $-w'(a-) = -w'(a+),$ $\{-EIw''(a-)\} - \{-EIw''(a+)\} = C$		
	$u(a-) = u(a+), \quad \{EAu'(a-)\} - \{EAu'(a+)\} = P,$ $w(a-) = w(a+),$ $\{-EIw'''(a-)\} - \{-EIw'''(a+)\} = Q,$ $-w'(a-) = -w'(a+), \quad \text{中間点集中載荷}$ $\{-EIw''(a-)\} - \{-EIw''(a+)\} = C$		
	$u(a-) = u(a+), \quad \{EAu'(a-)\} - \{EAu'(a+)\} = P,$ $w(a-) = w(a+), \quad \text{中間ヒンジ}$ $\{-EIw'''(a-)\} - \{-EIw'''(a+)\} = Q,$ $\{-EIw''(a-)\} = 0, \quad \{-EIw''(a+)\} = 0$		
	$u(a-) = u(a+), \quad \{EAu'(a-)\} - \{EAu'(a+)\} = P,$ $-EIw'''(a-) = 0, \quad -EIw'''(a+) = 0,$ $-w'(a-) = -w'(a+), \quad \text{中間スライダ}$ $\{-EIw''(a-)\} - \{-EIw''(a+)\} = C$		

その支点が沈下しないという条件である。式 (4.45b) はたわみが連続であればいいだけの条件であるから、これにさらにその支点が沈下しない条件を加える必要がある。つまり、その支点が沈下しない条件は

$$w(a-) = 0, \quad w(a+) = 0 \tag{4.48a, b}$$

という二つの条件として認識されなければならない。これで数の上でも必要な連続条件がすべて揃ったことになる。このような連続条件をも含めて、代表的な境界条件を表 4.1 に示した。表では、中間点で支点沈下等が存在する場合に一般化してまとめている。以下、第 4.6 節まではたわみ $w(x)$ だけを未知関数とするいわゆる梁

を対象とする。

4.2.2 集中せん断力の作用

(1) 標準的な解法

最初に、図 4.26 にある不静定梁の中央に集中せん断力が作用した場合を考える。境界条件は

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\ell) = 0, \quad w''(\ell) = 0$$

である。載荷点を除いた部分には分布外力が存在していないから $0 < x < \ell/2, \ell/2 < x < \ell$ のそれぞれの部分のたわみの一般解は

$$w(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad 0 < x < \ell/2, \quad w(x) = \bar{a}x^3 + \bar{b}x^2 + \bar{c}x + \bar{d}, \quad \ell/2 < x < \ell \quad (4.49a, b)$$

と表すことができる。これを上の境界条件に代入すると

$$c = 0, \quad d = 0, \quad \bar{b} = -3\bar{a}\ell, \quad \bar{d} = 2\bar{a}\ell^3 - \bar{c}\ell$$

となり、中間的な結果として（この段階で未知数を減らした方が便利なので）

$$w(x) = ax^3 + bx^2, \quad 0 < x < \ell/2, \quad w(x) = \bar{a}(x^3 - 3\ell x^2 + 2\ell^3) + \bar{c}(x - \ell), \quad \ell/2 < x < \ell \quad (4.50a, b)$$

を得る。未定の a, b, \bar{a}, \bar{c} を $x = \ell/2$ における連続条件式 (4.45) (4.47) で決定しよう。まず、たわみとたわみ角は連続しなければならないから、それぞれ式 (4.45b) (4.45c) は

$$\ell^3 a + 2\ell^2 b = 11\ell^3 \bar{a} - 4\ell \bar{c}, \quad 3\ell^2 a + 4\ell b = -9\ell^2 \bar{a} + 4\bar{c}$$

となる。また、 $x = \ell/2$ におけるせん断力と曲げモーメントの不連続条件式 (4.47b) (4.47c) は

$$-6EIa - (-6EI\bar{a}) = Q \rightarrow \bar{a} - a = Q/(6EI), \quad -EI(3\ell a + 2b) - [-EI(-3\ell\bar{a})] = 0 \rightarrow 3\ell a + 2b = -3\ell\bar{a}$$

と書くことができる。以上から四つの未定の積分定数に対する四つの（不）連続条件が

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -11\ell^3 & \ell^3 & 2\ell^2 & 4\ell \\ 9\ell^2 & 3\ell^2 & 4\ell & -4 \\ 3\ell & 3\ell & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} \\ a \\ b \\ \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q/(6EI) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と表現できるので、この係数行列の逆行列で必要な 1 列目だけを計算すると

$$\begin{pmatrix} \bar{a} \\ a \\ b \\ \bar{c} \end{pmatrix} = -\frac{1}{128\ell^3} \begin{pmatrix} -40\ell^3 & - & - & - \\ 88\ell^3 & - & - & - \\ -72\ell^4 & - & - & - \\ -96\ell^5 & - & - & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q/(6EI) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{Q}{EI} \begin{pmatrix} -5/96 \\ 11/96 \\ -3\ell/32 \\ -\ell^2/8 \end{pmatrix}$$

と積分定数を決めることができる。

したがって $0 < x < \ell/2$ のたわみは

$$w(x) = \frac{Qx^2}{96EI} (9\ell - 11x)$$

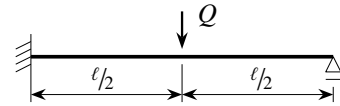


図 4.26 集中せん断力が中央に作用した不静定梁

であり, $l/2 < x < l$ のたわみは

$$w(x) = \frac{5Q}{96EI}(x-l)\{(x-l)^2 - 3l^2\} + \frac{Ql^2}{8EI}(x-l)$$

となる。もし左端からの x 座標に対する右端からの独立変数を新たに

$$\xi \equiv l - x \tag{4.51}$$

で定義すると, $l/2 < x < l$ のたわみは

$$w(\xi) = \frac{Q\xi}{96EI}(3l^2 - 5\xi^2), \quad 0 < \xi < \frac{l}{2}$$

とも表現できる。それぞれの微係数を計算すれば曲げモーメントとせん断力の分布も求めることができる。分布外力が無いから曲げモーメント図は連続した折れ線になり, せん断力図は不連続な定数分布を示すはずである。たわみを含めた結果を図 4.27 に示した。

せん断力図と曲げモーメント図の眺め方: ところで, 断面力図を直感的に描くときの助けになるように, この図 4.27 を使って, 断面力図の見方を書いておこう。まずせん断力図を見ると, スパン中央で上から下方向に Q だけの不連続がある。ここはちょうど Q のせん断力が下向きに作用しているからこうなっているのである。図の向きと力の向きがよく合っている。それを踏まえれば, 左端では上向きに $11Q/16$ の不連続が, 右端でも上向きに $5Q/16$ の不連続があることから, 支点反力が上向きの力として発生したことがわかる。ただしこの文書では, 境界条件式 (4.28b) のせん断反力は下向きを正として定義されていたことから

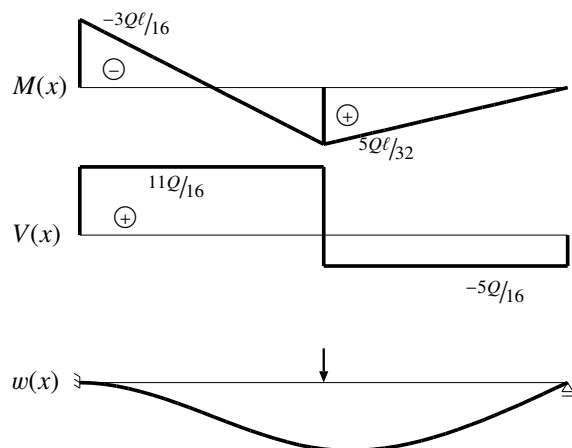


図 4.27 集中せん断力が作用した左端固定右端単純支持の梁

この文書では, 境界条件式 (4.28b) のせん断反力は下向きを正として定義されていたことから

$$S_1 = -\frac{11Q}{16}, \quad S_2 = -\frac{5Q}{16}$$

となる。

一方, 曲げモーメント図は負を上向きに描いていたが, それは引張側を実際の梁の特徴と対応させるためなのである。例えば鉄筋コンクリート (引張に弱いコンクリートを鉄筋で補強する) でこの図の梁を作ろうとすると, 中央では曲げモーメントが下側に分布していることから, 鉄筋を梁の下方に配置すればいいことがわかる。これに対し, 左端付近では負の曲げモーメントが生じ, 図では上側に分布していることから, 鉄筋は上方に配置することになる。曲げモーメント図の軸の向きの設定の一つの理由がこの例からわかる。ちょっとだけ面白くありませんか。さて境界条件式 (4.28c) の集中モーメントの正の向きに注意すると, 左端の反作用モーメントは

$$C_1 = \frac{3Ql}{16}$$

となる。

(2) 静定梁の場合

次の例は図 4.28 に示した基本的な単純梁である。境界条件は両端共に

$$w = 0, \quad w'' = 0 \quad (*)$$

と与えられる。この系は静定構造なのでつり合いから曲げモーメント分布を容易に求めることができるので、4階の微分方程式から解き始める必要は無い。力のつり合いから曲げモーメント分布は

$$M(x) = \begin{cases} Qx/2, & 0 < x < \ell/2 \\ Q(\ell-x)/2, & \ell/2 < x < \ell \end{cases}$$

と求められているから、これを式 (4.13b) に代入して積分すればいい。つまり

$$w(x) = -Q/EI \left(x^3/12 + ax + b \right) \quad (0 < x < \ell/2), \quad w(x) = -Q/EI \left(-x^3/12 + \ell x^2/4 + \bar{a}x + \bar{b} \right) \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

がその一般解となる。

力のつり合いから曲げモーメント分布を求めたときに既に両端の力学的境界条件を満足しているため、上の境界条件式 (*) のうちの曲げモーメントが零になる条件 $w'' = 0$ は自動的に満足している。したがって、式 (*) の残る幾何学的境界条件 $w = 0$ に上の一般解を代入すると

$$b = 0, \quad \bar{b} = -\ell\bar{a} - \ell^3/6$$

を得る。あとは a と \bar{a} について、載荷点 $x = \ell/2$ におけるたわみとたわみ角の連続条件 (4.45b) (4.45c) から求めればよく、それぞれ

$$a + \bar{a} = -\ell^2/4, \quad a - \bar{a} = \ell^2/8 \quad \rightarrow \quad a = -\ell^2/16, \quad \bar{a} = -3\ell^2/16$$

となる。よって $0 < x < \ell/2$ のたわみは

$$w(x) = \frac{Qx}{48EI} (3\ell^2 - 4x^2) \quad (4.52)$$

であり、 $\ell/2 < x < \ell$ のたわみは式 (4.51) の ξ を用いると

$$w(\xi) = \frac{Q\xi}{48EI} (3\ell^2 - 4\xi^2)$$

と表現できる。左右対称の系なので、解も左右対称になっているのは当然である。

(3) 左右対称な系

もう一つの例は、図 4.29 のような両端固定梁の場合である。この場合も左右対称の系であることから解析するのも左半分だけでよく、その場合の境界条件が

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w'(\ell/2) = 0, \quad -EIw'''(\ell/2) = Q/2$$

となることも容易に推測できる²⁵だろう。一般解は3次の多項式 (4.49a) と同じ表現になる。これを上の境界条件に代入すると

$$c = 0, \quad d = 0, \quad a = -Q/(12EI), \quad b = Q\ell/(16EI)$$

を得る。

²⁵ 本当に自信を持って推測できますか? なぜ $w'(\ell/2) = 0$ でいいのでしょうか? 大丈夫ですか?

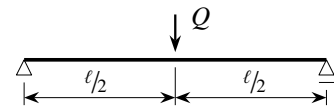


図 4.28 中央に集中せん断力の作用した単純梁

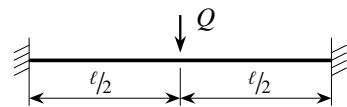


図 4.29 集中せん断力が中央に作用した両端固定梁

したがって左半分の領域のたわみは

$$w(x) = \frac{Qx^2}{48EI} (3\ell - 4x)$$

となり、曲げモーメントを求めると

$$M(x) = -EIw''(x) = \frac{Q}{8} (4x - \ell)$$

と線形な分布を示す。モーメント図のみを図 4.30 に示した。これより両端の反作用モーメントは

$$C_1 = \frac{Q\ell}{8}, \quad C_2 = -\frac{Q\ell}{8}$$

となる。

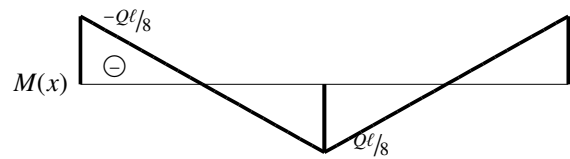


図 4.30 中央に集中せん断力を受ける両端固定梁の曲げモーメント分布

(4) 連続梁

いよいよ最後に、図 4.31 の 2 径間連続梁を対象にしてみよう。この場合の $x = 0, x = 2\ell$ の境界条件は共に

$$w = 0, \quad w'' = 0$$

でいい。そして中央の連続支承部における連続条件が

$$w(\ell-) = 0, \quad w(\ell+) = 0, \quad w'(\ell-) = w'(\ell+), \quad w''(\ell-) = w''(\ell+)$$

であり、 $x = 3\ell/4$ 点の連続条件は（引数の ' $3\ell/4 \pm$ ' を単に ' \pm ' と略し）

$$w(-) = w(+), \quad w'(-) = w'(+), \quad w''(-) = w''(+), \quad -EIw'''(-) + EIw'''(+)= Q$$

でなければならないから合計 12 個の条件が存在する。境界条件および連続条件が与えられる点で区分けされた三つのそれぞれの区間の一般解は、まず $0 < x < \ell$ では等分布外力があることから

$$w(x) = a_1x^3 + b_1x^2 + c_1x + d_1 + q_0x^4/(24EI)$$

となり、右スパンの中央を境にした左右半分ずつの領域では

$$w(x) = a_2x^3 + b_2x^2 + c_2x + d_2 \quad (\ell < x < 3\ell/2), \quad w(x) = a_3x^3 + b_3x^2 + c_3x + d_3 \quad (3\ell/2 < x < 2\ell)$$

と表される。以上の 12 個の未定積分定数を上に示した 12 個の条件式から求めれば、すべての領域の変位を決定できる。その 2 階の微係数から曲げモーメント分布も求めることができる。しかし 12 元連立方程式を解くというのはとても現実的な解法とは思えないが、力任せに解こうと思えば解ける正攻法である。せっかく目標にしていた連続梁を対象にしたが面倒なので、後述する別手法による結果を図 4.44 に示した。

実は、連続梁の解法については第 4.3 節で用いる重ね合わせの原理を利用した方が簡単であるし、力学的な抵抗の仕方や境界条件の理解の勉強にはなる。ただし、前述の断面力図の眺め方が理解できているかどうか、この連続梁の例に対して計算せずにせん断力図と曲げモーメント図を描き、図 4.44 と比べておいて欲しい。そして時間があれば、一度でいいから 12 元連立方程式を自分で解いて、この正攻法がいかに手間がかかるか、そしてどこにも力学的センスが要らないことについても実感しておいて欲しい。そうすれば、後述の重ね合わせの原理や有限要素法による近似解法等の利用のありがたみをさらに感じるができると思う。また重ね合わせの原理の利用では、変形できる物体の抵抗の様子を力学的に洞察する力も必要になるので、この正攻法よりは頭の訓練にはなる。余談ではあるが、大学院入試の構造力学の問題では、こんな微分方程式を用いて解く手法に適した問題は出されないと考えた方がいいのではないだろうか。というのも、その試験は力学的センスを確かめるために実施しているのだから。閑話休題。

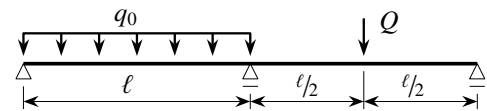


図 4.31 連続梁の例

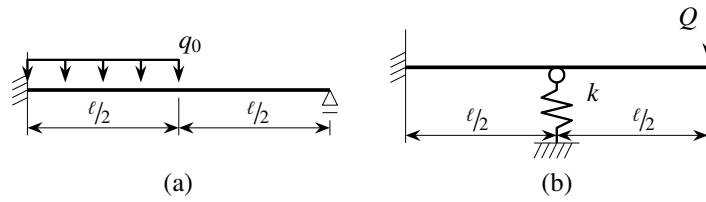


図 4.32 中間連続条件の演習問題

演習問題 4-3

8. 図 4.32 の (a) に示した不静定梁は左半分のみ等に等分布外力が作用している。中央点の連続条件を式 (4.45) (4.47) から誘導し、それを用いてたわみや曲げモーメントを求めよ。
9. 図 4.32 の (b) の片持ち梁は中央点がバネ定数 k の線形バネで支持されている。中央点の連続条件を求め、たわみや曲げモーメントを求めよ。

4.2.3 集中モーメントの作用

(1) 左右対称な系

図 4.33 の両端固定梁の中央に集中モーメントが作用した場合を対象とする。境界条件は両端で

$$w = 0, \quad w' = 0$$

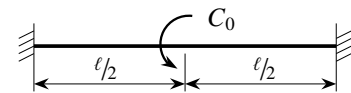


図 4.33 中央に集中モーメントが作用した両端固定梁

である。載荷点を境とする左右の領域で同じく 3 次の多項式で一般解が表されるが、左の領域の場合には、左端の境界条件を代入した式 (4.50a) がその一般解になる。また構造形態が左右対称である（外力条件は対称ではない）ことから、式 (4.51) で定義した右端からの独立変数を用いると、右半分の一般解も同じ表現になる。したがって、変位の一般解は

$$w(x) = ax^3 + bx^2 \quad (0 < x < l/2), \quad w(\xi) = \bar{a}\xi^3 + \bar{b}\xi^2 \quad (l/2 < x < l)$$

となる。

ここで

$$(\cdot)' = -\frac{d}{d\xi}, \quad (\cdot)'' = \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad (\cdot)''' = -\frac{d^3}{d\xi^3}$$

であることに注意して載荷点の連続条件を書き表すと、たわみとたわみ角の連続性から

$$l^3 a + 2l^2 b = l^3 \bar{a} + 2l^2 \bar{b}, \quad 3l^2 a + 4lb = -3l^2 \bar{a} - 4l\bar{b}$$

という条件を得る。曲げモーメントの不連続とせん断力の連続条件は

$$\begin{aligned} -EI(3la + 2b) - \{-EI(3l\bar{a} + 2\bar{b})\} &= C_0, \\ -EI(6a) - \{-EI(-6\bar{a})\} &= 0 \end{aligned}$$

と表される。この 4 式から未定積分定数が

$$a = -\bar{a} = -2C_0/(8lEI), \quad b = -\bar{b} = C_0/(8EI)$$

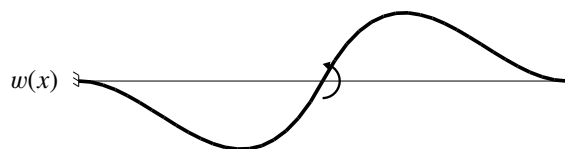
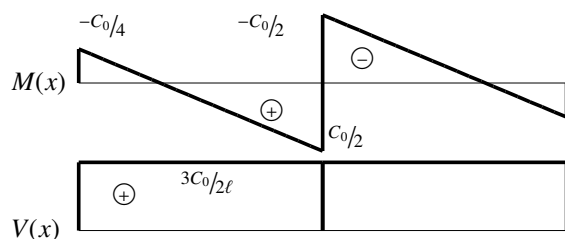


図 4.34 集中モーメントが作用した両端固定梁

と求められる。したがって、たわみが

$$w(x) = \frac{C_0}{8EI\ell} (-2x^3 + \ell x^2) \quad (0 < x < \ell/2), \quad w(\xi) = -\frac{C_0}{8EI\ell} (-2\xi^3 + \ell\xi^2) \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と反対称形になる。これを微分すれば曲げモーメントとせん断力の分布および支点反力を求めることができる。結果を図4.34に示した。

(2) 静定梁の場合

静定の場合には前の例と同様、曲げモーメント分布を元にたわみを求めればよいから、2階の微分方程式を解けばいい。図4.35の場合には力のつり合いから曲げモーメントが

$$M(x) = \begin{cases} C_0 x/\ell, & 0 < x < \ell/2 \\ C_0(x-\ell)/\ell, & \ell/2 < x < \ell \end{cases}$$

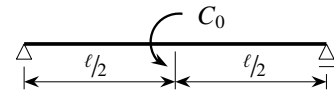


図4.35 集中モーメントが中央に作用した静定梁

である。幾何学的な境界条件は両端で $w = 0$ になる。上の曲げモーメント分布をそれぞれの区間で積分することによって、一般解が

$$w(x) = -C_0/\ell EI (x^3/6 + ax + b) \quad (0 < x < \ell/2), \quad w(x) = -C_0/\ell EI (x^3/6 - \ell x^2/2 + \bar{a}x + \bar{b}) \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と表現できる。第1式を $x = 0$ の境界条件に、第2式を右端 $x = \ell$ の境界条件に代入すると

$$b = 0, \quad \bar{b} = -\ell\bar{a} + \ell^3/3$$

となる。さらに載荷点のたわみとたわみ角の連続条件に代入すると、それぞれから

$$a - \bar{a} = -\ell^2/2, \quad a + \bar{a} = 5\ell^2/12 \quad \rightarrow \quad a = -\ell^2/24, \quad \bar{a} = 11\ell^2/24$$

と求められる。したがって、たわみが

$$w(x) = \frac{C_0 x}{(24\ell EI)} (\ell^2 - 4x^2) \quad (0 < x < \ell/2)$$

$$w(x) = \frac{-C_0(\ell - x)}{(24\ell EI)} (4x^2 - 8\ell x + 3\ell^2) = \frac{-C_0\xi}{(24\ell EI)} (\ell^2 - 4\xi^2) \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と、これも反対称形になる。図4.36にはたわみ形状を示した。

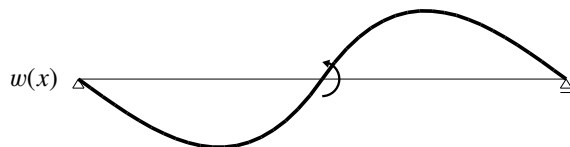


図4.36 集中モーメントが中央に作用した静定梁のたわみ

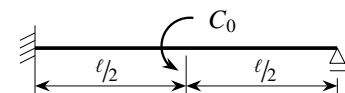


図4.37 不静定梁に集中モーメント

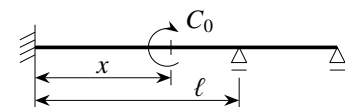


図4.38 右スパンはたわまない

演習問題 4-4

10. 図4.37の梁のたわみを求めて曲げモーメント図を描け。
11. 図4.38の連続梁の右スパンがたわまなかった。あり得ない? 載荷位置 x を求めよ。

4.3 重ね合わせの原理で不静定梁を解く

この節には、実際の現場で応力計算をするために必要な情報を並べつくりは無い。あくまでも物理現象をモデル化したあとの問題解決の方法について、特に線形系の重ね合わせの原理について概説する。つまり、静定梁の解がわかっているものとして、それをういて重ね合わせの原理で不静定構造を解く。基本は、解きたい対象の不静定構造を複数の静定系に切断分解することから始める。そうした上で、その切断箇所に必要な（未知な）不静定反力を作用させることによって元の不静定構造と等価にするための条件を導き出す。この条件は、第2.4.2節の3点で支持された剛棒の例で述べたような、変形も含めた幾何学的な整合性を表す条件に相当する。それを解くことによって不静定反力を求めるのだ。この方法は、前節のように微分方程式を力任せに解くよりも楽に問題解決に導いてくれることが多いが、それが理由でこの節を設けたわけでもない。複数の静定系を重ね合わせて元の不静定構造を復元する際に実は力学的かつ幾何学的な感覚が必要になる。そういう意味で極めて力学的な解法であることから、いくつかの例を示すことにしたわけである。不静定構造の問題に直面したときには、まず検討して欲しい大切な手法の一つである。

不静定梁と静定基本系： 最

初に図 4.39 にあるような基本的な不静定構造を解いてみる。図示したように、これを二つの静定系の重ね合わせとして考えるアプローチをこの2種類くらいは思い付くのではないだろうか。一つ目の方法の重ね合わせは、左端に発生する不静定

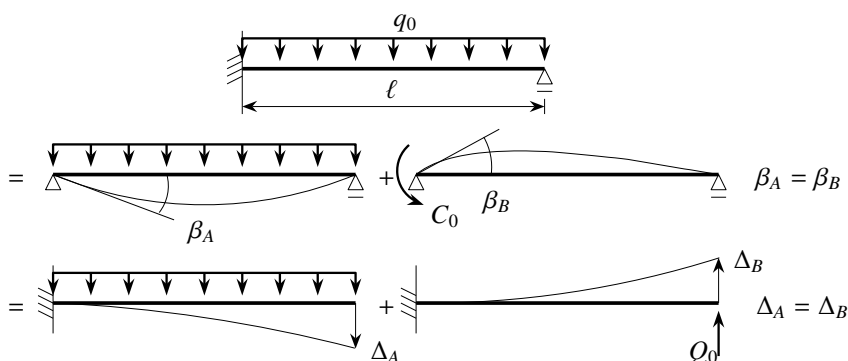


図 4.39 不静定梁を静定梁の重ね合わせで解く

モーメントを未知の C_0 として二つの単純支持梁（静定基本系²⁶）に分解し、その重ね合わせが元の不静定系の境界条件を満足するように C_0 を決める方法である。この C_0 が不静定反力と呼ばれるものに相当する。元に戻す条件としての幾何学的な整合性は、重ね合わせた左端のたわみ角が元の問題のそれ（零）に等しくなるというものだ。つまり、分解した二つの系の左端の正負のたわみ角の等価性 ($\beta_A = \beta_B$) である。一方図 4.39 の二つ目の方法では右端の支点反力の Q_0 が不静定反力であり、整合性は右端のたわみの等価性 ($\Delta_A = \Delta_B$) である。ここでは一つ目のアプローチを使ってみよう。

左の静定系の左端のたわみ回転角は式 (4.36) で求められており、図に示した回転角は

$$\beta_A = w'(0) = \frac{q_0 \ell^3}{24EI}$$

である。一方、右の静定系の左端のたわみ角も式 (4.37) で求められており

$$\beta_B = -w'(0) = \frac{C_0 \ell}{3EI}$$

となっている。この二つの系を重ねて元の系に等しくなるためには、左端が固定端であることから、この二つの回転角が等しくなければならない。つまり図にも示したように

$$\beta_A = \beta_B \quad \rightarrow \quad \frac{q_0 \ell^3}{24EI} = \frac{C_0 \ell}{3EI}$$

²⁶ 文献 [172] では厳密に基本構や基本系・第 n 系・等価力学系といった名称の構造系を別々に定義しているが、この文書では「等価静定系」としたいところを簡単に「静定系」とした。また英訳は '[released/primary] structure' [179] ではなく 'equivalent system' とした。

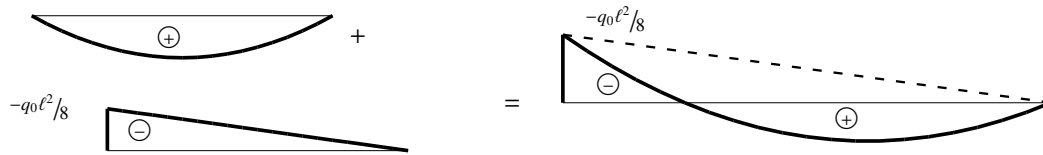


図 4.40 重ね合わせで不静定系を解く例

なるように C_0 を決定すればいい。したがって

$$C_0 = \frac{q_0 l^2}{8}$$

となり、式 (4.33) に一致する。それぞれの静定系の曲げモーメント図も、左の系は2次曲線、右の系は線形とわかっているので、その重ね合わせによって正しい分布図を描くことができる。曲げモーメント図に関してこのようにして重ね合わせたものを図 4.40 に示した。不静定モーメント C_0 を重ね合わせで決めることができたので、たわみやたわみ角の分布も二つの静定系の解の重ね合わせによって算定できる。

両端固定梁の場合： 次の例は図 4.41 の両端固定の場合であるが、この場合もいくつか分解の仕方が考えられる。例えば図示したような三つの静定系の重ね合わせで解けそうだ。 C_1 と C_2 が未知の不静定反力である。等分布外力が作用した一つ目の梁の場合には、式 (4.36) より

$$\beta_A^{(l)} = w'(0) = \beta_A^{(r)} = -w'(\ell) = \frac{q_0 l^3}{24EI}$$

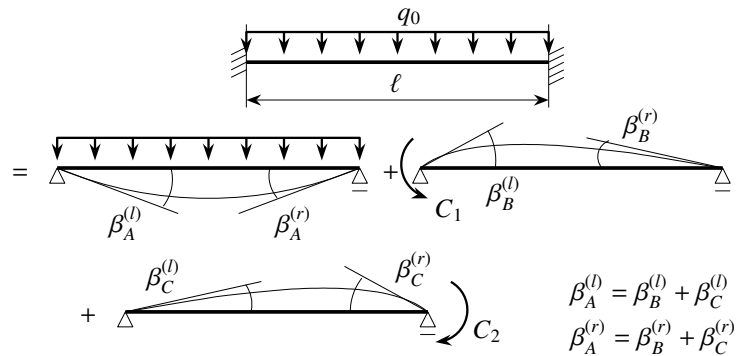


図 4.41 重ね合わせで両端固定梁を解く

である。二つ目の梁の左端に集中モーメントが作用した梁は、式 (4.37) に解があり

$$\beta_B^{(l)} = -w'(0) = \frac{C_1 \ell}{3EI}, \quad \beta_B^{(r)} = w'(\ell) = \frac{C_1 \ell}{6EI}$$

となっていた。三つ目の梁の右端に集中モーメントが作用した梁の場合は上の逆であり、これは式 (4.44) の外力の向きを逆にした $C_0 = -C_2$ の場合に相当するから

$$\beta_C^{(l)} = -w'(0) = \frac{C_2 \ell}{6EI}, \quad \beta_C^{(r)} = w'(\ell) = \frac{C_2 \ell}{3EI}$$

で与えられる。以上の三つの系を重ね合わせた結果が元の両端固定梁になるためには、重ね合わせた系の両端のたわみ角が零になっていなければならない。つまり

$$\beta_A^{(l)} = \beta_B^{(l)} + \beta_C^{(l)} \rightarrow \frac{q_0 l^3}{24EI} = \frac{C_1 \ell}{3EI} + \frac{C_2 \ell}{6EI}, \quad \beta_A^{(r)} = \beta_B^{(r)} + \beta_C^{(r)} \rightarrow \frac{q_0 l^3}{24EI} = \frac{C_1 \ell}{6EI} + \frac{C_2 \ell}{3EI}$$

を満足するように C_1, C_2 が決定されればいい。したがって

$$\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = q_0 l^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \frac{q_0 l^2}{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と端部の不静定モーメントを得て式 (4.34) に一致する。このようにして重ね合わせた曲げモーメント分布を図 4.42 に示した。二つの不静定モーメント C_1, C_2 が求められたので、たわみやたわみ角の分布も三つの静定系のそれぞれの結果の重ね合わせによって算定できる。

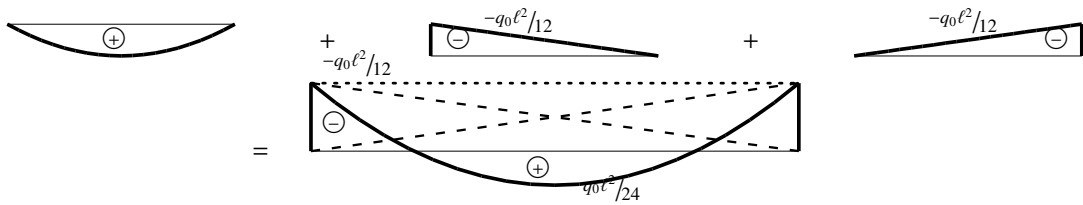


図 4.42 両端固定梁を重ね合わせで解く

連続梁: 次の例は図 4.43 の 2 径間連続梁であるが, 微分方程式を用いた正攻法が面倒だったため, その手順のみを示して解くのを諦めた第 4.2.2 (4) 節の例だ。この場合には, 例えば図示したような二つの静定系に分けて連続部分でたわみ角を整合させてみよう。この左右のスパン

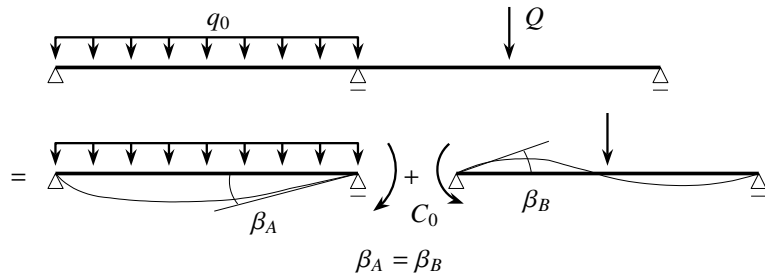


図 4.43 連続梁を重ね合わせで解く例

それぞれでも二つの外力条件に対する解の重ね合わせで答を求めることができる。C₀ が不静定反力である。

左半分の梁の右端の回転角は式 (4.36) と式 (4.44) の重ね合わせで計算することができる

$$\beta_A = \frac{q_0 l^3}{24EI} - \frac{C_0 l}{3EI}$$

となる。一方, 右半分の梁の左端の回転角は, 式 (4.52) を 1 回微分したものと式 (4.37) から

$$\beta_B = -\frac{Ql^2}{16EI} + \frac{C_0 l}{3EI}$$

を得る。この二つを等置することによって

$$C_0 = \frac{3Ql}{32} + \frac{q_0 l^2}{16}$$

と中間支点上の不静定モーメントを求めることができる。

あとは, この結果をそれぞれのスパンの静定解に代入して曲げモーメント図もたわみ形状も求められる。結果を図 4.44 に示した。この連続梁の場合も 1 スパンの不静定梁と同様,

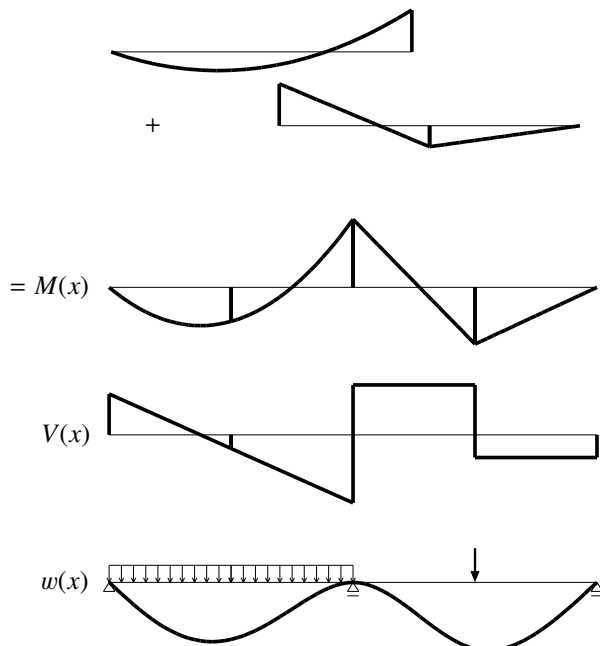


図 4.44 重ね合わせで解く連続梁の曲げモーメント

中間載荷点および支点部の不静定モーメントが求められさえすれば, モーメント分布は静定系のその重ね合わせによって求められることが明らかになった。したがって, この不静定モーメントを求めることが不静定梁を解く場合の最初の目的と考えてもいいかもしれない。そのためには第 5 章の方法が便利だ。

弾性支持された片持ち梁: 図 4.45 の弾性支持された片持ち梁を重ね合わせの原理で解いてみよう。この場合には, 図 4.45 にも示したようにバネの接続点で切断して二つの系に分けて考えると簡単である。X が未知の不

静定反力である。まず切断した梁の先端のたわみを Δ とすると、式 (4.43) と式 (4.39a) の重ね合わせから

$$\Delta = \frac{q_0 \ell^4}{8EI} - \frac{X \ell^3}{3EI}$$

と表すことができる。

一方バネの縮みも Δ であるから

$$X = k \Delta$$

という関係を満足している。この2式から X を消去すると

$$\Delta = \frac{3q_0 \ell^4}{8EI(3 + \alpha_s)}$$

を得て式 (4.41) に一致する。ここでも式 (4.42) のパラメータ α_s を用いた。

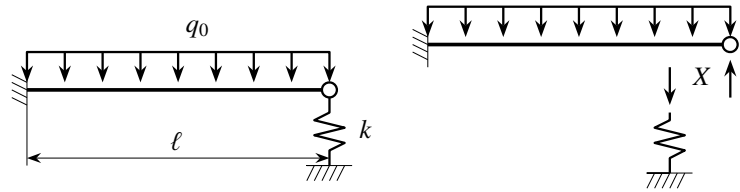


図 4.45 弾性支持された片持ち梁

演習問題 4-5

12. 図 4.39 の二つ目のアプローチで同じ結果を得ることができることを示せ。
13. 演習問題 9 で解いた図 4.32 (b) の系を重ね合わせで解け。
14. 図 4.43 の連続梁を、中央支点の支承をはずす代わりにその反力を不静定反力 X として解け。
15. 図 4.46 の不静定梁の曲げモーメント分布を静定系の重ね合わせで求めよ。二通りのアプローチを考えよ。
16. 図 4.47 の系は、二つの片持ち梁の先端同士を線形バネで結合したものである。これを三つの系に分け、それぞれの梁の先端のたわみを求めよ。
17. 図 4.48 の一番左の図のように、支承を上を設置した断面積 A の円柱形の浮きが密度 ρ の流体に浮いていて、その左側に片持ち梁がある。支承はその片持ち梁の下面から H の位置で静止している。この浮きをちょっと沈めて移動して片持ち梁の右端に設置して手を離れたところ、梁の右端が Δ だけ上方に変位して止まった。そこで、右端の図のように等分布外力 q_0 を梁に載せたところ、梁の右端が Δ だけ下方に変位して元の位置に戻った。 Δ と q_0 を求めよ。

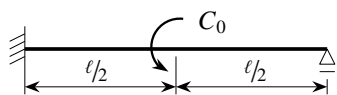


図 4.46 重ね合わせの演習問題

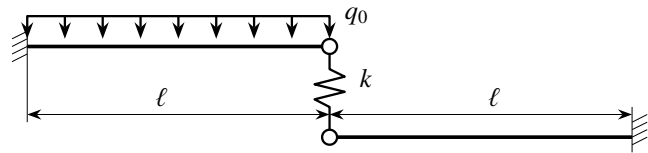


図 4.47 バネ支持された梁の問題

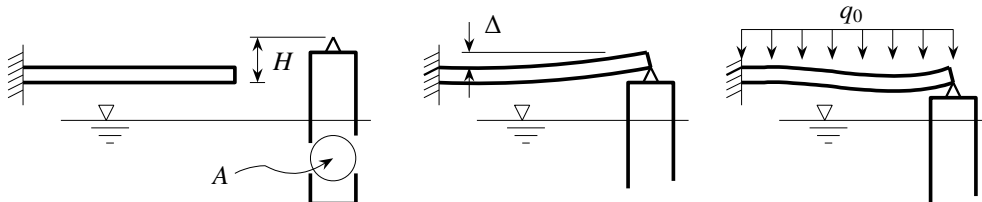


図 4.48 浮きで支持された片持ち梁

4.4 集中外力の数学的表現と単位荷重法

4.4.1 集中外力の分布外力的表現

(1) 集中せん断力の場合

ここではまず、集中外力を分布外力のように扱う手法を概説する。数学です。構造設計で直接使うことは決して無いが、このような扱い方がわかると、構造力学や連続体力学で重要な単位荷重法や影響線・衝撃荷重等の考え方の理解が容易になると同時に、その仕組みの証明等に非常に便利になる。さて、例えば点 $x = a$ に集中外力 Q のみが作用する場合の（不）連続条件は式 (4.47b) の

$$V(a-) - V(a+) = Q \quad \text{つまり} \quad \{-EI w'''(a-)\} - \{-EI w'''(a+)\} = Q$$

であった。もし形式的にこの集中外力を分布外力 $f_c(x; a)$ と表現できたとして、つり合い式 (4.22b) を

$$-EI w''''(x) + f_c(x; a) = 0 \quad (4.53)$$

と表すことができれば、もしかしたら便利かもしれない。ただしそのとき直感的には、分布外力 f_c は点 $x = a$ のごく近傍以外には作用していないことを前提とすべきだろう。そこで、このつり合い式を $x = a$ の近傍だけの $x = a-$ から $x = a+$ まで定積分してみよう。零を積分してもそれは零のままのはずだから、上のせん断力の不連続条件を考慮すると

$$0 = \int_{a-}^{a+} (-EI w''''(x)) dx + \int_{a-}^{a+} f_c dx = \{-EI w'''(a+)\} - \{-EI w'''(a-)\} + \int_{a-}^{a+} f_c dx = -Q + \int_{a-}^{a+} f_c dx$$

を得る。すなわち、この式が f_c の定義だと捉えることによって、集中外力 Q と等価な分布外力表現 $f_c(x; a)$ は

$$\int_{a-}^{a+} f_c(x; a) dx = Q$$

を満足していることになる。これは「集中外力を非常に幅の狭い区間に作用する分布外力として取り扱うことができる」ことを示しており、その「集中外力の大きさはその分布外力の総面積（積分値）に等しい」ことを示している。 $f_c(x; a)$ そのものの定義はできない代わりに、それを積分したものが Q になるという、ちょっと変な定義になってしまっている。

これは例えば図 4.49 のように考えればいい²⁷のかもしれない。というのも、この網掛けした部分の面積は ϵ の大きさにかかわらず（たとえ $\epsilon \rightarrow 0$ でも） Q のままだからだ。また、先に述べたように直感的には f_c は点 $x = a$ 近傍以外では零であろうから、上の定義式の積分範囲は梁の全長まで拡張しても成立する。つまり

$$\int_0^{\ell} f_c(x; a) dx = Q, \quad 0 < a < \ell \quad (4.54)$$

と書いてもいい。これが集中外力の分布外力的な関数 $f_c(x; a)$ の定義

になる。数学ではこのような関数（本当は超関数） $f_c(x; a)$ を **Dirac** のデルタ関数 $\delta(x; a)$ で表し、この場合は

$$f_c(x; a) = Q \delta(x; a), \quad \int_0^{\ell} \delta(x; a) dx = 1, \quad 0 < a < \ell \quad (4.55a, b)$$

と表すことができる。したがって、形式的には集中外力 Q が $x = a$ に作用する梁のつり合い式を

$$-EI w''''(x) + Q \delta(x; a) = 0, \quad 0 < x, a < \ell \quad (4.56)$$

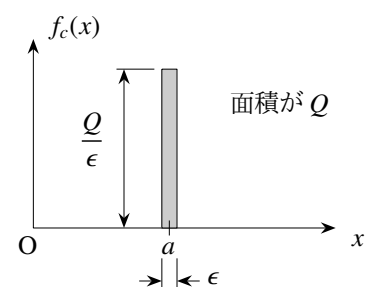


図 4.49 集中外力の模式的表現

²⁷ 数学的な厳密な正当性が気になる読者は超関数や Green 関数の書籍、例えば文献 [88] を読んで欲しい。

と表すこともできるのだ。「形式的」と書いたのは、式(4.55a)(4.56)の等号は「超関数的」なもの(ある関数を両辺に乗じた上で積分した結果同士が等しいというもの)であって通常の等号ではないからである。つまりデルタ関数は次式の定義のように、ある関数との積の積分としてしか意味が無いのである。超関数的な等号の意味については式(10.10)下の説明を参照のこと。なお $Q\delta(x;a)$ が単位長さ当たりの分布外力なので、また式(4.55b)からも明らかなように、 $\delta(x;a)$ の次元は [長さ]⁻¹ だと考えておけばいい。

正確なデルタ関数の定義を最後に示しておく。(無限遠点で零になる、)十分滑らかな任意の関数 $\phi(x)$ (試験関数と呼ばれる)に対し

$$\int_b^c \phi(x) \delta(x;a) dx = \begin{cases} \phi(a) & \text{もし } b < a < c \\ 0 & \text{もし } a < b \text{ あるいは } c < a \end{cases} \quad (4.57)$$

を満足する超関数 $\delta(x;a)$ を **Dirac** のデルタ関数と²⁸呼ぶ。上の式(4.54)は $\phi(x) \equiv Q, b=0, c=\ell$ の場合に相当し、式(4.55b)は $\phi(x) \equiv 1, b=0, c=\ell$ の場合に相当する。

(2) 集中モーメントの場合

次に、例えば $x=a$ 点に集中モーメント C が作用する場合の関数表現を誘導したいが、これはちょっと難しい。まず $x=a$ の(不)連続条件は式(4.47c)の

$$M(a-) - M(a+) = C \quad \text{つまり} \quad \{-EIw''(a-)\} - \{-EIw''(a+)\} = C \quad (*)$$

である。この場合には式(4.53)を直接ではなく²⁹両辺にある程度滑らかな関数 $v(x)$ を乗じた上で $a-$ から $a+$ までの積分を試みる。ただし簡単のために、ここの $v(x)$ は

$$-EIv''''(x) = 0, \quad 0 < x < \ell$$

つまり分布外力の作用していない梁のたわみを用いることとする。この $x=a$ の集中モーメント C を、前節と同様、ある分布関数 $m_c(x;a)$ と表すことを考えよう。まずつり合っているとしているから

$$\int_{a-}^{a+} v(x) \{-EIv''''(x) + m_c(x;a)\} dx = 0$$

を満足する。これは、あとで出てくる仮想仕事の式である。これを4回部分積分し続け、式(*)のたわみの2階微係数 $w''(a)$ の不連続条件と、 v の4階微係数が零であることを考慮すると

$$\int_{a-}^{a+} m_c(x;a) v(x) dx = (-EIw''v') \Big|_{a-}^{a+} = -Cv'(a)$$

となることがわかる。Dirac のデルタ関数と同じく、超関数の性質を数学の書籍から取り出すと

$$\int_0^{\ell} m_c(x;a) v(x) dx = -Cv'(a), \quad 0 < a < \ell \quad (**)$$

を満足するような超関数 $m_c(x;a)$ は

$$m_c(x;a) = C \frac{d\{\delta(x;a)\}}{dx} = C\delta'(x;a) \quad (4.58)$$

であると書いてある。確かに、式(4.58)を式(**)の左辺に代入して1回部分積分をし、形式的にデルタ関数が $x=a$ 以外では零であることと、デルタ関数の定義を用いれば

$$\int_0^{\ell} C\delta'(x;a) v(x) dx = C\delta(x;a) v(x) \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} C\delta(x;a) v'(x) dx = Cv'(a)$$

²⁸ このアクションはちょうど、粒径が a (以下) の粒だけをふるい分けたような表現なので、ふるい特性とも呼ばれる [88]。

²⁹ 集中せん断力の場合も関数 $v(x)$ を乗じた上で積分した結果 $\int_0^{\ell} f_c(x;a) v(x) dx = Qv(a)$ となるので、前節と同じ結論が得られる。

のように式(**)の右辺を得る。もちろんデルタ関数の微係数を図化しようと試みてはいけない。したがって、形式的には集中モーメント C が $x = a$ に作用する梁のつり合い式は

$$-EI w''''(x) + C \delta'(x; a) = 0, \quad 0 < x, a < \ell \tag{4.59}$$

と表すことができる。これはちょっと難しいかもしれない。

ただこのことは、図 4.50 のように考えると直感的な理解ができるかもしれない。つまり ϵ だけ離れた点に大きさが同じで向きが逆の二つの集中外力が作用している場合を考えてみよう。この外力は前節の結論から

$$m_c(x; a) = Q \delta(x; a) - Q \delta(x; a + \epsilon)$$

であり、ここで $\epsilon \rightarrow 0$ とする一方で、この二つの力が作る偶力 $\epsilon \times Q$ を一定 (C) にする制約条件を付けておくと、上式は

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon Q = C, \quad m_c(x; a) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon Q) \frac{\delta(x; a) - \delta(x; a + \epsilon)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} C \frac{\delta(x; a) - \delta(x; a + \epsilon)}{\epsilon}$$

となる。一方、デルタ関数の作用による解は通常 $(x - a)$ のみの関数となることから、デルタ関数そのものも $\delta(x - a)$ と表示されることが多い。これを上式に代入して $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとると

$$m_c(x; a) = C \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta\{(x - a)\} - \delta\{(x - a) - \epsilon\}}{\epsilon} = C \frac{d\delta(x - a)}{dx}$$

のように式 (4.58) を誘導できる。実はこれは震源モデルとして用い [2] られたりする。

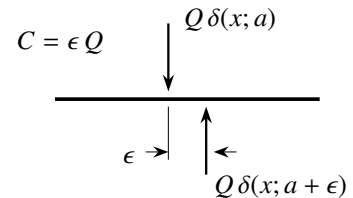


図 4.50 集中モーメントの模式的表現

演習問題 4-6

18. 単純梁の中間に集中外力が作用する梁の解を利用し、図 4.50 のように二つの逆向きの集中外力が作用した梁を重ね合わせて解き、上の誘導のように $\epsilon \rightarrow 0$ の極限をとって、それが中間に集中モーメントが作用した単純梁の解になることを示せ。

4.4.2 単位荷重法

(1) 二つの系を考える

前節の集中外力の数学的表現を用いて、便利で面白い手法を紹介しよう。例えば図 4.51 にあるような二つの系 A, B を考える。この図では境界条件も具体的に描いてあるが、しばらくはこれを見ないことにして欲しい。まず解きたい問題の系 A のたわみと曲げモーメントは適切な境界条件の元に

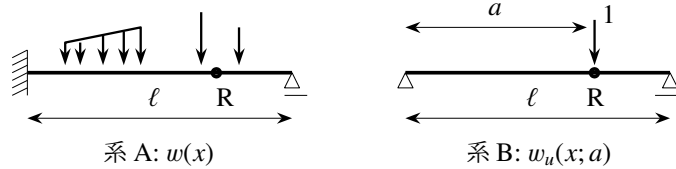


図 4.51 解きたい系 A と、単位荷重が作用した系 B

$$-EI w''''(x) + q(x) = 0, \quad M(x) = -EI w''(x) \tag{a, b}$$

を満足しているものとし、こちらを解きたい問題としておくと、特に点 R のたわみを求めることを目標とする。一方、系 B は系 A と同じである必要は無いが、その点 R だけに単位荷重を載せた系である。載荷点 R の位置 ($x = a$) を明確化するために系 B のたわみを $w_u(x; a)$ と表すことにすると、前節のデルタ関数を用いて

$$-EI w_u''''(x; a) + \delta(x; a) = 0, \quad M_u(x; a) = -EI w_u''(x; a) \tag{c, d}$$

を満足している。こちらでも適切な境界条件を満足しているものとする。なお、前述のように $\delta(x; a)$ は単位長さ当たりの大きさが1の力なので次元は [長さ]⁻¹ となるから、 w_u と M_u の次元もそれぞれ [長さ][力]⁻¹ と [長さ] であることに注意すること。

ここで、系Bのつり合い式(c)に系Aのたわみ $w(x)$ を乗じて全スパンで積分したものが零になることは明らかである。つまり

$$\int_0^{\ell} w(x) \{-EI w_u''''(x; a) + \delta(x; a)\} dx = 0$$

が成立する。この式は第3.5節で導入した仮想仕事式を梁に適用した式の初等的な表現（標準形は式(5.20)）である。敢えてそういった物理的考察は不要ではあるが、仮想仕事の原理が便利な道具であることを以下の梁の問題で理解できることを期待する。ちなみに以下の誘導は第3.5.5節の内容と同じである。さて被積分関数の括弧の中の第2項の積分は、デルタ関数の定義式(4.57)を用いれば系Aの点Rのたわみ $w(a)$ になる。一方第1項については2回部分積分して変形すると、第2項と合わせて上式は

$$\{-EI w w_u'' + EI w' w_u''\} \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} (-EI w'') (-w_u'') dx + w(a) = 0$$

となる。この積分項に式(b)(d)の曲げモーメントを代入して左辺右辺の入れ替えを行うと、最終的に系Aの点Rのたわみ $w(a)$ を

$$w(a) = \int_0^{\ell} \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx - [w (-EI w_u''') + (-w') (-EI w_u'')] \Big|_0^{\ell} \quad (4.60)$$

と表現できる。ある点のたわみを求めるこのような方法を単位荷重法と呼ぶ。解きたい問題の曲げモーメント分布と幾何学的境界条件がわかっていると同時に、もし着目している点に単位集中荷重が作用した別の問題の解が求められていれば、モーメント分布を2回積分する代わりに上式で着目点のたわみを求めることができる。構造解析手法という観点からはそれほど有意義な手法とは言いが、第4.8節で例示するように、他の方法よりはどちらかと言えば便利な手法ではあり、さらにその概念自体は諸定理等の理解のためにも気に留めておく価値がある。ちなみに図4.51の例に限定すると、境界条件が

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\ell) = 0, \quad w''(\ell) = 0, \quad w_u(0) = 0, \quad w_u''(0) = 0, \quad w_u(\ell) = 0, \quad w_u''(\ell) = 0$$

であるから、式(4.60)の境界項はすべて零になって

$$w(a) = \int_0^{\ell} \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx$$

となる。これは後述の標準的な単位荷重法と呼ぶものに一致する。

(2) 簡単な例

例えば図4.52の不静定梁の点Rのたわみを求めたい場合に、例えば重ね合わせの原理でモーメント分布が求められていた³⁰としよう。この場合は式(4.32)より

$$M(x) = q_0/8(\ell - x)(-\ell + 4x)$$

である。すべての点のたわみを求めるには、この表現をさらに2回積分して幾何学的境界条件を用いればいいことは既に示した。ここではある1点R ($x = a$) のたわみを単位荷重法で求めてみる。この場合の境界条件は

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w(\ell) = 0, \quad -EI w''(\ell) = 0$$

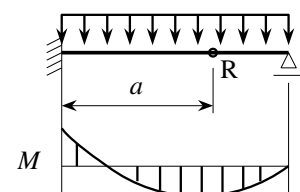


図4.52 単位荷重法の適用例

³⁰ もしそうなら、点Rのたわみは求められているはずだが、ここではそれには目をつぶろう。

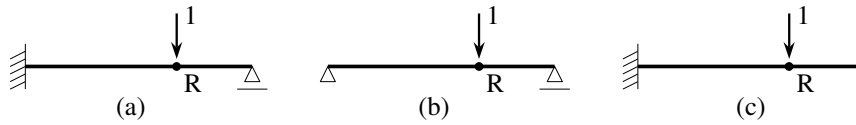


図 4.53 単位荷重を作用させる系 B の例

だから、式 (4.60) の右辺第 2 項はほとんどが零になり、結局

$$w(a) = \int_0^l \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx - \{-w'(\ell)\} \{-EIw''_u(\ell)\}$$

となる。この右辺第 2 項が零になるような系を系 B として選ぶとすると、 $-EIw''_u(\ell) = 0$ でありさえすればいいから、図 4.53 の三つのどれでもいいことがわかる。この中で曲げモーメント分布が一番簡単に求められるのは (c) の片持ち梁の場合なので、それを計算すると

$$M_u(x; a) = \begin{cases} (x - a), & 0 < x < a \\ 0, & a < x < \ell \end{cases}$$

である。この M_u と先に求められた M を上式に代入して計算すると、積分範囲は $0 < x < a$ でいいので

$$w(a) = \int_0^a \frac{q_0}{8EI} (\ell - x)(-\ell + 4x)(x - a) dx = \frac{q_0 a^2}{48EI} (3\ell - 2a)(\ell - a)$$

となる。もちろん、結果の a を x で置き換えたものは任意点 x のたわみの厳密解式 (4.31) に一致³¹する。この例では敢えて二つの系として別々のものを選んでみたが³、その結果はたいへん興味深いと感じてもらえないだろうか。式 (4.60) から明らかなように、境界の項の右辺は、仕事をする組み合わせで

$$(\text{単位荷重法の境界項}) = (\text{解析系の変位の境界条件}) \times (\text{単位荷重系の力の境界条件}) \quad (4.61)$$

になっていることを知っていれば、計算が最も簡単になる単位荷重系 B の選び方がわかるだろう。

(3) 不静定反力を求める例

素直なアプローチ: あるいは逆に、図 4.52 の不静定梁の不静定反力を求めるために単位荷重法を用いる例を示しておこう。まず図 4.54 の (a) ような不静定反力 X を与えて元の不静定梁を解くことを考えてみる。このとき図の (b) の系を用いた単位荷重法で右端のたわみを求め、それが零になる条件から不静定反力 X を求めるというアプローチだ。まず系 (a) の曲げモーメント分布は

$$M(x) = X(\ell - x) - \frac{q_0}{2} (\ell - x)^2$$

であり、系 (b) のそれは上式で X を 1 にして q_0 を無視すればいいから

$$M_u(x; \ell) = (\ell - x)$$

である。これを用いて単位荷重法³²で右端のたわみを求め

$$w(\ell) = \int_0^l \frac{M(x) M_u(x; \ell)}{EI} dx = 0 \quad (*)$$

となる条件から X を決めれば元の不静定梁が解けたことになる。上の 2 式を代入して積分することによって

$$\frac{\ell^3}{3} X - \frac{q_0 \ell^4}{8} = 0 \quad \rightarrow \quad X = \frac{3}{8} q_0 \ell$$

と不静定反力が求められ、これは図 4.12 の結果に一致する。

³¹ 調べてはいないが、こういったことが書いてある教科書はそんなに多くはないのではないだろうか。

³² このままだと $w''_u(\ell) = 1/EI \neq 0$ なので式 (4.60) の境界項は無くならないはずだが、後述のように無視していいことはわかっている。

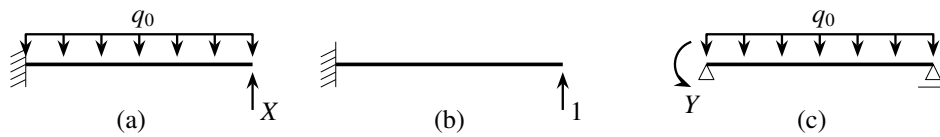


図 4.54 不静定反力を求める二つのアプローチ

ひねくれたアプローチ: 次に, 上と同じ系を図 4.54 の (c) のように, 左端に不静定モーメント Y を与えた単純梁を用いて元の不静定梁を解いてみる。この場合のモーメント分布は

$$M(x) = -Y \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) + \frac{q_0}{2} (\ell x - x^2)$$

となる。そして単位荷重をかける系としては前例と同じ片持ち梁を考え, 右端のたわみを零にする条件から Y を求めてみよう。この $M(x)$ と上式の $M_u(x; \ell)$ を上式(*)に代入して積分を実行すると

$$\frac{\ell^2}{3} Y - \frac{q_0 \ell^4}{24} = 0 \quad \rightarrow \quad Y = \frac{q_0 \ell^2}{8}$$

と不静定モーメントが求められ, これも図 4.12 の結果に一致する。うーん, この例には違和感を持たなかっただろうか。 $w(x)$ の系ではそもそも右端のたわみは零になる解になっているにもかかわらず, $w_u(x)$ の系にわざと片持ち梁を用いて, 右端のたわみが零になる条件を用いている。何が何だかわからなくなってもちっとも構わないが面白いでしょ? 左端のたわみ角が零になる条件から不静定モーメントを求める素直なアプローチはこの後ろの第 4.4.2 (5) 節で説明する。

(4) 標準的な単位荷重法

ここまでは, 系 B が系 A と異なる場合も含めて一般的な定式化をしておいた。しかし多くの教科書類では, 系 B は系 A と同じものを選んでおいた。系 B を系 A と同じにした場合の式 (4.60) の境界項

$$- [w (-EIw''') + (-w') (-EIw'')] \Big|_0^\ell$$

がどうなるか考えてみよう。まず境界でたわみあるいはたわみ角が零の場合はこれはすべて無くなる。しかし, たわみが未知で零ではない場合, 系 B 側のその境界も自由にたわむことができるはずなので, そのせん断力 $(-EIw''')$ は零である。また, たわみ角が未知の場合も同様に, その曲げモーメント $(-EIw'')$ が零になる。したがって, 式 (4.60) の境界項は無くなって単位荷重法は

$$w(a) = \int_0^\ell \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx \quad (4.62)$$

でいいことになる。これがたいの教科書に載っている公式である。ただ, 系 B の選択が少しだけ自由になる公式 (4.60) の方が仮想仕事の汎用的だしカッコいい!

では, たわみを求めたい点 $x = a$ が境界にある場合 (前節で用いた例) はどうなるだろう。ここでは単位せん断力を作用させてたわみを求めようとしているので, そのたわみを求めたい境界では, 上式の境界項が

$$-w(a) \{-EIw'''(a)\} = -w(a) \times 1$$

になると同時に, そもそも式 (c) の第 2 項 $\delta(x; a)$ が無いので, 式 (4.60) は

$$0 = \int_0^\ell \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx - w(a)$$

になって, やはりこれは上の式 (4.62) に一致する。

具体的にたわみがどのように求められるのか、まず静定梁を対象にして計算結果を眺めておこう。不静定系における単位荷重法の使い方は、トラスや骨組の代表例を第4.8節にもいくつか列挙したので、それを参考にしながら種々の問題に適用してみたい。さて例えば、図4.28の両端単純支持梁の中央に集中せん断力 Q が作用しているときの中央のたわみを求めるためには、まず曲げモーメントが左半分で

$$M(x) = \frac{Q}{2} x$$

であることから、たわみを求めたい中央点に単位荷重を載せた場合の曲げモーメントも

$$M_u(x; \ell/2) = \frac{1}{2} x$$

である。これを式(4.62)に代入して左右対称なことを利用すれば

$$w(\ell/2) = \frac{2Q}{EI} \int_0^{\ell/2} \frac{1}{2} x \frac{1}{2} x dx = \frac{Q\ell^3}{48EI}$$

を得る。これは式(4.52)から求められる値に一致する。また図4.15の一樣な分布荷重 q が作用した場合の曲げモーメントは

$$M(x) = \frac{q}{2} (\ell x - x^2)$$

である。したがって、中央に単位荷重を作用させた曲げモーメント $M_u(x; \ell/2)$ を用いて、左右対称なことを利用すれば、中央のたわみは

$$w(\ell/2) = \frac{2q}{EI} \int_0^{\ell/2} \frac{1}{2} (\ell x - x^2) \frac{1}{2} x dx = \frac{5q\ell^4}{384EI}$$

と求められる。これも式(4.35)から求められる値に一致する。

念のためにもう一つ、図4.26の不静定梁を図4.55の静定系に置き換えた上で右端に不静定反力 X を作用させ、単位荷重法を用いて解いておこう。まず支点反力は

$$F = Q - X, \quad C = \ell \left(X - \frac{1}{2} Q \right)$$

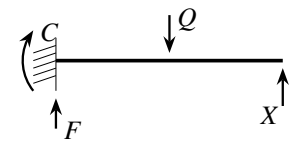


図4.55 右の支点をはずした場合

となるので、曲げモーメントは

$$M(x) = \ell \left(X - \frac{1}{2} Q \right) + (Q - X) x, \quad (0 < x \leq \ell/2), \quad M(x) = (\ell - x) X, \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と求められる。右端はたわまないで右端のたわみを単位荷重法で求めてそれを零と置こう。そこで、右端に単位荷重を作用させたときの曲げモーメントは、上式で $Q = 0$ と $X = 1$ にすればいいので、全スパンで

$$M_u(x; \ell) = (\ell - x)$$

となる。したがって右端のたわみ Δ_X が零でなければならない条件は、式(4.62)から

$$EI\Delta_X = \int_0^{\ell/2} (\ell - x) \left\{ \ell \left(X - \frac{1}{2} Q \right) + (Q - X) x \right\} dx + \int_{\ell/2}^{\ell} (\ell - x)^2 X dx = 0$$

となり、これが X に対する条件になる。この積分を実行すると

$$X = \frac{5}{16} Q$$

と、正しい不静定反力を得る。これを上の曲げモーメントに代入すれば

$$M(x) = \left(\frac{11}{16} x - \frac{3}{16} \ell \right) Q, \quad (0 < x \leq \ell/2), \quad M(x) = \frac{5}{16} Q (\ell - x), \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

となる。中央のたわみを求めるための単位荷重を作用させた系の曲げモーメントは $Q = 1$ とすればいいので

$$M_u(x; \ell/2) = \left(\frac{11}{16}x - \frac{3}{16}\ell \right), \quad (0 < x \leq \ell/2), \quad M_u(x; \ell/2) = \frac{5}{16}(\ell - x), \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

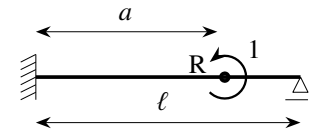
である。再度これを式(4.62)に代入することによって、中央のたわみ Δ_Q が

$$\Delta_Q = \frac{Q}{EI} \left\{ \int_0^{\ell/2} \left(\frac{11}{16}x - \frac{3}{16}\ell \right)^2 dx + \int_{\ell/2}^{\ell} \left(\frac{5}{16} \right)^2 (\ell - x)^2 dx \right\} = \frac{7Q\ell^3}{768EI}$$

と求められる。これも正解である。何だかやっぱり構造力学は積分の練習科目みたいだなあ。

(5) たわみ角と単位荷重法

答を知っているからだが、ある点のたわみ角を求める単位荷重法を誘導しておこう。そこで、図4.51の左側の解きたい系Aの点Rのたわみ角を求めるために、図4.56に示したように点Rに単位の集中モーメントだけを作用させた系Bとの間で仮想仕事式を立ててみよう。系Aは前述の式(a)(b)を満足している。一方系Bのたわみ $w_u^C(x; a)$ と曲げモーメント $M_u^C(x; a)$ は



系B: $w_u^C(x; a)$

図4.56 単位モーメントが作用した系B

$$-EI w_u^{C''''}(x; a) + \delta'(x; a) = 0, \quad M_u^C(x; a) = -EI w_u^{C''}(x; a) \quad (e, f)$$

を満足している。ここでも式(4.58)で表された集中モーメントの表現を用いている。前節と同様、式(e)に系Aのたわみ $w(x)$ を乗じて全スパンで積分したものは零になるので

$$\int_0^{\ell} w(x) \{-EI w_u^{C''''}(x; a) + \delta'(x; a)\} dx = 0$$

が成り立つ。被積分関数の第1項を2回部分積分すると

$$\{-EI w w_u^{C''''} + EI w' w_u^{C'''}\} \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} (-EI w'') (-w_u^{C''}) dx + \int_0^{\ell} w(x) \delta'(x; a) dx = 0$$

を得るが、点Rが境界ではない場合には第1項の境界の項は零になるのは前節で説明した通りである。ここで式(4.58)前後で説明したように、第3項を部分積分して式(4.57)のデルタ関数の定義を用いる(デルタ関数は $x \neq a$ では零と考えていいので)と

$$\int_0^{\ell} w(x) \delta'(x; a) dx = w(x) \delta(x; a) \Big|_0^{\ell} - \int_0^{\ell} w'(x) \delta(x; a) dx = -w'(a)$$

となるので、さらに上式第2項に式(b)(f)の曲げモーメントを代入すれば

$$\theta(a) = -w'(a) = \int_0^{\ell} (-EI w'') (-w_u^{C''}) dx = \int_0^{\ell} \frac{M(x) M_u^C(x; a)}{EI} dx \quad (4.63)$$

という関係が求められる。これが点 $x = a$ のたわみ角を求める単位荷重法である。また境界のたわみ角を求めたい場合には、前節の説明と同様、式(e)の第2項 $\delta'(x; a)$ が無い代わりに、境界項が

$$-w'(a) \{-EI w_u^{C''}(a)\} = -w'(a) \times 1$$

となるので、やはり上式(4.63)を得る。

そこで、前節で取り上げたのと同じ図 4.26 の不静定梁を、左端のたわみ角を単位荷重法で求めることによって解いてみよう。まず図 4.57 の静定系に置き換えた上で、左端に不静定モーメント X を作用させ、左端のたわみ角を求めてそれを零にしよう。まず支点反力は

$$F_1 = \frac{Q}{2} + \frac{X}{\ell}, \quad F_2 = \frac{Q}{2} - \frac{X}{\ell}$$

となるので、曲げモーメントは

$$M(x) = \left(\frac{Q}{2} + \frac{X}{\ell}\right)x - X, \quad (0 < x \leq \ell/2), \quad M(x) = \left(\frac{Q}{2} - \frac{X}{\ell}\right)(\ell - x), \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と求められる。そこで左端だけに単位の集中モーメントを作用させた系の曲げモーメントは、上式で $Q = 0$ と $X = 1$ にすればいいので、全スパンで

$$M_u^C(x; 0) = \frac{x}{\ell} - 1$$

となる。したがって左端のたわみ角 Θ_X は式 (4.63) から求めることができ、それは零でなければならないから

$$EI\Theta_X = \int_0^{\ell/2} \left\{ \left(\frac{Q}{2} + \frac{X}{\ell}\right)x - X \right\} \left(\frac{x}{\ell} - 1\right) dx - \frac{1}{\ell} \left(\frac{Q}{2} - \frac{X}{\ell}\right) \int_{\ell/2}^{\ell} (\ell - x)^2 X dx = 0$$

を満足しなければならない。この積分を実行すると

$$X = \frac{3}{16} \ell Q$$

と、正しい不静定反力を得る（のに著者は積分を 3 回間違えた）。これを上の曲げモーメントに代入すれば前節と同じ結果を得る。つまり正解が求められる。骨組の例を第 4.8.3 節にも示しておいた。

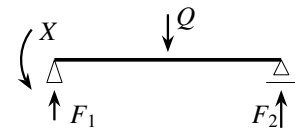


図 4.57 左を回転自由にした場合

4.5 影響線

4.5.1 たわみの影響線

(1) その性質の直感的な確認

トラスや梁を設計するときには、まず断面力の影響線を求めなければ荷重の位置すら決めることができないことを、第 2 章では説明した。つまり、構造設計で最初に必要になる³³のはそういった内力（断面力）の影響線だ。ここではまずたわ

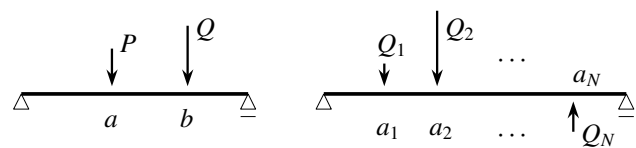


図 4.58 多くの集中外力が作用した梁

みの影響線の説明から始めよう。例えば図 4.51 の系 B のように、ある点 $x = a$ に単位の大きさの集中外力が作用している問題の解を $w_u(x; a)$ と記すことにすると、第 4.3 節で用いた線形系の重ね合わせの原理から、同じ点に大きさ P の集中外力が作用した問題の解が $P w_u(x; a)$ になるのはすぐわかる。さらに、点 $x = b$ にも大きさ Q の集中外力が作用している図 4.58 の左側の図のような場合には、そのたわみが $P w_u(x; a) + Q w_u(x; b)$ になるのも自明であろう。したがって、図 4.58 の右側の図のように、 N 個の点 $x = a_i$, ($i = 1, 2, \dots, N$) に集中外力 Q_i が作用している場合のたわみは

$$w(x) = \sum_{i=1}^N w_u(x; a_i) Q_i$$

でいい。

³³ この節は不静定構造が解けるようになったという主旨であるが、これまでの例のように構造の剛性（モーメント曲率関係）がわかっていないと解けなかった。ということは、不静定構造の影響線を求めるには剛性が必要になるが、設計の最初の段階では図面は白紙、つまりその剛性は決まっていない。つまり矛盾がある。現場でどうやっているのかについては知らないが、おおよその影響線は求めることができるので、それを修正しながら設計しているのだろうか。

ところで第2.2.3(1)節で示した図 2.16 のように、橋梁に載る自動車等の荷重は分布外力で規定されていたので、次に任意の分布外力 $q(x)$ が作用している場合のある観測点 $x = b$ で発生するたわみを、上の複数の集中外力が並んでいる場合と同じように計算してみよう。この場合は図 4.59 に示したように、梁の全長を十分大きな数 N を用いて N 等分して、ある点 $x = a_i$ 近傍の分布外力を集中外力で近似して扱ってみよう。図 4.49 に示したように、集中外力は面積がその大きくなるような非常に短い区間に作用する等分布外力としてもモデル化できたことから、この点 a_i 近傍の集中外力 Q_i は $Q_i \sim \{q(a_i) \Delta a\}$ と置いてもいいだろう。したがって、もし上で使った $w_u(x; a)$ が既知であれば、ある点 $x = b$ のたわみは

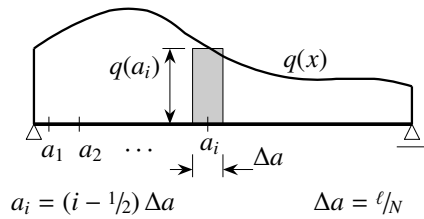


図 4.59 影響線の持つ意味の図式的直感的説明

$$w(b) = \sum_{i=1}^N w_u(b; a_i) q(a_i) \Delta a$$

でいいことになる。これに数学的極限としての $N \rightarrow \infty$ を考えると、この総和を積分に置き換えればいだけなので $\left(\sum_{i=1}^N \Delta a \rightarrow \int_0^l da \right)$ という置き換えから結局

$$w(b) = \int_0^l w_u(b; a) q(a) da \tag{4.64}$$

によって点 $x = b$ におけるたわみを求めることができる。このように $w_u(b; a)$ は「载荷点 $x = a$ に作用する単位外力が、観測点 $x = b$ のたわみにどの程度の影響を与えるか」を定量的に示した関数であることから、この観測点 $x = b$ におけるたわみの影響線と呼ばれている。

ある着目点の断面を設計するに当たっては、その断面の応答が一番大きく（不利に）なるような外力の載せ方をまず知る必要があるが、そのような場合に影響線が必要になることは既に述べた。数学では $w_u(x; a)$ のような関数を、対象としている境界値問題の **Green 関数** と呼んでいる。これは材料力学の多くの問題を解析的に、あるいは半解析的に解く場合に重用される概念であり、数値解析手法の一つとしての境界要素法においても（そちらは無有限体の基本解ではあるが）非常に重要な概念である。昨今は数値的なシミュレーションが全盛で、解析的な手法や考察およびその教育がないがしろにされているように感じる。しかし、数値シミュレーションは単なるケーススタディに過ぎず、対象としている問題全体が持っている力学的特性を定性的かつ定量的に把握できるとは限らない。そういう観点からこの Green 関数等の特性を考えると、設計という観点から見ても有用なことを多く含んでいるので、以下もちゃんと勉強して欲しい。

(2) 直感的結論の数学的証明

簡単のために単純梁を対象として式 (4.64) を証明しておく。ただし一般化して変断面梁を対象とする。解きたい問題は、ある与えられた分布外力の作用した単純梁なので

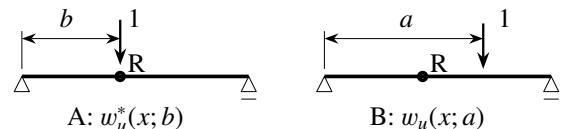


図 4.60 単位の集中外力が作用している二つの系

$$\{-EI(x)w''(x)\}'' + q(x) = 0 \tag{a}$$

がつり合い式で、境界条件は

$$w(0) = 0, \quad w''(0) = 0, \quad w(l) = 0, \quad w''(l) = 0 \tag{b}$$

で与えられている。今、この単純梁の $x = b$ の点を観測点 R とし、そこのたわみを求めることにする。まず、図 4.60 の左側の系 A のたわみ $w_u^*(x; b)$ はその観測点 R の方に単位集中荷重を載せた系で

$$\{-EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' + \delta(x; b) = 0 \quad (c)$$

を満足しており、 $w_u^*(x; b)$ の境界条件は上式 (b) と同じである。これに対し影響線を求める系は、同じく図 4.60 の右側の系 B のように任意の点 $x = a$ に単位集中荷重を載せた系であり、そのたわみ $w_u(x; a)$ も上式 (b) と同じ境界条件の元で

$$\{-EI(x)w_u''(x; a)\}'' + \delta(x; a) = 0 \quad (d)$$

を満足している。この $x = b$ における関数 $w_u(b; a)$ が観測点 R のたわみの影響線である。ちなみに系 A は系 B の随伴系と呼ばれている。

ここで、単位荷重法の誘導と同じように式 (c) に求めたい解 $w(x)$ を乗じて全領域で積分し（仮想仕事を算定し）、デルタ関数の定義を用いると

$$0 = \int_0^\ell \left[\{-EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' + \delta(x; b) \right] w(x) dx = \int_0^\ell \{-EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' w(x) dx + w(b)$$

となる。さらに、右辺第 1 項を移項して次の式の形にし、それを 4 回部分積分すると

$$\begin{aligned} w(b) &= \int_0^\ell \{EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' w(x) dx \\ &= \left[-(-EIw_u^{*''})' w + (-EIw_u^{*''}) w \right]_0^\ell + \left[-w_u^{*'} (-EIw'') + w_u^* (-EIw''') \right]_0^\ell - \int_0^\ell w_u^* \left[\{-EI(x)w''\}'' \right] dx \end{aligned}$$

を得る。これに境界条件を代入すれば右辺第 1, 2 項の境界の値はすべて零になり、第 3 項の被積分関数の鉤括弧内は式 (a) より $-q(x)$ なので

$$w(b) = \int_0^\ell w_u^*(x; b) q(x) dx \quad (e)$$

となる。この式は式 (4.64) に非常によく似ているが、まだちょっとだけ違うよ。

そこで今度は、式 (c) に影響線 $w_u(x; a)$ を乗じて全領域で積分すると、同様に

$$0 = \int_0^\ell \left[\{-EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' + \delta(x; b) \right] w_u(x; a) dx = \int_0^\ell \{-EI(x)w_u^{*''}(x; b)\}'' w_u(x; a) dx + w(b; a)$$

となるので、これも上の誘導と同様 4 回部分積分して式 (d) を代入したあと境界条件を考慮すると最終的に

$$0 = - \int_0^\ell w_u^*(x; b) \delta(x; a) dx + w(b; a) \quad \rightarrow \quad w_u^*(a; b) = w_u(b; a) \quad (4.65)$$

を得る。この関係は自己随伴系で成立するもので、ちょっと面白い。つまり図 4.60 を見ながらだとわかり易いと思うが、「ある構造の、ある載荷点に単位荷重を載せたときに別のある観測点で観測されたたわみは、逆に、その観測点に単位荷重を載せて観測される元の載荷点のたわみに等しくなる」ということである。この関係を **Maxwell** の相反定理と呼び、弾性体の式 (3.144) と同じである。最後に、上式 (4.65) の記号 a を x で置き換えた上で式 (e) の右辺の被積分関数中の $w_u^*(x; b)$ を $w_u(b; x)$ で置き換えると

$$w(b) = \int_0^\ell w_u(b; x) q(x) dx$$

となり、果たして式 (4.64) が証明された。

ちなみに、図 4.60 の荷重を一般化し、系 A には P^* が作用してたわみ $w^*(x; b)$ が生じ、系 B には P が作用してたわみ $w(x; a)$ が生じたとすると、上述と同様の演算から式 (4.65) の代わりに

$$P^* w(b; a) = P w^*(a; b) \quad \text{つまり式 (4.65) は} \quad \frac{w(b; a)}{P} = \frac{w^*(a; b)}{P^*} \quad (4.66a, b)$$

を得る。これは **Betti** の相反定理と呼ばれ、弾性体の式 (3.143) と同じである。相反定理の誘導や証明にはエネルギー等の物理的解釈（自己随伴系にしか使えないし、そもそも本末転倒の間違った誘導・証明だ）は要らない。

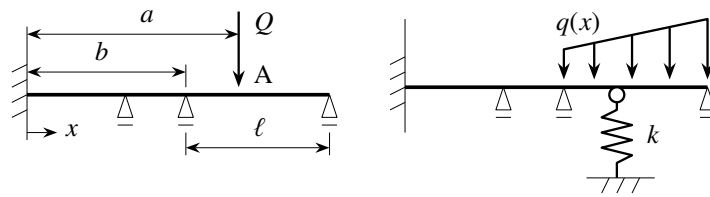


図 4.61 相反定理と影響線の利用例

演習問題 4-7

19. 図 4.61 の左側の図にある系のある点 A に集中外力 Q が作用した場合の任意点のたわみ $w_Q(x)$ が求められて (測定されて) いるものとする。そこで右側の図のように同じ点 A にバネ定数 k の線形バネを挿入し、そのスパンに分布外力 $q(x)$ を作用させたとき、バネの縮み量が

$$\frac{\int_b^{b+l} q(x) w_Q(x) dx}{Q + k w_Q(a)}$$

になることを示せ。相反定理と影響線の考え方を用いると簡単だ。

4.5.2 曲げモーメントとせん断力の影響線

前述のように橋梁の断面設計においてはまず曲げモーメントとせん断力の影響線を求める必要がある。この曲げモーメントとせん断力の影響線も、たわみの影響線と同じように定義できる。つまり、単位荷重を点 $x = a$ に作用させたときの $x = b$ に設定した設計断面 B の曲げモーメント $M_u(b; a)$ が求められれば、それを曲げモーメントの影響線と呼ぶ。この曲げモーメントの影響線がわかっているならば、ある任意の分布外力 $q(x)$ が作用したときの設計断面の曲げモーメントは、式 (4.64) のたわみの場合と同様に

$$M(b) = \int_0^l M_u(b; a) q(a) da \tag{4.67}$$

によって求められる。

一つだけ簡単な例を解いておこう。図 4.62 には片持ち梁の点 B の曲げモーメントの影響線を示した。求めてみよう。まず $0 < x < b$ に単位荷重が載った場合には点 B より右には何も荷重が載っていないので、点 B で仮想的に切断したその右の部分のモーメントのつり合いから

$$M_u(b; x) + 0 = 0 \quad \rightarrow \quad M_u(b; x) = 0$$

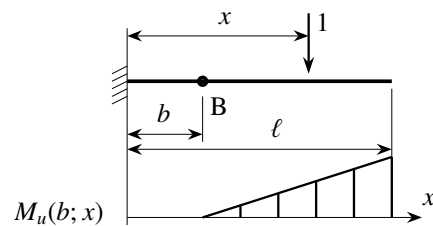


図 4.62 片持ち梁の曲げモーメントの影響線

となる。次に $b < x < l$ の単位荷重がある場合には、同じ部分のモーメントのつり合いは

$$M_u(b; x) + (x - b) \times 1 = 0 \quad \rightarrow \quad M_u(b; x) = b - x$$

と求められる。まとめると

$$M_u(b; x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < b \\ b - x, & b < x < l \end{cases} \tag{4.68}$$

となる。すなわち設計断面 B に対しては、もし外力がそれよりも左側 ($0 < x < b$) に作用する限り何の影響も受けない。それに反して、設計断面より右側に作用する外力から受ける影響は設計断面から離れれば離れるほど

大きくなり、片持ち梁先端で最大になる。ということは、この設計断面を危険にしようと思えばできるだけ先端側に大きな外力を載せればよいことがわかる。まさに直感と一致する。ちなみにせん断力の影響線も同様に求めることができ

$$V_u(b; x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < b \\ 1, & b < x < \ell \end{cases} \quad (4.69)$$

となる。この場合も設計断面より右側に外力を載せることが危険側になる。外力の方が移動する影響線の求め方は場合分けが必要になり面倒だが、意外と教科書等にその演習問題は多くないので、読者は自発的に練習しておくのが望ましい。

4.5.3 梁の設計 — 最大曲げモーメントと最大せん断力

設計の段階では、外力のパターン $q(x)$ が図 2.16 のように示方書で規定されている³⁴ので、前節で求めた影響線を用いることによって、着目している設計断面を最も危険にするような外力の分布を決定できる。そして、その最も危険な外力に対して生じる曲げモーメントを最大曲げモーメント M_{MAX} と呼んでいる。つまり、その載荷位置を $s_i < x < e_i$, ($i = 1, 2, \dots, N$) とすると

$$M_{\text{MAX}}(\text{設計断面 B}) \equiv \max_{s_i, e_i} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{s_i}^{e_i} M_u(b; x) q(x) dx \right\} \quad (4.70)$$

のような最大値が得られるように載荷位置 s_i と e_i を探し出し、それで得られる左辺の値を最大曲げモーメントと呼ぶのである。このような外力の載せ方を影響線載荷と呼んでいる。すなわち上の片持ち梁の例では、集中外力の場合なら先端に、ある幅を持った等分布外力の場合もできるだけ先端付近に載せたときに設計断面 B は最も不利になり、その曲げモーメントが最大曲げモーメントである。ただし一般的に、ある断面には正負の曲げモーメントが生じるので、式 (4.70) の被積分関数中の M_u に、正だけの影響線 M_u^+ の箇所か、負だけの影響線 M_u^- の箇所のいずれかをそれぞれ用いて、求められた正負の最大曲げモーメント M_{MAX}^{\pm} に対して安全を確保する必要がある。同様に、設計断面のせん断力の影響線を用いれば最大せん断力 V_{MAX} が算定できる。つまり

$$V_{\text{MAX}}(\text{設計断面 B}) \equiv \max_{\bar{s}_i, \bar{e}_i} \left\{ \sum_{i=1}^N \int_{\bar{s}_i}^{\bar{e}_i} V_u(b; x) q(x) dx \right\} \quad (4.71)$$

となるが、この載荷位置 \bar{s}_i と \bar{e}_i は最大曲げモーメントを得る載荷位置の s_i と e_i とは異なるので注意して欲しい。最大せん断力の場合は符号は関係なく、 $|V_{\text{MAX}}^{\pm}|$ のうちの大きい方を V_{MAX} と考えればよい。

このようにして最大の断面力が求められたあと、例えば曲げに対する設計の場合は求められた最大曲げモーメント M_{MAX} を式 (4.16) に代入して、最外縁応力 $\sigma_{\text{max}}(x)|_{\alpha}$, ($\alpha = \text{U, L}$) を

$$\sigma_{\text{max}}^{\alpha} = \frac{M_{\text{MAX}}}{W_{\alpha}}$$

と算定する。例えば正の最大曲げモーメント ($M_{\text{MAX}}^+ > 0$) に対しては、断面の上端の $\sigma_{\text{max}}^{\text{U}}$ は負（圧縮）だから

$$|\sigma_{\text{max}}^{\text{U}}| = \frac{M_{\text{MAX}}^+}{|W_{\text{U}}|} \leq \sigma_a^{(bc)} \quad \rightarrow \quad |W_{\text{U}}| \geq \frac{M_{\text{MAX}}^+}{\sigma_a^{(bc)}} \quad (4.72)$$

になるように、曲げ圧縮強度 $\sigma_a^{(bc)}$ を用いて断面の設計をすればよいことになる。同時に、断面の下端の $\sigma_{\text{max}}^{\text{L}}$ は正（引張）だから

$$\sigma_{\text{max}}^{\text{L}} = \frac{M_{\text{MAX}}^+}{W_{\text{L}}} \leq \sigma_a^{(bt)} \quad \rightarrow \quad W_{\text{L}} \geq \frac{M_{\text{MAX}}^+}{\sigma_a^{(bt)}} \quad (4.73)$$

³⁴ 本当はちょっと違うが、正確な情報は第 K.5.3 節を参照のこと。

を満足するように、曲げ引張強度 $\sigma_a^{(bt)}$ を用いて断面を設計すればいい。同じ検討を負の最大曲げモーメント ($M_{\text{MAX}}^- < 0$: 負の最大値) に対して行くと、今度は下端が圧縮になるので

$$|\sigma_{\text{max}}^L| = \frac{|M_{\text{MAX}}^-|}{W_L} \leq \sigma_a^{(bc)} \quad \rightarrow \quad W_L \geq \frac{|M_{\text{MAX}}^-|}{\sigma_a^{(bc)}} \quad (4.74)$$

であり、上端の引張側では

$$\sigma_{\text{max}}^U = \frac{|M_{\text{MAX}}^-|}{W_U} \leq \sigma_a^{(bt)} \quad \rightarrow \quad |W_U| \geq \frac{|M_{\text{MAX}}^-|}{\sigma_a^{(bt)}} \quad (4.75)$$

となる。以上の4式を満足するように断面係数 W_U と W_L を設計すれば安全性を確認したことになる。この引張と圧縮の2種類の強度については第7.7.3節の式(7.99)(7.102)を参照のこと。最大せん断力に対する設計の考え方は第2.3.4(3)節の式(2.12)に述べた通りなので、ここでは説明を省略する。具体的な計算例については第2.2.3(3)節や第2.3.4(2)節および第K.5.3節を参照のこと。

演習問題 4-8

20. 長さ ℓ の単純支持梁の、曲げモーメントの影響線 $M_u(b; x)$ とせん断力の影響線 $V_u(b; x)$ が

$$M_u(b; x) = \begin{cases} \frac{x(\ell - b)}{\ell} & 0 < x < b \\ \frac{b(\ell - x)}{\ell} & b < x < \ell \end{cases}, \quad V_u(b; x) = \begin{cases} -\frac{x}{\ell} & 0 < x < b \\ \frac{\ell - x}{\ell} & b < x < \ell \end{cases} \quad (4.76a, b)$$

となることを示し、例えば幅 $c < \ell$ の等分布外力を作用させる場合には、どこに配置したときに $x = b$ に設定した設計断面にとって最も危険になるのかを求めよ。それを元に、その断面の最大曲げモーメントと最大せん断力を求めよ。

4.5.4 不静定梁の影響線

(1) 相反定理を利用した手法

さて不静定構造の場合は、外力の作用箇所が与えられた場合であっても曲げモーメント等を求めるのは面倒だったが、その影響線となるとさらなる場合分けが必要になってもっと手間がかかりそうだ。ただし、例えば図4.63の問題の解 $w_u(x; a)$ が任意の x と a に対して求められさえすれば、その $w_u(x; a)$ の微係数を求めて $x = b$ を代入することによって

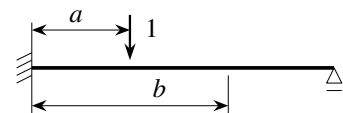


図 4.63 不静定梁の影響線

$$\theta_u(b; a) = -w'_u(x; a)|_{x=b}, \quad M_u(b; a) = -EI w''_u(x; a)|_{x=b}, \quad V_u(b; a) = -EI w'''_u(x; a)|_{x=b} \quad (*)$$

のようにたわみ角や曲げモーメント・せん断力の影響線を求めることはできる。しかしそのためには任意の点 x におけるたわみの影響線 $w_u(x; a)$ を求めないといけないので、あまり合理的なアプローチとは思えない。ところで、ある種の試験では五択問題を瞬時に解く能力を要求されることがある（というのが、以下の定理を紹介する本当の理由ではないのだが・・・否、本当の理由というのがそもそも無いのだが・・・呵呵）。そこで、不静定構造の影響線がどのような分布になるのかを直感的に知るための便利な方法を概説する。それは **Müller-Breslau** の定理と呼ばれている。物理的な観点からではなく、仮想仕事の原理やデルタ関数および相反定理の有意義な使い方³⁵として、とても面白い。

³⁵ 共役梁を用いた Mohr の定理 (p.256) に比べれば、数理解物理的な方法であり、頭の体操にもなると思う。

たわみの影響線: たわみの影響線が、影響線を求めたい点に単位荷重を作用させたときのたわみであることは、式(4.65)のMaxwellの相反定理が不静定系でも成立することから簡単に予想できる。証明は相反定理のそれと同じなので省略するが、図4.64のたわみを $w_u^*(x; b)$ とすると、元の問題のたわみの影響線は

$$w_u(b; a) = w_u^*(a; b) \tag{4.77}$$

として求められる。

たわみ角の影響線: たわみ角の影響線を求めたい場合には、図4.65のように観測点 $x = b$ に集中単位モーメントを作用させた場合のたわみ $w_u^*(x; b)$ を考えてみよう。式(4.58)で示したように集中単位モーメントはデルタ関数の1階の微係数で表現できた。したがって、 $w_u^*(x; b)$ が満足すべきつり合い式は

$$-EI w_u^{*''''}(x; b) + \delta'(x; b) = 0$$

となる。一方前述のように、たわみの影響線 $w_u(x; a)$ が満足すべきつり合い式は等断面梁の場合は

$$-EI w_u''''(x; a) + \delta(x; a) = 0 \tag{**}$$

であるから上式に $w_u(x; a)$ を乗じて全領域積分すると

$$0 = \int_0^l \{-EI w_u^{*''''}(x; b) + \delta'(x; b)\} w_u(x; a) dx = \int_0^l \{-EI w_u''''(x; a)\} w_u^*(x; b) dx - w_u'(b; a)$$

を得る。ただしここでは、被積分関数の第1項は4回部分積分して境界条件を考慮し、第2項も1回部分積分してデルタ関数の定義を用いた。右辺の被積分関数の括弧の中は上式(**)から $-\delta(x; a)$ でなければならない。したがってデルタ関数の定義を用いると上式は

$$0 = -w_u^*(a; b) - w_u'(b; a) \rightarrow -w_u'(b; a) = \theta_u(b; a) = w_u^*(a; b) \tag{4.78}$$

となる。すなわち、影響線を計算したい点に単位の集中モーメントを作用させたときのたわみ形状 w_u^* が、求めたいたわみ角 $\theta_u = -w_u'$ の影響線になる。

曲げモーメントの影響線: 次に曲げモーメントの影響線については、観測点にヒンジを挿入してそのたわみ角が単体量、つまり1だけ不連続になるようにする問題(図4.66)を解いて考えてみよう。この場合には

$$-w_u^{*'}(b+; b) - \{-w_u^{*'}(b-; b)\} = 1 \tag{a}$$

となるので、これは

$$\int_{b-}^{b+} w_u^{*''}(x; b) dx = -1$$

と書いてもいいことは容易に確かめられる。ということは、図のような1だけたわみ角に不連続がある場合のたわみはデルタ関数を用いて

$$w_u^{*''}(x; b) = -\delta(x; b)$$

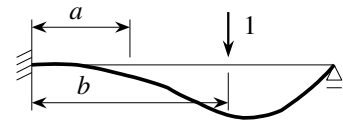


図4.64 不静定梁のたわみの影響線と相反定理

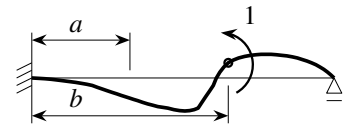


図4.65 不静定梁のたわみ角の影響線 (下向き正)

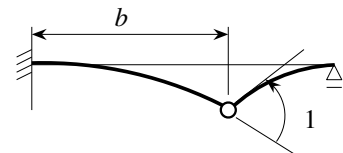


図4.66 不静定梁の曲げモーメントの影響線 (右側は誇張した)

という関係に置き換えられる。これをさらに2回微分すると等価なつり合い式の表現として

$$-EI w_u''''(x; b) - EI \delta''(x; b) = 0$$

を $w_u^*(x; b)$ は満足していることになる。曲げモーメントの場合と同様にこの式に $w_u(x; a)$ を乗じて全領域積分し、部分積分したあと境界条件を考慮して整理すると

$$0 = \int_0^\ell \{-EI w_u''''(x; a) w_u^*(x; b) - EI w_u''(x; a) \delta(x; b)\} dx$$

となるので、再度式(**)を代入して、さらに式(*)から $-EI w_u''(x; a)$ を $M_u(x; a)$ に置き換えると結局

$$0 = \int_0^\ell \{-\delta(x; a) w_u^*(x; b) + M_u(x; a) \delta(x; b)\} dx \rightarrow M_u(b; a) = w_u^*(a; b) \tag{4.79}$$

という関係が求められる。すなわち図 4.66 のように、観測したい点にヒンジを挿入してたわみ角が1だけ不連続になるようにたわませたときのたわみ形状 w_u^* がその点の曲げモーメントの影響線 M_u に一致する。実際にその値を計算するのは面倒ではあるが、分布の様子は比較的容易に想像できる。

せん断力の影響線：せん断力の影響線の場合は図 4.67 のように、観測点にスライダを挿入してその点でたわみが1だけ不連続になるようにしたときのたわみ形状を求めれば、それがせん断力の影響線になる。この場合は

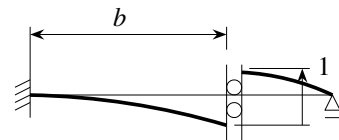


図 4.67 不静定梁のせん断力の影響線 (右側は誇張した)

$$-w_u^*(b+; b) - \{-w_u^*(b-; b)\} = 1 \rightarrow w_u^*(x; b) = -\delta(x; b) \tag{b}$$

とすればいいので、曲げモーメントの場合と同じように演算すると、式 (b) と等価なつり合い式

$$-EI w_u''''(x; b) - EI \delta'''(x; b) = 0$$

を $w_u^*(x; b)$ は満足するから、 $w_u(x; a)$ との積の積分からの若干の計算のあと

$$0 = \int_0^\ell \{-EI w_u''''(x; a) w_u^*(x; b) + EI w_u'''(x; a) \delta(x; b)\} dx$$

を得る。そこで式(*)から $-EI w_u'''(x; a)$ を $V_u(x; a)$ に置き換えて、さらに式(**)を代入すると

$$0 = \int_0^\ell \{-\delta(x; a) w_u^*(x; b) - V_u(x; a) \delta(x; b)\} dx \rightarrow V_u(b; a) = -w_u^*(a; b) \tag{4.80}$$

となる。つまり、たわみ (の負の値) に1だけの不連続がある場合のたわみ形状 $-w_u^*$ がその点のせん断力の影響線 V_u に一致する。正しい影響線を図 4.68 に示したので上の四つのスケッチと比較して欲しい。

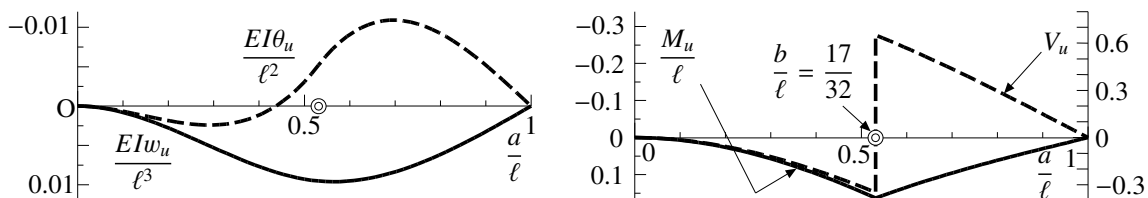


図 4.68 片端固定片端単純支持梁の $b = 17/32 \ell$ の断面の影響線

実際に静定な片持ち梁と単純支持梁³⁶における曲げモーメントとせん断力の影響線の式 (4.68) (4.69) (4.76b) を示したのが図 4.69 である。曲げモーメントは下向きが正、せん断力は上向きが正である。この図をなんらか

³⁶ 単純支持梁の曲げモーメントの影響線図は、設計断面に集中せん断力が作用したときのモーメント図に似ているので注意すること。

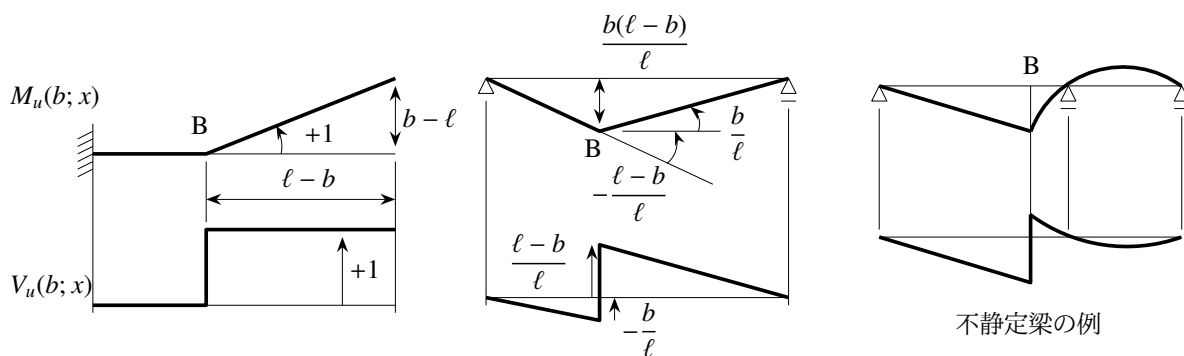


図 4.69 曲げモーメントとせん断力の影響線と Müller-Breslau の定理

の梁のたわみ図であるように捉えた上で負のたわみ角と負のたわみの点 B の不連続量を求めると、それぞれ

片持ち梁: 負のたわみ角の不連続量 = +1 - 0 = 1, 負のたわみの不連続量 = +1 - 0 = 1

単純支持梁: 負のたわみ角の不連続量 = $\frac{b}{l} - \left(-\frac{l-b}{l}\right) = 1$, 負のたわみの不連続量 = $\frac{l-b}{l} - \left(-\frac{b}{l}\right) = 1$

となることから、上式 (a) (b) が確かめられる。つまり設計断面にヒンジを挿入した上で、その負のたわみ角の差が 1 になるように強制的に変位させた状態のたわみ図が曲げモーメント（下向きが正）の影響線になる。また設計断面にスライダを挿入した上で、その負のたわみの差が 1 になるように強制的に変位させた状態のたわみ図がせん断力（上向きが正）の影響線になる。図 4.69 の一番右にもう一つの不静定梁の例を示したが、これは計算しないで描いたものである。呵呵。ちなみに、支点反力の影響線も支持位置から 1 だけ強制的にたわませたときのたわみに一致する。

(2) 重ね合わせによる曲げモーメントの影響線の誘導

前節の方法は影響線の概略を知るためには便利だが、数値そのものを求めるにはやはり重ね合わせの原理等を用いてきちんと解いた方が簡単で確実かもしれない。そこで、その重ね合わせの原理を用いて図 4.66 の曲げモーメントの影響線を求めてみよう。まず右端の支点を取り除いて片持ち梁の静定系を考える。この静定系の $x = b$ の点 B の曲げモーメントの影響線 $\bar{M}_u(b; x)$ は式 (4.68) の右辺および図 4.62 に示した通りである。そこで元の系に戻すための不静定反力 X を右端に作用させた系を設定すればいいので、図 4.70 の下の図のように、右端に単位荷重が作用したときの点 $x = b$ の曲げモーメントを M_b とすることによって、元の系の点 B の曲げモーメントの影響線は

$$M(b; x) = \bar{M}_u(b; x) + X M_b$$

のように一旦は表示できるだろう。また M_b の方が $M_b = l - b$ になるのは簡単にわかるはずだ。

あとは不静定反力 X を求めればいい。そのためには、同じく図 4.70 の左上の図のように任意点に単位荷重が載ったときの右端のたわみ Δ_x が求められていれば、それと不静定反力によるたわみを重ね合わせたたわみが右端で零になる条件から、その X を求めることができる。つまり

$$X \delta = \Delta_x \quad \rightarrow \quad X = \Delta_x / \delta$$

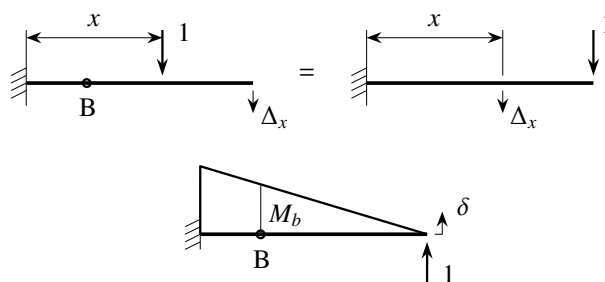


図 4.70 影響線を重ね合わせの原理で求める

のようになる。ここに δ は図 4.70 の下の図の先端のたわみで、式 (4.39a) から $\delta = l^3 / (3EI)$ である。ところで同じ図の左側の系の Δ_x がその右側の系の Δ_x に等しいことは、Maxwell の相反定理から明らかである。した

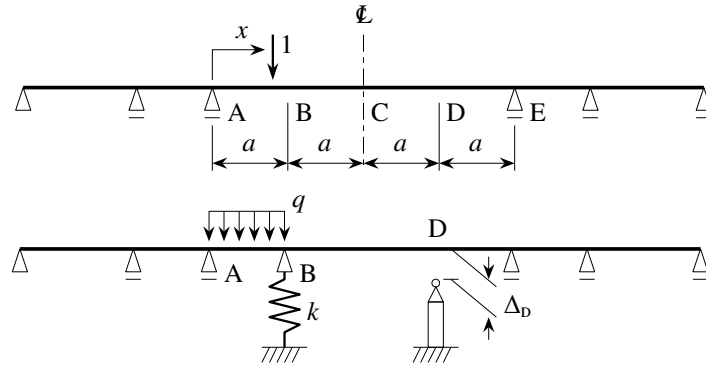
がって式(4.38)から $\Delta_x = \frac{3\ell x^2 - x^3}{6EI}$ となるので、上式から X を求めることができ、結局、曲げモーメントの影響線は

$$M(b; x) = \bar{M}_u(b; x) + \frac{1}{2\ell^3} (3\ell x^2 - x^3)(\ell - b) \quad (\star)$$

と求められる。

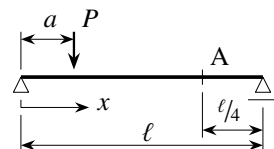
演習問題 4-9

21. Müller-Breslau の定理を用いて、重ね合わせで求めた上式(★)を導け。結構たいへんな計算である。
22. 図 4.31 のような、等断面等スパンの 2 径間連続梁において、片方のスパン中央断面の曲げモーメントの影響線を、重ね合わせの原理および Müller-Breslau の定理で求めよ。
23. 次の図は、材料および構造が中央スパンの中央の点 C の断面を含む面に対して左右対称な連続梁である。この中央スパンの点 A から点 E の間の任意の点に単位荷重を載せた場合の点 B のたわみ $v_B(x)$ 、つまり点 B のたわみの影響線が求められているものとする。ただし $0 < x < 4a$ である。



- (1) $0 < x < 4a$ の範囲に限定し、点 D のたわみの影響線 $v_D(x)$ を求めよ。
- (2) この中央スパンの保守のために、図のように梁の点 B と点 D の位置に支保工を設けることにし、その支保工の安全性を確認することにした。ただし、点 B に設けた支保工は柔だったので、線形バネ定数 k の弾性支持でモデル化した。また点 D に設けた支保工は十分剛ではあったが、荷重を載せる前には梁との間に $\Delta_D > 0$ のギャップが発生していた。この支保工を設置した構造の梁の点 A と点 B の間に保守のための機材を置くことにするのだが、ここでは簡単のためにそれが等分布荷重 $q \geq 0$ になるものとして、それを徐々に増やしていったところ、 q が q_1 に達したときに梁の点 D が支保工に触れた。
 - a) $q < q_1$ の場合の、点 B と点 D のたわみ w_B と w_D を求めよ。
 - b) 点 D が支保工に触れるときの荷重 q_1 を求めよ。
 - c) $q > q_1$ の場合の点 D の反力 R_D 、つまりその支保工が支えなければならない力 R_D を求めよ。
24. 長さ ℓ で曲げ剛性 EI を持つ一様断面の単純支持梁を考える。その梁に、右図のように、 $x = a$ ($0 < a < \ell$) の位置に集中荷重 P が作用したときの、 $a \leq x < \ell$ のたわみ $w(x)$ は

$$w(x) = \frac{Pa\ell^2}{6EI} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\} \left(\frac{\ell - x}{\ell} \right) - \left(\frac{\ell - x}{\ell} \right)^3 \right]$$



のように求められている。以下

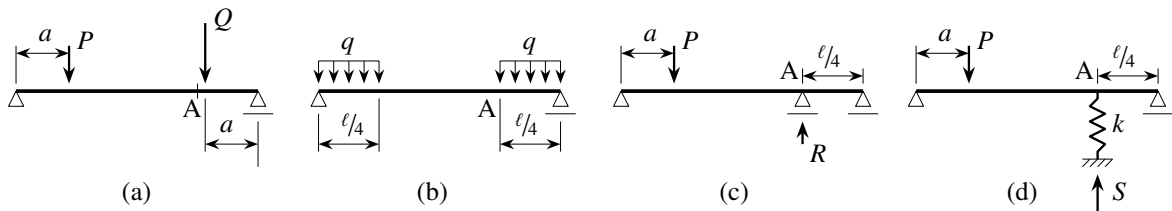
$$0 < a \leq \frac{\ell}{4}$$

とし、点 A とは $\left(x = \frac{3\ell}{4}\right)$ の位置を指すものとする。

- (1) 図 (a) のように、 $x = a$ の位置に集中荷重 P が作用し、 $x = \ell - a$ の位置に集中荷重 Q が作用したときの、点 A のたわみを求めよ。上の式を利用してもいい。
- (2) 図 (b) のように左右端から $\ell/4$ の領域に等分布荷重 q を載せた。このときの点 A のたわみを求めよ。
- (3) 図 (c) のように、点 A を単純支持に変更し、集中荷重 P を $x = a$ の位置に置いた。このときの点 A の支点反力 R を求めよ。
- (4) 図 (d) のように、バネ定数が k の線形バネで点 A を弾性支持した上で、集中荷重 P を $x = a$ の位置に置いた。このときの点 A の支点反力 S を求めよ。ただし、バネ定数 k は

$$k = \frac{256EI}{13\ell^3}$$

で与えられるものとする。



さて、最後の問題については、読者は以下の解答例を読まずに自力で解いて欲しい。

- (1) P によるたわみは、公式に $x = 3\ell/4$ を代入するだけなので、荷重が左にあることを添え字にして

$$w_l = w\left(\frac{3\ell}{4}\right) = \frac{Pal^2}{6EI} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right\} \frac{1}{4} - \frac{1}{64} \right] = \frac{Pal^2}{384EI} \left\{ 15 - 16\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right\} = \frac{P}{384EI} (15a\ell^2 - 16a^3)$$

また Q が右から a の位置にあった場合の $x = 3\ell/4$ のたわみ w_r は、左右対称なことから

$$w_r = w\left(\frac{\ell}{4}\right) = \frac{Qal^2}{6EI} \left[\left\{ 1 - \left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right\} \frac{3}{4} - \frac{27}{64} \right] = \frac{Qal^2}{384EI} \left\{ 21 - 48\left(\frac{a}{\ell}\right)^2 \right\} = \frac{Q}{384EI} (21a\ell^2 - 48a^3)$$

になるので、その両者の和 w_i は

$$w_i = w_l + w_r = \frac{P}{384EI} (15a\ell^2 - 16a^3) + \frac{Q}{128EI} (7a\ell^2 - 16a^3)$$

となる。

- (2) 前問の $P = 1, Q = 1$ のときの w_i が影響線なので

$$w_i = \frac{1}{384EI} (36a\ell^2 - 64a^3)$$

であり、したがって分布外力に対するたわみは

$$w = \frac{q}{384EI} \int_0^{\ell/4} (36a\ell^2 - 64a^3) da = \frac{17q\ell^4}{16 \times 384EI} = \frac{17q\ell^4}{6144EI}$$

となる。

- (3) 支点反力 $-R$ による $x = 3\ell/4$ のたわみ w_R は、問題用紙の公式に $x = 3\ell/4$ と $a = 3\ell/4$ を代入すればいいから、問題 (1) の w_l に $a = 3\ell/4$ を代入して

$$w_R = \frac{-R\ell^2}{384EI} \frac{3\ell}{4} \left\{ 15 - 16\frac{9}{16} \right\} = -\frac{3R\ell^3}{256EI} \quad \text{あるいは} \quad = -\frac{R\ell^3}{384EI} \frac{9}{2}$$

となる。支点になる条件は

$$w_l + w_R = 0 \quad \text{あるいは} \quad Pa\ell^2 \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\} = R\ell^3 \frac{9}{2}$$

だから

$$R = \frac{256EI}{3\ell^3} \frac{Pa\ell^2}{384EI} \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\} = \frac{2P}{9} \left(\frac{a}{\ell} \right) \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\}$$

となる。

- (4) 支点反力 S によるたわみは問題 (3) の w_R の R を S にすればいい。それを w_S と書くことにすると、支点のバネの抵抗条件は

$$S = k(w_l + w_S)$$

となる。つまり

$$\frac{S}{k} = \frac{Pa\ell^2}{384EI} \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\} - \frac{3S\ell^3}{256EI}$$

が成り立たなければならないから

$$\left(\frac{3\ell^3}{256EI} + \frac{1}{k} \right) S = \frac{Pa\ell^2}{384EI} \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\}$$

に k の表現 $\left(\frac{1}{k} = \frac{13\ell^3}{256EI} \right)$ を代入すれば

$$\frac{16\ell^3}{256EI} S = \frac{Pa\ell^2}{384EI} \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\} \quad \rightarrow \quad S = \frac{Pa}{24\ell} \left\{ 15 - 16 \left(\frac{a}{\ell} \right)^2 \right\}$$

と求められる。

といったところで愚痴を書いておく。この演習問題 24 番はある試験に出したもので、解答例でもわかるように重ね合わせの原理だけで解ける。それができるように公式が問題で与えてあるのである。しかし 20 名程の受験者の半数程がこの公式を使わず、わざわざ曲げモーメントを求めて（それだけで時間が無くなる）単位荷重法あるいは次の章で紹介する Castigliano の第 2 定理を使う。もう時間は無いし積分は間違ってしまう。まず (1) は単に x に位置を代入するだけなのにそれすらできない人が数名。公式を無視して曲げモーメントを別途求めて積分した人が数名。また公式は用いたものの左右対称等の幾何学的な特徴が理解できない人が数名。(2) が影響線の問題だとわかった人はたったの 2 割。またぞろ曲げモーメントを求める。しかも、公式を無理やり使おうとして分布荷重を集中荷重に置き換えるといった無茶ぶりも数名あった。そして (3) と (4) は、ほぼ三分の一が曲げモーメントを再度求めて単位荷重法等の積分をして時間を浪費し、そして計算間違いをした。線形系の基本は重ね合わせである。上では便利だと書いたのだが、単位荷重法のような積分公式だけをなぜ覚えようとするのだろうか。積分公式は決して安全な手段とは限らないよ。ちなみに演習問題 23 番で各径間の寸法や境界条件を曖昧なままにしてあるのは、その積分という手段を使えないようにするためだ。

4.6 梁のせん断応力・せん断変形

4.6.1 初等梁理論の枠組内のせん断応力

(1) 断面に発生したせん断力をつくるせん断応力

前から順にここにたどり着いた読者の多くはもう忘れていていると思うが、梁の断面にはせん断力が生じるにもかかわらず、初等梁理論はそれに対応するせん断変形は無いという仮定に基づいて定式化されているので、せ

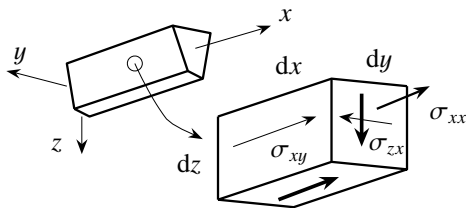


図 4.71 梁の中に発生するせん断応力

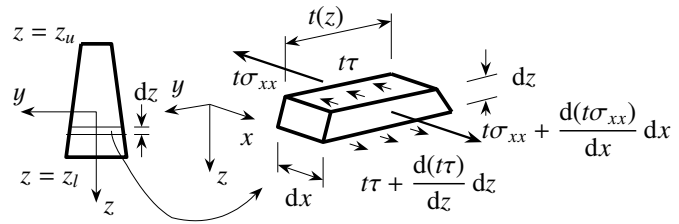


図 4.72 z-x 面内曲げを受ける梁のせん断応力 σ_{zx}

せん断応力も生じない。しかし、その理論で得られる直応力 σ_{xx} の精度はとてもいいことがわかっている。そもそも断面にはせん断力 $V(x)$ という抵抗力が生じないとつり合わないことから、梁の内部にせん断応力も発生しているのは明らかである。そのため、例えばプレートガーダのウェブ板自体やウェブとフランジの接合部等の安全性の確認には、このせん断応力分布も求めておく必要があるはずだ。

ではどうしたらいいだろう。一番確実なのは、梁理論を諦めて連続体として曲げ部材の挙動を解くことだろう。しかし接合部の溶接部を設計するためだけにそのような3次元の計算をすることはあまり現実的ではない。幸い我々が求めた梁理論による曲げ理論の直応力 σ_{xx} の精度はかなりいいので、それに対応するせん断応力を求めれば、直応力と同じくらいの精度になるかもしれない。構造力学で我々が抛りどころにしているのはもちろん力のつり合いだ。したがって、この直応力につり合うようなせん断応力を求めるというのはどうだろう。それは多分、工学的に許容できる第1次近似としての精度を持つせん断応力になる可能性が十分期待できる。そこで第3章の連続体の力学にちょっとだけ戻って、梁理論で求められた直応力につり合うせん断応力を求めてみよう。そのとき図 4.71 に示したように梁の内部の微分体積要素を取り出すと、直応力 σ_{xx} とつり合うべきせん断応力成分は σ_{zx} , σ_{xy} の二つである。ただ z-x 面内の曲げ問題で生じるせん断力 $V(x)$ は z 方向の力であり、それに対応するのは図に太い矢印で示した σ_{zx} の方である。また I 形断面のプレートガーダを思い浮かべると、そのウェブ部は y 方向の肉厚が非常に薄いため、 σ_{xy} の大きさが σ_{zx} の大きさより有意になるとは考え難い。したがって梁理論で次に重要な応力成分は σ_{zx} の方だと考え、しばらくの間は σ_{xy} を無視する。

z-x 面内の曲げ問題であることを考えると、y 方向（肉厚 $t(z)$ の方向）の応力分布を厳密に取り扱う必要はないだろうから、次の図 4.72 では y 方向に全幅 $t(z)$ をとり、 $t(z) \times dx \times dz$ の微分要素の局所的な力のつり合いを考えても構わないだろう。そういった意味で近似的なせん断応力を扱っていることから、以下 σ_{zx} の代わりに τ という記号を用いる。こうすると式 (3.22) に対応する x 方向の力のつり合いは

$$\frac{\partial(t\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(t\tau)}{\partial z} + t\bar{p}_x = 0, \quad t\bar{p}_x \equiv \int_y p_x dy$$

となる。ここに p_x は x 方向の単位体積当たりの分布外力で、 \bar{p}_x はその y 方向の平均である。図心を通るように x 軸を配置させたときの梁理論の範囲内の直応力は式 (4.14b) で算定されているから、これを上式に代入して左辺第 1, 3 項を右辺に移すと

$$\frac{\partial(t\tau)}{\partial z} = -t(z) \frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x} - t\bar{p}_x = -t(z) \left(\frac{1}{A} \frac{dN}{dx} + \frac{z}{I} \frac{dM}{dx} + \bar{p}_x \right)$$

とも表現できる。これに梁理論のつり合い式 (4.18) (4.20) を代入して整理すると

$$\frac{\partial(t\tau)}{\partial z} = -\frac{t(z)zV(x)}{I} - t(z) \left(\bar{p}_x - \frac{1}{A} \int_A p_x dA \right), \quad \left[\because \frac{dN}{dx} = -p \equiv - \int_A p_x dA \right] \quad (*)$$

となる。右辺の最後の項は体積力の y 方向平均と全断面平均との差であり、第1次近似としては無視していい。

上式 (*) を、断面の上面 $z = z_u$ から z 方向の任意の位置まで積分すると

$$t(z) \tau(x, z) - t(z_u) \tau(x, z_u) = -\frac{V(x)}{I} \int_{z_u}^z t(\xi) \xi d\xi \quad (4.81)$$

という関係を得る。 ξ は z に関する積分のための補助変数である。すなわち $z = z_u$ のせん断応力がわかれば、梁理論で求められるせん断力と断面形状を用いて断面内のせん断応力分布を計算できるようになった。通常、梁の上面には直接外力が作用することが無いと考えていい³⁷ため、梁の上面はせん断応力に関しては自由表面である。したがって上式(4.81)の左辺第2項は零となり、最終的に断面内のせん断応力分布は

$$\tau(x, z) = -\frac{V(x)G_z(z)}{t(z)I} \quad (4.82)$$

となる。ここに

$$G_z(z) \equiv \int_{z_u}^z t(\xi)\xi d\xi \quad (4.83)$$

で定義された関数 $G_z(z)$ は断面1次関数と呼ばれる。この積分を断面の下端($z \rightarrow z_l$)まで実行すると、 $t(\xi)d\xi = dA$ であることに気が付けば

$$G_z(z_l) = \int_{z_u}^{z_l} \xi t(\xi) d\xi = \int_A z dA = J_z = 0$$

となる。つまり、全断面積分したものが断面1次モーメントに一致することが $G_z(z)$ の名前の由来である。ここでは x 軸が図心を通るようにしているため、断面下端 $z = z_l$ の自由表面でもせん断応力が零になることを確認できた。なお $V = -EIw'''$ なので、せん断応力 τ と変形($-w'''$)の関係にはせん断弾性係数 G は関与せず、Young率 E が見かけ上の材料係数になっているが、これは直応力につり合う条件からせん断応力を誘導したからである。せん断弾性係数が材料係数になる素直な改良モデルは第4.6.3節で説明する。ただし、式(4.82)のモデルの精度が悪いわけでは決していない。

では図4.73の左側に示した矩形断面を例にとり、せん断応力分布を求めてみよう。断面1次関数は

$$G_z(z) = \int_{-h/2}^z t\xi d\xi = \frac{t}{2} \left\{ z^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\}$$

となり、 $I = th^3/12$ であるから

$$\tau = -\frac{6V(x)}{th^3} \left\{ z^2 - \left(\frac{h}{2}\right)^2 \right\}$$

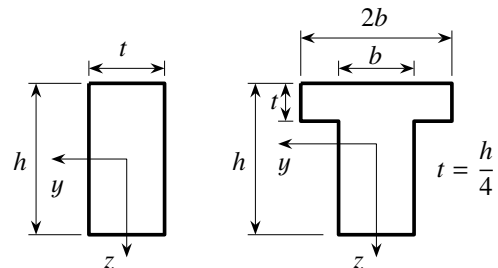


図4.73 矩形断面とT形断面

を得る。これは図4.74に示したように断面中央 $z = 0$ で最大になるような放物線分布であり、第3.6.4(3)節の例で求めた応力分布式(3.199b)と同じ形になっている。そしてその最大値は上式より $z = 0$ で求められ

$$\tau_{\max} = \tau(z = 0) = \frac{3V(x)}{2th} = \frac{3}{2}\tau_{\text{ave}}$$

となる。最後の式の τ_{ave} はせん断力を断面積(th)で単純に除した平均せん断応力である。念のために放物線分布の平均値を算定してみると確かに

$$\bar{\tau} \equiv \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} \tau(z) dz = \frac{6V}{th^4} \int_{-h/2}^{h/2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2\right) dz = \frac{V}{th} = \tau_{\text{ave}}$$

になっている。

(2) 曲げを受けた梁内部の主応力方向

求められたせん断応力分布を直応力と一緒に示したのが図4.74である。軸力が作用せず純粋に曲げのみが発生している場合には、この図のように x 方向の直応力が図心で零になる三角形分布をし、それにつり合うように求めた第1次近似としてのせん断応力分布は x 軸上で最大値をとるような放物線分布をする。なお z 方向の直応力については、少なくとも構造力学としての梁理論の範囲内の第1次近似では零と考えていいだろう。

³⁷ トラスやアーチのように横桁から荷重を受ける場合はそれでいいが、プレートガーダの場合は厳密にはそうならない。ただ、床版との合成作用が無視できると考えてそのように近似するのだろう。

せん断応力は断面の上下面の自由表面では零になっているから、図 4.74 に示したように上下面では軸方向の直応力が最大あるいは最小の主応力に一致し、主方向は x, z 方向になる。これに対し x 軸上では二つの直応力が零になり、せん断応力の方は最大値をとる。したがってこの位置では式

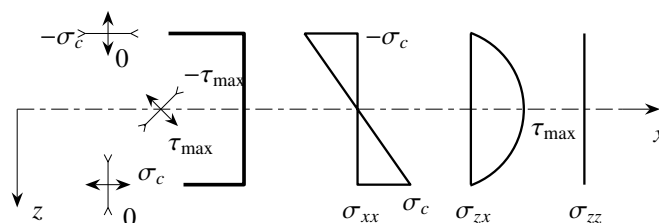
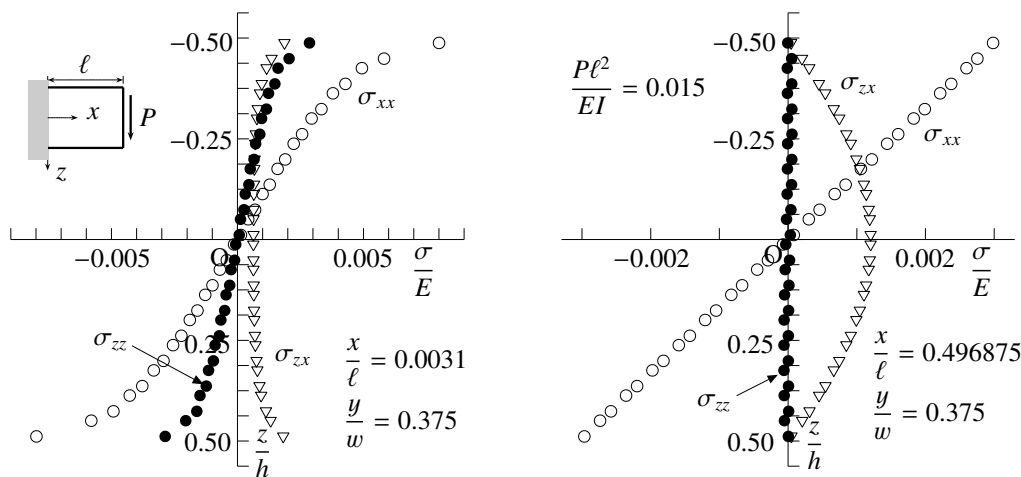


図 4.74 梁の断面に発生する応力分布と主方向

(3.30) (3.31) を用いると、主応力が $\sigma_I = \tau_{max}$, $\sigma_{III} = -\tau_{max}$ ($\sigma_{II} = \sigma_{yy} = 0$) となり、主方向は x 軸から ± 45 度の方向になる。例えばコンクリート材料のように引張に非常に弱い材料で単純梁ができている場合、梁の下面では x 方向に最大の引張主応力が発生するため、もしひび割れが入るとしたら z の負の方向に進展することが予想される。一方断面の中央部ではその主引張方向が x 軸に対して 45 度傾いているため、梁の下面で発生したひび割れは上方に進展するに従って曲がっていき、図心位置付近では x 軸から 45 度くらい傾いた方向に進展することも予想され、実験でも観察されている。3 次元で最も低次の定ひずみ四面体有限要素を用いて、スパンが $\ell = 0.2\text{ m}$ で矩形断面 $h \times w = 0.16 \times 0.005\text{ (m)}$ のかなり短い片持ち梁のせん断を解析したのが図 4.75 である。スパン方向に 40 分割で桁高方向に 32 分割し合計 3986 節点・15360 要素でモデル化した場合の結果で、図中のデータ位置は積分点のそれである。スパン中央付近の応力分布は梁理論のそれをよく示しているが、固定端は梁の境界条件を 3 次元的に実現するのが困難なため、その拘束の仕方によって梁理論とは異なる分布になっているが、この梁理論との乱れは端部から離れるに従ってその影響が小さくなる。このような乱れの距離減衰効果は総じて **Saint-Venant** の原理と呼ばれている。なおこの例は梁とは呼べないくらい短いものなので、せん断応力と直応力が同じくらいのオーダーになっているが、普通の細長い梁では図 4.4 に示したくらいの大きさの差がある。



(a) 固定端付近 (b) スパン中央付近
図 4.75 3 次元有限要素による片持ち梁のせん断で生じる応力成分

演習問題 4-10

25. 円形断面の場合のせん断応力分布を求め、最大せん断応力が平均せん断応力の $4/3$ になっていることを示せ。
26. 図 4.73 右側の図にあるような T 形断面の場合のせん断応力分布を求めよ。そして、その結果は気持ちよく容認できるものかどうか、じっくり考察せよ。

(3) 断面力を作らない成分も含むせん断応力分布

ところで、演習問題 4-10 の 26 番の上フランジの厚さに相当する寸法 t は、特に鋼構造の場合は非常に小さいのが普通だ。そういった部材を総じて薄肉断面部材と³⁸呼ぶ。例えば I 形断面の場合のせん断応力分布を式 (4.82) で計算したものを図 4.76 に示した。ウェブの部分では図に示したような値になって滑らかな放物線状に分布する

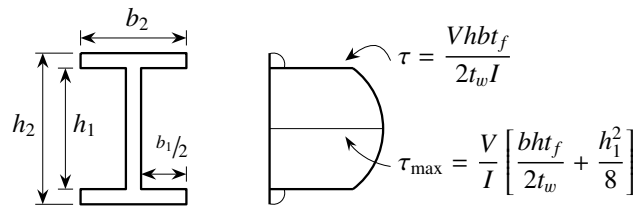


図 4.76 I 形断面に発生するせん断応力分布 - その 1

が、フランジとの接合部で不連続が生じ、フランジ部分のせん断応力は比較的小さくなる。これはせん断応力 τ を y 方向には一様なものとして扱って定式化したからである。しかもウェブと直接は接合されていないフランジの $b_1/2$ の突出部分は上下の両面共にせん断応力に対する自由表面なので、上下フランジのせん断応力 τ は y 方向には一様ではない上に、計算値よりはもっと小さく、ほとんど零だと予想できる。したがって式 (4.82) を用いて求めたこの図の細い線で描いたフランジ部分のせん断応力分布は明らかに間違いだ。試しにせん断応力をウェブ部分だけで積分して薄肉だと設定すると、フランジの部分が含まれていないのに

$$(b_2 - b_1) \int_{-h/2}^{h/2} \tau dz = V \left\{ 1 - \frac{2bt_f^2(3h + t_f)}{2bt_f(3h^2 + t_f^2) + t_w(h - t_f)^3} \right\} \sim V \left\{ 1 - \frac{t}{h} \frac{6b}{6b + h} \right\} \sim V \quad \left[\because \frac{t}{h} \ll 1 \right]$$

となり、薄肉の I 形断面梁ではせん断力のほぼ 100% をウェブだけが受け持っていることがわかる。ただし、上式では $h \equiv \frac{h_2 + h_1}{2}$, $t_f \equiv \frac{h_2 - h_1}{2}$, $b \equiv b_2$, $t_w \equiv b_2 - b_1$ とした。また最後から二番目の式ではウェブとフランジの肉厚をどちらも t とした上で、 h に比べて肉厚が非常に薄い ($t \ll h$) ものとした。

そしてウェブの最大応力もフランジが無い単なる長方形断面の場合と同様

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \tau_{\text{ave}} \frac{1 + 4 \frac{b t_f}{h t_w}}{1 + 6 \frac{b t_f}{h t_w}}, \quad \tau_{\text{ave}} \equiv \frac{V}{A_w}, \quad A_w \equiv h t_w$$

となり、図 4.77 に示したように実際に用いられる寸法の範囲では、最大応力は平均応力のせいぜい 120% くらいだと考えられる。そのため単純なせん断に対する設計時にはウェブ面積だけを用いた平均応力で照査してもいいのかもしれない。以上の考察

からフランジのせん断応力 σ_{zx} は零だと考えてよく、フランジは直応力によって抵抗する役割を主に持っているのみなしていい。ただ鋼構造の場合、ウェブとフランジの接合部では薄板同士を溶接してあることから、溶接ののど厚を設計する場合等には、接合部のせん断応力も工学的な範囲で精度よく求められなければならないのは当然である。では上のモデルで求められた接合部の $\tau = \frac{Vhbt_f}{2t_w I}$ の精度は十分なのだろうか。また本当にフランジ部分にはほとんどせん断応力が発生してはいないのだろうか。

実は二つ目の問に対する答は否である。前節のせん断応力の誘導の一番最初で σ_{xy} を σ_{zx} に比べて比較的小さいものとして無視していたが、フランジでは逆になるからだ。つまり、フランジの z 方向の断面寸法 (板厚) は y 方向の断面寸法 (突出幅) よりも非常に小さいため、せん断応力の分布状況もこの寸法比率に近い大きさ

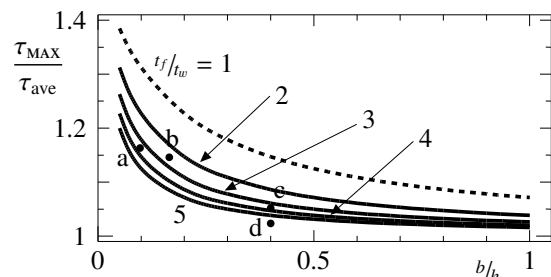


図 4.77 I 形断面ウェブの τ_{\max} ; a. アーカンソーリバー橋, b. 合成桁阪神公園標準, c. 長柄橋, d. 新十三大橋。4 例 [190] は下フランジ厚を用いた

³⁸ シカゴ北部のとある食堂のすき焼き (とはちょっと概念の異なる食べ物) の肉は厚かったが、どうやら薄く切ることができないからだった。さてその近所にある肉屋のウィンドウには **MEAT** という電光サインがあって **M** がゆっくり明滅していた。

比になっており、ウェブとは逆に σ_{xy} の方が σ_{zx} より有意になっている。もちろん z - x 面内で曲げを受ける梁理論の範囲内では、 y 方向のせん断力という断面の抵抗力を期待していないし、考える必要も無いため、この σ_{xy} の断面内平均は零になることが容易に予想できる。したがって σ_{xy} そのものも求める必要は無いかもしれないが、ウェブとの接合部の設計等で少し心配があるので、その大きさと分布をここでは調べておこう。

そこで少し一般化してフランジでもウェブでも通用し、さらに I 形断面以外の薄肉断面でも考え易いように、図 4.78 のように薄板に沿った断面内座標として s 軸を考え、この s - x 面内の x 方向の力のつり合いから、梁理論で求められた直応力 σ_{xx} につり合うようなせん断応力 σ_{sx} を求めておこう。もちろん前出の I 形断面のフランジやウェブの場合には、この s 軸はそれぞれで y 軸あるいは z 軸に平行にとればいい。さて図にも示したように、ここでも肉厚方向の分布を無視して近似的に平均的な応力のみを考えるため、再度せん断応力 σ_{sx} を τ と表記する。体積力は式 (4.81) の誘導でも無視できたので、最初から考えないで、前節と同様に x 方向の力のつり合いをとると

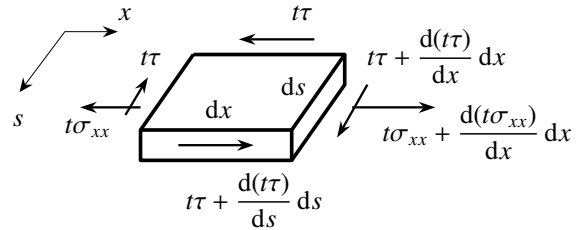


図 4.78 任意の薄肉部分に発生するせん断応力と直応力のつり合い

$$\frac{\partial(t\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(t\tau)}{\partial s} = 0$$

であるから、 s について積分することにより最終的にせん断応力が

$$\tau(s, x) = \frac{1}{t(s)} (t\tau)|_{s=s_0} - \frac{V(x)G_s(s)}{t(s)I} \tag{4.84}$$

となる。ここに s_0 は s 軸に沿って積分するときの起点の座標値であり

$$G_s(s) \equiv \int_{s_0}^s t(\xi) z(\xi) d\xi \tag{4.85}$$

は s の関数としての断面 1 次関数である。また ξ は s に関する積分の補助変数であり、 z も s の関数として取り扱うことができるようにパラメトリック表示してある。形式的には式 (4.82) と同じである。

より一般的な薄肉断面の場合、特に閉断面³⁹の場合については別途文献を参照して欲しい。ここでは I 形断面のような薄板の集合として作られた開断面のみを対象とする。その場合、図 4.79 に示したようにウェブとフランジの板同士の接合点が存在する。上フランジ

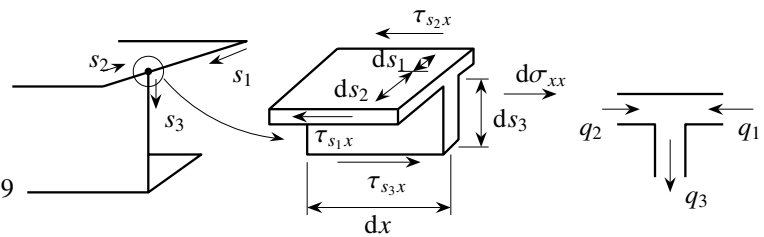


図 4.79 ウェブとフランジとの接合部のせん断流の連続条件

ではそれぞれの突出端がせん断応力に関しては自由表面なので、そこから s_1, s_2 軸を定義しておくと便利だ。これに対しフランジとウェブの接合点の s_3 軸の起点では、応力の連続性からその条件を求めなければならない。そこで図 4.79 の中央の図のように接合点近傍の微分要素の x 方向の力のつり合いをとると

$$d\sigma_{xx} (ds_1 + ds_2 + ds_3) + (t_3\tau_{s_3,x} - t_2\tau_{s_2,x} - t_1\tau_{s_1,x}) dx = 0$$

が成立しなければならない。ここに t_i はそれぞれの区間の肉厚である。第 1 項の直応力の部分は第 2 項に比べると高次項なので無視すると、結局接合点では

$$t_3\tau_{s_3,x} - t_2\tau_{s_2,x} - t_1\tau_{s_1,x} = 0$$

³⁹ 閉断面や開断面の意味については第 7.2 節を参照のこと。

を満足しなければならない。あるいはせん断流という量を

$$q_i(x, s) \equiv t_i(s) \tau_{s_i x}(x, s) \tag{4.86}$$

と定義しておく、上の連続条件は

$$q_1 + q_2 = q_3 \tag{4.87}$$

とも表現できる。すなわち、図 4.79 の右側の図に示したように、ちょうど T 字になった水路の流量の連続性が式 (4.86) のせん断流の連続条件になっている。このことから「流」の文字が用いられている。

I 形断面の例: では図 4.76 の薄肉の 2 軸対称 I 形断面を例にして、せん断応力の分布を求めてみよう。 s の座標は図 4.80 に定義した。 s_1 の始点は自由表面に当たるので $t\tau_{s_1 x}|_{s_1=0} = 0$ となり

$$G_s = \int_0^s t_f(-h/2) ds_1, \quad s_1 = y + b/2$$

であるから

$$G_s = -\frac{t_f h}{2} \int_{-b/2}^y d\xi = -\frac{t_f h}{2} \left(y + \frac{b}{2} \right), \quad \tau_{s_1 x} = \frac{hV}{2I} \left(y + \frac{b}{2} \right)$$

となる。 s_4 も同様で、 $z = h/2$ であることに注意すれば

$$\tau_{s_4 x} = -\frac{hV}{2I} \left(y + \frac{b}{2} \right)$$

を得る。次に s_2 についても $s_2 = b/2 - y$ であることに注意すれば、上の誘導とほとんど同じ計算をすればよく

$$G_s = -\frac{t_f h}{2} \left(\frac{b}{2} - y \right), \quad \tau_{s_2 x} = \frac{hV}{2I} \left(\frac{b}{2} - y \right)$$

となる。同様に s_5 についても

$$\tau_{s_5 x} = -\frac{hV}{2I} \left(\frac{b}{2} - y \right)$$

を得る。

一方、上フランジとウェブの接合点では式 (4.87) の連続条件が成立しなければならないから、上で得た結果を代入すると

$$t_w \tau_{s_3 x}|_{s_3=0} = t_f \tau_{s_1 x}|_{s_1=b/2} + t_f \tau_{s_2 x}|_{s_2=b/2} = \frac{t_f h V b}{2I}$$

となる。これで s_3 方向への始点のせん断流の値が求められた。よって

$$\tau_{s_3 x} = \frac{1}{t_w} \left(\frac{t_f h V b}{2I} \right) - \frac{V G_s}{t_w I}$$

と表現でき、 $s_3 = z + h/2$ だから

$$G_s = t_w \int_0^s z ds_3 = t_w \int_{-h/2}^z \xi d\xi = \frac{t_w}{2} \left\{ z^2 - \left(\frac{h}{2} \right)^2 \right\}$$

が断面 1 次関数になる。したがって、ウェブ内のせん断応力分布は

$$\tau_{zx} = \frac{V(x)}{8I} \left\{ \frac{4bht_f}{t_w} + h^2 - 4z^2 \right\}$$

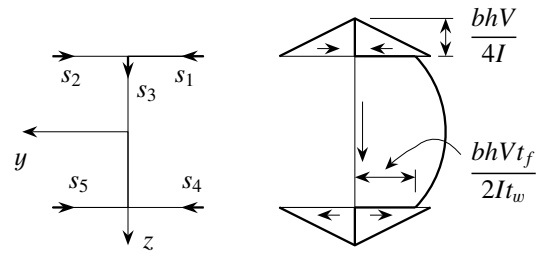


図 4.80 I 形断面に発生するせん断応力分布 - その 2

になる。以上の分布の結果を図 4.80 の右側の図に示した。

まずウェブのせん断応力分布を見てみよう。ウェブ上下端のせん断応力値とウェブ中央のせん断応力の最大値とはそれぞれ

$$\frac{Vhbt_f}{2t_wI}, \quad \frac{V}{I} \left(\frac{bht_f}{2t_w} + \frac{h^2}{8} \right)$$

になった。前者は図 4.76 に示したせん断応力の値と一致する。後者の最大値は図 4.76 で示したものの h_1 を h で置き換えたものになっているが、 $h_1 = h - t_f$ であることから、薄肉断面である限りこの 2 者の差は非常に小さく両者は一致していると考えていい。つまりウェブだけに着目すれば、フランジの肉厚が薄い限り前節のせん断応力の算定でも十分であることが明らかになった。試しに新しく求めた τ_{s3x} の方をウェブ断面内で積分すると、この場合には当然ながらびったり V に一致する。

一方、ここで新たに導出されたフランジにおける有意なせん断応力成分 σ_{xy} は、図 4.80 に示したように分布する。この分布は断面内で総和をとると零になるように、お互いのフランジ突出部分同士で打ち消しあっている。したがって、断面力としての y 方向成分が存在しないことも整合する。このウェブ端の応力値 $\tau = bhv/4I$ がウェブとフランジの接合点には生じているので、溶接ののど厚等を設計する場合にはこの値を用いればいいことになる。実は第 1 著者は、なぜせん断応力を確認すべきところに断面 2 次モーメントが介入するのかわからなかった。さらにせん断弾性係数がどこにも無いのも理解できなかった。構造力学とは不思議な力学だ。

(4) 溝形断面梁を曲げるとねじれませんか？

薄肉断面のもう一つの代表の溝形断面は s 軸に分岐が必要無いので I 形断面より計算は楽だ。そこで図 4.81 のように左右が非対称になるように用いた場合、実際に演習問題 4-11 の 27 番を解いてせん断応力分布を求めることができる。その結果を用いると、このせん断応力分布が作る y 方向の合応力が零になり、 z 方向の合応力が V になることも容易に確かめることができる。さてそれでは、原点 O 回りのモーメントを算定してみよう。これも容易に積分でき、結果は

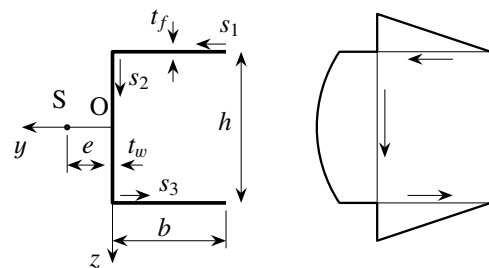


図 4.81 溝形断面に発生するせん断応力分布

$$M_x = \frac{h^2 b^2 t_f V}{4I} \neq 0 \tag{*}$$

となってしまう。すなわち z - x 面内で曲げを受ける梁の挙動を問題の対象にしているにもかかわらず、この棒は原点回りに（図心回りであっても零にならないので各自確かめて欲しい）ねじり抵抗モーメントを発生させている。それは図 4.81 の右側の図に示したせん断流の矢印を見ても明らかだろう。逆に考えると、図心あるいは原点を作用線が通るようなせん断力を与えて曲げのみを与えたつもりでも、棒はねじれてしまうのだ。梁理論が y 方向の拡がりを見捨てて定式化されているので、2 軸対称ではない断面の場合、このように神秘的なことが起こる。

一般に 2 軸対称ではない断面の梁の図心をせん断力が通るように曲げを加えた梁はねじれる。では、ねじれないように棒を曲げるにはどうしたらいいか。それは上式(*)のねじりモーメントが零になるようにせん断力 V が発生（作用）すればいいことになる。この場合は図 4.81 の左側の図に示した点 S をせん断力の作用線が通るようにすればねじれなくなる。この点 S をせん断中心と呼び、溝形断面の場合には式(*)を用いて

$$e = \frac{M_x}{V} = \frac{h^2 b^2 t_f}{4I}$$

の位置になる。より一般的なせん断中心の定義については別途文献あるいは第7章を参照のこと。対傾構のような2次部材には形鋼を用いることがあるが、溝形鋼や山形鋼は突出辺が片方だけなのでH形鋼を使うより接合が楽になるというメリットがある。しかし、立体骨組としてそれを解析するときには、上述のように多少面倒なことがあるので注意が必要だ。

演習問題 4-11

27. 図 4.81 に示した溝形断面のせん断応力分布が図 4.81 つまり次式になることを示せ。

$$\tau_{s1,x} = \frac{Vh}{2I}(y+b), \quad \tau_{s2,x} = \frac{Vbht_f}{2It_w} + \frac{V}{2I} \left\{ \left(\frac{h}{2} \right)^2 - z^2 \right\}, \quad \tau_{s3,x} = \frac{Vh}{2I}(y+b)$$

4.6.2 せん断遅れ

結局、面内曲げを受ける初等梁理論は断面の横向き y 方向の変形等は一律で無視していた。しかし模式図 4.82 のような、比較的幅の広い断面の梁⁴⁰を対象とする場合には、この幅の広いフランジ部分に発生するせん断応力 σ_{xy} による(床版が平板として挙動する)影響、つまり断面の y 方向の非一様性が無視できない場合がある。そのため、全部の断面が初等梁理論の範囲内で抵抗すると仮定して求められる直応力 $|(\sigma_{xx})_{beam}|$ (図中の一点鎖線)よりも大きな直応力が主桁部に生じ、しかもその直応力分布は y 方向にも一律ではなくなる。このような現象をせん断遅れと呼ぶが、正確に応力分布を求める方法等については文献 [195] 等を参照して欲しい。実際の設計では上フランジの一部を無視し、各 T 形部分を中心にしてある適当な幅 b_e の上フランジを持つ T 形梁に置き換え、それに初等梁理論を適用して直応力分布の最大値を簡便に計算する手法が用いられることがある。図の上方の水平な実線がその値を用いた結果である。この幅 b_e を有効幅と呼んでいる。これも詳細については別途文献を参照のこと。

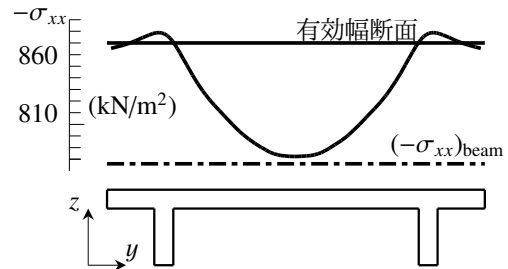


図 4.82 幅広断面に生じる直応力分布

4.6.3 せん断変形を考慮した梁理論

初等梁理論ではせん断変形を無視し、せん断力は軸線方向への一律ではない曲げモーメントに対する反力的な存在 $\{V(x) = M'(x)\}$ だった。さらにせん断応力は得られた直応力とつり合うように求められていたため、せん断弾性係数を介した構成則が必要無かった。しかし図 4.4 から明らかなように、梁の長さが短くなるとせん断変形が無視できるというそもそもの仮定が成立するとは限らない。そこで初等梁理論を若干改良

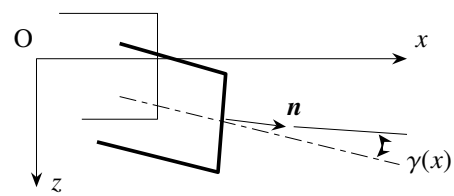


図 4.83 Timoshenko 梁のモデル

して、せん断変形を無視しない理論を紹介しておこう。代表的かつ有名なモデルは **Timoshenko 梁理論** と呼ばれているもので、断面に一律なせん断変形が生じるという仮定から定式化を始めるモデルである。図 4.83 に簡単な概念を示したが、変形した梁の軸線と断面の法線ベクトル n とが一致せず、断面に一律なせん断変形 $\gamma(x)$ が発生し得るモデルである。これ自体は実際に生じる放物線分布とは整合せず、また自由表面であるはずの梁

⁴⁰ 近年よく用いられる合理化橋梁の一つに PC 床版を併用した少数主桁橋梁があるが、従来の鉄桁よりは幅広になっているように見える。ついでに書いておくと、桁高やフランジ寸法が比較的大きくなるため、運搬の観点から添接が増える場合もあるようだ。

の上下縁でせん断応力が零にならないことも力学的にはおかしく、無理な近似ではあるものの、こうすることによってせん断力をせん断応力で定義できる理論⁴¹になる。

ひずみ場の仮定で式(4.2)のうちせん断ひずみ成分 ϵ_{xz} に対する仮定を緩め、せん断に関する Hooke の法則式(3.45)も用いて

$$2\epsilon_{xz} = \gamma(x), \quad \sigma_{xz} = G\gamma(x)$$

のように仮定する。これを用いると、変位場の式(4.3)と軸方向のひずみ成分は

$$u_x(x, z) = u(x) + z \left\{ -\frac{dw(x)}{dx} + \gamma(x) \right\}, \quad u_z(x, z) = w(x), \quad \epsilon_{xx} = \frac{du(x)}{dx} - z \frac{d^2w(x)}{dx^2} + z \frac{d\gamma(x)}{dx}$$

のように変更される。さらに、曲げモーメントと変位の関係式(4.13b)は

$$M(x) = -EI \left\{ \frac{d^2w(x)}{dx^2} - \frac{d\gamma(x)}{dx} \right\}$$

で置き換わる。またせん断力はもはや曲げモーメントの反力的な断面力ではなく、上のせん断応力の断面内の合応力として

$$V(x) \equiv \int_A \sigma_{xz} dA = Gk_T A \gamma(x)$$

で定義できる。この k_T は単純な定式化からは $k_T = 1$ になるはずだが、実際には図 4.74 のように断面内で非一様に分布するはずのせん断変形を、図 4.83 のような断面内一定のせん断変形 $\gamma(x)$ で胡麻化してしまっているので、それを補正するために別途導入された係数である。値そのものは断面形状と Poisson 比 ν に依存する定数 [17] で、例えば式 (B.7) のような値を持つ。

以上の誘導から得られる主な支配方程式を文献 [172] を真似て無次元化して表示すると

$$-\bar{w}'''' + \bar{q} - \alpha_T \bar{q}'' = 0, \quad \bar{M} = -\bar{w}'' - \alpha_T \bar{q}$$

となる。ここに

$$(\cdot)' \equiv \frac{d}{d\xi}, \quad \xi \equiv \frac{x}{\ell}, \quad \bar{M} \equiv \frac{M\ell}{EI}, \quad \bar{q} \equiv \frac{q\ell^3}{EI}, \quad \bar{w} \equiv \frac{w}{\ell}$$

と定義し直した。上式の下線部がせん断変形の影響を代表している項である。式中の α_T は式 (B.15) で定義した。これだけでは、分布外力 q が存在しなければ初等梁理論の支配方程式と一致しそうに見えるが、付録 B の式 (B.3) にあるように、断面の回転とたわみの関係にせん断変形が含まれているため、分布外力が無くても境界条件に違いが現れ、それを通して解は初等梁理論のものとは異なってくるので注意が必要だ。例えば矩形断面の場合は、式 (B.7b) と等方弾性体の関係式 (3.48a) を用いて α_T は

$$\alpha_T = \frac{12 + 11\nu}{5} \frac{1}{\lambda^2}, \quad \lambda \equiv \frac{\ell}{\sqrt{I/A}}$$

となる。 λ は一般に細長比と呼ばれているものであり、純粋に断面の代表寸法と梁の長さの比である。

上の支配方程式からも明らかなように、 α_T が相対的に大きい場合にせん断変形の影響が顕著になることがわかる。逆に言うと α_T が小さい場合、つまり

1. G が大きい \rightarrow せん断抵抗が大きい場合、あるいは

2. λ_T つまり λ が大きい \rightarrow 非常に細長い場合

⁴¹ 詳細は付録 B を参照のこと。

初等梁理論で十分な精度の解を得ることができることがわかる。この二つ目の条件は、幾何学的条件によって力学挙動が一見変わって見えるという面白い結果であるが、梁に対して用いた基本的な仮定のうちの一つの Bernoulli-Euler の仮定式(4.2)や図 4.4 を裏付けるものでもある。例えば単純支持梁中央に荷重 P を載せた 3 点曲げの問題は、半分の長さの片持ち梁の先端に $P/2$ を載せた問題と同じになるので、それを解くと、3 点曲げの中央のたわみは

$$w(\ell/2) = \frac{P\ell^3}{48EI} + \frac{P\ell}{4Gk_T A} \tag{4.88}$$

となる。第 1 項は Bernoulli-Euler 梁の解であり、第 2 項がせん断変形の影響である。半スパンはせん断力 $P/2$ 一様な場なので、一様なせん断変形 $\gamma = P/2Gk_T A$ が生じ、これによる中央のたわみがその $\ell/2$ 倍になっているというのが、この第 2 項である。

実用的には、このようにしてせん断変形の影響を入れた解とそうでない初等梁理論の解との差は α_T 程度、すなわち細長比の 2 乗に逆比例した程度である。一例として図 4.84 に簡単な問題の結果を示しておいたが、この程度の影響に過ぎない。したがって、極端に短い梁の挙動を調べたり梁の衝撃外力に対する応答あるいは高周波振動等を対象とする場合を除き、Timoshenko 梁理論を用いる必要は無い。詳細については文献 [172] 等を参照のこと。

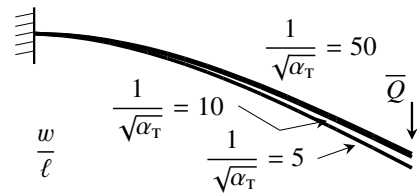


図 4.84 片持ち梁を例にしたせん断変形の影響

演習問題 4-12

- 28. 上式(4.88)を求め、図 4.84 のような性質を確認せよ。
- 29. 両端固定 Timoshenko 梁の右端を強制的に Δ だけ変位させたときの、左端から $1/3$ 点のたわみを求めよ。

4.7 梁のその他の問題

4.7.1 弾性床上の梁

杭や管等のように地中に埋められた棒の曲げや、図 4.85 のように直接地表に置かれた棒の曲げ挙動をモデル化したものの代表として、弾性床上の梁理論がある。最も実用的で代表的な弾性床は Winkler 型と呼ばれるもので、梁のたわみに比例した弾性抵抗反力を発生する床である。つまり土圧や地盤反力のようなものに相当する。この床の単位長さ当たりの抵抗係数を k_w としたとき、梁に対しては $\{k_w w(x)\}$ だけの分布反力が変位 $w(x)$ とは逆向きに作用する。したがって、そのつり合い式は式(4.22b)が

$$-EI w''''(x) - k_w w(x) + q(x) = 0 \tag{4.89}$$

となるだけで、他はすべて通常の梁理論と同じである。ただ注意しなければならないのは、この床と梁は一般には接着剤で接合されていて梁が床から離れることが無いものとしていることだ。

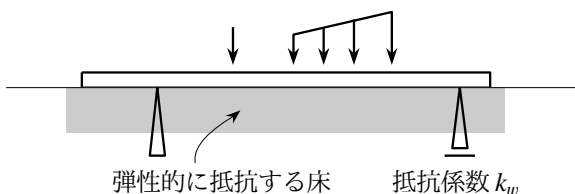


図 4.85 弾性的に変形する床上にある梁



図 4.86 半無限に長い弾性床上の梁

斉次解を求めるために $q(x) \equiv 0$ として $w \sim \exp(\xi x)$ を上式に代入すると

$$\xi^4 + 4\beta^4 = 0, \quad \text{ただし} \quad \beta^4 \equiv \frac{k_w}{4EI}$$

と特性方程式を得るから、特性根は

$$\xi = \pm(1 \pm i)\beta$$

である。ここに i は虚数単位である。したがって斉次解のみの一般解は

$$w(x) = \exp(\beta x)(a \sin \beta x + b \cos \beta x) + \exp(-\beta x)(c \sin \beta x + d \cos \beta x) \quad (4.90)$$

となる。未定定数は境界条件で決められる。例えば非常に長い杭等のモデルとして、図 4.86 にあるような x 軸の正方向に無限に長い梁を考え、その端部に集中せん断力 Q が作用している場合を解いてみる。この場合の境界条件は

$$-[-EIw'''(0)] = Q, \quad -[-EIw''(0)] = 0, \quad w(+\infty) \equiv 0$$

で与えられる。まず式 (4.90) の一般解のうちの第 1 項は $x = +\infty$ の境界条件を満足し得ないため除外される。したがって、残った積分定数 c, d を $x = 0$ の境界条件で決定すれば、結局

$$w(x) = \frac{Q}{2EI\beta^3} \exp(-\beta x) \cos(\beta x)$$

が解となる。

演習問題 4-13

30. 演習書 [131] にとても面白い問題がある。ある有限のしかし少し長めの長さ l の梁が弾性床上に置いてある。ただし床と梁とは接着されておらず、梁が上方にたわんだ場合には梁と床は分離できるものとする。この梁の中央に集中外力を作用させたとき、梁の両端が床から浮き上がったとする。弾性床に接している梁の部分の長さがいくらかになるのか求めよ。一種の固有値問題になっている。

4.7.2 棒の運動と初期値境界値問題

(1) 棒の縦振動

動的問題の支配方程式は Newton の法則を用いれば簡単に誘導できる。例えば柱の静的問題では式 (4.22a) が x 方向の力の総和で、それがつり合って物体が静止していることを示している。これは Newton の運動方程式で加速度が零の静止している状態なので、動的問題の場合は、この（力の総和）が（質量 \times 加速度）に等しくなるというのが Newton の法則だから、柱（棒）の単位長さ当たりの質量を m とするとその運動方程式は

$$EA u''(x, t) + p(x, t) = m \ddot{u}(x, t)$$

となる。上付きドット ($\dot{\quad}$) は時間に関する微分を表す。分布外力 $p(x, t)$ が無い場合にはこの式は

$$u'' = \frac{1}{c_b^2} \ddot{u}, \quad c_b \equiv \sqrt{\frac{EA}{m}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (4.91a, b)$$

と表現できる。 $\rho \equiv m/A$ は密度である。この式は式 (3.155) と同じ形の波動方程式である。式中の c_b は棒の縦振動が伝わる波の速度であり、鋼では $E = 205 \text{ GN/m}^2$, $\rho = 7800 \text{ kg/m}^3$ から $c_b = 5.1 \text{ km/s}$ 程度になる。具体的な解法等については第 10 章を参照のこと。

(2) 梁の曲げ振動

同様に梁の曲げ振動の場合は式(4.22b)に慣性項を加えればよく

$$-EI w''''(x, t) + q(x, t) = m \ddot{w}(x, t) \quad (a)$$

となることも容易に理解できるだろう。式(4.13b)が、曲げモーメントという抵抗力が軸の曲率の抵抗係数 EI 倍として発生していることを示しているのも、もし材料そのものに粘性が存在して何らかの速度依存の抵抗力も持っていると考えれば、一つの代表的なモデルとしてはこの式(4.13b)を粘弾性に拡張した

$$M(x) = -EI w''(x, t) - \eta I \dot{w}''(x, t)$$

のような構成則を持つと設定してもよさそうである。ここに η は粘性に関する材料定数である。このような材料でできた梁の動的問題の場合の運動方程式は、上式(a)の代わりに

$$-EI w''''(x, t) - \eta I \dot{w}''''(x, t) + q(x, t) = m \ddot{w}(x, t) \quad (4.92)$$

とも表現できる。

各量が場所 x と時間 t の関数になることだけを変更すれば、境界条件等は静的問題のそれとすべて同じである。しかし動的問題の場合は時間的な変化を追跡する問題であるから、この境界条件に加えて初期条件というものが多くなる。つまり、ある基準となる時刻（通常は時刻 $t = 0$ とすることが多い）に状態がどのようになっているのかを規定する必要がある。

このように、境界条件のみならず初期条件も規定した上で時間と場所の関数の偏微分方程式を解く問題を初期値境界値問題と呼んでいる。時間に関しては上の運動方程式からも明らかのように2階の微係数が最も支配的な項であることから、初期条件も二つ必要になるので、梁の曲げ問題の場合には、通常

$$w(x, 0) = f(x) \equiv (\text{初期位置}), \quad \dot{w}(x, 0) = g(x) \equiv (\text{初速度}) \quad (4.93a, b)$$

として与えることが多い。具体的な解法等については第9章を参照のこと。ところで木琴って梁としての振動なんだろうか。どうなっているんだろう。

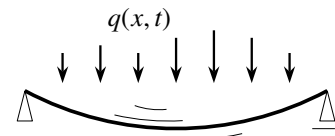


図 4.87 単純梁の振動

4.8 トラスと骨組

4.8.1 単位荷重法の一般化

式(4.13)(4.19)(4.20)で支配方程式が軸力の問題と曲げの問題に分離できたことから、ここまでは主に曲げのみを受ける梁を対象にしてきた。実際の社会基盤構造で細長い部材でモデル化できる対象は、梁だけではなく柱も一緒に組み込まれている。各部材がヒンジで接合されている構造をトラス構造と呼び、剛結されている構造を骨組（ラーメン）構造と呼ぶ。ここでは、トラスと軸力と曲げを同時に受ける骨組と、そしてその両方でできた構造とに対する単位荷重法の利用を解説する。なお、二つの大きな制約条件をまず記しておく。

1. すべての部材は、個々に断面が異なる場合であっても図心同士でつながっているものとする。
2. 中立軸上の諸量で支配方程式が書くことができ、軸力と曲げの問題は分離できるものとする。

つまり、現実の構造を直接は対象としていないことには十分注意して欲しい。少しドロドロしたことを書くと、各種試験対策の節である。呵呵。しかし基本的には、静定系の重ね合わせで不静定構造を解析する手法の一具体例であり、重ね合わせて元の構造系に戻す際に考えるべき幾何学的・運動学的整合性の確保の部分に、ある1点の変位を求める単位荷重法を利用する標準的な解法である。

図 4.88 のように一般的なトラスや骨組の各部材の軸線に沿って適切な始点から x 軸をとり、それに直交したたわむ方向を z 軸とする。まず解きたい問題 A は、与えられた境界条件と荷重条件の下で x 方向と z 方向の変位 $u(x)$ と $w(x)$ が生じ、軸力 $N(x)$ と曲げモーメント $M(x)$ が生じているものとする。したがって

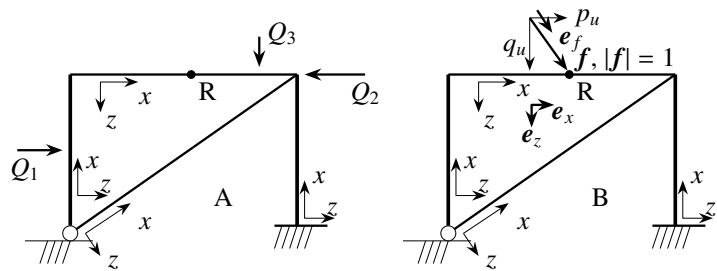


図 4.88 例えば骨組の問題 A と問題 B

$$N = EAu', \quad M = -EIw'', \quad V = M', \quad \theta = -w' \quad (4.94a, b, c, d)$$

を満足している。 $V(x)$ はせん断力で、 $\theta(x)$ はたわみ角である。これに対し別途、元の問題 A で変位を求めたい点 R (形式的に $x = a$) に、 x 方向成分と z 方向成分が $p_u(x; a)$ と $q_u(x; a)$ の単位集中荷重だけが作用した問題を問題 B と呼ぶことにする。この単位荷重の二つの成分 $p_u(x; a)$ と $q_u(x; a)$ はどちらも定数ではあるが、Dirac のデルタ関数 $\delta(x; a)$ を伴った分布荷重として定義するので、関数のような表現にしてある。その問題 B で生じる変位を $u_u(x; a)$, $w_u(x; a)$ と記し、断面力を $N_u(x; a)$, $M_u(x; a)$, $V_u(x; a)$ と記すことにする。以下、適宜引数は省略する。このとき問題 B は問題 A と同じ幾何学的な境界条件を満足し

$$N'_u + p_u = 0, \quad M''_u + q_u = 0, \quad M'_u - V_u = 0, \quad N_u = EAu'_u, \quad M_u = -EIw''_u \quad (4.95a, b, c, d, e)$$

を満足している。そこで、この問題 B のつり合い式 (4.95a) (4.95b) と問題 A の変位との内積で定義される仮想仕事式を書くと

$$\int_0^\ell [u (N'_u + p_u) + w (M''_u + q_u)] dx = 0$$

が成立する。ここでは形式的に長さ ℓ の部材の積分としているが、実際には各部材毎の積分の全体構造部材分の総和である。この仮想仕事項をそれぞれ部分積分して (複雑な系でそんなことが安易にできるかという難しい間はさておき、形式的に)、式 (4.94) (4.95) の断面力と変形の関係を考慮すると、最終的に上式から

$$\{u N_u + w V_u + \theta M_u\} \Big|_0^\ell + \int_0^\ell u p_u dx + \int_0^\ell w q_u dx - \int_0^\ell \frac{N N_u}{EA} dx - \int_0^\ell \frac{M M_u}{EI} dx = 0 \quad (4.96)$$

を得る。

第 4.4.2 (4) 節で説明したように、もし単位荷重の作用点 R が境界である場合、つまり境界の変位を求めたい場合の単位荷重法の公式は、以下で定式化するそうではない場合の公式と最終的には一致するので、ここでは単位荷重の作用点 R が部材の中間のどこかにある場合に限定した定式化を示す。その場合は式 (4.96) の第 1 項の境界項は零になる。そして $x = a$ の単位荷重ベクトル $f(x; a)$ が、それが作用している部材の局所系の軸方向単位ベクトル e_x 方向成分 p_u と、それに直交する方向の単位ベクトル e_z 方向成分 q_u とで

$$f(x; a) = p_u e_x + q_u e_z = \delta(x; a) e_f, \quad p_u^2 + q_u^2 = 1 \quad (4.97a, b)$$

のように (図 4.88 の e_x と e_z の例は上部の梁の局所系) 与えられたとする。 $\delta(x; a)$ は Dirac のデルタ関数なので、この $f(x; a)$ は単位の大きさを持つ $x = a$ の集中外力に相当し、その力の向きが単位ベクトル e_f の方向である。ちなみに p_u と q_u および $\delta(x; a)$ の次元は前述のように [長さ]⁻¹ である。このとき、式 (4.96) の第 2 項と第 3 項の和は

$$u(x) = u(x) e_x + w(x) e_z$$

で定義される問題 A の変位ベクトル $\mathbf{u}(x)$ と、上式 (4.97) の単位荷重ベクトル \mathbf{f} との内積になっているので

$$\int_0^\ell u p_u dx + \int_0^\ell w q_u dx = \int_0^\ell \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{f}(x; a) dx = \int_0^\ell \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{e}_f \delta(x; a) dx = \mathbf{u}(a) \cdot \mathbf{e}_f = u_f(a) \quad (4.98)$$

となる。この $u_f(a) \equiv \mathbf{u}(a) \cdot \mathbf{e}_f$ は問題 A の点 R の変位ベクトル $\mathbf{u}(a)$ の \mathbf{e}_f 方向成分である。したがって、仮想仕事式 (4.96) は

$$u_f(a) = \int_0^\ell \frac{N(x) N_u(x; a)}{EA} dx + \int_0^\ell \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx \quad (4.99)$$

のように、任意のトラスや骨組の点 R ($x = a$) の \mathbf{e}_f 方向の変位を求める単位荷重法の公式が求められる。

もし対象がトラス構造であれば曲げモーメントは生じないから、上式は一旦

$$u_f(a) = \int_0^\ell \frac{N(x) N_u(x; a)}{EA} dx$$

となる。しかし、外力はトラスの格点にしか作用しないし、トラスの各弦材の断面形状が軸方向に一定であれば上式の被積分関数は各弦材毎に定数になり、最終的にトラスの変位を求める単位荷重公式が

$$u_f(a) = \sum_{k=1}^K \frac{N^{(k)} N_u^{(k)} \ell^{(k)}}{EA^{(k)}} \quad (4.100)$$

と表現される。ここに上付き添え字の (k) は k 番目の弦材であることを示し、それぞれの軸力が $N^{(k)}$ と $N_u^{(k)}$ で、弦材長が $\ell^{(k)}$ 、また伸び剛性が $EA^{(k)}$ で K は総弦材数である。

これに対して $p_u(x; a) \equiv 0$ の場合には、式 (4.99) の左辺はたわみだけなので

$$w(a) = \int_0^\ell \frac{N(x) N_u(x; a)}{EA} dx + \int_0^\ell \frac{M(x) M_u(x; a)}{EI} dx$$

となり、式 (4.62) に軸力の影響も考慮して骨組のたわみを求める汎用性のある単位荷重公式が得られている。もし軸力の影響を無視してもいいくらい細長い部材でできた骨組の場合や、連続梁のように軸力が発生しない場合には、上式の右辺第 1 項は第 2 項に比べて無視でき、それは式 (4.62) に一致する。ちなみに、軸力の寄与分が無視できる場合に点 R のたわみ角を求める単位荷重公式は式 (4.63) である。

4.8.2 トラスの変位と断面力

(1) 静定トラス

ではまず式 (4.100) を用いてトラスの変位を求めてみよう。トラスの各弦材は伸び縮みするだけだが、では格点の変位を幾何学的な考察で求めようとする、たとえばそれが静定トラスであってもちよっと途方に暮れるのではないだろうか。そこで図 4.89 の静定トラスの頂点の右向きの変位を単位荷重法で求めてみよう。静定なので反力は力とモーメントのつり合いだけで求めることができる

$$F_1 = -\frac{\sqrt{3}P}{2}, \quad F_2 = \frac{\sqrt{3}P}{2}, \quad H = -P$$

を得る。あとは例えば節点法を用いると、各弦材の軸力が

$$N^{(1)} = P, \quad N^{(2)} = \frac{P}{2}, \quad N^{(3)} = P$$

と求められる。頂点の水平変位を求めるためには、そこに水平に単位の外力を与えた系を考えればいいので、上の結果の P を 1 にすればいいだけである。したがって

$$N_u^{(1)} = 1, \quad N_u^{(2)} = \frac{1}{2}, \quad N_u^{(3)} = 1$$

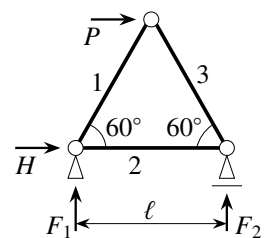


図 4.89 静定トラス

である。これを式(4.100)に代入すれば、頂点の水平変位 u_p が

$$u_p = \frac{\ell}{EA} \left\{ P \times 1 + \frac{P}{2} \times \frac{1}{2} + (-P) \times (-1) \right\} = \frac{9P\ell}{4EA} \quad (4.101)$$

のように求められる。これを幾何学的な考察から求めるのは可能だがちょっと面倒だ。

(2) 不静定トラス

次に第2.4.1節の最後で解くことができなかった図4.90の不静定トラスを単位荷重法を用いて解いてみよう。そこでまず、右図のように弦材5の軸力を不静定力 X と置いて、これを二つの系に分解しよう。これでどちらも静定系になるので、不静定力 X は未知のままだが軸力は求めることができる。まず反力は

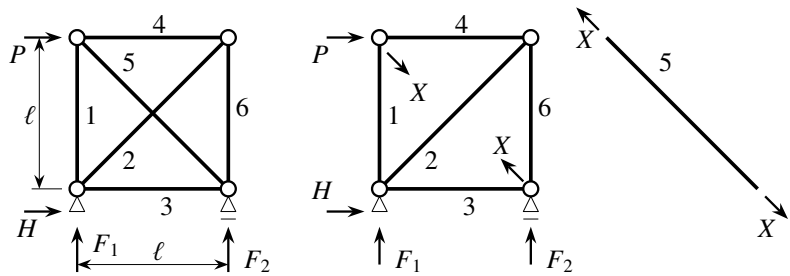


図4.90 不静定トラス

$$F_1 = -P, \quad F_2 = P, \quad H = -P$$

となるので、節点法等を用いて

$$N^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}X, \quad N^{(2)} = X + \sqrt{2}P, \quad N^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}X, \quad N^{(4)} = -P - \frac{1}{\sqrt{2}}X, \quad N^{(6)} = -P - \frac{1}{\sqrt{2}}X \quad \text{および} \quad N^{(5)} = X$$

と求めることができる。これに対し、左上角の X 方向の変位を求めるには、 $X = 1$ のみをこの二つの系に作用させればいから

$$N_u^{(1)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(2)} = 1, \quad N_u^{(3)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(4)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(6)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(5)} = 1$$

である。

まず弦材5を取りはずしたトラスでは、右下の支点は水平方向にしか変位しないので、左上の角の X 方向の変位 Δ_x は式(4.100)から

$$\Delta_x = \frac{\ell}{EA} \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}X \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}}X \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(P + \frac{1}{\sqrt{2}}X \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) - \left(P + \frac{1}{\sqrt{2}}X \right) \left(-\frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\} + \frac{\sqrt{2}\ell}{EA} (X + \sqrt{2}P) \times 1 = \frac{\ell(2 + \sqrt{2})}{EA} (X + P)$$

になる。第2行の左端の項は長さが $\sqrt{2}\ell$ の弦材2の項である。一方、弦材5だけの左上の角の変位 $\Delta_x^{(5)}$ は単位荷重法を用いるまでもなく

$$\Delta_x^{(5)} = \frac{\sqrt{2}\ell}{EA} X$$

である。この二つの変位はお互いに逆向きを正とする変位なので、分解した系を元の不静定系に戻すことができるためには

$$\Delta_x = -\Delta_x^{(5)}$$

でなければならない。これに上の結果を代入すると、結局

$$X = -\frac{1}{\sqrt{2}}P$$

のように不静定力を求めることができた。

これを用いて各弦材の軸力を求めると

$$N^{(1)} = \frac{1}{2}P, \quad N^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}P, \quad N^{(3)} = \frac{1}{2}P, \quad N^{(4)} = -\frac{1}{2}P, \quad N^{(5)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}P, \quad N^{(6)} = -\frac{1}{2}P$$

となる。そこで、左上角の水平方向の変位を求めるために考える単位荷重を作用させる系は、 $P = 1$ と置くだけでいいので

$$N_u^{(1)} = \frac{1}{2}, \quad N_u^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(3)} = \frac{1}{2}, \quad N_u^{(4)} = -\frac{1}{2}, \quad N_u^{(5)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad N_u^{(6)} = -\frac{1}{2}$$

でいい。これを式(4.100)に代入すれば、左上角の P 方向の変位 Δ_P が

$$\Delta_P = (1 + \sqrt{2}) \frac{P\ell}{EA} \quad (4.102)$$

のように求めることができる。弦材2と弦材5の長さが $\sqrt{2}\ell$ であることに注意すること。さて、これは間違っていないだろうか。著者が開発した有限要素法のプログラムで数値的には確認できている。呵呵。

(3) 連続トラス

次に図4.91の上の図の連続トラスを対象とする。格点の白丸は省略した。これは一見静定トラスに見えるかもしれないが、支点を3箇所にした連続トラスで、不静定である。簡単のために（そうでもないけど時間がかかるからだが、それでもこれを解くのに著者は4時間ほどかかったし、計算間違いも数箇所あった）、すべての弦材の長さが ℓ の正三角形でできたトラスとし、载荷点のたわみを求めよう。まず下の図のような静定系を考えて、中間支점에相当する格点に不静定反力 X を作用させる。そして、この支点の変位を単位荷重法で求めて、それが零である条件から不静定反力 X を求めよう。まず支点反力は

$$F_1 = \frac{P}{3} + \frac{2X}{3}, \quad F_2 = \frac{2P}{3} + \frac{X}{3}$$

と求められるので、各弦材の軸力を求めると

$$\begin{aligned} N^{(1)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(P+2X), & N^{(2)} &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(P+2X), & N^{(3)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}(P+2X), & N^{(4)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(P+2X), \\ N^{(5)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}(X-P), & N^{(6)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(P+X), & N^{(7)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(X-P), & N^{(8)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(2P+X), \\ N^{(9)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}(2P+X), & N^{(10)} &= \frac{1}{3\sqrt{3}}(2P+X), & N^{(11)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}(2P+X) \end{aligned}$$

となる。したがって、この不静定反力が作用した点に単位荷重を載せた場合の軸力も $X = 1, P = 0$ と置いて

$$\begin{aligned} N_u^{(1)} &= -\frac{4}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(2)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(3)} &= \frac{4}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(4)} &= -\frac{4}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(5)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(6)} &= \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ N_u^{(7)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(8)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(9)} &= \frac{2}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(10)} &= \frac{1}{3\sqrt{3}}, & N_u^{(11)} &= -\frac{2}{3\sqrt{3}} \end{aligned}$$

と求められる。この二つの軸力を式(4.100)に代入して支点のたわみ Δ_X が零になる条件は

$$\Delta_X = \sum_{n=1}^{11} \frac{N^{(n)} N_u^{(n)}}{EA} \ell = 0$$

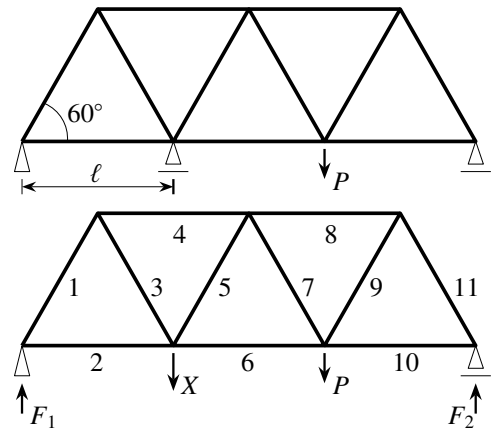


図4.91 連続トラス

となるので、実際に軸力の値を代入すると、不静定反力が

$$53P + 82X = 0 \rightarrow X = -\frac{53}{82}P$$

と求められる。すべての断面と材料が同じなので比較的容易に計算できるが、実際のトラスのように引張と圧縮で断面が異なる場合には、とても手で計算しようという気持ちにはなれないのが正直なところである。

この結果を上軸力に代入すると、各弦材の軸力が

$$N^{(1)} = \frac{8}{41\sqrt{3}}P, N^{(2)} = -\frac{4}{41\sqrt{3}}P, N^{(3)} = -\frac{8}{41\sqrt{3}}P, N^{(4)} = \frac{8}{41\sqrt{3}}P, N^{(5)} = -\frac{45}{41\sqrt{3}}P, N^{(6)} = \frac{29}{82\sqrt{3}}P,$$

$$N^{(7)} = \frac{45}{41\sqrt{3}}P, N^{(8)} = -\frac{37}{41\sqrt{3}}P, N^{(9)} = \frac{37}{41\sqrt{3}}P, N^{(10)} = \frac{37}{82\sqrt{3}}P, N^{(11)} = -\frac{37}{41\sqrt{3}}P$$

と求められる。ここで $P = 1$ としたものがそれぞれの $N_u^{(n)}$ なので、再度単位荷重法の式 (4.100) にその二つの軸力を代入すれば、載荷点のたわみ Δ_P が

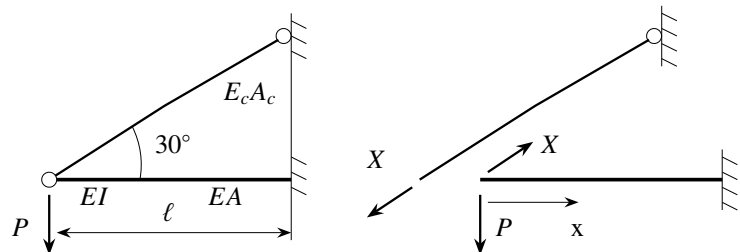
$$\Delta_P = \frac{145P\ell}{82EA}$$

と求められる。これも電卓が無いと無理! がしかし、先輩達は電卓も無い時代に計算尺⁴²を使って、あんなに立派な橋梁等を建設してきたのである。

4.8.3 骨組の変位と断面力

(1) 梁とトラスでできた不静定構造

最初は図 4.92 に示したような梁とトラスで構成された構造を解いておこう。まず右図のように二つの系に分解し、不静定力 X を導入する。これでケーブルは



$$N = X, N_u = 1$$

図 4.92 梁をケーブル (トラス) で吊った構造

でいいので、この先端の X 方向の変位は、単位荷重法を用いるまでもなく

$$\Delta_X^{(c)} = \frac{X}{EcAc} \frac{2\ell}{\sqrt{3}}$$

である。一方、梁の軸力と曲げモーメントは

$$N = -\frac{\sqrt{3}}{2}X, M = -\left(P - \frac{1}{2}X\right)x, N_u = -\frac{\sqrt{3}}{2}, M_u = \frac{1}{2}x$$

なので、軸力と曲げモーメントの両方を含む単位荷重法の公式 (4.99) に代入すれば、先端の X 方向の変位が

$$\Delta_X = \frac{X\ell}{EA} \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{EI} \int_0^\ell \left(P - \frac{X}{2}\right)x \left(\frac{x}{2}\right) dx = -\frac{P\ell^3}{6EI} + \left(\frac{3\ell}{4EA} + \frac{\ell^3}{12EI}\right)X$$

のように求められる。この二つの系を元に戻すことができるためには、不静定力がお互い逆向きなので

$$\Delta_X = -\Delta_X^{(c)}$$

⁴² 見たことありますか。東北大学土木の構造強度学研究室には手回し計算機が2台あります。これも見たことありますか。

を満足しなければならないから、最終的に不静定力 X が

$$X = P \left\{ \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{3}EI}{E_c A_c \ell^2} + \frac{9I}{2A\ell^2} \right\}^{-1} \quad (*)$$

のように求められる。これで、ケーブルと梁の軸力と曲げモーメントをすべて P で表すことができるので、その $P = 1$ とした軸力と曲げモーメントと共に単位荷重法の式 (4.99) に代入すれば、梁先端の鉛直下向きの変位を求めることができる。

(2) 静定骨組

まず図 4.93 の左側に示した等足骨組の右上角点 A の水平変位を求めよう。反力は

$$F_1 = 0, \quad F_2 = P \quad H = P$$

と求められるので、部材力は

$$\begin{aligned} M(x_1) &= x_1 P, & N(x_1) &= 0, & (0 < x_1 \leq \ell/2), \\ M(x_1) &= \frac{\ell}{2} P, & N(x_1) &= 0, & (\ell/2 < x_1 < \ell), \\ M(x_2) &= \frac{\ell}{2} P, & N(x_2) &= 0, & (0 < x_2 \leq \ell/2), \\ M(x_2) &= (\ell - x_2) P, & N(x_2) &= 0, & (\ell/2 < x_2 < \ell), \\ M(x_3) &= 0, & N(x_3) &= -P \end{aligned}$$

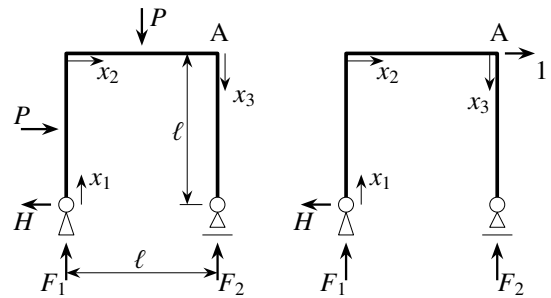


図 4.93 静定骨組

と求められる。そこで、単位荷重を点 A のみに作用させた右側の図の系を解くと、反力は

$$F_1 = -1, \quad F_2 = 1 \quad H = 1$$

と求められるので、部材力は

$$M_u(x_1) = x_1, \quad N_u(x_1) = 1, \quad M_u(x_2) = \ell - x_2, \quad N_u(x_2) = 1, \quad M_u(x_3) = 0, \quad N_u(x_3) = -1$$

となる。これを式 (4.99) の公式に代入すると、点 A の水平変位 Δ_A は

$$\Delta_A = \frac{P}{EI} \left(\int_0^{\ell/2} x_1^2 dx_1 + \frac{\ell}{2} \int_{\ell/2}^{\ell} x_1 dx_1 + \frac{\ell}{2} \int_0^{\ell/2} (\ell - x_2) dx_2 + \int_{\ell/2}^{\ell} (\ell - x_2)^2 dx_2 \right) + \frac{P}{EA} \int_0^{\ell} dx_3 = \frac{11P\ell^3}{24EI} + \frac{P\ell}{EA}$$

と求められる。

ところで、細長さを代表するパラメータ（細長比と呼ばれる）として

$$\lambda \equiv \frac{\ell}{\sqrt{I/A}} \quad (4.103)$$

を導入すると、上の水平変位は

$$\Delta_A = \frac{P\ell^3}{EI} \left(\frac{11}{24} + \frac{1}{\lambda^2} \right)$$

と表現できる。例えば少し太めの比較的短い部材の例として、1辺が 50 cm の矩形断面で長さを 4 m とすると λ は 27.7 くらいになるので、上式の第 2 項は 1.3×10^{-3} となり第 1 項に比べると二桁程は小さい。一般的な骨組部材くらいにさらに細長い部材になると、この第 2 項はもっと小さくなって無視できるようになる。そのた

め、社会基盤構造のように細長い部材で構成された骨組の解析では、変位や不静定力を求めるときに軸力の影響を無視することの方が多い。ただし、応力を照査する場面では軸力の影響は無視できない。一つ前に対象としたケーブルで吊った梁の例の場合も、最後の不静定力の式(*)の第3項は通常は無視できる。さらにケーブルの伸びも無視できるのであれば第2項も無くなり $X = 2P$ になるので、ケーブルは伸びず、梁も曲がらないで軸力だけが生じているのに伸び縮みしないという不思議な(梁が柱になったトラスの)答になる。

(3) 不静定骨組

まず図 4.94 の等足 1 次不静定骨組の載荷点 A の水平変位を求めよう。例えば右側の図のように右下の支点を動けるようにした静定系で、実際の反力 H_2 に相当する不静定反力 X を作用させる。そして右下支点の変位が零になる条件を単位荷重法で求めれば、その条件から X が求められる。そのあとは、点 A の変位を再度単位荷重法を用いて求めればよい。

まず右側の図の静定系の支点反力を求めると

$$F_1 = -P, \quad F_2 = P, \quad H = P - X$$

となるので

$$M(x_1) = x_1(P - X), \quad N(x_1) = P, \\ M(x_2) = \ell(P - X) + x_2 P, \quad N(x_2) = -X, \quad M(x_3) = -\ell X + x_3 X, \quad N(x_3) = -P$$

と求められる。右下支点の X 方向変位を求めるための単位荷重作用系では上式で $X = 1, P = 0$ として

$$M_u(x_1) = -x_1, \quad N_u(x_1) = 0, \quad M_u(x_2) = -\ell, \quad N_u(x_2) = -1, \quad M_u(x_3) = -\ell + x_3, \quad N_u(x_3) = 0$$

となる。以上の結果を式(4.99)の公式に代入すると、右下の支点の水平変位 Δ_X は

$$\Delta_X = \frac{X - P}{EI} \int_0^\ell x_1^2 dx_1 + \frac{\ell}{EI} \int_0^\ell \{x_2 P - \ell(P - X)\} dx_2 + \frac{X}{EI} \int_0^\ell (\ell - x_3)^2 dx_3 + \frac{X}{EA} \int_0^\ell dx_2 \\ = \left(\frac{5\ell^3}{3EI} + \frac{\ell}{EA} \right) X - \frac{5\ell^3}{6EI} P$$

と求められる。元の不静定骨組の右下支点は固定されているので、この変位が零になる条件から

$$\Delta_X = 0 \quad \rightarrow \quad H_2 = X = \left(1 + \frac{3I}{5A\ell^2} \right)^{-1} \frac{P}{2}$$

と、支点反力 H_2 を算定できることになる。

前の例で説明したように、部材は十分細長いものとして右辺の括弧の中の第2項が無視できる場合は

$$H_2 = \frac{P}{2}$$

を得る。よって、各部材に生じる曲げモーメントは

$$M(x_1) = \frac{1}{2} x_1 P, \quad M(x_2) = \left(\frac{\ell}{2} - x_2 \right) P, \quad M(x_3) = -\left(\frac{\ell}{2} - x_3 \right) P$$

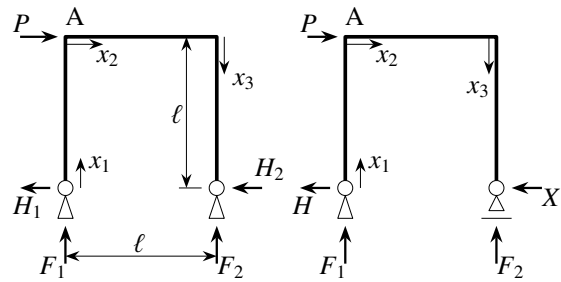


図 4.94 不静定骨組

になり、点Aに単位荷重を作用させたときの曲げモーメントは上式で $P = 1$ とすればいいので

$$M_u(x_1) = \frac{1}{2} x_1, \quad M_u(x_2) = \left(\frac{\ell}{2} - x_2\right), \quad M_u(x_3) = -\left(\frac{\ell}{2} - x_3\right)$$

と求められる。これを再度式(4.99)の公式に代入すれば、点Aの水平変位 Δ_A が

$$\Delta_A = \frac{P}{EI} \left\{ \int_0^{\ell} \frac{x_1^2}{4} dx_1 + \int_0^{\ell} \left(\frac{\ell}{2} - x_2\right)^2 dx_2 + \int_0^{\ell} \left(\frac{\ell}{2} - x_3\right)^2 dx_3 \right\} = \frac{P \ell^3}{4EI}$$

となる。細長くない場合の答は各自計算してみるといい。

次に2次の不静定骨組の例として図4.95の等足骨組の載荷点の鉛直変位を求めよう。この例では、各部材は十分に細長いものとして軸力の影響は無視する。そこで右側の図のような静定系を考え、左の支点が回転できるようにした上で不静定モーメント X を作用させ、同時に右の支点を動けるようにした上で不静定反力 Y を作用させる。このようにして、左支点の回転変位 Θ_X と右支点の水平変位 Δ_Y の両方が零になる条件から、不静定モーメント X と不静定反力 Y を求めよう。まず支点反力は

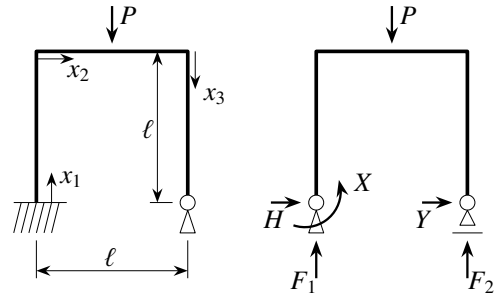


図4.95 2次の不静定骨組

$$F_1 = \frac{P}{2} + \frac{X}{\ell}, \quad F_2 = \frac{P}{2} - \frac{X}{\ell}, \quad H_1 = -Y$$

となるので、各部材の曲げモーメントは

$$M(x_1) = Y x_1 - X, \quad M(x_2) = \left(\frac{P}{2} + \frac{X}{\ell}\right) x_2 + (\ell Y - X), \quad (0 < x_2 \leq \ell/2),$$

$$M(x_2) = \ell Y + \left(\frac{P}{2} - \frac{X}{\ell}\right) (\ell - x_2), \quad (\ell/2 < x_2 < \ell), \quad M(x_3) = (\ell - x_3) Y$$

と求められる。

したがって、左の回転変位 Θ_X を求めるために単位モーメント X を作用させた系の曲げモーメント $M_u^X(x)$ は、上式の曲げモーメントで $X = 1, Y = 0, P = 0$ とすればいいので

$$M_u^X(x_1) = -1, \quad M_u^X(x_2) = \frac{x_2}{\ell} - 1, \quad M_u^X(x_3) = 0$$

でいい。また右の支点変位 Δ_Y を求めるための系の曲げモーメント $M_u^Y(x)$ も同様に $X = 0, Y = 1, P = 0$ とすればいいので

$$M_u^Y(x_1) = x_1, \quad M_u^Y(x_2) = \ell, \quad M_u^Y(x_3) = \ell - x_3$$

となる。上の曲げモーメント $M(x)$ と前者の $M_u^X(x)$ を式(4.63)に、また $M(x)$ と後者の $M_u^Y(x)$ を式(4.62)にそれぞれ代入して求められる回転角とたわみを

$$\Theta_X = \int_{3 \text{ 部材}} \frac{M(x) M_u^X(x)}{EI} dx = 0, \quad \Delta_Y = \int_{3 \text{ 部材}} \frac{M(x) M_u^Y(x)}{EI} dx = 0$$

と置けば、 X と Y に対する連立方程式を得る。この積分を実行するとそれぞれが

$$\frac{1}{16} \ell P - \frac{4X}{3} + \ell Y = 0, \quad \frac{1}{8} \ell P - X + \frac{5\ell Y}{3} = 0$$

となるので、これを解けば

$$X = -\frac{3}{176} \ell P, \quad Y = -\frac{15}{176} P$$

を得る。と書いたが、連立方程式を得るための積分を著者は3回間違った。そして、求められた X と Y を上の曲げモーメントに代入すれば、それは

$$M(x_1) = \frac{P}{176} (3\ell - 15x_1), \quad M(x_2) = \frac{P}{176} (85x_2 - 12\ell), \quad (0 < x_2 \leq \ell/2),$$

$$M(x_2) = \frac{P}{176} (76\ell - 91x_2), \quad (\ell/2 < x_2 < \ell), \quad M(x_3) = \frac{15P}{176} (x_3 - \ell)$$

となる。ここで再度、この式で $P = 1$ と置いて得られる単位荷重系の曲げモーメント $M_u^P(x)$ を求め、それを用いて式(4.62)に代入すると、载荷点の下向きの鉛直変位 Δ_P が⁴³

$$\Delta_P = \int_{3 \text{ 部材}} \frac{M(x) M_u^P(x)}{EI} dx = \frac{95}{8448} \frac{P\ell^3}{EI}$$

と求められる。と書いたが、再度、この積分も何度か間違ったし、電卓⁴³が無いとこんな大きな数値を伴う分数計算は不可能だ。3次の不静定構造なんてのは各種試験には出せない。怪我をします!

4.8.4 アーチの力学

アーチも曲がった骨組と捉えていいかもしれないが、ひずみ分布が線形にならない等、一般的な曲線座標系における基本的な支配方程式を最初から勉強し直す必要がある。例えば文献 [101] 等を参照のこと。この文書でもアーチを対象としたような数値計算例がいくつかあるが、すべて折れ線近似 [44] した骨組である。

演習問題 4-14

31. 式(4.101)を求め、幾何学的な考察で確認せよ。また、鉛直変位が下方に $\frac{P\ell}{4\sqrt{3}EA}$ になることを示せ。
32. 式(4.102)を求めよ。
33. ここの不静定トラスと骨組の例の計算を一度はやっておくこと。

4.9 仮想仕事の原理を用いた梁理論の定式化

4.9.1 仮想仕事式

Bernoulli-Euler の仮定の下で定式化される初等梁理論では、せん断力が内部のせん断応力と定義上は対応しておらず、一見妙な理論に見えていたと思う。また境界条件の正しい組み合わせについても、初学者にはあまり理解できなかったかもしれない。ここでは仮定に基づく定式化を純粋に数学的に実行する [172] ことによって、せん断力が見かけの断面力であることを示しておく。ただもちろん梁理論が、まず直応力を簡便かつ正確に求めるための近似理論であるということは注記しておきたい。さて、梁も3次元空間の細長いものとして捉えればいいので、その仮想仕事式は3次元の式(3.131)と同じであり、表面積分も抽象的に全表面 S に拡張すれば、形式的には

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V \sum_{i=1}^3 X_i \delta u_i dV - \int_S \sum_{i=1}^3 \bar{F}_i \delta u_i dS = 0 \quad (4.104)$$

⁴³ 平成の二桁になってから電卓を買い換えたのだが、分数のまま計算をする設定になっていてとても衝撃を受けた。さて京都大学の森毅先生の随筆(文献は失念)で、小学校の先生が分数をきちんと教えることができないと嘆いておられた。面白い逸話だが、「 $1/5 + 2/5 = \frac{3}{5}$ 」と回答して零点をもらった女子児童が「うちは3人家族だから男はパパだけ。お隣は5人家族で男の子は一人だから男は二人。両方の家族で男の割合を足すと $3/8$ だから間違っていないよ。」と答え、先生がその間違いを正せなかったとか。面白い。また小学2年生に対する掛け算には順序があり、「6人の子どもにあめを7こずつくばるとき、あめは何こありますか」という問題の正解は「 $7 \times 6 = 42$ 」なのであって、「 $6 \times 7 = 42$ 」は間違いになる。つまり小学低学年の「算数」の中身には「国語」あるいは「先生の言ったことを守らせること」が含まれているらしい。東北大学の Webeck 先生のお嬢さんが減点されてすごく怒っていた。もう一つ、「 $3.9 + 4.1 = 8.0$ 」も減点される。正しい答をしばらく考えたあと p.1019 の正答(★)に腹を立てて欲しい。小学校とは不思議な教育現場なのだ。

でいいことになる。 δ の付いた仮想場は運動学的許容場である。ここを出発点として、第3.5.1(2)節で説明した手順に沿って、この運動学的許容場に対応する静力学的許容場を求めることによって、梁理論を定式化しよう。

4.9.2 梁の微小変位理論

(1) 変位場 — 運動学的許容場

まず変位場に対する基本的な二つの仮定から得られる式(4.5)(4.6)の変位場とひずみ場を書き直すと

$$u_x(x, z) = u(x) - z w'(x), \quad u_z(x, z) = w(x) \quad \epsilon_{xx}(x, z) = u'(x) - z w''(x) \quad (4.105a, b, c)$$

となる。この式の変分量を算定しておくそれぞれ

$$\delta u_x = \delta u - z \delta w', \quad \delta u_z = \delta w, \quad \delta \epsilon_{xx} = \delta u' - z \delta w'' \quad (4.106a, b, c)$$

となる。

(2) 梁に対する仮想仕事式

長さ l の梁の場合、その軸線を x 方向にとることにすれば、仮想仕事式の体積積分と面積積分は

$$\int_V dV = \int_0^l dx \int_A dA, \quad \int_S dS = \int_A dA \Big|_{x=0, l}$$

と置き直せばいい。つまり、体積積分は梁断面と軸方向の積分に分ければよく、表面力は梁の表面(上下面と側面)には直接作用しないから面積積分は梁の両端の断面だけが対象となる。仮想仕事式(4.104)に前節の変位場を代入すれば、仮定に基づく梁の運動場の範囲内で力学原理が記述できているはずである。式(4.106c)のように零でない仮想ひずみ成分は $\delta \epsilon_{xx}$ 成分のみであるから、まず第1項の内力仮想仕事は

$$\int_V \sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} dV = \int_0^l \int_A \sigma_{xx} (\delta u' - z \delta w'') dA dx$$

だけになる。さらに式(4.9)(4.11)で定義した軸力 N と曲げモーメント M とを用いると上式は

$$= \int_0^l (N \delta u' - M \delta w'') dx$$

と書くことができる。被積分関数の第1項を1回、第2項を2回部分積分すると

$$= [N \delta u - M \delta w' + M' \delta w] \Big|_0^l - \int_0^l (N' \delta u + M'' \delta w) dx$$

となるが、式(4.26)の記号を用いると

$$= n_i [N \delta u + M \delta(-w') + M' \delta w] \Big|_{x=0, l} - \int_0^l (N' \delta u + M'' \delta w) dx \quad (4.107)$$

とも表すことができる。

次に仮想仕事式の第2項の体積力による仮想仕事も、式(4.106a)(4.106b)の変位成分の変分の関係式を代入すると

$$\int_V (X_x \delta u_x + X_z \delta u_z) dV = \int_0^l \left[\int_A X_x (\delta u - z \delta w') dA + \int_A X_z \delta w dA \right] dx$$

でいいことになる。したがって分布外力を

$$p \equiv \int_A X_x dA, \quad q \equiv \int_A X_z dA, \quad m \equiv \int_A z X_x dA \quad (4.108a, b, c)$$

と定義すると上式は

$$= \int_0^\ell [p \delta u - m \delta w' + q \delta w] dx$$

となるので、第2項を部分積分して式(4.26)の記号を用いると

$$= n_i [-m \delta w] \Big|_{x=0, \ell} + \int_0^\ell \{p \delta u + (m' + q) \delta w\} dx \quad (4.109)$$

となる。式(4.108a)(4.108b)の p と q はそれぞれ x, z 方向の梁の単位長さ当たりの分布外力である。それに対し、式(4.108c)の m はその定義からも明らかのように、梁の単位長さ当たりに分布するモーメントであり、無視されることが多い。

最後に仮想仕事式の第3項は上述のように梁の両端の面積分のみであるから

$$\int_A (\bar{F}_x \delta u_x + \bar{F}_z \delta u_z) dA \Big|_{x=0, \ell}$$

となる。したがって第2項の体積力についての演算と同様、式(4.106a)(4.106b)を代入し、端外力を

$$F_i \equiv \int_A \bar{F}_x dA, \quad S_i \equiv \int_A \bar{F}_z dA, \quad C_i \equiv \int_A z \bar{F}_x dA \quad (4.110a, b, c)$$

と定義する(ただし $x=0$ の面で $i=1$, $x=\ell$ の面で $i=2$)と、結局この端外力の仮想仕事項は

$$[F_i \delta u + C_i \delta(-w') + S_i \delta w] \Big|_{x=0, \ell} \quad (4.111)$$

と書くことができる。 F_i, S_i, C_i はそれぞれ両端の軸力・せん断力および集中モーメントである。

以上の各項(4.107)(4.109)(4.111)をすべて結合すると、梁の仮想仕事式の一つの表現が

$$\begin{aligned} & [(n_i N - F_i) \delta u + \{n_i (M' + m) - S_i\} \delta w + (n_i M - C_i) \delta(-w')] \Big|_{x=0, \ell} \\ & - \int_0^\ell [(N' + p) \delta u + \{M'' + m' + q\} \delta w] dx = 0 \end{aligned} \quad (4.112)$$

となる。ちなみに梁の仮想仕事式の標準形は式(5.20)である。

(3) 梁のつり合い式と境界条件

式(4.112)の仮想仕事式は任意の仮想変位 δu と δw に対して常に満足されなければいけないという条件によって、変分問題のEuler方程式が梁のつり合い式になり、副次的に適切な境界条件も誘導できる。すなわち、まず式(4.112)の第2行の被積分関数から局所的なつり合い式が

$$N'(x) + p(x) = 0, \quad M''(x) + m'(x) + q(x) = 0 \quad (4.113a, b)$$

でないといけないことがわかる。もし m を無視すれば、この式はそれぞれ式(4.19)(4.20)に一致している。また境界条件については、仮想仕事式(4.112)の第1行にある両端の項から $x=0, \ell$ ($i=1, 2$)において

$$u(x) = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i N(x) = F_i, \quad (4.114a)$$

$$w(x) = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \{M'(x) + m(x)\} = S_i, \quad (4.114b)$$

$$-w'(x) = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M(x) = C_i \quad (4.114c)$$

という組み合わせになることがわかる。これも式 (4.25) に一致する。このように、仮定された運動場の元で誘導される梁理論にはせん断力が一切現れないが、せん断力のつり合い式 (4.113b) と境界条件式 (4.114b) の形から $V(x) \equiv M'(x) + m(x)$ と定義できることはわかる。結局、梁理論におけるせん断力は曲げモーメントの勾配として副次的に定義されることになる。数学というのは便利で強力な道具なのだ。

MURPHY'S LAW — Other Contributions [11] 主法則は p.12 に。

Ettore's Observation

The other line moves faster.

Fett's Law of The Lab

Never replicate a successful experiment.

Wyszowski's First Law

No experiment is reproducible.

Futility Factor

No experiment is ever a complete failure — it can always serve as a negative example.

Young's Law

All great discoveries are made by mistake.

Corollary

The greater the funding, the longer it takes to make the mistake.

Tenenbaum's Law of Replicability

The most interesting results happen only once.

Theory of Selective Supervision

The one time in the day that you lean back and relax is the one time the Boss walks through the office.

Edwards' Time/Effort Law

Effort \times Time Constant

A. Given a large initial time to do something the initial effort will be small.

B. As time goes to zero, effort goes to infinity.

Corollary

If it weren't for the last minute, nothing would get done.

'See you tomorrow!' 夕方から深夜までの間に大学内を清掃してくれる janitor あるいは custodian は主に Hispanic⁴⁴系の人達だった。だから研究室のゴミ箱の始末に来てくれたときは「コモエスタ」「ムィヴィエングラシアス」となる。ある夜の廊下で、帰宅しようとしていた友人の日本人留学生が清掃員に「あした間に合わない!」と言って手を振っていた。面白いねえ。

⁴⁴ 確か Time Magazine だったと思うが、冠詞が 'An' なのか 'A' なのかについての議論が掲載されたことがある。どっちなんだろう。

第5章

有限要素法の基礎 — 柱と梁と平面ひずみ問題

5.1 境界値問題の弱形式と近似解法

5.1.1 近似して解くということ

第4章までは、梁と柱の問題と連続体の3次元および平面問題を境界値問題としてきちんと微分方程式と境界条件式で記述し、それを厳密に解く方法と例を紹介してきた。例えば梁や柱等の静定構造であれば、影響線載荷によって断面力や応力分布を求めることにはそれほどの困難が無いことを示し、その結果を用いて断面を設計する手順を示すことによって社会基盤構造の設計の基礎を説明してきた。一方、不静定構造の場合は静定系の解を用いた重ね合わせの原理等によって解けることも示してきた。実は設計図面が白紙の段階では、こういった解析的方法¹を主に用いて大まかな断面形状や寸法を決定するステップが必要であることも事実であろう。しかし設計がある程度進んで構造物の寸法等がほぼ決定されたあとの、3次元挙動の照査や構造詳細の確認、さらに静的および動的な崩壊までの非線形解析の段階においては、微分方程式を直接解いたり種々の解析的な手法を用いることは必ずしも現実的ではないだろう。したがってその段階では、コンピュータを用いた何らかの数値的手法に頼らざるを得ないことが予想される。

ところで同時に、3次元の弾性連続体力学に比べると構造力学の方にはさらにいろいろな仮定が含まれた近似力学だとも述べてきたので、その近似が原因となる誤差のようなものが設計に与える影響には不安を感じるかもしれない。ただ実際の構造設計においては、種々の不確定要因による危険を避けるために安全率あるいはそれに準じたパラメータを用いて、一種の余裕のある構造設計をしている。そしてその安全率には構造力学が持つ近似誤差も考慮されている。そのような設計上の現状を踏まえると、含まれるであろう数値的な誤差の程度が明らかな近似的手法でコンピュータを用いて境界値問題を解いたとしても、十分な安全が確保できることが大いに期待できる。そこでこの章では、最も代表的で有用な近似解法つまりコンピュータを用いた数値解析法の一つとしての有限要素法の基礎的な概念と、その構造力学および平面ひずみ問題への応用について説明する。ここで注意喚起しておきたいのは節題目にもある「近似」という語句に関することだ。というのも、日常的に有限要素法を用いることができるようになった昨今の現場において、数値的離散誤差を除けば「数値解は厳密だ」と勘違いする傾向があるらしいからだ。有限要素法による数値解が解析解と一致するのは極めて限られた場合のみであり、また要素数を増やしても正解に収束するとは限らないことも知っておくべきである。現場で得られた数値解がどの程度の精度で「正しい」のかについては、それを利用する技術者本人が判断しなければならない。そのとき大事なのは第4章までの解析解そのものやそこに含まれている力学的特徴を十分に理解していることだ。なおこの章では簡単のために括弧無しの太字で行列を表している。

¹ 「解析的」の正しい意味についてはp.264に説明したので誤解しないように注意すること。

5.1.2 弱形式

(1) 古典的な Galerkin 形式

あとで説明する有限要素法がどういう風に優れているのかを実感するためにも、最近教えられてないかもしれない古典的な Galerkin 法の利用からまず始めてみる。理解を容易にするために図 5.1 の具体例を用いて説明する。第4章のたわみで表した棒理論の支配方程式を用いてこの図の問題に対する基礎式を列挙すると、つり合い式が

$$-EI w''''(x) + q_0 = 0, \quad 0 < x < \ell \quad (5.1)$$

であり、境界条件が両端で

$$w(0) = 0, \quad -\{-EI w''(0)\} = 0, \quad w(\ell) = 0, \quad -EI w''(\ell) = 0 \quad (5.2a, b, c, d)$$

で与えられる。この解を、ある既知関数 $\psi(x)$ と未知係数 a を用いて $w \sim a\psi(x)$ で近似できるものとして、式 (5.1) (5.2) ができるだけ満足されるように最も適切な定数 a を決定する方法についていろいろ考えてみよう。もちろん $\{a\psi(x)\}$ は正解ではないから、それをつり合い式 (5.1) の左辺に代入して得られる次式

$$\Xi(x; a) \equiv -EI a \psi''''(x) + q_0 \quad (a)$$

は必ずしも零にはならないが、この式 (a) の $\Xi(x; a)$ は近似解 $\{a\psi(x)\}$ が持つ一種の誤差と捉えることができる。また境界条件式 (5.2) も必ずしも満足していないからそこにも誤差が存在する。精度の高い近似解は、このような誤差をできるだけ小さくすることによって求められそうである。

例えば最も簡単な近似解法の一つとして、 $0 < x < \ell$ の間のある特定の点を選んで、そこで式 (a) の誤差を零にするように近似解を探すという方法が考えられる。つまり、例えばスパン中央点で

$$\Xi(\ell/2; a) = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{q_0}{EI \psi''''(\ell/2)} \quad (b)$$

のように a を決定することができる。これは最も単純な選点法と呼ばれている。もちろんこの場合は $\psi(x)$ は4階微分が可能以上に、 $x = \ell/2$ における値 $\psi''''(\ell/2)$ が零にならないように選ばれていなければならない。しかしその解の精度が高くなる可能性はかなり低いだろう。

そこで、梁の領域全体 $0 < x < \ell$ で平均的に誤差を小さくするように、最小2乗法を適用して

$$\int_0^\ell \Xi^2(x; a) dx \rightarrow \text{最小}$$

としてみよう。つまりこの2乗誤差が近似解の a の変動に関して最小になるように

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a} \int_0^\ell \Xi^2(x; a) dx &= 2 \int_0^\ell \Xi(x; a) \frac{\partial \Xi}{\partial a}(x; a) dx = 0 \\ \rightarrow \int_0^\ell [-EI a \psi''''(x) + q_0] \{-EI \psi''''(x)\} dx &= 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{q_0 \int_0^\ell \psi''''(x) dx}{\int_0^\ell EI \{\psi''''(x)\}^2 dx} \end{aligned} \quad (c)$$

によって a を決定しよう。ここでも $\psi(x)$ は4階の微係数が存在しなければならないが、上の選点法よりは精度の高い解が得られるかもしれない。具体的な計算は次節で示す。

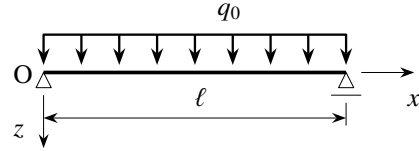


図 5.1 Galerkin 形式のための例

さて、この最小2乗法をもう少し一般化しておこう。上式(c)の最後から二つ目の式を見ると、その左辺は式(a)で定義した誤差 $\Xi(x; a)$ に $\{-EI\psi''''\}$ という重みを乗じた上で、全スパンで合計した平均的な誤差だと解釈することができる。そこで、これをさらに一般化して、ある任意の重み $v(x)$ を用いて

$$\int_0^l \Xi(x; a) v(x) dx = 0 \quad \text{つまり} \quad \int_{\text{領域}} (\text{誤差}) \times (\text{重み}) d(\text{領域}) = 0 \quad (5.3a, b)$$

のように書いたとすると、誤差の全領域重みつき平均を零にするような方法が最小2乗法を一般化した近似解法(重みつき残差法)だと解釈できそうだ。つまり上の最小2乗法は、重み $v(x)$ として

$$v(x) = \frac{\partial \Xi}{\partial a}(x; a) = -EI\psi''''(x)$$

を選んだことになる。この場合の重み $v(x)$ の物理的な意味を無理やり考えてみるとそれは z 方向の総内力になっているが、そんなことはどうでもいい。もしこのように考えると、実は式(b)の選点法も、同じ重みつき残差法的な近似式(5.3)の重み $v(x)$ として式(4.57)で定義したデルタ関数を用いて

$$v(x) = \delta(x; l/2)$$

と置いたものとして認識できる。これを物理的に解釈するのはちょっと難しい。さて計算するまでもなく、同じ近似解 $\{a\psi(x)\}$ を用いた場合、1点を用いた選点法よりも最小2乗法の方が精度のいい解を得ることができそうだが、その根拠は無い。このように、式(5.3)のような近似解法を利用する場合、その近似の精度は選んだ関数 $\psi(x)$ の性質だけではなく重み $v(x)$ の特性にも強く依存しそうだ。

最小2乗法を一般化した重みつき残差法は力学的な匂いあまりしないし、実測したデータ処理みたいに感じてしまったかもしれない。そこで式(5.3)を力学的な境界値問題を近似的に解くという観点から解釈し直しておこう。式(5.3)を陽な形で書き直すと

$$\int_0^l \{-EI w''''(x) + q_0\} v(x) dx = 0 \quad (5.4)$$

であった。これは第3.5.1(1)節で説明した連続体の仮想仕事式の誘導過程の最初の領域積分の式に相当するし、第4.4.2(1)節の梁の単位荷重法の誘導過程の最初の領域積分の式そのものでもある。つまりこの式(5.4)は初等的な仮想仕事式と呼んでもいい。他と区別するためにこの形式を古典的な **Galerkin** 形式と呼ぶことにする。これは式(5.1)(5.2)で表される境界値問題の弱形式の一つとも呼ばれているが、それは次のような理由による。もし $w(x)$ が元の問題の正解であれば式(5.1)がすべての点 x で厳密に成り立つので、式(5.1)は $w(x)$ を決定するための非常に「強い」条件(つり合い式; 強形式)と呼ばれる。これに対し上式(5.4)を「弱い形式」と呼ぶのは、任意の関数 $v(x)$ に対して式(5.4)を満足する $w(x)$ が必ずしも元の問題の正解ではないからなのである。しかしこの $w(x)$ が正解ではなかったとしても、上式(5.3)でも示したように「式(5.4)の被積分関数の括弧の中は正解ではない $w(x)$ によって生じた不釣り合い力すなわち誤差であり、それに重み $v(x)$ を乗じて梁全体でその誤差の総和をとったものが零になる」ということを示していることから、誤差の何らかの領域平均が最小2乗法的に零になっている条件として式(5.4)を捉えることができる。したがって、弱形式を用いることによって $w(x)$ の近似解が求められそうなのが期待できる。ただここまでのアプローチにおける最も重大で見落とされそうな問題点は、基礎として用いる弱形式の中に境界条件が全く考慮されていないことである。また重み $v(x)$ にも何ら条件を課していないことにも不安が残る。この境界条件と $v(x)$ の条件に対する配慮については後ろの第5.1.2(3)(5)節で示す。

(2) 古典的 Galerkin 形式による近似例

では式 (5.4) を用いて実際に近似解を求めてその特性を把握しておこう。式 (5.2) の境界条件を念頭に置くと、 a を未知係数とした近似解を

$$w(x) \sim a \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

と置くことをすぐに思い付くだろう。というのもこれは規定された四つの境界条件をすべて満足するからだ。そこで重み $v(x)$ にも $w(x)$ の a を無くして $v(x) = \sin(\pi x/\ell)$ と置いて式 (5.4) に代入すると

$$0 = \int_0^{\ell} \left\{ -EI a \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) + q_0 \right\} \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) dx = -\frac{\ell EI}{2} \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^4 a + \frac{2q_0 \ell}{\pi}$$

となるから、結局

$$a = \frac{4q_0}{\pi EI} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^4$$

と求められる。この問題の中央点のたわみの厳密解は $\frac{5q_0 \ell^4}{384EI}$ であるから、上の近似関数で同点のたわみの近似値を計算すると

$$w(\ell/2) \sim \frac{4q_0}{\pi EI} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^4 \approx 1.0039 \times (\text{厳密解})$$

となり、誤差が 0.4% 程度のとてもいい精度²の近似解が得られた。このように弱形式を用いて求められる解は元の問題の近似解になる可能性は高く、近似する関数を適切に選べば、この例のように良好な精度で近似解を求めることができそうだ。しかし本当にそうだろうか。というのも、ここで選んだ sine 関数は前述のように偶々境界条件を四つとも満足していて、誤差はつり合い式のみには存在しなかったからだ。だから境界条件を全く考慮していない古典的な Galerkin 形式でも精度のいい近似解が求められた可能性がある。

では試しに、厳密なたわみの解の式 (4.35) を少し変形した

$$w(x) \sim ax(\ell - x)(2\ell^2 + \ell x - x^2) \quad (5.5)$$

を用いてみよう。下線を引いた '2' だけが厳密解と異なっている。この関数は両端で零になり幾何学的境界条件式 (5.2a) (5.2c) は満足するが、その 2 階の微係数は両端で零にはならず、式 (5.2) の境界条件のうちの力学的境界条件式 (5.2b) (5.2d) は満足していない。ここでも式 (5.5) の a の無い右辺を重み $v(x)$ として使い、上と同様の演算をすると

$$a = \frac{q_0}{24EI} \rightarrow w(\ell/2) \sim 1.80 \times (\text{厳密解})$$

となり、中央のたわみは厳密解の 1.8 倍、つまり 80% もの誤差を含んでしまった。したがって、式 (5.4) の古典的な Galerkin 形式を使う場合に用いる近似解は、当然のことながら幾何学的境界条件を満たしていると同時に、力学的境界条件も満たさない限り、その解には大きな誤差を含んでしまうのである。これではとても実用的な近似解法とは考えられない。さあどうしよう。

演習問題 5-1

1. 中央に集中外力が作用した単純梁のつり合い式は

$$-EI w''''(x) + P \delta(x; a) = 0, \quad 0 < x, a < \ell$$

となる。ここに $\delta(x; a)$ はデルタ関数で、第 4.4.1 節の式 (4.57) でその定義と扱い方を示してある。この問題の弱形式を求めよ。

² スパン中央のたわみだけを見て精度を議論することにあまり意味は無いが、比較の目安としてこの節では着目している。精度については第 5.4.3(3) 節に概念を述べた。

2. 近似関数として上の例と同じく sine 関数を用い、上の演習問題のたわみの近似解を求め、中央点における精度を示せ。

(3) Galerkin 形式

前節最後の例では、わざと一部の境界条件（力学的境界条件）を満足しない関数を選ぶことによって式 (5.4) を用いた近似解の精度が悪くなることを示した。より複雑な問題ではすべての境界条件を満たす近似関数を探すことは一般には容易ではないから、このままでは弱形式 (5.4) は使えないことが明らかになった。そして、選んだ近似関数が 4 階の微係数が定義できるものでないといけなかったことも、その選択をさらに難しくしそうだ。この状況を改善するためには境界条件の誤差も含まれるように弱形式を定義し直す必要がありそうだ。また同時に、近似関数の微係数の階数も小さくできればさらに使い易くなりそうだ。そこで、弱形式 (5.4) に境界条件式 (5.2) の一部を、つまり少なくとも力学的境界条件だけでも含めることを試みよう。第 3.5.1 (1) 節や第 4.4.2 (1) 節の仮想仕事式の誘導をよく勉強した読者ならその改善策をすぐに思い付くと思う。

まず近似解 $w(x)$ については以下の誘導から明らかのように、少なくとも 2 階微分可能な関数を選ぶことにする。そうすると高階の微係数で規定される力学的境界条件を満たす関数にはなりそうもないが、さすがに幾何学的境界条件の方は必ず満足させておかないと何をしているかわからなくなる。それに対応させて、とりあえず重み関数 $v(x)$ も最低限 2 階微分可能なものを選ぶことにして、式 (5.4) の被積分関数の第 1 項を 2 回部分積分すると

$$0 = [-EI w'''(\ell) v(\ell) - \{-EI w''(\ell)\} \{-v'(\ell)\}] - [-EI w'''(0) v(0) - \{-EI w''(0)\} \{-v'(0)\}] - \int_0^\ell EI w''(x) v''(x) dx + \int_0^\ell q_0 v(x) dx$$

となる。さらに重み関数 $v(x)$ も元の問題と同じ幾何学的境界条件だけは満足し

$$v(0) = 0, \quad v(\ell) = 0$$

となるものを選ぶ³ことにする。これと、境界条件式 (5.2) のうちの力学的境界条件式 (5.2b) (5.2d) とを上式右辺の第 1 行に代入すると、そのすべてが零になり、最終的に上式は

$$\int_0^\ell \{-EI w''(x)\} \{-v''(x)\} dx - \int_0^\ell q_0 v(x) dx = 0 \quad (5.6)$$

となる。得られた式 (5.6) には境界における項を全く含まないので、式 (5.4) と何ら違いが無いように見える。しかしその誘導過程では元の問題の力学的境界条件を考慮してあるので、この新しい弱形式から得られる近似解の精度が上がることを期待できそうだ。この弱形式 (5.6) を **Galerkin 形式** と呼ぶ。

(4) Galerkin 形式を用いた近似

では新しく誘導された弱形式を用いた場合に近似解が改善されるのかどうかを確かめよう。比較のために式 (5.5) で示した 4 次多項式で $w(x)$ を近似し、重み $v(x)$ も同じく式 (5.5) から a を取り除いた部分で与える。これを式 (5.6) に代入して、未知係数 a と中央点のたわみを計算すると

$$a = \frac{11q_0}{504EI}, \quad w(\ell/2) \sim \frac{99q_0\ell^4}{8064EI} \approx 0.943 \times (\text{厳密解})$$

³ Lagrange の未定乗数を用いて幾何学的境界条件も含めた変分原理の定式化も可能であり、その場合には重みや近似関数の選択はかなり自由になる。あるいは $v(x)$ が幾何学的境界条件を満足しない場合は、式 (5.6) の左辺に境界項 $\{-EI w'''(0) v(0)\} - \{-EI w'''(\ell) v(\ell)\}$ を残しておくという手もある。

となる。つまり、前の方法では80%もの誤差を出したのと同じ関数を近似解に用いたにもかかわらず、新しく抛りどころにした式(5.6)の弱形式を用いることによって、その誤差をわずか5.7%にまで小さくできたことになる。この式(5.6)の Galerkin 形式を用いた近似解法を **Galerkin 法** と呼ぶ。再度 Galerkin 形式の誘導過程と最終的な表現を見直してみると

- $w(x)$ を近似する関数は、幾何学的境界条件を満足している必要はあるが、2回微分可能な関数であれば力学的境界条件は満たさなくてよく
- 重み $v(x)$ も、幾何学的境界条件を満足していさえすれば、2回微分可能な関数でいい

ことがわかる。

そこで上の例よりもっと簡単な関数で試してみよう。もちろん厳密解は x の4次多項式だからかなり乱暴な選択だが

$$w(x) \sim ax(\ell - x), \quad v(x) = x(\ell - x) \quad (5.7a, b)$$

と置いてみよう。図示する限りは2次多項式と4次多項式はそれほどの違いは無いだろう。しかし2階の微係数が定数になるので力学的には許容できそうもない近似であるが、少なくとも積分は簡単だ。これを式(5.6)の Galerkin 形式に代入して未知係数 a と中央点のたわみを計算すると

$$a = \frac{q_0 \ell^2}{24EI}, \quad w(\ell/2) \sim \frac{q_0 \ell^4}{86EI} \approx 0.893 \times (\text{厳密解})$$

となる。つまり4次多項式を2次の多項式で近似したにもかかわらず、中央点のたわみの誤差はわずか10%程度に留まっている。上述のように2次多項式の2階の微係数は定数になり、したがって曲げモーメントの近似解は全スパンで一定になっているし、力学的境界条件も満足しておらず、物理的にはとてもおかしな解であるが、この変位そのものの精度は非常にいい。以上の結果をたわみ形状で比較したのが図5.2である。破線が先に求めた4次多項式の場合の解であり、実線が2次多項式の近似解である。もちろん前述のように2次多項式では曲げモーメントの精度が悪く、それは直応力の精度が悪いことを意味するので、工学的には決して有用な解ではないかもしれない。多分、用いる近似関数や重みにはもっときちんとした制約条件が必要だろうし、得られた数値解の精度や解釈について注意すべき点も明らかにしておく必要がある。というのも、あとで定義する梁の標準的な有限要素から求められる曲げモーメント分布は(有限要素法という枠組の中では)線形関数にしかならないからだ。一様分布よりはましたが正解にはならないのだ。

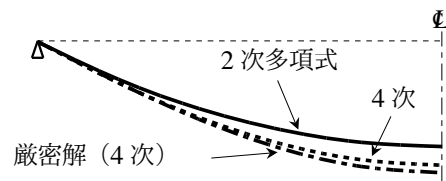


図 5.2 近似解と厳密解の比較

演習問題 5-2

3. 演習問題 5-1 の1番で求めた弱形式を Galerkin 形式にし、種々の試行関数を用いて近似解を求め、その精度を示せ。
4. 片持ち梁の先端に集中外力が作用する場合の Galerkin 形式を求めよ。
5. その近似関数として $\{1 - \cos(\pi x/2l)\}$ を用いて近似解を求め、その精度を示せ。

(5) 仮想仕事式

もう少し力学的境界条件の考慮の仕方がわかり易くなるような例として、図5.3に示したように分布外力が一様ではなく、右端にも集中モーメントを作用させて、零でない力学的境界条件が与えられた系を対象にして

おこう。この場合も前節と同様の演算を繰り返すことによって、最終的な Galerkin 形式が

$$\int_0^\ell \{-EI w''(x)\} \{-v''(x)\} dx - \int_0^\ell q(x)v(x) dx - C_0 \{-v'(\ell)\} = 0 \quad (5.8)$$

となる。さて重み関数と呼んでいた $v(x)$ を、 $w(x)$ の変位が生じてつり合っている状態からの変動のような仮想変位と捉えることにしよう。そうすると式 (4.13b) を用いることによって上式は

$$\int_0^\ell M(x)\kappa(x) dx - \int_0^\ell q(x)v(x) dx - C_0 \theta(\ell) = 0, \quad \kappa(x) \equiv -v''(x), \quad \theta(x) \equiv -v'(x)$$

とも表現できる。つまり第1項が内力 $M(x)$ が仮想的な曲率 $\kappa(x)$ とする仮想仕事であり、第2項が分布外力 $q(x)$ が仮想変位 $v(x)$ とする外力仮想仕事、最後の項が端集中モーメント C_0 が仮想的なたわみ角 $\theta(x)$ とする端部の外力仮想仕事である。これは式 (3.127) で示した仮想仕事式を梁に適用した式であり、仮想仕事の式あるいは仮想仕事の原理を梁に適用した一例なのである。

近似計算の部分を除きここまでは $w(x)$ が厳密解であることを前提にして定式化をしてきた。今度は逆に、 $v(x)$ は幾何学的境界条件を満足した2階微分可能な関数とし、 $w(x)$ の代わりに、幾何学的境界条件を満足し4階微分可能な関数 $w_a(x)$ と置いてみよう。このとき任意の $v(x)$ に対して $w_a(x)$ が

$$\int_0^\ell \{-EI w_a''(x)\} \{-v''(x)\} dx - \int_0^\ell q(x)v(x) dx - C_0 \{-v'(\ell)\} = 0 \quad (5.9)$$

を満足している場合に、弱い意味でどんな方程式を $w_a(x)$ は満足することになるのかということを確認してみよう。なお、ここまでの例の幾何学的境界条件は零境界条件だったが、一般にはそうとは限らない。しかし仮想仕事式の $v(x)$ を仮想変位として、つまりつり合った状態のある解の近傍の変動のように取り扱っているので、もう少し厳密な条件を $v(x)$ には課すことにして

【★】与えられた幾何学的境界条件に対応する量が「零になる」。つまり規定された量は変動させない

ものとする。さてここでは、前節の演算とは逆向きの演算をすればいいので、この式の第1項を $v(x)$ の方に対して2回部分積分すると

$$0 = \{EI w_a''(x)v'(x) - EI w_a'''(x)v(x)\} \Big|_0^\ell + \int_0^\ell EI w_a''''(x)v(x) dx - \int_0^\ell q(x)v(x) dx - C_0 \{-v'(\ell)\}$$

を得る。 $v(x)$ が幾何学的境界条件を規定した境界で零になることを右辺第1項に代入して整理すると

$$0 = \{-EI w_a''(\ell) - C_0\} \{-v'(\ell)\} + \int_0^\ell \{EI w_a''''(x) - q(x)\} v(x) dx$$

となる。ここで、任意の仮想変位 $v(x)$ に対してこの式が常に成立するためには、まず第1項の $\{-v'(\ell)\}$ の係数が零であると同時に、第2項の被積分関数の括弧の中が物体中のすべての場所で零であればいいことがわかる。つまりこの仮想仕事式 (5.9) は、 $w_a(x)$ が

$$-EI w_a''''(x) + q(x) = 0 \quad (0 < x < \ell), \quad -EI w_a''(\ell) = C_0 \quad (5.10a, b)$$

を満足するための必要条件になっていることがわかる。そしてこの二つの式はそれぞれ $0 < x < \ell$ のつり合い式と $x = \ell$ の力学的境界条件に他ならないのだ。

この誘導からは、適切に選んだ関数 $w_a(x)$ が仮想仕事の原理を満足していれば、それは最終的につり合い式および力学的境界条件を上のような弱い（積分された平均的な）意味で満足するように仕組まれていることが

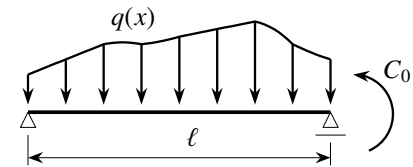


図 5.3 仮想仕事式のための例

わかる。また幾何学的境界条件を $w_a(x)$ は満足していなければならないが、 $v(x)$ もその幾何学的境界条件に対応した零境界条件を満足していなければならないことも明らかになった。最初に用いた古典的な Galerkin 形式に基づく近似では、幾何学的なものだけではなく力学的な境界条件も満足する関数を用いなければ精度が上げられなかったが、それに対し Galerkin 形式を用いた近似では、力学的境界条件を満足しない関数を用いた場合でも精度のいい近似解が求められた。その理由が上で説明したような仕組みなのである。通常、幾何学的境界条件を本質的境界条件、力学的境界条件を自然境界条件と呼んで区別している。

さて近似解は、前節までと同様 $w(x) \sim w_a(x) = a\psi(x)$ と置いて式 (5.9) を満足するように a を求めればよい。そしてここまでの例では $v(x)$ にも同じ関数 $\psi(x)$ を選んでいた。本当はそうする必要は無いのだが、式 (5.9) を仮想仕事式と呼んだように、 $v(x)$ はつり合っている状態に仮想的に与えた変動のような仮想変位と考えているので、結局 $w(x)$ にさらに加えたたわみ変動量と捉えて $\delta w(x)$ と書くこと [$v(x) \rightarrow \delta w(x)$] にする。こうすれば式 (5.9) は

$$\int_0^\ell \{-EI w_a''(x)\} \{-\delta w''(x)\} dx - \int_0^\ell q(x) \delta w(x) dx - C_0 \{-\delta w'(\ell)\} = 0 \quad (5.11)$$

と表現し直すことができる。このように考えると、近似解を $w_a(x) = a\psi(x)$ と置き、それをちょっとだけ仮想的に変動させたものが $\delta w(x)$ なので、 a をちょっとだけ変動させて $\delta w(x) = \delta a \psi(x)$ と置けばいいことになる。つまり上式 (5.11) は

$$\delta a \left[a \int_0^\ell \{-EI \psi''(x)\} \{-\psi''(x)\} dx - \int_0^\ell q(x) \psi(x) dx - C_0 \{-\psi'(\ell)\} \right] = 0$$

となり、任意の仮想変位 $\delta w(x)$ 、つまり任意の δa に対してこの式が成立する条件から

$$a = \frac{\int_0^\ell q(x) \psi(x) dx + C_0 \{-\psi'(\ell)\}}{\int_0^\ell EI \{\psi''(x)\}^2 dx} \quad (*)$$

のようにして近似解が求められる。実際の精度については各自 $\psi(x)$ に適切な関数を用いて確かめて欲しい。

演習問題 5-3

- 図 5.3 で $q(x)$ が一定 q_0 の場合を対象として、 $\psi(x)$ に何らかの多項式等を用い式 (*) で近似解を求めて厳密解と比較せよ。
- 工学分野の境界値問題の代表は、場の方程式が $0 < x < 1$ で

$$\frac{d}{dx} \left\{ \alpha(x) \frac{du(x)}{dx} \right\} - \beta(x) u(x) + f(x) = 0$$

と表される場合がある（本来は固有値問題）。境界条件は例えば

$$\left\{ u(0) = u_1 \quad \text{あるいは} \quad -\alpha(0) \frac{du}{dx}(0) = g_1 \right\} \quad \text{および} \quad \left\{ u(1) = u_2 \quad \text{あるいは} \quad \alpha(1) \frac{du}{dx}(1) = g_2 \right\}$$

で与えられる。この境界値問題に対応する仮想仕事式を求めよ。

5.2 有限要素法の考え方

5.2.1 Galerkin 法の精度改善

前節では弱形式を用いた近似解法が優れていることを示したが、そのとき用いる弱形式と近似関数によって結果の精度が左右されることも定量的に明らかにした。工学的に許容できる範囲内で近似解を得るためには、

この精度を上げる方法を考えることと、数値結果が持つ誤差についての特性を明らかにすることがさらに必要だ。また前節では基本的に弱形式に代入する近似解 $w(x)$ の関数には、問題の定義域全体で定義された一つの関数 $\varphi(x)$ (前節では $\psi(x)$) を用いて $w(x) \sim a\varphi(x)$ と表現していたが、例えばその関数を工夫することによって精度を上げようとする

- 図 5.2 の結果が示すように、関数 $\varphi(x)$ そのものを改善するか、あるいは
- 一つの関数ではなく複数の関数を用いるか

といった二つの方法を思い付くだろう。前者は未知係数が 1 個のままなのであまり改善は期待できそうもないので、ここでは後者を検討するために

$$w(x) \sim \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) \quad (5.12)$$

のように複数の関数 $\varphi_n(x)$ を用いて複数の未知係数 a_n を求めることにし、この項数 N を増やすことによる精度の改善について検討しよう。例えば最も単純な選点法の場合には、領域中に N 個の点 ξ_n ($n = 1 \sim N$) を選んで重みを $v(x) = \sum_{n=1}^N \delta(x; \xi_n)$ とすれば N 個の a_n ($n = 1 \sim N$) に対する連立方程式を得るので、それを解けばいい。

しかしここでは選点法よりは精度が高そうな仮想仕事式を用いてみよう。具体例として図 5.1 に示した等分布外力の作用した単純梁を対象として、例えば前節で用いた式 (5.5) (5.7) の二つの近似関数を利用して

$$w(x) \sim w_a(x) = a_1 x(\ell - x) + a_2 x(\ell - x)(2\ell^2 + \ell x - x^2)$$

と置いてみる。仮想変位は未知係数が少し変動したものと解釈すればよかったから、それぞれを変動させて

$$\delta w(x) = \delta a_1 x(\ell - x) + \delta a_2 x(\ell - x)(2\ell^2 + \ell x - x^2)$$

と置けばいい。この二つを仮想仕事式 (5.6) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} EI \int_0^\ell [-2a_1 + a_2(-2\ell^2 - 12\ell x + 12x^2)] \times [-2\delta a_1 + \delta a_2(-2\ell^2 - 12\ell x + 12x^2)] dx \\ - q_0 \int_0^\ell [\delta a_1 x(\ell - x) + \delta a_2 x(\ell - x)(2\ell^2 + \ell x - x^2)] dx = 0 \end{aligned}$$

となる。積分を実行して $\delta a_1, \delta a_2$ 毎にまとめると

$$\delta a_1 [EI \{4\ell a_1 + 8\ell^3 a_2\} - q_0 \ell^3 / 6] + \delta a_2 [EI \{8\ell^3 a_1 + 84\ell^5 / 5 a_2\} - q_0 11\ell^5 / 30] = 0$$

となるので、任意の $\delta a_1, \delta a_2$ に対してこの等式が常に成立するためには、それぞれの鉤括弧の中が同時に零になればいい。すなわち

$$EI \begin{pmatrix} 4\ell & 8\ell^3 \\ 8\ell^3 & 84\ell^5 / 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{q_0 \ell^3}{30} \begin{pmatrix} 5 \\ 11\ell^2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{q_0}{24EI} \begin{pmatrix} -\ell^2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と求められる。実はこの a_1, a_2 を代入した $w_a(x)$ は厳密解に一致する。すなわち、近似解法とは言え厳密解を含む関数の集合の中から近似解を設定すると、きちんと厳密解を得ることができるのだ。このことから、式 (5.10) の誘導過程で示したように、仮想仕事の原理が元の境界値問題とある意味で等価なことがわかる。また、もし a_2 の方の近似関数に中央に集中外力を受ける単純梁のたわみ形状を用いたとしても、 $\ell/4$ 点のたわみ $w_a(\ell/4)$ の近似解と厳密解の誤差は 1.8% に留まるのである。その場合さらに驚くべきことに、梁中央のたわみ $w_a(\ell/2)$ だけは厳密解に一致するが、その様子については次の節でも具体的に示す。このように複数の関数を用いることによって近似解の精度が改善されることがわかる。

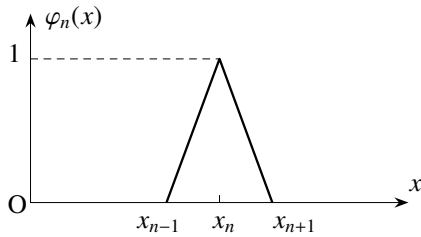


図 5.4 区分的に定義された近似関数 (1 次多項式の場合)

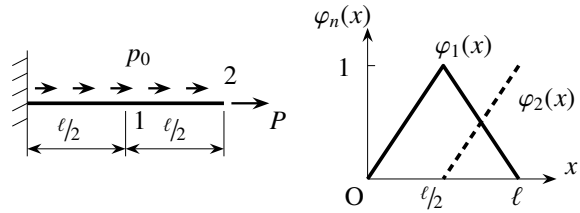


図 5.5 区分的多項式で柱を解く

演習問題 5-4

8. 中央に集中外力が加わったときのたわみ形状を用いて $w(x) \sim a_1 x(\ell - x) + a_2(3\ell^2 x - 4x^3)$, $0 < x < \ell/2$ とした場合の近似解を求め、本文中の上の記述を確認せよ。ただし、弱形式の積分計算は関数および問題の対称性から、 $0 < x < \ell/2$ までの積分をそれぞれ 2 倍すればいいことを利用すればいい。

5.2.2 区分的多項式による近似

さて図 4.31 の連続梁の場合に中央で零になる関数 $\varphi(x)$ を探すのは面倒だろう。しかも左のスパンは等分布外力の作用によってたわみは 4 次多項式が正解なのに対し、右のスパンは中央で 3 階の微係数が不連続な 3 次多項式が正解なので、全スパンを定義域とする関数でそれを近似するのはさすがに精度が悪そうだ。ところで前節の最後の例、つまり演習問題 5-4 の 8 番では実はとても興味深い結果を得ていたのだ。問題文に書いたように系の対称性を利用して半スパンの計算で済ませていたから気付かなかったかもしれないが、実はスパン中央で 3 階の微係数が不連続な関数を半スパン毎に用いたことになっていたのである。それでもなお中央点のたわみは厳密解に一致した。それなら例えば図 4.31 の連続梁でも、左のスパンと右の半分ずつのスパンを別々の関数で近似した Galerkin 法を用いれば、もしかしたら前節最後の例くらいにいい精度の近似解が得られるかもしれない。そこでもう一つの改善策として、全領域を定義域とする関数の代わりに

[★] 対象とした領域を多くの区間に分割し、関数はある程度までの連続性しか持たない (多項式の次数が低い等の) まま、各区間毎に区分的に定義された多項式⁴を用いて近似する

というアイデアはどうだろう?

例えば柱の x 方向の変位成分 $u(x)$ の場合、図 5.4 に示したように、関数 $\varphi_n(x)$ が点 $x = x_n$ で 1 になるように、かつ限られた領域 $x_{n-1} < x < x_{n+1}$ 上だけで定義された 1 次多項式として

$$u(x) \sim \sum_{n=1}^N u(x_n) \varphi_n(x), \quad \varphi_n(x_n) = 1 \quad (5.13)$$

と近似するのである。このように、ある点で 1 になる関数を用いることによって、例えば今までの式 (5.12) に用いていた (必ずしも物理的な意味が無く次元もバラバラな) 未知係数 a_n の代わりに、 $x = x_n$ における近似関数そのものの値 $u(x_n)$ を未知係数として用いることができていることも大きな特徴の一つである。その一方で 1 階の微係数はすべての点 x_n で不連続だが大丈夫だろうか。例として先端に集中外力が載って等分布外力も作用する図 5.5 の左側の柱を対象としてみよう。2 区間に分けて区分的に与える二つの近似関数を

$$u(x) \sim u_1 \varphi_1(x) + u_2 \varphi_2(x), \quad u_1 \equiv u(\ell/2), \quad u_2 \equiv u(\ell) \quad (a)$$

⁴ 前節までの例では、古典的 Galerkin 法を用いたときに三角関数を一度だけ用いた以外は暗黙のうちに多項式を用いていた。しかし例えば平板理論を近似的に解く有限帯板法では、境界条件のことを考慮して三角関数 (Fourier 級数) を用いることもある。ただし、ある幅を持った平板を細い帯状の板に分割し、それぞれに独立した近似関数を用いるといった手法、つまり対象物を細かく分割する手法も併用されている。実は区分的三角関数の利用が収束を改善するとは限らなかった [91] かもしれない。

と置く。ここに用いた関数は図 5.5 の右側に示した実線と破線のように

$$\varphi_1(x) \equiv \begin{cases} \frac{2x}{\ell}, & 0 < x < \frac{x}{2} \\ 2\left(1 - \frac{x}{\ell}\right), & \frac{x}{2} < x < \ell \end{cases}, \quad \varphi_2(x) \equiv \begin{cases} 0, & 0 < x < \frac{x}{2} \\ \frac{2x}{\ell} - 1, & \frac{x}{2} < x < \ell \end{cases}$$

といった区分的 1 次多項式である。一方、仮想仕事式は梁と同様の演算を行うことによって

$$\int_0^\ell EAu' \delta u' dx - \int_0^\ell p_0 \delta u dx - P \delta u_2 = 0 \tag{b}$$

となるから、式 (a) を代入すれば

$$\int_0^\ell EA(u_1\varphi_1' + u_2\varphi_2')(\delta u_1\varphi_1' + \delta u_2\varphi_2') dx - p_0 \int_0^\ell (\delta u_1\varphi_1 + \delta u_2\varphi_2) dx - \delta u_2 P = 0$$

を得るから、結局、具体的に関数を代入して積分を実行すると

$$\delta u_1 \left[\left(\frac{2EA}{\ell} + \frac{2EA}{\ell} \right) u_1 - \frac{2EA}{\ell} u_2 - \frac{p_0\ell}{2} \right] + \delta u_2 \left[-\frac{2EA}{\ell} u_1 + \frac{2EA}{\ell} u_2 - \frac{p_0\ell}{4} - P \right] = 0$$

となる。任意の δu_n に対してこの式が常に成立するためには上式の鉤括弧内がいずれも同時に零であればよく

$$\frac{2EA}{\ell} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0\ell/2 \\ p_0\ell/4 + P \end{Bmatrix} \tag{c}$$

のような u_1, u_2 についての連立方程式になる。これを解けば

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \frac{\ell}{2EA} \begin{Bmatrix} 3p_0\ell/4 + P \\ p_0\ell + 2P \end{Bmatrix}$$

のように、物理的な意味を持つ未知係数を直接求めることができる。

結果を図 5.6 に破線で示したが、変位 $u(x)$ の厳密解が 2 次多項式であるのに対し、それに非常に近い折れ線で近似解が求められている。また変位には 1 次多項式を選んだから、変位 $u(x)$ の 1 階の微係数である軸力 $N(x)$ は各区間で定数になり、それが厳密解の平均値になっていることも右側の図からわかる。つまり、軸力 (近似関数の 1 階の微係数) が誤差の最小 2 乗法的に求められた近似解になっているように見える。

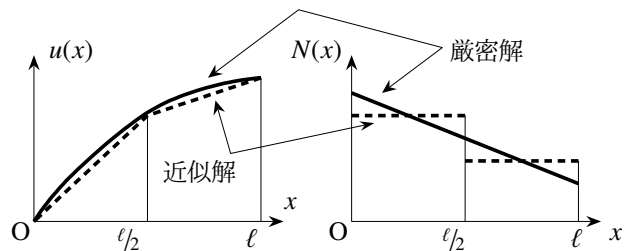


図 5.6 有限要素解の例

さらに精度を上げるには、関数の形はこのままにして区間数を多くしていけばよさそうだ。図 5.7 には 4 区分した場合の近似解を示したが、これから類推できるように、区間数を増やすことによって近似解は次第に厳密解に漸近していき、

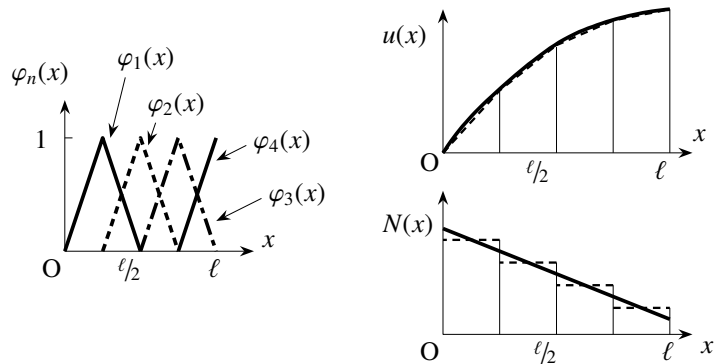


図 5.7 要素数を増やした場合の改善

その極限として厳密解に「収束する」と考えてよさそうだ。そして近似の精度は軸力つまり近似関数の 1 階の

微係数の2乗平均的な誤差で定量化できそうだ。ただ変位については、上で求められた節点の u_n だけは厳密解に一致している。なぜ厳密解が得られるかという理由の一つは第5.4.1節に示した。このように、ある点だけで厳密解に一致する現象は超収束と呼ばれる [91] が、これが発生するのはごく稀であり、あくまでも区分的多項式による解は近似であることをしっかり認識しておく必要がある。

以上のように、区分的な多項式で近似しても精度を上げることができることを示すことができた。それぞれの有限な区間 $x_n < x < x_{n+1}$ の領域を有限要素と呼ぶことにして、例えば図5.5の $l/2 < x < l$ の有限要素に着目してみよう。すると、そこでは

- 近似関数としてはそれほど滑らかな関数ではなく、最低限必要な連続性を持つ区分的な関数、つまり有限要素毎にいくつかの低次の多項式（この例では二つの1次多項式）を用い、
- 近似する関数そのものの有限要素間の接続点（節点と呼ぶ）における値（この例では u_1 と u_2 ）を未知係数として用いる

といった近似をしていることがわかる。このような近似解法を有限要素法と呼んでいる。要素数を増やすことによって

- 近似した関数（この例では $u(x)$ ）は、一様ではないものの厳密解に収束し、
- 関数のある階数の微係数（この例では $u'(x)$ ）は、関数そのもの（この例では $u(x)$ ）よりは遅いもの、やはり領域内の2乗平均的には厳密解に収束する

ことが期待できる。この有限要素法の考え方は、区分的多項式と弱形式を組み合わせた境界値問題の近似解法の一つであり、例えば、拡散や浸透流の問題や波動方程式のような種々の初期値境界値問題にも同じように適用できる汎用的な近似解法なのである。

演習問題 5-5

9. 図5.5の柱の仮想仕事式が上の式 (b) であることを示せ。

5.3 構造部材の有限要素

5.3.1 要素剛性方程式

(1) 柱の場合

図5.8の長さ l の一般的な1有限要素の仮想仕事式は⁵

$$\int_0^l EAu' \delta u' dx - \int_0^l p \delta u dx - F_1 \delta u_1 - F_2 \delta u_2 = 0 \quad (5.14)$$

である。変断面でも容易に定式化できるが、簡単のために1有限要素は単一材料でできた等断面区間だとする。まず第一に、変形できる物体にとって仮想仕事式 (5.14) の中で最も重要な項は第1項の内力仮想仕事だから、それが無くならないためには $u(x)$ の近似関数には1階の微係数が存在する必要がある。したがって、多項式を用いる限りは ' x ' の1次以上の多項式が必要である。また境界条件によっては柱が剛体的に移動する場合もあるため、並進変位を表す ' 1 ' (定数) も必要である。さらに幾何学的境界条件を踏まえると、その境界条件を

⁵ 数学的には分割した要素毎の仮想仕事は個々に零である必要は全く無いのだが、後述の直接剛性法を用いる限り、最終的な全体剛性方程式は正しく求められるので、わかり易さの観点から一つの要素だけを取り出して説明している。

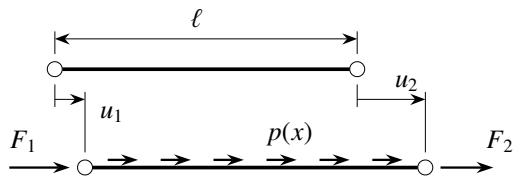


図 5.8 柱の 1 有限要素

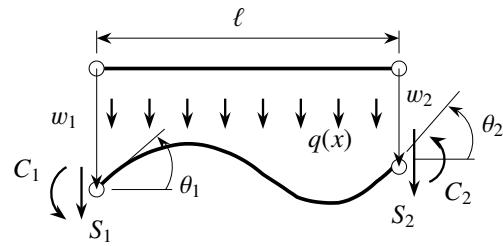


図 5.9 梁の 1 有限要素

規定できる上に、隣接する要素との間で変位 $u(x)$ が要素両端で連続する必要があるから、1 有限要素には最低でも自由度が二つは必要になる。このように考えると、最も次数の低い多項式の選択としては、二つの自由度 c_1, c_2 を用いて

$$u(x) \sim c_1 + c_2 x \quad (5.15)$$

と置くことが可能だ。しかしここでもやはり、物理的に意味の無い係数 c_n の代わりに両端の変位 u_1, u_2 を未知係数としたいので上式から

$$u_1 = u(0) = c_1, \quad u_2 = u(\ell) = c_1 + c_2 \ell$$

という関係を得る。つまり $c_1 = u_1, c_2 = (u_2 - u_1)/\ell$ と置き換えればよく、式 (5.15) は

$$u(x) \sim u_1 \phi_1(x) + u_2 \phi_2(x), \quad \phi_1(x) \equiv \frac{\ell - x}{\ell}, \quad \phi_2(x) \equiv \frac{x}{\ell} \quad (5.16a, b, c)$$

と置くことができる。このような関数 $\phi_n(x)$ は変位を近似する関数なので変位関数、あるいは一般的には試行関数とか内挿関数と⁶呼ばれる。

以上を仮想仕事式 (5.14) に代入して整理すると

$$\int_0^\ell EA (u_1 \phi_1' + u_2 \phi_2') (\delta u_1 \phi_1' + \delta u_2 \phi_2') dx - \int_0^\ell p (\delta u_1 \phi_1 + \delta u_2 \phi_2) dx - \delta u_1 F_1 - \delta u_2 F_2 = 0$$

となる。すなわち各仮想変位 δu_1 と δu_2 毎にまとめると

$$\delta u_1 \{l_{11}u_1 + l_{12}u_2 - p_1 - F_1\} + \delta u_2 \{l_{21}u_1 + l_{22}u_2 - p_2 - F_2\} = 0 \quad (*)$$

を満足していればいいことになる。ここに

$$p_i \equiv \int_0^\ell \phi_i(x) p(x) dx, \quad l_{ij} \equiv \int_0^\ell EA \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx \quad (5.17a, b)$$

で定義したものはそれぞれ、等価節点外力成分および要素剛性行列要素である。後者は具体的にその積分を実行すると

$$l_{11} = l_{22} = \frac{EA}{\ell}, \quad l_{12} = l_{21} = -\frac{EA}{\ell} \quad (5.18)$$

という値を持つ。したがって式 (*) が任意の仮想変位 δu_1 と δu_2 に対して成立するためには、それぞれの係数がいずれも零であればいいことから

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{k}_a \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k}_a \equiv \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.19a, b)$$

を得る。この式は一つの要素の両端節点に作用している力と節点変位の関係を代数方程式で表したつり合い式であり、要素剛性方程式と呼ばれる。特にこの式は軸力のみで抵抗する柱の 1 要素の剛性方程式であるため、柱の要素剛性方程式と呼ばれる。式 (5.19b) から柱の 1 有限要素は、バネ定数 (EA/ℓ) の線形バネとして取り扱えばいいこともわかる。だから、第 2 章でトラス部材のことを検討したときに、簡単のために線形バネに置き換えたのである。

⁶ 重み (仮想変位) の方は試験関数と呼ばれるが、最近では重みだけでなくすべてを試験関数と呼ぶようだ。ちょっと違和感がある。

(2) 梁の場合

図 5.9 の一般的な梁の 1 要素の仮想仕事式は

$$\int_0^{\ell} EI w'' \delta w'' dx - \int_0^{\ell} q \delta w dx - S_1 \delta w_1 - C_1 \delta \theta_1 - S_2 \delta w_2 - C_2 \delta \theta_2 = 0 \quad (5.20)$$

となる。このとき $w(x)$ を近似する関数は

1. 1 要素の剛体的な沈下も表現できるためには、'1'が必要となる。
2. また 1 要素の剛体的な（微小）回転も表現できるためには、'x'が必要。
3. 式 (5.20) で最も重要な内力仮想仕事項が無くならないためには、2 階の微係数が存在する必要がある、'x²'以上が必要となる。
4. 要素間あるいは端部でたわみとたわみ角が連続あるいは幾何学的境界条件として規定できるためには、一つの要素は四つの自由度を持つ必要がある、たわみを近似するときの未知係数としては、少なくとも両節点のたわみとたわみ角の合計四つを用いればいい。

という条件から、四つの自由度を持つ 3 次の多項式が最低次の多項式であり

$$w(x) \sim a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3$$

と近似すればよさそう⁷だ。さらに、この物理的には意味の無い未知係数 a_i ($i = 1 \sim 4$) を要素両節点のたわみとたわみ角に関係付けると、最終的に

$$w(x) \sim w_1 \psi_1(x) + \theta_1 \psi_2(x) + w_2 \psi_3(x) + \theta_2 \psi_4(x) \quad (5.21)$$

という表現になる。ここに梁の変位関数は

$$\psi_1(x) \equiv 1 - \frac{3x^2}{\ell^2} + \frac{2x^3}{\ell^3}, \quad \psi_2(x) \equiv -x + \frac{2x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2}, \quad (5.22a, b)$$

$$\psi_3(x) \equiv \frac{3x^2}{\ell^2} - \frac{2x^3}{\ell^3}, \quad \psi_4(x) \equiv \frac{x^2}{\ell} - \frac{x^3}{\ell^2} \quad (5.22c, d)$$

と定義される。

式 (5.21) を式 (5.20) に代入して整理すると

$$\begin{aligned} & \delta w_1 \{(k_{11} w_1 + k_{12} \theta_1 + k_{13} w_2 + k_{14} \theta_2) - q_1 - S_1\} + \delta \theta_1 \{(k_{21} w_1 + k_{22} \theta_1 + k_{23} w_2 + k_{24} \theta_2) - q_2 - C_1\} \\ & + \delta w_2 \{(k_{31} w_1 + k_{32} \theta_1 + k_{33} w_2 + k_{34} \theta_2) - q_3 - S_2\} + \delta \theta_2 \{(k_{41} w_1 + k_{42} \theta_1 + k_{43} w_2 + k_{44} \theta_2) - q_4 - C_2\} = 0 \end{aligned}$$

となる。ここに k_{ij} と q_i は

$$k_{ij} \equiv \int_0^{\ell} EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx, \quad q_i \equiv \int_0^{\ell} q(x) \psi_i(x) dx \quad (5.23a, b)$$

で定義される剛性行列要素と等価節点外力成分である。これが任意の $\delta w_n, \delta \theta_n$ ($n = 1, 2$) に対して成立する条件から、梁の要素剛性方程式が

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ & & k_{33} & k_{34} \\ \text{Symm.} & & & k_{44} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.24)$$

⁷ 一様な分布外力があれば、微分方程式から得られる解の多項式の次数は 4 になるはずだ。だから本当に「よさそう」なのかどうかは疑問だろう。しかし柱の場合の前節の結果からは、それで十分だろうということも容易に推測できると思う。

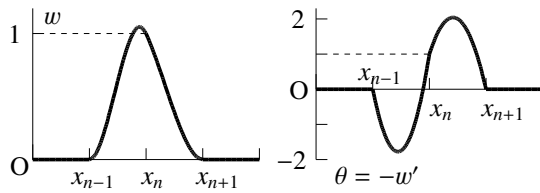


図 5.10 梁のたわみに対して設定した区分的多項式

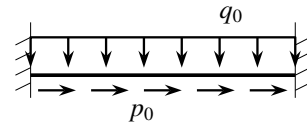


図 5.11 等価節点外力の意味

と表現できる。式 (5.22) を式 (5.23a) に代入すると、剛性行列 k_b が具体的に

$$k_b \equiv (k_{ij}) = EI \begin{pmatrix} \frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} & -\frac{12}{l^3} & -\frac{6}{l^2} \\ & \frac{4}{l} & \frac{6}{l^2} & \frac{2}{l} \\ & & \frac{12}{l^3} & \frac{6}{l^2} \\ \text{Symm.} & & & \frac{4}{l} \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

と求められる。図 5.4 と同様の区分的多項式として変位関数を表したのが図 5.10 である。柱とは異なりたわみだけではなくたわみ角も節点自由度に含まれているので、単純なバネとの等価性は見えないが、この k_b がいわば梁の一般化された線形バネ定数である。

(3) 等価節点外力の意味と値

ここで定義された等価節点外力の意味を調べるために、一つの例として、両端固定の棒に図 5.11 のような等分布外力のみが作用している場合の端部の反力を剛性方程式 (5.19a) (5.24) で計算してみよう。この場合は剛性方程式右辺の両端の変位成分はすべて零になるので、柱と梁の支点反力はいずれも

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -p_0 l/2 \\ -p_0 l/2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -q_0 l/2 \\ q_0 l^2/12 \\ -q_0 l/2 \\ -q_0 l^2/12 \end{Bmatrix} \quad (5.26a, b)$$

となる。 p_1, p_2, q_1, q_3 は分布外力の長さ方向の総和の半分ずつなので直感的な理解も容易だ。また q_2, q_4 は第 4.1.4 (3) 節で算定した不静定モーメント式 (4.34) に一致しており、1 要素剛性方程式から求められる両端の不静定反力も厳密解に一致していることがわかる。ただしこのように反力が厳密解に一致するのは、節点変位が厳密解に一致するのと同様、柱と梁だけに特有で特殊な場合のみに成り立つこと（理由の一つは第 5.4.1 節に示した。）であり、一般には近似解しか得ることができないことには十分留意しておく必要がある。

演習問題 5-6

- 10. 演習問題 5-3 の 7 番で求めた境界値問題の仮想仕事式に基づいて $u(x)$ に用いるべき試行関数の候補を挙げ、それを用いて剛性行列と等価節点外力を求めよ。

5.3.2 直接剛性法と内力分布

(1) 直接剛性法

前節では対象とする構造全体を複数の有限要素に分割し、1 有限要素のつり合い式に対する要素剛性方程式を仮想仕事式に基づいて導いた。ここでは、その要素剛性方程式を組み上げた対象系全体の剛性方程式（全

体剛性方程式)を誘導しよう。なお例として梁を対象として、図5.12のように相隣接する二つの有限要素の共有節点2に集中外力が作用している場合を考え、この要素を連続させて2要素でできた系の場合の全体剛性方程式を求めれば、任意の要素数の場合も容易に理解できるだろう。図のように、この節点2のすぐ左右をそれぞれ‘2-’、‘2+’という節点番号で区別すると、それぞれの要素毎に式(5.24)の要素剛性方程式が成立するので

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_{2-} \\ C_{2-} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1^{(l)} \\ q_2^{(l)} \\ q_3^{(l)} \\ q_4^{(l)} \end{Bmatrix} = \left(\mathbf{k}_b^{(l)} \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_{2-} \\ \theta_{2-} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_{2+} \\ C_{2+} \\ S_3 \\ C_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1^{(r)} \\ q_2^{(r)} \\ q_3^{(r)} \\ q_4^{(r)} \end{Bmatrix} = \left(\mathbf{k}_b^{(r)} \right) \begin{Bmatrix} w_{2+} \\ \theta_{2+} \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (a, b)$$

を満足している。ここに上付き記号(l)(r)はそれぞれ節点2の左側の要素か右側の要素かを区別するために用いた。

共有節点では図に示したように、力とモーメントは(不)連続条件式(4.46b)(4.46c)の

$$S_2 = S_{2-} + S_{2+}, \quad C_2 = C_{2-} + C_{2+} \quad (c)$$

を満たさなければならない。一方たわみとたわみ角も連続条件式(4.45b)(4.45c)の

$$w_{2-} = w_{2+} = w_2, \quad \theta_{2-} = \theta_{2+} = \theta_2 \quad (d)$$

でなければならない。式(d)を考慮しながら、式(a)の第3, 4行と式(b)の第1, 2行とを上の連続条件式(c)に代入して整理すると

$$\begin{Bmatrix} S_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{31}^{(l)} & k_{32}^{(l)} & k_{33}^{(l)} + k_{11}^{(r)} & k_{34}^{(l)} + k_{12}^{(r)} & k_{13}^{(r)} & k_{14}^{(r)} \\ k_{41}^{(l)} & k_{42}^{(l)} & k_{43}^{(l)} + k_{21}^{(r)} & k_{44}^{(l)} + k_{22}^{(r)} & k_{23}^{(r)} & k_{24}^{(r)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

となる。これと、まだ使っていない式(a)の上2行と式(b)の下2行との計六つの式を併せて行列表示すると

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \\ S_3 \\ C_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}^{(l)} & k_{12}^{(l)} & k_{13}^{(l)} & k_{14}^{(l)} & 0 & 0 \\ & k_{22}^{(l)} & k_{23}^{(l)} & k_{24}^{(l)} & 0 & 0 \\ & & k_{33}^{(l)} + k_{11}^{(r)} & k_{34}^{(l)} + k_{12}^{(r)} & k_{13}^{(r)} & k_{14}^{(r)} \\ & & & k_{44}^{(l)} + k_{22}^{(r)} & k_{23}^{(r)} & k_{24}^{(r)} \\ & & & & k_{33}^{(r)} & k_{34}^{(r)} \\ \text{Symm.} & & & & & k_{44}^{(r)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

が二つの要素をつないだ全体剛性方程式になる。もう少し見通しがよくなるように次の記号を定義する。

$$\mathbf{f}_i \equiv \begin{Bmatrix} S_i \\ C_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q}_1^{(p)} \equiv \begin{Bmatrix} q_1^{(p)} \\ q_2^{(p)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{q}_r^{(p)} \equiv \begin{Bmatrix} q_3^{(p)} \\ q_4^{(p)} \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{w}_i \equiv \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{k}_b^{(p)} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{k}_b^{A(p)} & \mathbf{k}_b^{B(p)} \\ (\mathbf{k}_b^{B(p)})^T & \mathbf{k}_b^{C(p)} \end{pmatrix} \quad (5.27)$$

ここに(p=l, r)であり、 $\mathbf{k}_b^{x(p)}$ (x=A, B, C)はそれぞれ4×4の剛性行列 $\mathbf{k}_b^{(p)}$ の2×2の小行列である。これを用いて上の最後の結論を書き直すと、二つの要素で全体系を解こうとする場合の全体剛性方程式は

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \mathbf{f}_3 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_1^{(l)} \\ \frac{\mathbf{q}_r^{(l)} + \mathbf{q}_1^{(r)}}{\mathbf{q}_r^{(r)}} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{k}_b^{A(l)} & \mathbf{k}_b^{B(l)} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{k}_b^{C(l)} + \mathbf{k}_b^{A(r)} & \mathbf{k}_b^{B(r)} \\ \text{Symm.} & & \mathbf{k}_b^{C(r)} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \end{Bmatrix} \quad (5.28)$$

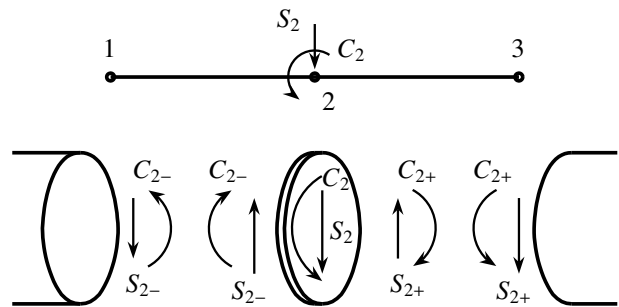


図5.12 節点における連続条件と直接剛性法

となる。すなわち下線部のように、相隣接する要素の共有節点の各量を加え合わせれば最終的な全体剛性方程式が求められることがわかる。このように行列を重ねていく方法を直接剛性法と呼んでいる。

(2) 2要素による例

図 5.13 の簡単な例の幾何学的・力学的境界条件は

$$w_1 = 0, \quad \theta_1 = 0, \quad w_3 = 0, \quad \theta_3 = 0, \quad S_2 = Q, \quad C_2 = 0$$

である。これを式 (5.28) に代入すると、その第 1, 2, 5, 6 式が左辺右辺共に未知量を含んでいるのに対し、第 3, 4 行は左辺がすべて既知である。よって後者 2 式を取り出すと

$$\begin{Bmatrix} Q \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} k_{33} + k_{11} & k_{34} + k_{12} \\ k_{43} + k_{21} & k_{44} + k_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

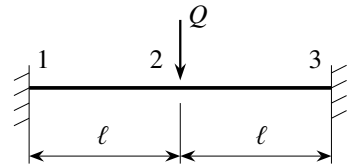


図 5.13 2要素の場合の直接剛性法の例

を得る。この例では左右の要素の剛性と長さが等しいのでそれを区別する上付き記号は省略した。具体的に値を代入して逆行列を計算すると

$$\begin{Bmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{EI} \begin{pmatrix} 24/\ell^3 & 0 \\ 0 & 8/\ell \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} Q \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q\ell^3/24EI \\ 0 \end{Bmatrix}$$

と中央のたわみとたわみ角を求めることができる。この解を元の全体剛性方程式の第 1, 2, 5, 6 式に代入することによって、支点反力が $S_1 = S_3 = -Q/2$, $C_1 = C_3 = Q\ell/4$ と求められ、たわみ・たわみ角も支点反力・不静定モーメントも厳密解 (図 4.29 付近) の ℓ を 2ℓ に置き換えた答に一致する。

(3) 曲げモーメント等の内力分布と有限要素法の誤差

2 径間連続梁を 3 要素で近似: もう

一つの例として図 5.14 の等分布外力を受ける 2 径間連続梁を、ちょっと乱暴だが 3 要素だけを用いて解いてみる。特徴を出すために長さの違う左右のスパンの曲げ剛性が違っている。

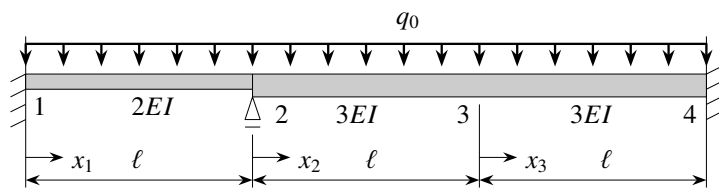


図 5.14 連続梁を三つの有限要素で解く例

図では梁の上面を揃えてあるが、正確には 2 部材の図心の位置が揃っている⁸ものとする。等分布外力の等価節点外力成分は式 (5.26b) で算定したので、式 (5.27) を用いて各要素の要素剛性方程式を簡易表示すると

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_{2-} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_r \end{Bmatrix} = 2 \begin{pmatrix} k_b^A & k_b^B \\ \text{Symm.} & k_b^C \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} f_{2+} \\ f_{3-} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_r \end{Bmatrix} = 3 \begin{pmatrix} k_b^A & k_b^B \\ \text{Symm.} & k_b^C \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_2 \\ w_3 \end{Bmatrix}, \quad (d, e)$$

$$\begin{Bmatrix} f_{3+} \\ f_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_r \end{Bmatrix} = 3 \begin{pmatrix} k_b^A & k_b^B \\ \text{Symm.} & k_b^C \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} w_3 \\ w_4 \end{Bmatrix} \quad (f)$$

が成立する。剛性行列に '2' と '3' という係数が付いていることに注意するように。また境界条件および外力条件は

$$w_1 = w_2 = w_4 = 0, \quad \theta_1 = \theta_4 = 0, \quad S_3 = 0, \quad C_2 = C_3 = 0$$

⁸ そうでないとな軸力の問題と曲げの問題が連成してしまうことを思い出そう。

与えられる。上の三つの要素剛性方程式 (d) (e) (f) を直接剛性法で組み立てて、上に示した境界条件と外力条件を代入すると、全体剛性方程式が

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ 0 \\ 0 \\ S_4 \\ C_4 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_0\ell/2 \\ -q_0\ell^2/12 \\ q_0\ell \\ 0 \\ q_0\ell \\ 0 \\ q_0\ell/2 \\ q_0\ell^2/12 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_b^A & 2k_b^B & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ & 2k_b^C + 3k_b^A & 3k_b^B & \mathbf{0} \\ & & 3k_b^C + 3k_b^A & 3k_b^B \\ \text{Symm.} & & & 3k_b^C \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (g)$$

と求められる。この第4, 5, 6式だけが右辺のみに未知量を含む式になっており、それを取り出すと

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ q_0\ell \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 2k_{44} + 3k_{22} & 3k_{23} & 3k_{24} \\ & 3k_{33} + 3k_{11} & 3k_{34} + 3k_{12} \\ \text{Symm.} & & 3k_{44} + 3k_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} \\ = EI \begin{pmatrix} 8/\ell + 12/\ell & 18/\ell^2 & 6/\ell \\ & 36/\ell^3 + 36/\ell^3 & 18/\ell^2 - 18/\ell^2 \\ \text{Symm.} & & 12/\ell + 12/\ell \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = EI \begin{pmatrix} 20/\ell & 18/\ell^2 & 6/\ell \\ & 72/\ell^3 & 0 \\ \text{Symm.} & & 24/\ell \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix}$$

となる。したがって逆行列を必要な成分だけ計算すると最終的に変位が

$$\begin{Bmatrix} \theta_2 \\ w_3 \\ \theta_3 \end{Bmatrix} = \frac{\ell^5}{24192 EI} \begin{pmatrix} \cdot & -433/\ell^3 & \cdot \\ \cdot & 444/\ell^2 & \cdot \\ \cdot & 108/\ell^3 & \cdot \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ q_0\ell \\ 0 \end{Bmatrix} = \frac{q_0\ell^4}{EI} \begin{Bmatrix} -1/(56\ell) \\ 37/2016 \\ 1/(224\ell) \end{Bmatrix}$$

と求められる。これを残りの全体剛性方程式 (g) に代入すれば、支点反力と不静定モーメントが

$$S_1 = -\frac{2q_0\ell}{7}, \quad C_1 = \frac{q_0\ell^2}{84}, \quad S_2 = -\frac{183q_0\ell}{112}, \quad S_4 = -\frac{121q_0\ell}{112}, \quad C_4 = -\frac{65q_0\ell}{168}$$

と求められる。

有限要素法の枠組内の内力の精度: 求められた節点変位の値を各要素毎に式 (5.21) の変位関数に代入すれば各要素の任意点の変位を関数として得ることができるから、その2階の微係数から各要素毎の曲げモーメント分布も求めることができる。しかし、変位関数が3次の多項式なので節点以外の変位は厳密解には一致しない。さらに不静定モーメント等は厳密解が得られている

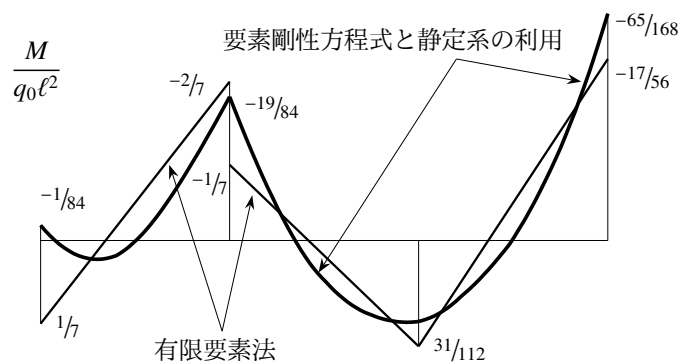


図 5.15 静定系の知識を用いた曲げモーメント図の求め方

にもかかわらず、内力の曲げモーメント分布は線形にしかならず、図 5.14 の座標 x_i ($i = 1, 2, 3$) を用いると

$$M(x_1) = -2EIw'' = \frac{q_0\ell}{14} (2\ell - 6x_1), \quad M(x_2) = \frac{q_0\ell}{112} (-16\ell + 47x_2), \quad M(x_3) = \frac{q_0\ell}{112} (31\ell - 65x_3)$$

にしかならない。図 5.15 の直線分布がこのようにして計算されたモーメント分布であり、曲線が厳密解を示している。左端の不静定モーメントは正解を得ているが、この方法で算定した内力の曲げモーメントの符号が異

なるという致命的な間違いを犯している。ただそもそも有限要素法は要素数を増やすことによって正解に収束する近似解しか求められないのだから、この例のような3要素分割がやはり乱暴だっただけだと主張する読者もいるだろう。しかし技術者は、正解がわからない現場の問題に対して実施した有限要素解析において、どの部分の要素数を増やすべきか、また結果をどう解釈して理解するべきかを判断できなければならない。だからこの章の序文には、第4章までの解析解等の力学的特性を十分に理解していることが重要だと述べておいた。さて、図5.6の柱の場合には軸力つまり変位の1階の微係数である伸びひずみが最小2乗法的近似解になっていたが、梁の場合には有限要素法の曲げモーメントの近似解つまりたわみの2階の微係数である曲率が厳密解の最小2乗法的な近似解になっていることがこの図から明らかである。

柱と梁の場合の「要素」剛性方程式の利用：有限要素法は近似解法なので変位関数から求められる変位と内力は一般には正解ではないが、柱と梁の場合には節点の変位と不静定反力は厳密解に一致した。それなら「要素」剛性方程式から求められる内力の曲げモーメント等も、少なくとも節点では厳密解に一致していることになる。そこで、求められた節点変位の解を全体剛性方程式や変位関数の微係数に代入する代わりに、要素剛性方程式(d)(e)(f)に代入してみる。そして内力の正の向きと外力の向きの違いに配慮しながら、節点変位を各要素毎の要素剛性方程式に代入すると

$$-C_1 = -\frac{q_0 \ell^2}{84}, \quad C_{2-} = -C_{2+} = -\frac{19q_0 \ell^2}{84}, \quad C_4 = -\frac{65q_0 \ell^2}{168}$$

を得る。実際、このようにして求めた C_1 と C_4 は上で求めた厳密な不静定モーメントにも一致しており、それはその内力曲げモーメントである。また C_{2-} と $-C_{2+}$ も中間節点箇所の左右の内力曲げモーメント（この例では集中モーメントが作用していないから同じ値）の厳密解に一致する。そして、静定系の曲げモーメント分布が（有限要素法を使うまでもなく）優れた技術者にとっては既知なので、一旦節点の内力曲げモーメントが得られさえすれば簡単に図5.15の曲線の厳密な曲げモーメント図を描くことができる。つまり柱や梁の問題では、正しい内力曲げモーメント図等を求めるためにも有限要素法はとても有用な手法の一つなのだ。この例からわかるもう一つの大事なことは、静定系の答をできるだけたくさん知っておくことが複雑な構造の設計に当たっても必要で重要だということだ。優れた技術者になるためには、より多くの知識を頭の中の引き出し（あとで開けられるかどうかとも大問題だが）に詰め込んでおく必要がある。

現在のように有限要素法が一般的な境界値問題の汎用的近似解法として認識される以前は、第5.4.1節に示すように、元の境界値問題を厳密に解いて剛性方程式と同じ形式の基礎式を求め、それをを用いた解法をマトリクス構造解析法と呼んで構造力学・構造工学分野では用いていた。あるいは古典的には第5.5節に示すたわみ角法や三連モーメントの定理として用いていた。この基礎式と有限要素法の剛性方程式とは完全に一致するか、単なる項の並べ替えを行っただけのものだ。有限要素法の発達はこのマトリクス構造解析法を発端としている。ただ一般論として有限要素法があくまでも近似⁹解法であることは心に留めておくべきである。

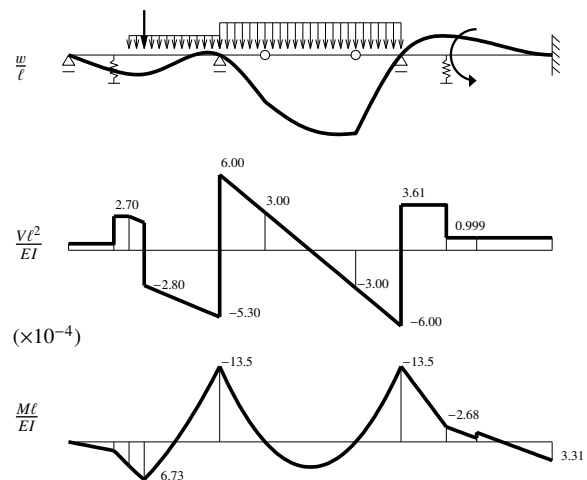


図 5.16 数値計算を用いた例

⁹ ここで言う近似には二通りある。一つは事実をモデル化した理論（真実）を根拠にしているという意味であり、もう一つは真実としての理論を仮想仕事の原理を用いて解いているという意味である。

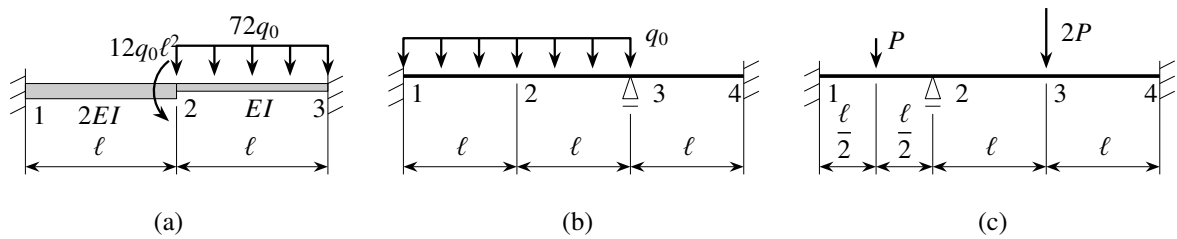


図 5.17 不静定系の有限要素解析の練習

次の演習問題のようなまっすぐな連続梁を解く有限要素プログラムは各種存在すると思われるが、著者が作成したプログラムも電子的に入手可能になっている。図 5.16 のような等分割要素に対する処理をパーソナルコンピュータ上で会話型で行えるようになっている。スパン途中にヒンジ [162] やバネ支持も挿入できる。入手方法についてはまえがきを参照のこと。できれば各自、プログラミングの練習として少なくとも一直線上の連続梁くらいは解けるものを作って欲しい。このような連続梁であれば、直接剛性法をプログラミングすることはそんなに難しいことにはならないからだ。また、有限要素法を超えて、上で説明したように曲げモーメントとせん断力の分布図を描くデータも計算できるように工夫してみたい。

演習問題 5-7

11. 図 5.5 の左側にある柱を式 (5.19a) の要素剛性方程式を用いて 2 要素で解き、直接剛性法によって得られる全体剛性方程式に境界条件を代入したものが p.221 の式 (c) に一致することを示し、直接剛性法で正しい全体剛性方程式が得られることを確認せよ。
12. 先端に集中外力が作用した片持ち梁を一つの有限要素で解き、厳密解と比較せよ。
13. 図 5.17 (a) の変断面両端固定の梁を二つの有限要素で解き、節点 2 のたわみとたわみ角を計算した上で、要素剛性方程式を利用して曲げモーメント図を求めよ。
14. 図 5.17 (b) の等断面連続梁を三つの有限要素で解き、節点 2 のたわみとたわみ角や節点 3 のたわみ角を計算し、全体剛性方程式から支点反力を求めよ。結果を要素剛性方程式に代入して正しい曲げモーメント図を求めよ。
15. 図 5.17 (b) の連続梁で、節点 3 の支点が Δ だけ沈下する場合を三つの有限要素で解き、未知変位と支点反力および曲げモーメント図を求めよ。
16. 図 5.17 (c) の連続梁を有限要素で解き、曲げモーメント図を求めよ。実はこれは建築系学科の構造力学問題で出されたもので、左端の曲げモーメントが零になる不思議な問題である。

5.3.3 平面トラス

(1) 全体座標系と要素座標系

まっすぐな柱や連続梁が解けてもなあとと思っている読者の皆様、お待たせしました。任意の平面トラスと平面骨組を解いてみよう。まずは平面トラスだ。例えば図 5.18 の不静定平面トラスの各部材は両端がヒンジで接続されており、部材中間には外力が作用していないので、曲げモーメントによってではなく軸の圧縮引張だけで抵抗している。したがってトラスの各部材に用いることができる有限要素

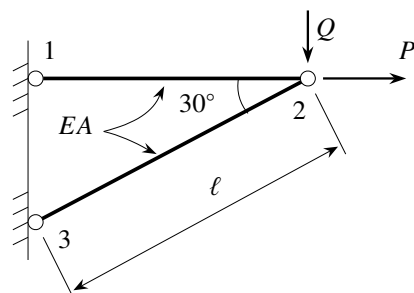


図 5.18 平面不静定トラスの例

は前節の柱要素で十分だろう。

ただ一般のトラスの各部材はお互いに異なる方向を向いているため、単純な柱と違って部材両端には軸に直交する方向からも力の作用がある。しかし上述のように、この横方向の外力に対して曲げでは抵抗しないし、部材に直接分布する外力も普通は¹⁰考えない。したがって、図 5.19 のように節点の変位と力の成分を定義しても、トラス部材の要素剛性方程式は柱としての抵抗しか無いので

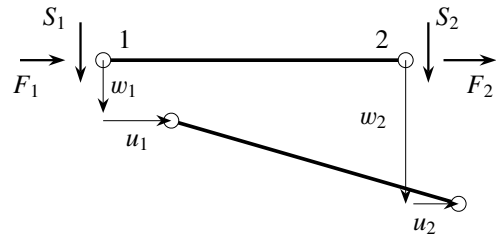


図 5.19 トラス部材の有限要素

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ S_1 \\ F_2 \\ S_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA/\ell & 0 & -EA/\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/\ell & 0 & EA/\ell & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (5.29)$$

と定義せざるを得ない。つまり、剛性行列の第 2, 4 行列の要素はすべて零であり、両端自由の場合には横方向の外力 S_i には抵抗できない。

一方部材はそれぞれが任意の方向を向いている。つまり、上のトラス部材の要素剛性方程式 (5.29) はそれぞれの部材軸方向の局所座標系 (要素座標系と呼ぶ) で定義されたものになる。ということは、ある一つの節点の力と変位成分が、隣り合う部材間では異なる方向の成分として定義されてしまうので、複数の有限要素同士の連続条件ではそれぞれの座標系の向きの違いを考慮しながら一つ一つ計算する等煩雑な手続きが必要となり、前節の直接剛性法がそのままでは使えない。そこで、すべての要素に共通する全体座標系の成分を各節点の未知係数とするような要素剛性方程式を誘導しておけば、お互いに向きの異なる要素間に対しても前節で用いた直接剛性法が適用できて便利だろう。

すなわち、図 5.20 の ξ - ζ 軸で定義される要素 (局所) 座標系で式 (5.29) は成立しているのだ。一方、 x - z 座標系は空間に固定してすべての要素に共通する全体座標系とする。ということは、要素剛性方程式 (5.29) の両辺の各量を x - z 全体座標系で定義された量に変換しさえすれば、すべての部材の要素剛性方程式を、一つの共通した全体座標系の量で表現できることになる。柱の場合はたまたま、剛性方程式両辺の行列行列がちょうど 2 次元 Euclid 空間のベクトル成分と同じになっているから、この二つの座標の成分間の関係は

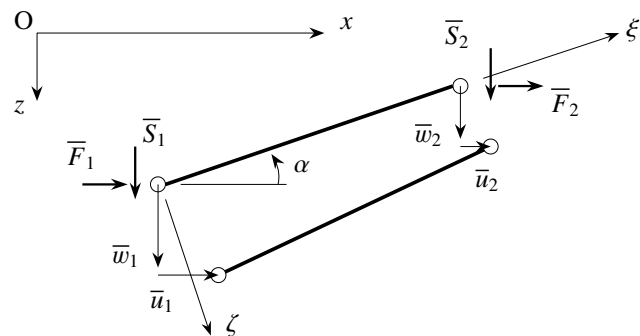


図 5.20 平面トラス有限要素の要素座標系と全体座標系

$$\begin{cases} \bar{u}_n = u_n \cos \alpha + w_n \sin \alpha \\ \bar{w}_n = -u_n \sin \alpha + w_n \cos \alpha \end{cases}, \quad \begin{cases} \bar{F}_n = F_n \cos \alpha + S_n \sin \alpha \\ \bar{S}_n = -F_n \sin \alpha + S_n \cos \alpha \end{cases}$$

となる ($n = 1, 2$)。上に線の付いた量が全体座標系成分である。したがって、 2×2 の座標変換行列 T_2 を

$$T_2 \equiv \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

¹⁰ トラスの実設計で自重はどうしているんだろう。

と定義¹¹しておく、それぞれのベクトル成分間の関係が

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ u_2 \\ w_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{S}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{S}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2^T \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} F_1 \\ S_1 \\ F_2 \\ S_2 \end{Bmatrix} \quad (5.31a, b)$$

となる。この両式を式 (5.29) の両辺に代入して整理すると、最終的な全体座標系における要素剛性方程式が

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{S}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{S}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_2^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} EA/\ell & 0 & -EA/\ell & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & EA/\ell & 0 \\ \text{Symm.} & & & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

と求められる。あるいはこの右辺の行列乗算を実行し、座標変換された剛性行列としてその成分を陽に表すと

$$\frac{EA}{\ell} \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & -\cos^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha \\ & \sin^2 \alpha & \sin \alpha \cos \alpha & -\sin^2 \alpha \\ & & \cos^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ \text{Symm.} & & & \sin^2 \alpha \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

となっている。

(2) 不静定トラスの例

例として図 5.18 の平面トラスを解いてみよう。部材 1-2 は長さが $\sqrt{3}\ell/2$ であるが、要素座標系が全体座標系と一致しているので $\alpha = 0$ でいい。一方部材 2-3 は要素座標系を節点 2 から 3 の方向にとった方が便利なので、全体座標系とのなす角度は $\alpha = -150^\circ$ あるいは 210° になっている。したがって、それぞれの要素剛性方程式は式 (5.33) を用いて

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{S}_1 \\ \bar{F}_{2-} \\ \bar{S}_{2-} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\sqrt{3}\ell/2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ \text{Symm.} & & & 0 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{F}_{2+} \\ \bar{S}_{2+} \\ \bar{F}_3 \\ \bar{S}_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{pmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 \\ & 1/4 & \sqrt{3}/4 & -1/4 \\ & & 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \text{Symm.} & & & 1/4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{w}_3 \end{Bmatrix}$$

となる。この 2 式共に同じ全体座標系で定義されているから共有節点 2 に対して直接剛性法を用いることができ、最終的な全体剛性方程式は

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{S}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{S}_2 \\ \bar{F}_3 \\ \bar{S}_3 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{pmatrix} 2\sqrt{3}/3 & 0 & -2\sqrt{3}/3 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\sqrt{3}/3 + 3/4 & 0 - \sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 \\ & & & 0 + 1/4 & \sqrt{3}/4 & -1/4 \\ & & & & 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \text{Symm.} & & & & & 1/4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{w}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{w}_3 \end{Bmatrix}$$

となる。下線部が共有節点 2 について重ね合わせた部分である。境界条件は、節点 1, 3 ですべての変位成分が固定されていて、節点 2 に二つの外力が作用しているので

$$\bar{u}_1 = \bar{w}_1 = \bar{u}_3 = \bar{w}_3 = 0, \quad \bar{F}_2 = P, \quad \bar{S}_2 = Q$$

¹¹ 秋田大学の後藤文彦先生に指摘していただいた加筆。要素座標系の向き α を右手系で定義したにもかかわらず、式 (3.184) の座標変換行列と転置の関係にあるのは、節点変位ベクトルを慣例に従って u, w つまり x, z の左手系の順番に成分を並べたためである。

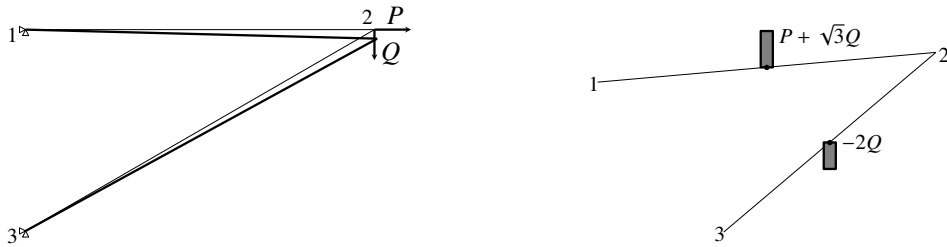


図 5.21 2 本トラスの変位と軸力（この図と図 5.22 の軸力図は標準的な表示ではない）

と与えられる。これを全体剛性方程式に代入して、左辺が既知の第 3, 4 行を取り出せば

$$\begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{pmatrix} (8\sqrt{3}+9)/12 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix}$$

となり、これを節点 2 の変位成分について解いて

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \end{Bmatrix} = \frac{6\ell}{\sqrt{3}EA} \begin{pmatrix} 1/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & (8\sqrt{3}+9)/12 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} P \\ Q \end{Bmatrix} = \frac{6\ell}{\sqrt{3}EA} \begin{Bmatrix} P/4 + \sqrt{3}Q/4 \\ \sqrt{3}P/4 + (8\sqrt{3}+9)Q/12 \end{Bmatrix}$$

を得る。これを残りの全体剛性方程式の第 1, 2, 5, 6 行に代入すれば、支点反力がそれぞれ

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{S}_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -P - \sqrt{3}Q \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{F}_3 \\ \bar{S}_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sqrt{3}Q \\ -Q \end{Bmatrix}$$

と算定できる。外力と支点反力（モーメントも）がつり合っているので多分答は正しいのだろう。呵呵。

設計においては最終的にそれぞれの部材の軸力を計算する必要がある。トラスの場合は部材に分布外力が作用していないので、得られた節点変位を変位関数に代入して微係数を求めて算定されるひずみと応力・軸力は正解に一致する。しかしこれも連続梁の場合と同様、要素剛性方程式の要素座標系の ξ 方向の両端の節点軸力 F_{2-}, F_3 , あるいはその符号を替えたもの $-F_{1-}, -F_{2+}$ でも算定できる。あるいは式 (5.31b) を用いて、得られた節点変位を全体座標系の要素剛性方程式に代入して求められる要素両端外力に、座標変換行列を逆にかけて要素座標系に戻すことによっても節点軸力を求めることができる。この例では、要素 1-2 は $N = -\bar{F}_1 = P + \sqrt{3}Q$ となる。要素 2-3 では座標変換が必要になり

$$N = -\bar{F}_3 \cos 30^\circ + \bar{S}_3 \sin 30^\circ = -2Q$$

となる。この軸力を用いて両部材の断面積（および断面 2 次モーメント¹²⁾）を設計すればいい。図 5.21 に変位と軸力の結果を示した。

図 5.22 に示したのは著者自作の有限要素プログラムによる連続不静定トラスの解析例である。a~o の 15 本の部材が節点 1~9 でつながったトラスで、各部材の長さや外力は図示した通りだが、Young 率はすべて 200 GN/m² と共通にした。断面積は表 5.1 のようにした。図 5.22 の上側の図には全体剛性方程式を解いて得た変位を誇張して示し、下側の図には軸力を示した。また、求められた軸力と支点反力も表 5.2 に示したが、反力は z 方向の外力である。このプログラムもまえがきにした方法で入手可能である。

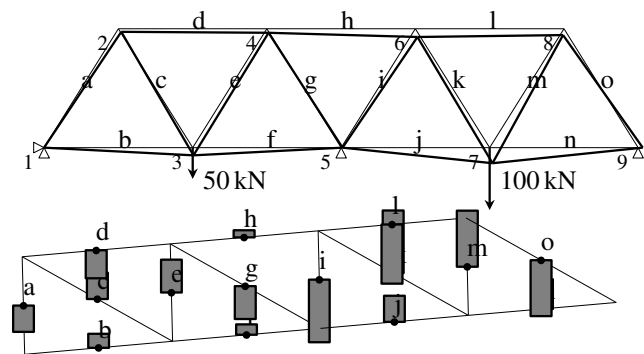


図 5.22 不静定平面トラス—1 パネル長 10 m, 高さ 8 m

¹²⁾ 圧縮部材では座屈を考慮する必要があるから。

表 5.1 例の部材断面積 (m²)

部材	断面積
a, d, h, l, o	0.01
b, f, j, n	0.008
c, e, g, i, k, m	0.004

表 5.2 例の部材軸力と反力 (kN)

部材	軸力	部材	軸力	部材	軸力	部材	軸力	節点	反力
a	-26	e	33	i	-62	m	56	1	-22
b	14	f	10	j	26	n	29	5	-81
c	26	g	-33	k	62	o	-56	9	-47
d	-28	h	7	l	-59	—	—	—	—

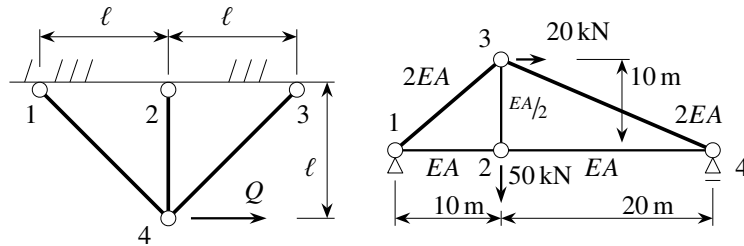


図 5.23 平面トラス

演習問題 5-8

- 図 5.23 の左の平面トラスを三つの有限要素を用いて解け。要素座標の向きを表すときの角度の正方向には十分注意せよ。また、三つの部材が集まる点における直接剛性法について熟考せよ。
- 同じ図の右側に示した5本トラスを、プログラムを用いて数値的に解いてみよ。ただし $E = 200 \text{ GN/m}^2$, $A = 0.005 \text{ m}^2$ とする。

5.3.4 平面骨組

(1) 全体座標系の要素剛性方程式

骨組は梁と柱を縦横斜めに並べて剛結して組み立てた構造系である。したがって各部材は軸力の作用と曲げの作用を同時に受けるので、第 5.3.1 節で求めた柱と梁の要素剛性方程式を同時に用いればいい。そこで図 5.24 のように、両端と中間に

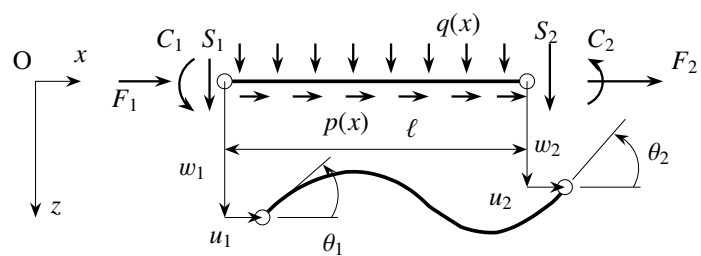


図 5.24 平面骨組の有限要素

軸方向と曲げに関する外力が作用して両端が変位している 1 有限要素を考えると、式 (5.19a) の柱の剛性方程式と式 (5.24) の梁の剛性方程式とを組み合わせると

$$\begin{pmatrix} F_1 \\ S_1 \\ C_1 \\ F_2 \\ S_2 \\ C_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ q_1 \\ q_2 \\ p_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & l_{12} & 0 & 0 \\ & k_{11} & k_{12} & 0 & k_{13} & k_{14} \\ & & k_{22} & 0 & k_{23} & k_{24} \\ & & & l_{22} & 0 & 0 \\ & & & & k_{33} & k_{34} \\ \text{Symm.} & & & & & k_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \theta_1 \\ u_2 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \tag{5.34}$$

とすれば骨組の要素剛性方程式になる。等価節点外力は与えられた量で、演算上は節点の集中外力と同様に取り扱えばいいので、以下、簡単のために省略する。

骨組の場合も一般に、前節の平面トラスと同様各部材はお互いに異なる方向を向いて配置されているので、式(5.34)は図5.25の ξ - ζ 座標系で成立する要素剛性方程式である。要素座標系と全体座標系との関係の中でトラスに無かったのは曲げモーメントとたわみ角であるが、ここで対象としているのは平面問題なのでこの二つについては座標変換の必要が無い。したがって、座標変換行列を

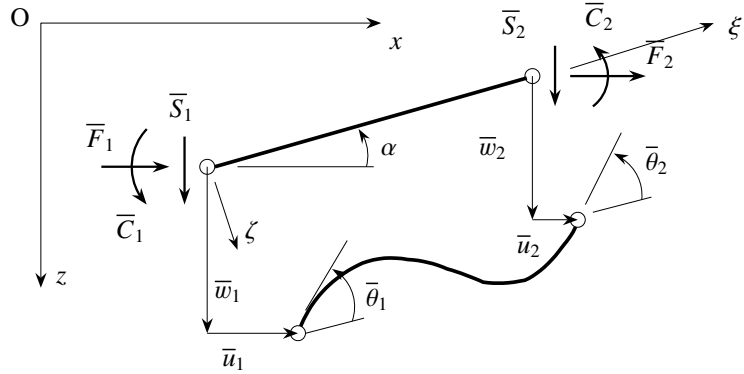


図 5.25 平面骨組有限要素の要素座標系と全体座標系

$$T \equiv \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

と拡張して定義すると、それぞれの節点外力および節点変位の座標変換則は

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{w}_i \\ \bar{\theta}_i \end{Bmatrix} = (T^T) \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \theta_i \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{S}_i \\ \bar{C}_i \end{Bmatrix} = (T^T) \begin{Bmatrix} F_i \\ S_i \\ C_i \end{Bmatrix} \quad (5.36a, b)$$

となる ($i = 1, 2$)。したがって、平面トラスの場合と同様の座標変換の演算を行うことによって、最終的な全体座標系における要素剛性方程式が

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} T^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_f & \\ & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.37)$$

と表現できる。ここに、全体座標系の外力ベクトル成分と変位ベクトル成分を簡単のために

$$\bar{F}_i \equiv [\bar{F}_i \ \bar{S}_i \ \bar{C}_i]^T, \quad \bar{u}_i \equiv [\bar{u}_i \ \bar{w}_i \ \bar{\theta}_i]^T \quad (i = 1, 2) \quad (5.38a, b)$$

と置いた。 k_f は式(5.34)右辺にある骨組の剛性行列で

$$k_f \equiv \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 & l_{12} & 0 & 0 \\ & k_{11} & k_{12} & 0 & k_{13} & k_{14} \\ & & k_{22} & 0 & k_{23} & k_{24} \\ \hline & & & l_{22} & 0 & 0 \\ & & & & k_{33} & k_{34} \\ \text{Symm.} & & & & & k_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_f^A & k_f^B \\ (k_f^B)^T & k_f^C \end{pmatrix} \quad (5.39)$$

と定義した。最後の式の k_f^x ($x=A, B, C$) は実線で区分けした 3×3 の小行列である。この小行列を用いると式(5.37)は

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} T^T k_f^A T & T^T k_f^B T \\ \text{Symm.} & T^T k_f^C T \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

とも簡易表現できる。

(2) 2部材の不静定骨組の例

図 5.26 の例を 2 要素で解こう。要素 1-2 は -30° 傾いた部材であるが、要素 2-3 は全体座標系と要素座標系が一致している。したがって、直接剛性法によって全体剛性方程式を求めると

$$\begin{Bmatrix} \bar{F}_1 \\ \bar{F}_2 \\ \bar{F}_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{(1)}^T \mathbf{k}_f^A \mathbf{T}_{(1)} & \mathbf{T}_{(1)}^T \mathbf{k}_f^B \mathbf{T}_{(1)} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{T}_{(1)}^T \mathbf{k}_f^C \mathbf{T}_{(1)} + \mathbf{k}_f^A & \mathbf{k}_f^B \\ \text{Symm.} & & \mathbf{k}_f^C \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix}$$

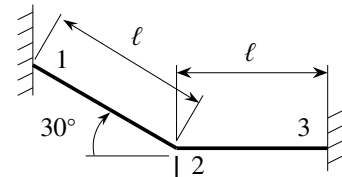


図 5.26 平面骨組の例

でいい。ここの要素 1-2 (要素 (1)) の座標変換行列 $\mathbf{T}_{(1)}$ は

$$\mathbf{T}_{(1)} \equiv \mathbf{T}(\alpha = -30^\circ) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

という値を持つ。境界条件と外力条件は

$$\bar{u}_1 = \bar{w}_1 = \bar{u}_3 = \bar{w}_3 = 0, \quad \bar{\theta}_1 = \bar{\theta}_3 = 0, \quad \bar{F}_2 = 0, \quad \bar{S}_2 = Q, \quad \bar{C}_2 = 0$$

と与えられているので、全体剛性方程式に代入して左辺が既知の第 4, 5, 6 行を取り出して

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_{(1)}^T \mathbf{k}_f^C \mathbf{T}_{(1)} + \mathbf{k}_f^A \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix}$$

を解けばいい。具体的に剛性行列の要素に値を代入すると

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{w}_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7EA}{4l} + \frac{3EI}{l^3} & \frac{\sqrt{3}EA}{4l} - \frac{3\sqrt{3}EI}{l^3} & \frac{-3EI}{l^2} \\ & \frac{EA}{4l} + \frac{21EI}{l^3} & \frac{-3(2-\sqrt{3})EI}{l^2} \\ \text{Symm.} & & \frac{8EI}{l} \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} 0 \\ Q \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

となるから、この逆行列を計算すれば解を得る。その結果を用いて全体あるいは要素剛性方程式を前節同様適切に用いると、支点反力や曲げモーメント図・せん断力図・軸力図が算定できる。

ちなみに、上式の表現を見れば明らかなように軸方向の変形と曲げ変形が連成した結果が得られる。ここでも再度ドロドロしたことを書くが、各種試験で出題される骨組の問題ではもしかすると暗黙の了解として曲げのみで変形する骨組とされている。というのも、ほとんどの教科書では、単位荷重法や後述する Castigliano の第 2 定理の説明には軸方向の寄与が含まれていないと感じたからだ。しかし一方で、多くの学生が各種試験でこの二つの公式を使うのも事実だろう。では、その試験の答を有限要素法で確認するにはどうしたらいいだろう。つまり、どうしたら軸方向の変形が曲げ変形に比べて無視できるようになるだろう。これは第 4.8.3 (2) 節で説明したように、細長い部材にすれば曲げ変形の方が優位になるから、断面積 A を断面 2 次モーメント I に比べてかなり大きくすればいいことが式 (4.103) の細長比の表現からわかる。否、上式 (*) で A を無視すればいい。ん? A は無限大ですか零ですか。各自種々の問題を解いて確認して欲しい。

5.3.5 全体剛性方程式の解法

ここまでの例で見たように、全体剛性方程式は力学的境界条件が与えられた自由度に対応した式がまず解け、すべての節点変位が先に求められる。よく変位法と呼ばれる理由はここにある。ここでは、計算機で境界条件

と外力条件を代入して変位と内力を計算する一つの手順例について概説しておく。全体座標系における集中外力ベクトルと分布外力ベクトルがそれぞれ \bar{f}^c, \bar{f}^d で表され、直接剛性法によって全体剛性方程式を

$$\bar{f}_i \equiv \bar{f}_i^c + \bar{f}_i^d = \sum_{j=1}^N \bar{k}_{ij} \bar{u}_j, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (a)$$

のように得たとする。これに外力条件を代入するのは簡単で、左辺の \bar{f} の対応する成分を与えればいい。次に、幾何学的境界条件が例えば第 n 自由度に対して

$$\bar{u}_n = \Delta_n \quad (b)$$

と与えられた（固定なら $\Delta_n = 0$ ）場合、これを上の全体剛性方程式 (a) に代入すると第 n 行以外が

$$\bar{f}_i - \bar{k}_{in} \Delta_n = \sum_{j=1}^{n-1} \bar{k}_{ij} \bar{u}_j + \sum_{j=n+1}^N \bar{k}_{ij} \bar{u}_j, \quad i = 1, 2, \dots, n-1, n+1, \dots, N \quad (c)$$

となる。式 (a) の第 n 行を式 (b) で置き換えた上で式 (c) を組み合わせると、境界条件を代入したあとの全体剛性方程式¹³は

$$\begin{pmatrix} \bar{f}_1 \\ \vdots \\ \bar{f}_{n-1} \\ 0 \\ \bar{f}_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{f}_N \end{pmatrix} + \Delta_n \begin{pmatrix} -\bar{k}_{1n} \\ \vdots \\ -\bar{k}_{(n-1)n} \\ 1 \\ -\bar{k}_{(n+1)n} \\ \vdots \\ \vdots \\ -\bar{k}_{Nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{k}_{11} \cdots \bar{k}_{1(n-1)} & 0 & \bar{k}_{1(n+1)} & \cdots & \bar{k}_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \bar{k}_{(n-1)(n-1)} & 0 & \bar{k}_{(n-1)(n+1)} & \cdots & \bar{k}_{(n-1)N} \\ & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \bar{k}_{(n+1)(n+1)} & \cdots & \bar{k}_{(n+1)N} \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & \ddots \\ & & & & \bar{k}_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_{n-1} \\ \bar{u}_n \\ \bar{u}_{n+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \bar{u}_N \end{pmatrix} \quad (5.41)$$

となる。このようにすると左辺は与えられた外力と節点変位（固定の場合は零）の既知量のみとなり、正しい組み合わせで幾何学的境界条件が与えられてさえいれば右辺の剛性行列も正則になって逆行列が存在し、すべての変位成分（右辺の未知量）を求めることができる。このような手順で全体剛性方程式を解き、内力を要素剛性方程式から求める方法を使う場合の代表的なフローチャートを図 5.27 に示した。また図 5.28 (a) は数値的に解析した骨組の例である。この解析プログラムもまえがきに記した方法で入手可能である。与えられる境界条件の種類に制限があるが、支点沈下等も取り扱うことができるようになっている。

演習問題 5-9

19. 図 5.28 (a) の平面骨組をプログラムを用いて数値的に解いてみよ。ただし Young 率は $E = 200 \text{ GN/m}^2$ とし、部材 2-6, 4-7 を除いて $A = 0.001 \text{ m}^2, I = 0.0001 \text{ m}^4$ とし、部材 2-6, 4-7 の面積と断面 2 次モーメントは共にこの 2 倍とする。
20. 図 5.28 (b) の正三角形の平面骨組を 3 有限要素を用いて解け。直接剛性法で剛性行列をどのように重ねていけばいいか注意深く考えよ。
21. 図 4.93~4.95 の平面骨組を、適当な部材長と例えば上の問題 19 番で指定した断面定数を用いて数値的に解き、変位の厳密解と比較せよ。そのとき、断面積をどのくらい大きく（つまりどのくらい細長く）すれば曲げだけを考慮した単位荷重法による厳密解と 6 桁程度一致するのかを確かめよ。

¹³ こうすればプログラム中の連立方程式に関する配列のサイズを変更しなくても済む。

¹⁴ 第 5.3.2(3) 節で説明したように、このステップは有限要素法のそれではなく、マトリックス構造解析法のものである。

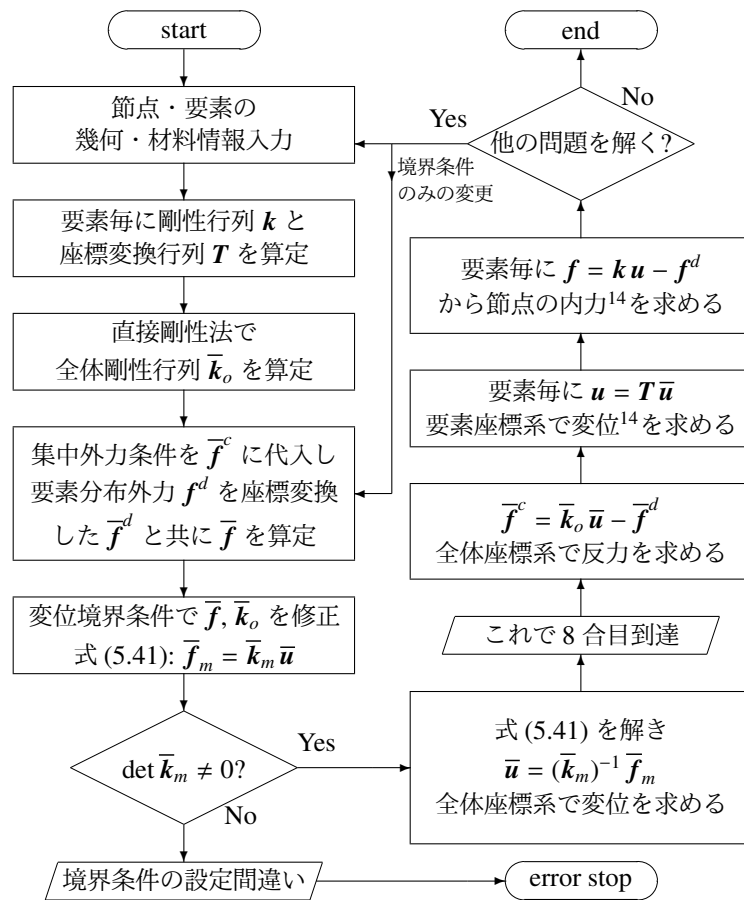


図 5.27 有限要素解析のフローチャート例

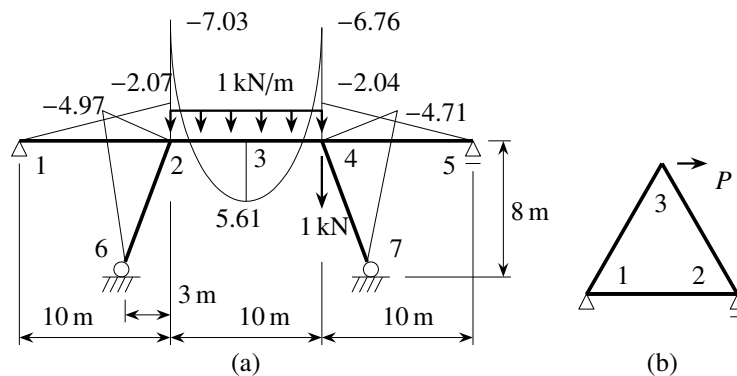


図 5.28 平面骨組の解析例

5.3.6 その他の要素

(1) 端部にヒンジを設置した梁要素

例えば2次部材の端部は主部材に剛結されているとは限らないので、場合によってはヒンジでモデル化したいかもしい。あるいは部分的なトラス構造が骨組構造の中に設定される場合もあるだろう。そこで端部にヒンジを設置した梁の有限要素を定式化してみよう。例えば右端だけにヒンジがある要素では、そのヒンジ端側の内力曲げモーメントは零である。この条件は、その当該端部の曲げモーメントを要素剛性方程式のレベルで零にすることによって与えることができる。つまりそれは、式(5.24)の第4式左辺の C_2 が零になるという

拘束条件である。したがって

$$0 + q_4 = EI \begin{bmatrix} -\frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & -\frac{4}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$

あるいは左辺・右辺を入れ替えて

$$\theta_2 = \frac{q_4 \ell}{4EI} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2\ell} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

という条件がその要素では満足されなければならない。これを残りの3行の要素剛性方程式に代入すると

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{Bmatrix} = EI \begin{bmatrix} 12/\ell^3 & -6/\ell^2 & -12/\ell^3 \\ & 4/\ell & 6/\ell^2 \\ \text{Symm.} & & 12/\ell^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} + EI \begin{bmatrix} -6/\ell^2 \\ 2/\ell \\ 6/\ell^2 \end{bmatrix} \left(\frac{q_4 \ell}{4EI} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2\ell} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \right)$$

であればいいことになる。ここでも左辺・右辺を整理すると結局

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 + 3q_4/2\ell \\ q_2 - q_4/2 \\ q_3 - 3q_4/2\ell \end{Bmatrix} = 3EI \begin{bmatrix} 1/\ell^3 & -1/\ell^2 & -1/\ell^3 \\ & 1/\ell & 1/\ell^2 \\ \text{Symm.} & & 1/\ell^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

を得る。既に考慮した4行目の式は $C_2 = 0$ で置き換えればいいので、それを上式に加えると通常の4行の要素剛性方程式が

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 + 3q_4/2\ell \\ q_2 - q_4/2 \\ q_3 - 3q_4/2\ell \\ 0 \end{Bmatrix} = 3EI \begin{bmatrix} 1/\ell^3 & -1/\ell^2 & -1/\ell^3 & 0 \\ & 1/\ell & 1/\ell^2 & 0 \\ & & 1/\ell^3 & 0 \\ \text{Symm.} & & & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.43)$$

と求められる。これが右端だけにヒンジがある梁要素の剛性方程式である。分布外力が図 5.11 のように一様で、それが q_0 である場合の分布外力項は

$$\begin{Bmatrix} q_1 + 3q_4/2\ell \\ q_2 - q_4/2 \\ q_3 - 3q_4/2\ell \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5q_0\ell/8 \\ -q_0\ell^2/8 \\ 3q_0\ell/8 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.44)$$

になる。

そして通常の直接剛性法を用いて式 (5.43) を組み込めば全体剛性方程式を求めることができるが、それを解いて求められる上記の θ_2 の要素に相当する全体座標系のたわみ角は、このヒンジを右端に持つ当該要素のたわみ角ではなく、その右に接する要素の左端のたわみ角であることには注意する必要がある。この当該要素の右端のたわみ角の方は、求められた変位成分を式 (5.42) の右辺に代入することによって求めることができる。ヒンジの存在によってたわみ角は不連続になるが、その両方共を剛性方程式（有限要素法）で求めることができる。

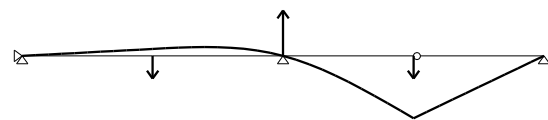


図 5.29 ヒンジのある連続梁

左端だけにヒンジがある場合の要素剛性方程式も、 $C_1 = 0$ の拘束条件から始めた同様の手順で求めることができる。まず式 (5.42) に対応したたわみ角の条件は

$$\theta_1 = \frac{q_2 \ell}{4EI} + \begin{bmatrix} \frac{3}{2\ell} & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.45)$$

となるので、最終的に式(5.43)に対応した要素剛性方程式は

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 + 3q_2/2\ell \\ 0 \\ q_3 - 3q_2/2\ell \\ q_4 - q_2/2 \end{Bmatrix} = 3EI \begin{Bmatrix} 1/\ell^3 & 0 & -1/\ell^3 & -1/\ell^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 1/\ell^3 & 1/\ell^2 \\ \text{Symm.} & & & 1/\ell \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.46)$$

と求められ、一様分布外力 q_0 の場合の式(5.44)に対応した分布外力項は

$$\begin{Bmatrix} q_1 + 3q_2/2\ell \\ 0 \\ q_3 - 3q_2/2\ell \\ q_4 - q_2/2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3q_0\ell/8 \\ 0 \\ 5q_0\ell/8 \\ q_0\ell^2/8 \end{Bmatrix} \quad (5.47)$$

となる。

では両端にヒンジがある場合はどうだろう。それは上式(*)においてさらに $C_1 = 0$ になる拘束条件を組み込めばいいだけだ。上で用いた手順を繰り返せばまず

$$\theta_1 = \frac{\ell}{3EI} \left(q_2 - \frac{q_4}{2} \right) + \left[\frac{1}{\ell} \quad -\frac{1}{\ell} \right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (5.48)$$

を得る。この式(5.48)を式(*)に代入して整理すると結局、両端にヒンジがある梁要素の2行の要素剛性方程式と、他の2行を $C_1 = 0, C_2 = 0$ で置き換えて分布外力が一様な q_0 の場合の4行の要素剛性方程式は

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ S_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 + q_2/\ell + q_4/\ell \\ q_3 - q_2/\ell - q_4/\ell \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_0\ell/2 \\ 0 \\ q_0\ell/2 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \text{Symm.} & & & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5.49a, b)$$

と求められる。剛性行列の要素はすべて零、つまり式(5.29)で用いたトラス要素そのものである。ちなみに、式(5.48)の θ_1 を式(5.42)の右辺に代入すると

$$\theta_2 = \frac{\ell}{3EI} \left(q_4 - \frac{q_2}{2} \right) + \left[-\frac{1}{\ell} \quad \frac{1}{\ell} \right] \begin{Bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{Bmatrix} \quad (5.50)$$

を得る。この式と式(5.48)の右辺第2項は両端のたわみ差を要素長で除した値であって、それはこの梁要素の剛体的な回転変位成分である。そして、それぞれの第1項は分布外力が載った単純支持梁の両端のたわみ角（等分布外力の場合の式(4.36); $\theta_1 = -\theta_2 = -q_0\ell^3/24EI$ ）なのだ。つまり、両端ヒンジの梁要素は両端がたわむことができる単純支持梁の要素になっていて、分布外力が無ければトラス要素になっていることがわかる。

(2) 弾性床上の梁の要素

第4.7.1節で取り上げた弾性床上の梁の場合も、そのつり合い式(4.89)に仮想変位 $\delta w(x)$ を乗じて領域積分すれば対応する仮想仕事式を誘導できる。ただ初等梁理論との違いは第2項の床反力の $k_w w(x)$ のみなので、結局は梁の仮想仕事式(5.20)にこの項の仮想仕事を加えるだけでよく、最終的な仮想仕事式は

$$\int_0^\ell EI w'' \delta w'' dx + \int_0^\ell k_w w \delta w dx - \int_0^\ell q \delta w dx - S_1 \delta w_1 - C_1 \delta \theta_1 - S_2 \delta w_2 - C_2 \delta \theta_2 = 0 \quad (5.51)$$

となる。第2項が床からの反力がする仮想仕事である。用いる変位関数が満足すべき条件は初等梁理論のそれと同じなので変位関数式(5.21)がそのまま使え、剛性方程式が

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \left(\mathbf{k}_b + \mathbf{k}_w \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \tag{5.52}$$

と求められる。ここに \mathbf{k}_b は式(5.25)で定義されていて、 \mathbf{k}_w が上式(5.51)第2項に対応した剛性行列で

$$\mathbf{k}_w \equiv \left(\left[\int_0^\ell k_w \psi_i(x) \psi_j(x) dx \right] \text{を} ij \text{要素とする剛性行列} \right) = k_w \begin{pmatrix} 13\ell/35 & -11\ell^2/210 & 9\ell/70 & 13\ell^2/420 \\ & \ell^3/105 & -13\ell^2/420 & -\ell^3/140 \\ & & 13\ell/35 & 11\ell^2/210 \\ \text{Symm.} & & & \ell^3/105 \end{pmatrix} \tag{5.53}$$

と定義される。使い方等は初等梁と同じなので割愛する。

弾性床上の梁の問題の変位の厳密解に指数関数が存在することは式(4.90)で示した通りである。したがって、区分的多項式で変位を近似した剛性方程式から求められる有限要素法による近似解は、節点位置であっても厳密解には一致しないことには十分注意すべきである。図5.30には、弾性床上の単純梁の中央に集中荷重を載せた場合の、中央のたわみ w と曲げモーメントの有限要素解と要素数 N の関係を示した。曲げモーメントは、変位関数の2階の微係数 $(-EIw'')$ で求めた場合と、図5.15で示したのと同様に要素剛性方程式の反力 (M) で求めた場合との二つを示してある。縦軸が有限要素解と厳密解の相対誤差 (Err_r) で両対数表示だ。要素サイズを小さくする(要素数を増やす)に従って近似誤差が零に漸近している。図5.7, 5.15の場合と同様に、たわみの高階微係数で求めた断面力(有限要素法の枠組の中で求めた内力 $-EIw''$)の誤差はたわみ w の誤差よりも大きく、収束の速度も一桁ほど遅い。しかし、図中の中央右方にある直角三角形の勾配が2なので、変位関数の微係数で求めた曲げモーメント $(-EIw'')$ であっても、要素分割数の2乗といった十分速い速度で厳密解に収束していることもわかる。4要素(8自由度)で二桁、8要素(16自由度)で三桁の有効数字の精度が得られている。ただし、それに対し要素剛性方程式から求めた断面力 (M) の誤差と収束速度の方は、変位そのものの誤差の傾向とほぼ同じなのは興味深い。このように、有限要素法で近似解しか求められない場合であっても、内力の算定には変位関数を用いるよりも要素剛性方程式を利用した方が精度も収束速度も良好になる。

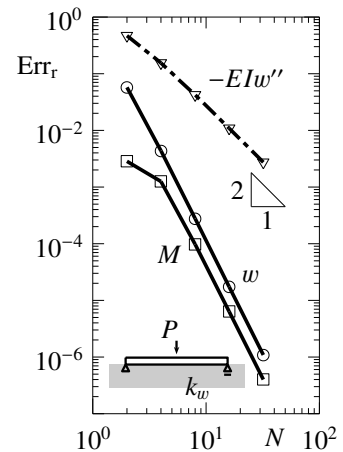


図5.30 弾性床上梁の解の収束

(3) 梁の動的問題に対する要素

正確な誘導は第9.4.7節に示したが、梁の運動方程式(4.92)に対する初期値境界値問題の弱形式は、形式的には後述の式(5.65)になる。ここで解くべき問題は時間と場所の関数を求めることなので、この「動的な仮想仕事」に対する動的な剛性方程式(運動方程式)を求めるための変位関数は、静的な式(5.21)を少し変更して節点自由度を時間の関数にすることによって

$$w(x, t) \sim w_1(t) \psi_1(x) + \theta_1(t) \psi_2(x) + w_2(t) \psi_3(x) + \theta_2(t) \psi_4(x) \tag{5.54}$$

と置けばいい。ちょうど変数分離で初期値境界値問題を解くのに似ている。以下、粘性項を無視した運動方程式を誘導する。式(5.54)を式(5.65)に代入して演算すると、静的な剛性方程式と異なる項は慣性項のみで、それは

$$m \int_0^\ell \ddot{w} \delta w \, dx = m \left[\delta w_1 \{ \mu_{11} \ddot{w}_1 + \mu_{12} \ddot{\theta}_1 + \mu_{13} \ddot{w}_2 + \mu_{14} \ddot{\theta}_2 \} + \delta \theta_1 \{ \mu_{21} \dot{w}_1 + \mu_{22} \dot{\theta}_1 + \mu_{23} \dot{w}_2 + \mu_{24} \dot{\theta}_2 \} \right. \\ \left. + \delta w_2 \{ \mu_{31} \dot{w}_1 + \mu_{32} \dot{\theta}_1 + \mu_{33} \dot{w}_2 + \mu_{34} \dot{\theta}_2 \} + \delta \theta_2 \{ \mu_{41} \dot{w}_1 + \mu_{42} \dot{\theta}_1 + \mu_{43} \dot{w}_2 + \mu_{44} \dot{\theta}_2 \} \right]$$

となる。ここに

$$\mu_{ij} \equiv \int_0^\ell \psi_i(x) \psi_j(x) \, dx \tag{5.55}$$

と定義した。したがって1有限要素の運動方程式は

$$\mathbf{m}_b \ddot{\mathbf{w}}_b(t) + \mathbf{k}_b \mathbf{w}_b(t) = \mathbf{f}_b(t) \tag{5.56}$$

となる。ここに、 \mathbf{k}_b は式(5.25)で定義した梁の曲げに関する剛性行列である。そして \mathbf{m}_b が $(m\mu_{ij})$ を ij 要素とする質量行列である。行列の具体的な要素については、式(5.53)の \mathbf{k}_w の定義と見比べれば明らかなように、その係数 k_w を m で置き換えたものと同じで

$$\mathbf{m}_b \equiv \left(\left[\int_0^\ell m \psi_i(x) \psi_j(x) \, dx \right] \text{を } ij \text{ 要素とする質量行列} \right) = m \begin{pmatrix} 13\ell/35 & -11\ell^2/210 & 9\ell/70 & 13\ell^2/420 \\ & \ell^3/105 & -13\ell^2/420 & -\ell^3/140 \\ & & 13\ell/35 & 11\ell^2/210 \\ \text{Symm.} & & & \ell^3/105 \end{pmatrix} \tag{5.57}$$

という成分を持つ。ただし節点変位と節点外力のベクトルはそれぞれ

$$\mathbf{w}_b(t) \equiv [w_1(t) \ \theta_1(t) \ w_2(t) \ \theta_2(t)]^T, \quad \mathbf{f}_b(t) \equiv [S_1(t) \ C_1(t) \ S_2(t) \ C_2(t)]^T + [q_1(t) \ q_2(t) \ q_3(t) \ q_4(t)]^T$$

のような時間の関数で定義した。

式(5.56)は1要素の動的な要素剛性(運動)方程式であり、境界条件を代入する前なら形式的には4自由度系の運動方程式(9.95)と同じ形をしている。もちろん4質点系の質量行列が対角行列なのに対し、この梁の質量行列は式(5.57)から明らかなように非対角項にも非零な値を持つ4×4の行列になっている。このような非対角な質量

表 5.3 固有振動数の近似度の改善

要素数	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
1	1.10992	1.27157	—	—	—
2	1.00395	1.10992	1.23994	1.27157	—
4	1.00026	1.00395	1.01827	1.10992	1.12909
8	1.00002	1.00026	1.00129	1.00395	1.00927
16	1.00000	1.00002	1.00008	1.00026	1.00063

行列を整合質量行列と呼ぶ。梁の動的問題をこの要素剛性方程式を用いて解く場合には、質量行列についても直接剛性法を適用して共有節点に関する要素同士を重ね合わせればいい。具体的な計算は第9.4.7(2)節に示したが、両端単純支持梁の固有振動数と要素数の関係が表5.3である。表中の ζ_k は

$$\zeta_k \equiv \frac{\text{有限要素解}}{\text{厳密解}} = \frac{\omega_k}{(k\pi/\ell)^2 \sqrt{EI/m}}$$

で定義した第 k 次振動数の厳密解と近似解の比である。要素数が増えるに従って解の精度が上がり、工学的に最も重要な最低次の固有振動数は1要素(2自由度)であってもわずか11%程度の誤差しか含んでおらず、2要素(4自由度)では1%未満になっていることは興味深い。数値解析上の安定性や精度等の問題点や、具体的な解法等については第9.4.7節や文献[8]等を参照のこと。

演習問題 5-10

22. プログラムを自作して図 5.30 を確かめよ。
 23. 可能ならプログラムを自作して表 5.3 を確かめよ。

5.4 有限要素の特徴

5.4.1 柱と梁の剛性方程式は厳密

柱と梁の場合は変位と内力（要素剛性方程式を利用した場合）の有限要素解が節点では厳密解に一致し、それを超収束 [91] と呼んでいるが、それはそれぞれの変位関数の多項式が対応する Green 関数（影響線）に一致していたからだ。そこで文献 [172] に示されている方法を用いて、等断面の場合の剛性方程式 (5.19a) および式 (5.24) が一般的な支配方程式から直接誘導できることを示しておく。

柱： 柱のつり合い式と軸力は

$$EA \frac{d^2 u(x)}{dx^2} + p(x) = 0, \quad N(x) = EA \frac{du(x)}{dx} \quad (5.58a, b)$$

を満足する。この式 (5.58a) を 2 回積分すると

$$u(x) = c_1 x + c_2 - \frac{1}{EA} \int_0^x \int_0^\xi p(\eta) d\eta d\xi$$

となる。 $x = 0, \ell$ の変位を u_1, u_2 と記すと、この式から

$$u_1 = u(0) = c_2, \quad u_2 = u(\ell) = c_1 \ell + c_2 - \frac{1}{EA} \int_0^\ell \int_0^\xi p(\eta) d\eta d\xi$$

となることから

$$c_2 = u_1, \quad c_1 = \frac{u_2 - u_1}{\ell} + \frac{1}{EA\ell} \int_0^\ell \int_0^\xi p(\eta) d\eta d\xi$$

を得る。 c_1 の式にある積分に対して無理やり部分積分を実行すると

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{u_2 - u_1}{\ell} + \frac{1}{EA\ell} \int_0^\ell \frac{d\xi}{d\xi} \left(\int_0^\xi p(\eta) d\eta \right) d\xi \\ &= \frac{u_2 - u_1}{\ell} + \frac{1}{EA\ell} \left\{ \xi \int_0^\xi p(\eta) d\eta \Big|_0^\ell - \int_0^\ell \xi \frac{d}{d\xi} \left(\int_0^\xi p(\eta) d\eta \right) d\xi \right\} \\ &= \frac{u_2 - u_1}{\ell} + \frac{1}{EA\ell} \left\{ \ell \int_0^\ell p(\eta) d\eta - \int_0^\ell \xi p(\xi) d\xi \right\} = \frac{u_2 - u_1}{\ell} + \frac{1}{EA} \int_0^\ell p(\xi) \left(1 - \frac{\xi}{\ell} \right) d\xi \end{aligned}$$

と書くことができるので、変位を

$$u(x) = u_1 \left(1 - \frac{x}{\ell} \right) + u_2 \frac{x}{\ell} + \frac{1}{EA} \left\{ x \int_0^\ell p(\xi) \left(1 - \frac{\xi}{\ell} \right) d\xi - \int_0^x \int_0^\xi p(\eta) d\eta d\xi \right\}$$

と表すことができる。この第 1, 2 項の斉次解が式 (5.16b) (5.16c) の変位関数に一致している。これを式 (5.58b) に代入すると、軸力は

$$N(x) = EA \frac{u_2 - u_1}{\ell} + \int_0^\ell p(\xi) \left(1 - \frac{\xi}{\ell} \right) d\xi - \int_0^x p(\xi) d\xi$$

と求められる。これから $x = 0, \ell$ の軸力を求め、それがそれぞれ外力 $-F_1, F_2$ に一致する（境界条件）ので

$$F_1 = -N(0) = -EA \frac{u_2 - u_1}{\ell} - \int_0^\ell p(\xi) \left(1 - \frac{\xi}{\ell} \right) d\xi, \quad (5.59a)$$

$$F_2 = N(\ell) = EA \frac{u_2 - u_1}{\ell} - \int_0^\ell p(\xi) \frac{\xi}{\ell} d\xi \quad (5.59b)$$

となり、等価節点外力項も含めて式 (5.19a) の剛性方程式に一致する。

梁: 梁のつり合い式と断面力は

$$-EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + q(x) = 0, \quad M(x) = -EI \frac{d^2 w(x)}{dx^2}, \quad V(x) = -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} \quad (5.60a, b, c)$$

を満足する。柱の場合と同じように式 (5.60a) を積分すると

$$w(x) = c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 + w_p(x), \quad w_p(x) \equiv \frac{1}{EI} \int_0^x \int_0^s \int_0^\xi \int_0^\eta q(\zeta) d\zeta d\eta d\xi ds$$

となる。この特解 w_p の積分に対しても柱の場合と同様の部分積分を何度か実行すると

$$w_p(x) = \frac{1}{EI} \left\{ \frac{x^3}{6} \int_0^x q(s) ds - \frac{x^2}{2} \int_0^x s q(s) ds + x \int_0^x \frac{s^2}{2} q(s) ds - \int_0^x \frac{s^3}{6} q(s) ds \right\}$$

と求められる。あとは式 (5.60b) (5.60c) に代入して求められる断面力から両端の反力を算定すると

$$S_1 = \frac{12EI}{\ell^3} w_1 - \frac{6EI}{\ell^2} \theta_1 - \frac{12EI}{\ell^3} w_2 - \frac{6EI}{\ell^2} \theta_2 - \frac{1}{\ell^3} \int_0^\ell q(s) (\ell - s)^2 (\ell + 2s) ds, \quad (5.61a)$$

$$C_1 = -\frac{6EI}{\ell^2} w_1 + \frac{4EI}{\ell} \theta_1 + \frac{6EI}{\ell^2} w_2 + \frac{2EI}{\ell} \theta_2 + \frac{1}{\ell^2} \int_0^\ell q(s) s (\ell - s)^2 ds, \quad (5.61b)$$

$$S_2 = -\frac{12EI}{\ell^3} w_1 + \frac{6EI}{\ell^2} \theta_1 + \frac{12EI}{\ell^3} w_2 + \frac{6EI}{\ell^2} \theta_2 - \frac{1}{\ell^3} \int_0^\ell q(s) s^2 (3\ell - 2s) ds, \quad (5.61c)$$

$$C_2 = -\frac{6EI}{\ell^2} w_1 + \frac{2EI}{\ell} \theta_1 + \frac{6EI}{\ell^2} w_2 + \frac{4EI}{\ell} \theta_2 - \frac{1}{\ell^2} \int_0^\ell q(s) s^2 (\ell - s) ds \quad (5.61d)$$

のように両端の変位で表すことができ、これも等価節点外力項も含めて式 (5.24) の剛性方程式に一致する。

5.4.2 要素剛性行列は特異

要素剛性行列は面白い性質を持っている。それは、例えば柱の場合の式 (5.19b) から明らかのように

$$\det \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} \\ l_{21} & l_{22} \end{pmatrix} = \left(\frac{EA}{\ell} \right)^2 \{ (1)^2 - (-1)^2 \} = 0$$

となり、その行列式が零だということである。したがって要素剛性行列は特異行列であり、そのままでは逆行列が存在しない。これは梁の場合も同様である。剛性行列はバネのようなものと解説してきた。もしそうなら、本質的にはバネ剛性が零になっているように感じるかもしれないが、少し違う。図 5.27 のフローチャートやこれまでの解析例を思い出して欲しい。境界条件を代入したあと、剛性方程式のうち左辺が既知の行をまず解いていた。つまり、剛性行列から境界条件の分、より具体的には幾何学的境界条件の分を取り除いてから解いていた。構造はどこかを固定していないと安定した状態にはならない。その逆の意味がこの剛性行列の特異性なのである。具体的に柱を例にとって、その物理的な意味を考えて解を求めておこう。

図 5.31 は図 4.10 に似た系で、1本の棒の両端に相反する方向に軸力が作用している。もし $P_1 = P_2$ なら図 4.10 になり、それはつり合っている系になる。これを1要素の剛性方程式で解いてみよう。分布外力は無いから $p_i \equiv 0$ ($i = 1, 2$) となり



図 5.31 両端共に軸力で圧縮された柱

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{Bmatrix} = \frac{EA}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

を解けばいいのだが、先に述べたようにこの係数行列の逆行列が存在しないため、一見したところ解けない。これは、力学的境界条件のみを与えており、どこかを適切に止めておくことを忘れたための解の不定性なのは

既に述べた通りであるが、この方程式は数学を使って何とか解けないものだろうか。実は線形代数には次のような定理¹⁵が存在する [88]。

Alternative Theorem: 行列 A を $n \times n$ の正方行列とし、 u と f を $n \times 1$ の行列とする。そこで

$$Au = f \quad (a)$$

を解きたい。これに対し、次の2式を付随的に考える。

$$Av = 0, \quad A^T w = 0 \quad (b, c)$$

- もし A が正則なら ($\det A \neq 0$) 式 (b) (c) 共に無意味な解 ($v = 0, w = 0$) のみが解で、式 (a) は唯一な解を持ち、それは $u = A^{-1}f$ である。
- もし A が特異であれば、式 (a) の解は存在しないか存在して唯一に定まらないかのいずれかである。解が存在するための条件は適合条件と呼ばれ、式 (c) を満足する独立したすべての $w = w_1, w_2, \dots, w_m$ (ここに m は A の大きさ n から A の階数を引いた値) と f の内積が

$$(f, w_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

を満足しなければならないという条件で与えられる。そしてそのとき、解は

$$u = u_p + \sum_{i=1}^m c_i v_i$$

となる。ここに u_p は式 (a) を満足する一つの特解であり、 v_i は式 (b) のすべての解で、 c_i は任意定数である。☆

この定理を上述の柱の問題に適用しよう。この場合

$$A = \frac{EA}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} P_1 \\ -P_2 \end{pmatrix}$$

である。 A の階数は1なので $m = 1$ になる。 m は行列 A の零固有値の数に一致する。また A は対称行列なので $A^T = A$ となり、 v も w も独立な解は一つで (この解は行列 A の零固有値に対応した固有ベクトルに一致する)、いずれも $v = w = [1 \ 1]^T$ でいい。そこで f と w の内積をとってみると

$$(f, w) = P_1 \times 1 + (-P_2) \times 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad P_1 = P_2$$

となり、適合条件を満足するためには、外力同士がつりあっていなければならないことがわかる。ここでは静止した解を求めようとしているのだから、この結論は当たり前である。数学的整合条件で力学的整合性が求められているのはとても興味深い。

では、この適合条件が成立している ($P_1 = P_2 = P$) のものとする、 $Au = f$ の特解は柱が P に対して $P\ell/EA$ だけ縮んだ解でいいから

$$u_p = \begin{pmatrix} P\ell/EA \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -P\ell/EA \end{pmatrix}$$

¹⁵ この定理の正確な和訳がわからない。インターネットで検索したところ、「(Fredholm の) 交代定理」「(二者) 択一定理」のように複数ありそうだ。ただし、英語を直訳した「代替定理」は経済学系の 'substitution theorem' のようだ。また線形代数以外にも 'alternative theorem' はある。その 'alternative' の意味を理解するために p.798 に英文版を掲載した。

等がよく、結局、解は上の定理の表現を用いて

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \sum_{i=1}^1 c_i \mathbf{v}_i = \begin{Bmatrix} 0 \\ -P\ell/EA \end{Bmatrix} + c_1 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

と、ちゃんと答が求められた。 c_1 が不定だから、両端の距離が $P\ell/EA$ だけ縮んだままの柱はいくら剛体的に移動しても境界条件を満足し、つり合いも満足しているということだ。

上の例から明らかなように、解が存在するための適合条件の物理的意味は「与えた両端の外力同士がつり合っていること」である。つまり両端に異なる外力を与えただけの系では解が存在せず、静的つり合い位置に留まる可能性が無いことを意味している。数学と物理的直感が完全に一致していると感じられて面白い。このように、本質的な境界条件が「適切に」与えられていないと解が唯一には定まらない（不定だ）し、自然境界条件も適切（適合条件を満たす）でないと解が存在しない（不能な）ことがわかる。

5.4.3 変分原理と近似度

(1) 汎関数

図 5.3 の例を用いて、もう少し一般的な説明をするために、式 (5.11) の $w_a(x)$ を $w(x)$ と置いて

$$\int_0^\ell \{-EI w''(x)\} \{-\delta w''(x)\} dx - \int_0^\ell q(x) \delta w(x) dx - C_0 \{-\delta w'(\ell)\} = 0 \quad (5.62)$$

という仮想仕事式について考察してみよう。ここで（著者は答を知っているので天下りの）関数 $w(x)$ に関するあるスカラー量 Π を

$$\Pi[w(x)] \equiv \frac{1}{2} \int_0^\ell EI \{-w''(x)\}^2 dx - \int_0^\ell q(x) w(x) dx - C_0 \{-w'(\ell)\} \quad (5.63)$$

と定義してみよう。なぜ $1/2$ があるのか等は以下を読み続ければわかるので、ここでは深くは考えなくていい。さて、式 (5.62) の δ という記号をあたかも微分 d と同じように解釈し、関数 $w(x)$ を少しだけ変動させたときの式 (5.63) の Π の変動分（全微分に相当）を算定すると、特に第 1 項が

$$\delta \left[\frac{1}{2} \int_0^\ell EI \{-w''(x)\}^2 dx \right] = \frac{1}{2} \int_0^\ell 2 EI \{-w''(x)\} \delta \{-w''(x)\} dx$$

となることがわかれば、式 (5.63) の Π の変動が式 (5.62) の左辺に一致することは容易に確かめられる。つまり Π を $w(x)$ で全微分したような表現が式 (5.62) の左辺になることは、実際に被積分関数等に全微分演算の真似をすれば明らかだ。このことから、仮想仕事の原理はあるスカラー量 Π の変化率が零になる条件であり

$$\delta \Pi[w(x)] = 0 \quad (5.64)$$

と書いてもよさそうだ。この Π のような「関数の関数」を汎関数と呼び、その関数の変動に対する変化率（関数に対する汎関数の全微分¹⁶） $\delta \Pi$ を第 1 変分と呼ぶ。仮想仕事の原理は Π の第 1 変分が零になる条件であり、汎関数を基礎とするこのような原理を総じて変分原理と¹⁷呼んでいる。汎関数 Π の第 1 変分を零にするように $w(x)$ を決定しようとする問題を変分問題と総称し、その仮想仕事の原理に対応する方程式、例えば式 (5.10a) のような微分方程式を、この変分問題の Euler 方程式と呼んでいる。

¹⁶ インターネット上に間違った記述があったので念のために書いておくと、関数の微分というのはその独立変数の変動に対する関数の変化率であるのに対し、汎関数は関数の関数だから、その関数の変動に対する汎関数の変化率を変分と呼んで、微分と区別している。

¹⁷ 正直な話、第 1 著者は変分法の学部の授業は全く理解できなかった。4 年生で配属されたあとで使うようになった仮想仕事の原理の勉強で、ちょっとわかるようにはなったが、米国で習った応用数学の変分法もまた理解できず、1 週間の take-home exam で答を求めることができなかった。その答（ Γ 関数であることだけは知らされているが）は今でも求められないでいる。

こういった汎関数を常に考える必要があるかという点必ずしもそうではない。塑性や粘性等のように何らかのエネルギーの散逸を現象論的にモデル化した場合等、問題によっては汎関数が存在しない物理モデルもあり得る。例えば、梁の動的問題の運動方程式は式(4.92)から

$$m \ddot{w}(x, t) + \eta I \dot{w}''''(x, t) + EI w''''(x, t) - q(x, t) = 0$$

と表現でき、これに対する仮想仕事の原理を形式的に

$$\begin{aligned} \delta \Pi \equiv & \int_0^\ell m \ddot{w}(x, t) \delta w(x, t) dx + \int_0^\ell \{-\eta I \dot{w}''(x, t)\} \{-\delta w''(x, t)\} dx \\ & + \int_0^\ell \{-EI w''(x, t)\} \{-\delta w''(x, t)\} dx - \int_0^\ell q(x, t) \delta w(x, t) dx - C_0(t) \{-\delta w'(\ell, t)\} = 0 \end{aligned} \quad (5.65)$$

と定義することはできるが、これに対するスカラー汎関数 Π を定義することはできない¹⁸。しかし、式(5.65)そのものは後述の有限要素法の基礎式としては重要な式である。通常、近似解の誤差評価等を行う場合や安定問題を議論する場合を除いて、汎関数の存在は不要である。また、敢えてこの汎関数に物理的な意味や定義・名前を当てはめる必要もほとんど無い。ただ汎関数が定義できないモデルの場合、後述の有限要素近似解の精度(収束)には多少問題が残ることが多い [91]らしい。

なお、式(5.63)の汎関数そのものに直接近似解 $w \sim a\psi(x)$ を代入し、 a に関する微係数を零にすることによっても未知係数 a を決定できる。結果的には式(5.64)と全く同じ式になるが、このような汎関数そのものを用いた手法を元来 Rayleigh-Ritz 法あるいは単純に Ritz 法と呼んでいた。もちろん結果は式(5.8)を用いて $v = \psi$ と置いた Galerkin 法のものと同じになるが、有限要素法が学部でも教えられ始めた時期には、Galerkin 法という名称が古典的な意味で用いられてきたことやエネルギー原理という言葉からの直接的な関連もあってか、歴史的には Ritz 法という呼び名が有限要素法のような近似解法の説明にはよく使われてきた。しかもその頃の Galerkin 法はこの文書の古典的 Galerkin 形式を用いる手法として捉えられていたことから、Ritz 法より精度が悪い手法だとも言われていた。しかし、汎関数の定義できない問題等のことを考えると Galerkin 法の方が汎用性があり、昨今は Ritz 法という呼び名はほとんど聞かなくなっている・・・から、ここに敢えて書いておく必要も無いのだが。呵呵。

(2) エネルギー原理と変分

敢えて式(5.63)を物理的に考察すると、第1項は内部に蓄えられるひずみエネルギーであり、第2項は分布外力のポテンシャル、第3項は端集中モーメントのポテンシャルと呼んでもいい。ちなみに、この Π を全ポテンシャルエネルギーと呼ぶことがあり、上の変分原理は全ポテンシャルエネルギーの停留原理である。そして仮想仕事の原理はその停留条件そのものである。つまり、ある種の関数の集合の中で式(5.63)を停留させるような関数 $w(x)$ が求められたとき、その関数 $w(x)$ が元の境界値問題の解であることを、この変分原理は述べている。

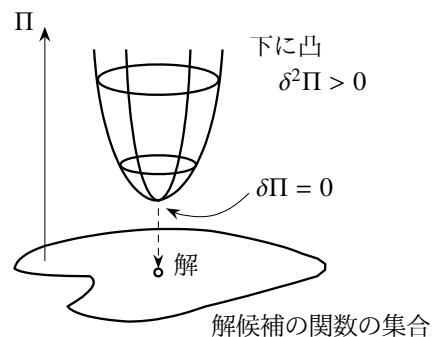


図 5.32 汎関数の性質の模式図

代数幾何学的には、ひずみエネルギーがいわゆる 2 次形式である

ことから、ある関数の集合の上に描かれた全ポテンシャルエネルギーのグラフが「曲面」を描き、その解のところでその曲面の接線が零になる原理が仮想仕事の原理であるという解釈もできる。上では停留と書いたが、も

¹⁸ 粘性が無い ($\eta = 0$) ときの Hamilton の原理や Lagrange 関数・Lagrange 方程式を著者は理解できない。時間軸方向の積分というのがピンと来ない。

しこの曲面が下に凸であれば最小原理になる。曲面が上に凸なのか下に凸なのかを調べるには、高校で習った関数のグラフの凹凸と2階の微係数の関係から推測できるように、もう一度微分（この場合は変分）してみてその符号の正負を調べればいいことが直感的には理解できるだろう。仮想仕事式を再度変分したものを第2変分と称するが、式(5.63)から

$$\delta^2\Pi = \int_0^\ell EI \{\delta w''(x)\}^2 dx > 0$$

のようになり、曲げ剛性 EI は正なのでこの積分は常に正になる。つまり、全ポテンシャルエネルギーは図 5.32 に模式的に描いたように下に凸の曲面になり、解がその全ポテンシャルエネルギーを最小にすることがわかる。このように、境界値問題はある制約条件の元で仮想仕事の原理と等価であり、それは全ポテンシャルエネルギーの最小原理と一致している。何度も書くが、こういった物理的解釈は必ずしも必要ではなく、この章でも積極的には用いるつもりは無いが、第6章では安定¹⁹規準の物理的考察に用いる。そういった意味からは、仮想仕事の原理を単なる数学的表現とは捉えない方が望ましいのかもしれない。

(3) 有限要素法の近似度

簡単のために図 5.5 に示した柱の例を用いて、有限要素法の近似の程度はどのように定量化できるのかについて概説しておく。近似解を $u_a(x)$ と記し厳密解を $u_e(x)$ とすると、まず厳密解はこの場合、局所的なつり合い式と境界条件式

$$p_0 = -EAu_e'' \quad (0 < x < \ell), \quad u_e(0) = 0, \quad EAu_e'(\ell) = P \quad (a)$$

を満足し、有限要素法の近似解は物体全体の平均的な仮想仕事の原理

$$\int_0^\ell EAu_a' \delta u_a' dx - \int_0^\ell p_0 \delta u_a dx - P \delta u_a(\ell) = 0 \quad (b)$$

を満足している。 $\delta u_a, \delta u_a'$ はそれぞれ、近似解の集合中の任意の二つの u_a および二つの u_a' の差と解釈すればいい。近似解と厳密解の間を知関係を知るために、式(b)第2項の p_0 に式(a)の第1式を代入して1回部分積分したあと、式(a)の境界条件を代入すると最終的に仮想仕事式は

$$\int_0^\ell EA(u_a' - u_e') \delta u_a' dx = 0 \quad \rightarrow \quad \int_0^\ell \{N_a(x) - N_e(x)\} \delta u_a' dx = 0 \quad (c)$$

となる。すなわち、軸力の近似解の誤差 $\{N_a(x) - N_e(x)\}$ に重み $\delta u_a'$ を乗じて全領域で加算したものが零になるように近似解を求める方法が有限要素法になっていることを示している。このことは、図 5.6 で軸力の有限要素解がちょうど最小2乗法的な答になっていることからわかるだろう。つまり、用いた近似関数が1次多項式であったため重みは定数になり、軸力の近似解は厳密解の平均値を与えている。有限要素法がいわゆる重みつき残差法として位置付けられる由縁もここにある。

梁の場合も同様の演算をすると

$$\int_0^\ell EI(w_a'' - w_e'') \delta w_a'' dx = 0 \quad \rightarrow \quad \int_0^\ell \{M_a(x) - M_e(x)\} \delta w_a'' dx = 0 \quad (d)$$

という近似になっていることがわかる。ここに w_a, w_e はそれぞれ $w(x)$ の近似解と厳密解である。この場合も、曲げモーメントの誤差 $\{M_a(x) - M_e(x)\}$ に重み $\delta w_a''$ を乗じて全体加算したものを零にするように近似解が求められていることを示している。図 5.15 の結果からもその実態が理解できると思う。

¹⁹ 実は式(3.82)で Poisson 比の範囲を求める際にも用いている。

一般に、 $0 < x < l$ で定義された二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の積分

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^l w(x) f^{(m)}(x) g^{(m)}(x) dx \quad (5.66)$$

を内積と称して定義することがある。上付きの (m) は m 階の微分を表し、 $w(x)$ は重み関数である。柱は $w(x) = EA$ で $m = 1$ ，梁は $w(x) = EI$ で $m = 2$ で²⁰ある。3次元の Euclid 幾何学のベクトルの内積が成分を用いて

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u}^T \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$$

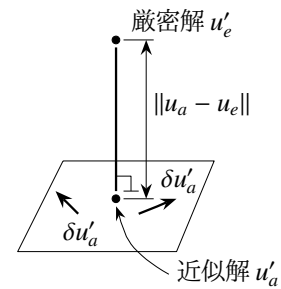


図 5.33 近似解の意味

で表されることを考え、これを無限次元に拡張した上で重みを乗じて一般化した重みつき内積として式 (5.66) を見ると、少しは理解し易いかも知れない。そして、この内積を零にする関数同士を直交する関数と呼ぶが、これも幾何学から借りた概念である。最も代表的な直交関数列としては Fourier 級数でよく用いられる三角関数列が挙げられる。この「内積」というキーワードを用いて式 (c) (d) を眺めると、『近似解から厳密解への「ベクトル $(EAu'_a - EAu'_e)$ 」と、近似解を含む「平面」内の任意の二つの「ベクトル」の「差のベクトル $(\delta u'_a)$ 」との内積が零』ということになる。さらに「直交」という概念を使うと、図 5.33 のように考えて『近似解を含む「平面」に厳密解から下ろした「垂線の足」が有限要素解である』ということになる。つまり、近似解を含む集合の中で上のように定義された内積で測ったときに、厳密解に一番近い関数が有限要素解になっている。

また、ベクトルの大きさを測るためのノルムが内積を用いて $\|\mathbf{u}\|^2 \equiv (\mathbf{u}, \mathbf{u})$ と定義されることに対応させて、関数のノルムも上式 (5.66) の内積を用いて

$$\|f\|^2 \equiv \langle f, f \rangle$$

と定義してもよさそうである。時折これはエネルギーノルムと呼ばれるが、その表現が前節のひずみエネルギー (の 2 倍) に一致しているからである。このように考えると、上の柱の場合の有限要素解の近似は

$$\langle f, g \rangle \equiv \int_0^l EA f'(x) g'(x) dx, \quad \|f\|^2 \equiv \int_0^l EA \{f'(x)\}^2 dx$$

で定義した内積とノルムを用いて、誤差を

$$\|u_a - u_e\| = C(\text{要素長})^n \quad (e)$$

で評価する近似解法であることが想像できる。つまり有限要素法とは、このような内積で定義されるノルムという「ものさし」で測ったときの、関数 $u_a(x)$ と $u_e(x)$ の「距離」をできるだけ小さくしようとする近似解法であり、厳密解との誤差が要素長を小さくするに従って小さくなる (希望としては $n \geq 2$) 近似解法だと考えていい。あるいは、この距離が近似誤差であることから、上式を一種の最小 2 乗法として捉えることもできるだろう。具体的には図 5.30 に示した弾性床の上の梁の例のように、ある 1 点の解に着目したとしても、変位の微係数で求めた曲げモーメントが要素長の n 乗 ($n \approx 2$) の速度で厳密解に収束している²¹ことがわかる。ただし、内積の定義は解きたい問題毎に異なることには注意する必要がある。

演習問題 5-11

- 24. 式 (5.63) で定義された Π は $w(x)$ が厳密解のときに最小になる。この最小値 Π_{MIN} を $w(x)$ で表せ。
- 25. 演習問題 5-3 の 7 番で求めた境界値問題の仮想仕事式を元に、それに対応する汎関数を求めよ。
- 26. 第 4 章の p.153 で解いた図 4.22 の、先端をバネ定数 k の線形バネで支持された片持ち梁の仮想仕事式をつり合い式と適切な境界条件から求め、それに対する汎関数が、梁の全ポテンシャルエネルギーにバネのひずみエネルギー $\frac{1}{2} k \{w(\ell)\}^2$ を加えたものであることを示せ。

²⁰ 変断面の一般的な場合には $w(x) \sim EA(x), EI(x)$ のように関数である。
²¹ 図は両対数 (この図は 2:1 の両対数であることに注意) だから、傾きが式 (e) の n に相当する。

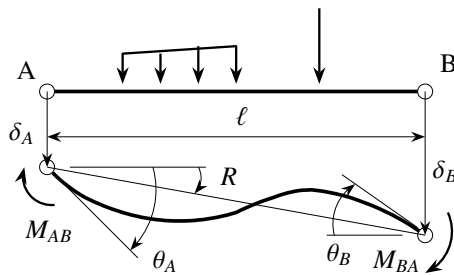


図 5.34 たわみ角法

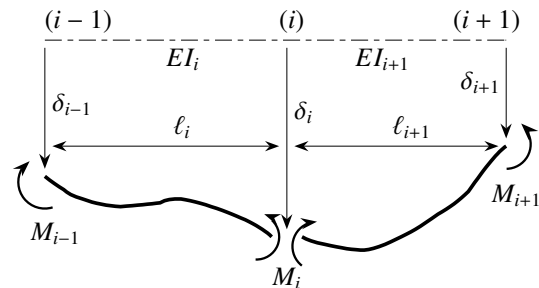


図 5.35 三連モーメントの定理

5.5 剛性方程式や仮想仕事の原理によるやや古めかしい手法

5.5.1 剛性方程式の一部分だけを使う解法

(1) たわみ角法

コンピュータが現在ほど容易には用いることが困難だった時代に多用されていた応用も含めて、剛性方程式や仮想仕事の原理等に関連するものをいくつか挙げておくが、この節の内容はいわゆるエネルギー原理・停留原理とは無関係であり、また現在の大学では教える必要が無い²²と考えられる内容である。もし支点沈下が既知なら剛性方程式の一部だけを用いて不静定モーメントくらいは計算できる。例えば図 5.34 のような記号を定義すると、剛性方程式 (5.24) の第 2, 4 行を並べ替えた²³

$$M_{AB} = \frac{EI}{\ell} (4\theta_A + 2\theta_B - 6R) + C_{AB}, \quad M_{BA} = \frac{EI}{\ell} (2\theta_A + 4\theta_B - 6R) + C_{BA}$$

の 2 式で連続梁が解ける。ここに、 $R \equiv (\delta_B - \delta_A)/\ell$, $C_{AB} \equiv q_2$, $C_{BA} \equiv q_4$ と定義した。 C_{AB} 等は等価節点外力つまり両端固定の梁に分布外力が作用したときの不静定モーメントである。この解法をたわみ角法と呼ぶ。

(2) 三連モーメントの定理

また図 5.35 のように相隣接する二つの要素に対する剛性方程式から第 2, 4 行を取り出して並べ替えた上で θ_{i-1} , θ_i , θ_{i+1} を消去して誘導される式は

$$\frac{\ell_i}{I_i} M_{i-1} + 2 \left(\frac{\ell_i}{I_i} + \frac{\ell_{i+1}}{I_{i+1}} \right) M_i + \frac{\ell_{i+1}}{I_{i+1}} M_{i+1} = 6E (R_i - R_{i+1}) - \left(\frac{B_i}{I_i} + \frac{A_{i+1}}{I_{i+1}} \right)$$

となり、三連モーメントの定理と呼ばれている。ここに A_i および B_i が分布外力項、 R_i は要素の剛体回転量で、それぞれ $A_i \equiv \ell_i (q_4^{(i)} - 2q_2^{(i)})$, $B_i \equiv \ell_i (2q_4^{(i)} - q_2^{(i)})$, $R_i \equiv \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{\ell_i}$ と定義される。これも連続梁や対称の門型骨組を解くのに用いられていた。しかし、非対称骨組や未知の支点沈下がある場合には、層方程式や節点方程式と称して、剛性方程式のうち用いていない第 1, 3 行の式と第 5.3.2 (1) 節で用いた連続条件式 (b) を併用して解かざるを得なくなる。それはもはや剛性方程式を直接剛性法で解くのと同じになる。

5.5.2 補仮想仕事の原理とその利用

(1) 補仮想仕事の原理

仮想仕事式はつり合いを満足している物体各点に仮想変位を与えた場合の原理であった。ここではその裏返し

²² ところでモーメント分配法を教えているところが今でもあるのだろうか。確かに不静定性と剛性の関係を体感できるかもしれないが。
²³ 弁護しておくが、有限要素法の方が優れていると言うつもりは全く無い。元の方程式をきちんと解いて変位法として定式化して得られたものがたわみ角法であり、物理である。

はなく、例えばハイブリッド有限要素法のように応力を未知関数として解く手法を併用する数値解析法でも時折用いられるので、ここに原理だけを示しておく。ただし、二つの許容場の使い方には厳密性を欠いている。また簡単のために梁を対象とする。

いま第4章で誘導した支配方程式と境界条件式で使っている記号を用い、長さ ℓ の梁のたわみ $w(x)$ は幾何学的境界条件を満足し、曲率 $\kappa(x)$ と

$$\kappa(x) = -w''(x) \quad (a)$$

という関係にあるものとする。これは第3.5.1(1)節で定義した運動学的許容場である。一方、内力曲げモーメント $\delta M(x)$ は分布外力 $\delta q(x)$ と

$$\delta M''(x) + \delta q(x) = 0 \quad (b)$$

のつり合い式を満足し、端外力 δS_i , δC_i に対する力学的境界条件も満足しているものとする。ここの δ はしばらくは無視していい。これも第3.5.1(1)節で定義した静力学的許容場である。そこで式(b)にたわみ $w(x)$ を乗じて領域積分したあと2回部分積分して境界条件を考慮し、たわみと曲率の関係式(a)を代入すると

$$0 = - \int_0^\ell (\delta M'' + \delta q) w \, dx = \int_0^\ell \kappa \delta M \, dx - \int_0^\ell w \delta q \, dx - [(-w') \delta C + w \delta S] \Big|_{x=0,\ell} \quad (c)$$

を得る。ただし、端外力の下添え字は省略した。この関係式は3次元連続体の式(3.129)と同じく補仮想仕事の原理と呼ばれる。ここで許容場の厳密な定義を緩和し、たわみ $w(x)$ が構成式(4.13b)の

$$M(x) = EI \kappa = -EI w''(x) \quad (d)$$

を満足しているものとする。この式(d)を式(c)に代入すると

$$\delta \Pi^*[M, q, S, C] \equiv \int_0^\ell \frac{M}{EI} \delta M \, dx - \int_0^\ell w \delta q \, dx - [w \delta S + (-w') \delta C] \Big|_{x=0,\ell} = 0 \quad (5.67)$$

のように、構成則を一部含んだ補仮想仕事式 $\delta \Pi^*[M, q, S, C]$ が定義できる。

さらに許容場の制限を緩和し、二つの許容場がどちらも同じ現象の解(ここが厳密性に欠ける部分)だとすると、仮想仕事式から全ポテンシャルエネルギーを誘導したのと同じ手順を踏むことによって、上式から

$$\Pi^*[M, q, S, C] \equiv \int_0^\ell \frac{M^2}{2EI} \, dx - \int_0^\ell w q \, dx - [w S + (-w') C] \Big|_{x=0,\ell} \quad (5.68)$$

というスカラー量を定義できることがわかる。これを全補ポテンシャルエネルギーと呼ぶ。右辺第1項

$$U^* \equiv \int_0^\ell \frac{M^2}{2EI} \, dx \quad (5.69)$$

は補ひずみエネルギーと呼ばれる。もちろんこの式に曲げモーメントと曲率の関係等を代入して整理すると、式(5.63)の全ポテンシャルエネルギーと形式的には同じになることは明らかであるが、それを誘導する基礎式が全く異っており、厳密には先に述べた二つの許容場を区別しなければならない。厳密な取り扱いについては文献[158]等を参照のこと。少しいい加減だが簡単に書けば、全補ポテンシャルエネルギーが力を変動させることを前提とした汎関数であるのに対し、全ポテンシャルエネルギーは前節までに用いてきたように、あるつり合い状態から変位を変動させることを前提とした変位に関する汎関数である。

(2) Castigliano の第2定理

式(5.67)の補仮想仕事そのものは停留原理でも何でも無く、同じ解同士²⁴の内積と考えるだけで十分だ。それを形式的に利用した解法の例を二つだけ示しておこう。まずこの節では、ある点 $x = a$ に集中外力 $q(x) =$

²⁴ 本当は別々の解(許容場)なのだが、以下の二つの定理・原理ではそこを曖昧なまま都合のいいように使っている。

$Q\delta[x; a]$ が作用してつり合っている系を考える。デルタ関数の δ と変分の δ を区別するために前者には鉤括弧を使って $\delta[x; a]$ とした。この同じ系の集中外力 Q のみを変動させた $\delta q = \delta Q \delta[x; a]$ に対する静力学的許容場を用いて、上の式 (5.67) の補仮想仕事の原理を書くと

$$0 = \int_0^{\ell} \frac{M(Q) \delta M(\delta Q)}{EI} dx - \int_0^{\ell} w(x) \delta Q \delta[x; a] dx$$

となるから、デルタ関数の定義式 (4.57) を用いると

$$w(a) \delta Q = \int_0^{\ell} \frac{M(Q)}{EI} \delta M(\delta Q) dx$$

と書くことができる。ここで

$$\frac{\delta M(\delta Q)}{\delta Q} = \frac{dM(Q)}{dQ}$$

と考えてもいい²⁵から、上式は形式的に

$$w(a) = \int_0^{\ell} \frac{M(Q)}{EI} \frac{dM(Q)}{dQ} dx = \frac{\partial}{\partial Q} \left\{ \int_0^{\ell} \frac{M^2(Q)}{2EI} dx \right\} = \frac{\partial U^*(Q)}{\partial Q} \quad (5.70)$$

という表現もできる。ここに $U^*(Q)$ は式 (5.69) の補ひずみエネルギーである。この式 (5.70) で表される関係を **Castigliano の第2定理**と呼ぶ²⁶ことがある。このように、ここの微分演算は静力学的許容場の観察点 $x = a$ の集中外力を単位荷重にするために行っているもので、停留原理とは関係が無いことは理解できたと思う。

あるいは、 $M(Q)$ は Q に関しては1次の斉次式であるから

$$\frac{\delta M(\delta Q)}{\delta Q} = \frac{dM(Q)}{dQ} = M(1) \Rightarrow M_u(1)$$

と書いてもよく、これは $x = a$ 点に単位荷重を作用させたときの同じ系のモーメント分布である。したがって、式 (5.70) にこれを代入すれば、それは見かけ上

$$w(a) = \int_0^{\ell} \frac{M(Q) M_u(1)}{EI} dx$$

とも書くことができる。これは単位荷重法の基礎式 (4.60) と形式的には一致している。ただし単位荷重法の使用例でも明らかにしたように、異なる系同士の仮想仕事式として誘導された単位荷重法の方が M と M_u のそれぞれの問題の設定は違っていてもいいから、下の分布外力 $q(x)$ を含む問題で持つかもしれない誤解は生じないし、そもそも汎用性がある。

さて対象としている系には分布外力 $q(x)$ が作用しているだけで集中外力が作用していない場合にも、ある架空の集中外力 $\delta Q \delta[x; a]$ を作用させた場合の静力学的許容場との積としての式 (5.67) が

$$0 = \int_0^{\ell} \frac{M(q, \dots)}{EI} \delta M(\delta Q) dx - \int_0^{\ell} w(x) \delta Q \delta[x; a] dx$$

となり、ここで

$$M(q, \dots) = M(q, \dots, Q) \Big|_{Q \rightarrow 0}$$

と置くことによって

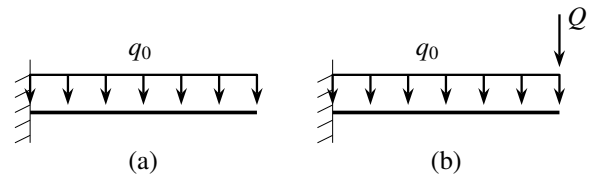
$$w(a) = \frac{\partial}{\partial Q} \left\{ \int_0^{\ell} \frac{M^2(q, \dots, Q)}{2EI} dx \right\} \Big|_{Q \rightarrow 0}$$

²⁵ $M(Q)$ と $\delta M(\delta Q)$ とは元々同じとは限らないから、ここが本当はよくないのだ。式 (5.68) の全補ポテンシャルエネルギーの誘導で「ここが厳密性に欠ける部分」と書いたのは本来は不要だが、それを Castigliano の定理に使う部分に厳密性が欠けているわけである。

²⁶ 文献 [170] によれば、こ「の定理を(補)ポテンシャル停留原理から導く論法は誤りである。ないしは、かなり手の込んだ修正を要する。誠に遺憾である。」とあるので、ここの説明もイカン可能性が高い。一応「ポテンシャルの停留」という言葉は使わなかったが。

として点 $x = a$ のたわみを計算することができる。ただし Q で微分したあとに $Q \rightarrow 0$ を行うことには注意すること。ここで「ん!？」と思った読者はいないだろうか。というのも、式 (5.68) にはあった $q(x)$ の項は式 (5.70) にはもう無くなっているからだ。実は前節最初に設定したたわみ $w(x)$ と曲げモーメント $M(x)$ は、具体的な問題の設定をしないままの運動学的許容場とそれに対応した曲げモーメントだった。つまり、この運動学的許容場の $M(x)$ の方に既に $q(x)$ の影響は含まれていたのである。しかしそれを式 (5.69) の補ひずみエネルギーを用いて、式 (5.70) であたかも最小原理のように扱っているところに誤解が生じる原因があるのだ。 $M(Q)$ と $\delta M(\delta Q)$ が元々同じものではないにもかかわらず補ひずみエネルギーにしてしまうところに問題がある。やはり筋があまりよくない原理なのかもしれない。

例えば図 5.36 の (a) のような等分布外力が作用した片持ち梁先端のたわみを求めたい場合には、同じ図 (b) のような状態を考えればいい。このモーメント分布は



$$M(x) = q_0/2 (\ell - x)^2 - Q(\ell - x)$$

図 5.36 Castigliano の第 2 定理の例

なので

$$U^*(Q) = \int_0^\ell \frac{1}{2EI} \left\{ -\frac{q_0}{2} (\ell - x)^2 - Q(\ell - x) \right\}^2 dx$$

となり、先端のたわみは上記の定理より

$$w(\ell) = \left. \frac{\partial U^*(Q)}{\partial Q} \right|_{Q \rightarrow 0} = \int_0^\ell \frac{-1}{EI} \left\{ -\frac{q_0}{2} (\ell - x)^2 - Q(\ell - x) \right\} (\ell - x) dx \Big|_{Q \rightarrow 0} = \int_0^\ell \frac{q_0}{2EI} (\ell - x)^3 dx = \frac{q_0 \ell^4}{8EI}$$

のように厳密解 (4.43) が求められるが、この最後の式の二つ目の等号の次の式以降は単位荷重法の式そのものだ。やはり単位荷重法に比べると無駄が多いなあ。

(3) 最小仕事の原理

一方、式 (5.67) の仮想的な静力学的許容場として、外力を一定に保ったまま内力 X だけを変動させたものを用いるとすると、補仮想仕事の原理には外力補仮想仕事項がなくなり

$$0 = \int_0^\ell \frac{M(q, \dots, X)}{EI} \delta M(\delta X) dx$$

となる。したがって前節と同様の考え方をすると、この原理は

$$\frac{\partial U^*(X)}{\partial X} = 0, \quad U^*(X) \equiv \int_0^\ell \frac{M^2(q, \dots, X)}{2EI} dx \tag{5.71a, b}$$

とも書くことができる。すなわち、補ひずみエネルギーを「内力」で偏微分したものが零となっていることから、最小仕事の原理と呼ばれている。この原理も前節の定理との混同や同一視がいくつかの文献で見られる。また「最小」とあるが、上述の Castigliano の定理と同様、この微分演算も停留原理とは無関係だ。少なくとも著者はこの「最小」原理そのものを理解できていない。

この原理を用いて図 5.37 の例を解いてみよう。これは第 4.8.3 (1) 節で単位荷重法を用いて解いた例であるが、曲げ剛性が EI で伸び剛性が EA の片持ち梁を、伸び剛性が $E_c A_c$ のケーブル（トラス）で吊った場合に、梁先端のたわみを仲介にしてケーブル張力を計算してみよう。この系の内力の一つであるケーブル張力を X として、二つの部材を切り離して考えると、図の右側に示したような载荷状態になる。したがって

$$U^*(\text{ケーブル}) = \int_0^{2\ell/\sqrt{3}} \frac{X^2}{2E_c A_c} dx = \frac{2\ell/\sqrt{3}}{2E_c A_c} X^2,$$

$$U^*(\text{梁の曲げ}) = \int_0^\ell \frac{M^2(P, X)}{2EI} dx, \quad U^*(\text{梁の圧縮}) = \int_0^\ell \frac{N^2(X)}{2EA} dx$$

となる。ここに

$$M(P, X) = \left(\frac{X}{2} - P\right)x, \quad N(X) = -\frac{\sqrt{3}X}{2}$$

であるから、上式に代入してその総和を式 (5.71) の原理に代入すると、張力が

$$X = P \left\{ \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{3}EI}{E_c A_c \ell^2} + \frac{9I}{2A\ell^2} \right\}^{-1}$$

と求められる。分母の第2, 3項にある比を

$$\lambda' \equiv \frac{\ell}{\sqrt{\frac{EI}{E_c A_c}}}, \quad \lambda \equiv \frac{\ell}{\sqrt{\frac{I}{A}}} \tag{5.72a, b}$$

で定義した細長比で表すことにすると、上の結論は

$$X = P \left\{ \frac{1}{2} + \frac{4\sqrt{3}}{\lambda'^2} + \frac{9}{2\lambda^2} \right\}^{-1}$$

と書くことができる。梁が非常に細長い場合には λ も λ' も大きくなるため分母の第2, 3項は第1項に比べて無視でき、ケーブル張力は $2P$ になる。あるいは、梁の曲げの剛性に比較してケーブルの伸び縮み剛性だけが大きく、 λ' に関する第2項だけが無視できる場合には文献 [108] の答と一致する。

この例をつり合い式と変形の整合性だけで解こうとすると、かなり面倒な演算が必要になるが、微小変位理論の範囲内で上の解が正しいことを示すことはできる。蛇足ながら前節で概説した Castigliano の第2定理との関連を敢えて述べると、図 5.37 右側の分割した系を別々なものと考え、張力 X を外力

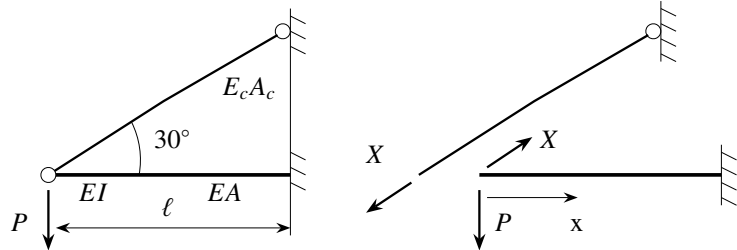


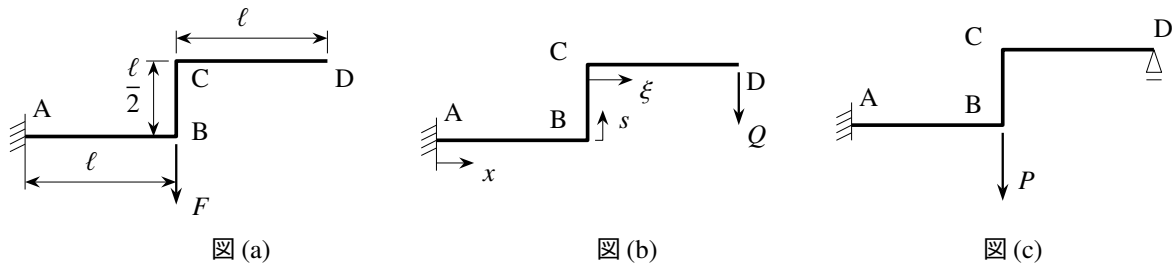
図 5.37 最小仕事の原理の例

とみなし、それぞれの系に Castigliano の第2定理を適用して求められる張力方向の変位同士を等置したものが、上の最小仕事の原理の使い方の一つだと考えてもいい。しかしいずれにしても、補ひずみエネルギーを微分して補仮想仕事式にしているのだから、わざわざエネルギーを算定するのは冗長だ（エネルギー原理だと勘違いさせてしまう）し、現在の大学で教える必要は無い方法だと想像している。

演習問題 5-12

27. 最後に、学生さんが Castigliano の第2定理を使いたがる問題を出しておこう。図 (a) のような、3本の直線部材からなる、左端が埋め込まれた平面骨組を考える。曲げ剛性はすべて同じ定数の EI であり、伸び剛性は曲げ剛性に比べてかなり大きいので（つまり細長比もかなり大きいので）軸の伸び縮みは無視できるものとする。最終的には、解析的に解いた答と有限要素法で求めた答とを比べてみよ。

- (1) 図 (a) のように、この骨組の点 B に荷重 F を載せたときの点 D のたわみを求めよ。なお、点 B のたわみとたわみ角はそれぞれ $\frac{F\ell^3}{3EI}$ と $\frac{F\ell^2}{2EI}$ である。
- (2) この同じ骨組に、今度は図 (b) のように点 D のみに荷重 Q を載せた。
 - a) 点 B のたわみを求めよ。
 - b) モーメント図を描き、図に示した座標 x, s, ξ を用いて、各部材のモーメント分布を式で表せ。



c) 点Dのたわみを求めよ。

(3) 次に、この同じ骨組の点Dを図(c)のように支えた上で点Bのみに荷重Pを載せた。

a) 点Dの支点反力の向きと大きさを求めよ。

b) 点Bのたわみを求めよ。

c) 例えば単位荷重法を用いて、点Dの水平変位の向きと大きさを求めよ。

構造力学って積分の練習科目か？ 上の問題の答がこの下に書いてあるが、それを見ないでまず自分で解いて欲しい。そして何回積分したのかを確認した上で、以下を読んで欲しい。

(1) 静定系の重ね合わせで、点Bのたわみとたわみ角を使えば $w_D = \frac{F\ell^3}{3EI} + \frac{F\ell^2}{2EI} \ell = \frac{5F\ell^3}{6EI}$ となる。

(2) 例えば単位荷重法 (Castigliano の第2定理と同じ) が簡単だろう。

a) 問(1)の設定と比較して、相反定理から $w_B = \frac{5Q\ell^3}{6EI}$ となる。

b) 図は省略し、式は $M_{AB} = Q(x - 2\ell)$, $M_{BC} = -\ell Q$, $M_{CD} = (\xi - \ell)Q$ のようになる。

c) 単位荷重法で次のようになる。

$$\begin{aligned} w_D &= \frac{Q}{EI} \left[\int_0^\ell (x - 2\ell)^2 dx + \int_0^{\ell/2} (-\ell)^2 ds + \int_0^\ell (\xi - \ell)^2 d\xi \right] \\ &= \frac{Q}{EI} \left[\int_0^\ell (x^2 - 4\ell x + 4\ell^2) dx + \frac{\ell^3}{2} + \int_0^\ell (\xi^2 - 2\ell\xi + \ell^2) d\xi \right] \\ &= \frac{Q}{EI} \left[\frac{\ell^3}{3} - 2\ell^3 + 4\ell^3 + \frac{\ell^3}{2} + \frac{\ell^3}{3} - \ell^3 + \ell^3 \right] = \frac{19Q\ell^3}{6EI} \end{aligned}$$

となる。

(3) a) と b) は重ね合わせで簡単に解ける。

a) 荷重Pによる点Dのたわみは、問(1)の答から $w_D^P = \frac{5P\ell^3}{6EI}$ であり、支点反力Rによるたわみは問

(2) c) から $w_D^R = -\frac{19R\ell^3}{6EI}$ となる。反力は上向き外力なのでマイナス記号がある。この和が零になることから

$$w_D = w_D^P + w_D^R = \frac{5P\ell^3}{6EI} - \frac{19R\ell^3}{6EI} = 0 \quad \rightarrow \quad R = \frac{5P}{19}$$

となる。

b) Pによるたわみは片持ち梁の答から $w_B^P = \frac{P\ell^3}{3EI}$ で、次に、Rによるたわみは問(2) a) より $w_B^R = -\frac{5R\ell^3}{6EI}$ となり、この和から

$$w_B = w_B^P + w_B^R = \frac{P\ell^3}{3EI} - \frac{5R\ell^3}{6EI} = \frac{P\ell^3}{3EI} - \frac{25P\ell^3}{6 \times 19EI} = \frac{P\ell^3(38 - 25)}{6 \times 19EI} = \frac{13P\ell^3}{114EI}$$

となる。

- c) やはり単位荷重法が簡単かもしれない。ただし、第4.4.2節で示した式(4.61)からわかるように、単位荷重系の方は右端が支えられていない静定系でやってしまえばいい。まず、問題の曲げモーメント分布は問(2)c)と片持ち梁の分布を重ね合わせて

$$M_{AB} = (x - \ell)P - R(x - 2\ell) = \frac{P}{19}(14x - 9\ell),$$

$$M_{BC} = \ell R = \frac{P}{19}5\ell, \quad M_{CD} = (\xi - \ell)R = \frac{P}{19}(5\ell - 5\xi)$$

となる。一方、右端が支えられていない静定系の点Dに右向きに単位荷重を載せたときの曲げモーメント分布は $\bar{M}_{AB} = -\frac{\ell}{2}$, $\bar{M}_{BC} = -\frac{\ell}{2} + s$, $\bar{M}_{CD} = 0$ となることから、単位荷重法を用いて

$$u = \frac{P}{19EI} \int_0^\ell \left(-7\ell x + \frac{9}{2}\ell^2\right) dx + \frac{P}{19EI} \int_0^{\ell/2} \left(-\frac{5}{2}\ell^2 + 5\ell s\right) ds$$

$$= \frac{P}{19EI} \left(\frac{-7\ell^3}{2} + \frac{9\ell^3}{2} - \frac{5\ell^3}{4} + \frac{5\ell^3}{8}\right) = \frac{3P\ell^3}{8 \times 19EI} = \frac{3P\ell^3}{152EI}$$

となる。

上の27番の問題はある試験で使ったものであるがまた愚痴を書きおきたい。というのもここで解説したような方法を主に用いた人は皆無だったからだ。まず1行の足し算で済む問(1)からCastiglianoの第2定理をほとんどの人が使う。予想はしていたが、問(2)a)や(3)a), b)でも積分ばかりだったし、せっかくの積分も計算間違いが少なくなかった。特に問(3)のa), b)で、積分せずに前問の答を利用したのは一人か二人だけだったような気がする。またb)で、補ひずみエネルギーを微分する前にRにPを代入してしまうという致命的な間違いをした人が数名いた。力学的な考え方や基本的な数学の理屈が理解されていないようだ。線形系の重ね合わせは、どこかしら力のつり合いや変形の整合性といった物理の香りがする数学である。一方Castiglianoの第2定理を用いた積分には物理の匂いが全くしない。こういったものが構造力学だと思われてしまうのはちょっとまずいのではないか。橋を造りたいと思っている人にとっては全然面白くないんじゃないか。どこが物理でどこが道具の数学か[129]ということを区別して教えるのはなかなか難しいが、なんでもかんでも積分というの問題がある。第A.7節にその例を示しておいた。

もちろん自分のことは棚に上げて書いているが、曲げ理論も習っていないうちから断面の性質(何だそれ?)と称して断面2次モーメントを計算したり、意味も知らずに中立軸を求めたりしたのが構造力学ではなかっただろうか。仮想仕事の原理をトラスで教えてもらったような気がするが、実は単位荷重法とかCastiglianoの定理だったかもしれない。大学入試のための高校の物理学のように、どういうときにはどの公式を使うかという記憶科目だったのかもしれない。本当はどうやって教えるのが一番いいのだろうか。

Mohrの定理は力学か? ついでにもう一つ書いておこう。上の問題に対する何人かの回答では悪名高いMohrの定理が使われていた。これは物理でも数学でもなく、単に支配方程式が同じ形になっていることを述べているに過ぎない定理である。とは、文献[152]著者の田村武先生がなにかの講演でおっしゃっていたことでもあり、その通りである。くだらない(敢えて書いておこう)定理である。静定構造であればこの表5.4の左半分($\bigcirc \equiv M, \Delta \equiv q$)でモーメント分布を求めることができる。一方この表の右半分($\bigcirc \equiv w, \Delta \equiv \frac{M}{EI}$)で、 $w \rightarrow M, \frac{M}{EI} \rightarrow q$ の置き換えをした上で、境界条件を共役梁の欄に示したように置き換えさえすれば(たわみ角のマイナス記号は気にしないでいい)、それは左半分の中の対応する支配方程式に一致する。つまり、仮の境界条件に置き換えた共役梁に、求めてあった本当のモーメント分布 $\frac{M}{EI}$ を仮の分布荷重として載せたときの仮のモーメント分布を求めれば、それが本当のたわみであるというものである。この解法は弾性荷重法と呼ばれているが、どこにも楽しいところや美しいところが無い。

表 5.4 弾性荷重法の対応表

方程式 ($\circ'' = -\Delta$)		つり合い式 (4.19)	構成式 (4.13b)	共役梁 (仮の境界条件) ↓
		$M'' = -q$	$w'' = -\frac{M}{EI}$	
境界条件式 (4.25)	ヒンジ	[E1] $M = 0, M' = ?$	[C1] $w = 0, -w' = ?$	ヒンジ (\because [C1] = [E1])
	固定	[E2] $M = ?, M' = ?$	[C2] $w = 0, -w' = 0$	自由 (\because [C2] = [E4])
	スライダ	[E3] $M = ?, M' = 0$	[C3] $w = ?, -w' = 0$	スライダ (\because [C3] = [E3])
	自由	[E4] $M = 0, M' = 0$	[C4] $w = ?, -w' = ?$	固定 (\because [C4] = [E2])
	中間支持	[E5] $M = \text{連続}, M' = ?$	[C5] $w = 0, -w' = ?$	中間ヒンジ (\because [C5] = [E6])
	中間ヒンジ	[E6] $M = 0, M' = ?$	[C6] $w = \text{連続}, -w' = ?$	中間支持 (\because [C6] = [E5])
	中間スライダ	[E7] $M = ?, M' = 0$	[C7] $w = ?, -w' = 0$	中間スライダ (\because [C7] = [E7])

ただし、たわみを求めるために力のつり合いを利用していることから、解くときの頭の中には物理があるのかもしれない。そういう点では Castigliano の定理よりはましかもしれないが、モーメント曲率関係は幾何関係なのでそれを力学的に解くことには意味が無い。やはり、モーメントを求めた上で微分方程式をきちんと解いた方がいい。実は上の試験で Mohr の定理を使った人の回答の半分は結局、分布荷重のつり合いの計算、つまり積分で間違ってしまった。やっぱり構造力学は積分の練習科目なのかもしれない。呵呵。

以上を簡単に見直すと、高性能の計算機が普及して容易に用いることができる現在、この節で説明した「たわみ角法」や「3 連モーメントの定理」「Castigliano の定理」「最小仕事の原理」「Mohr の定理」を大学で教える必要は無いように感じる。重要なのは「相反定理」であり「単位荷重法」であり、結局は「仮想仕事の原理」と「補仮想仕事の原理」が重要だろう。これは、論理的な学習や理論的な力学アプローチという観点からだけではなく、目の前の構造力学の問題を解く（大学院入試問題を解く？ 呵呵）場面でもほぼ同様ではないだろうか。仮想仕事の原理の段階で留めて得られる「単位荷重法」の方が、エネルギーを算定しなくてもいい（エネルギーを算出してそれを微分するという冗長性が無い）点、また随伴系でなくても定式化だけ是可以（使えるか否かは問わない）点で、「最小仕事の原理」や「Castigliano の第 2 定理」よりも汎用性もあり理論的にも有用で美しく、また実用的でもある。ただ残念なことに、この「単位荷重法」や「仮想仕事の原理」には物理的な意味はほとんど無いと考えるべきなところが、初学者には抵抗を感じさせてしまっているのかもしれない。しかし、要は慣れだと思し、仮想仕事（内積）はいろいろな理論的・応用的場面で使える非常に便利な道具なのである。

5.6 平面ひずみ問題の有限要素定式化

5.6.1 仮想仕事式と応力ひずみ関係

(1) 3次元問題の仮想仕事式

柱と梁の有限要素は少し特殊だったので、ここでは第 3 章の等方弾性連続体力学に有限要素法を適用し、連続体の有限要素の基礎式を誘導しよう。ただし例としては第 3.6.3 (1) 節の平面ひずみ問題を対象とし、文献 [19] にある基礎式を列挙するだけである。適切に支持された物体領域 V に体積力 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ が作用し、表面 S の一部に表面力 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ が作用してつり合っている 3次元連続体の場合、その仮想仕事式 (3.128) は、境界項を形式的に合

体させた上で運動学的許容場を仮想的な変位 $\delta \mathbf{u}(\mathbf{x})$ とひずみ $\delta \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x})$ で置き換えると

$$\int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V \sum_{i=1}^3 X_i \delta u_i dV - \int_S \sum_{i=1}^3 F_i \delta \bar{u}_i dS = 0 \quad (5.73)$$

と表すことができる。ただし、この式の \mathbf{F} は境界で与えた外力だけではなく変位を与えた表面の反力も表しているし、また上棒付きの $\delta \bar{\mathbf{u}}$ も必ずしも表面で与えられた変位というわけではなく、境界における値であることを明示するために便宜上用いたものである。

(2) 平面ひずみ問題の応力ひずみ関係

平面ひずみ問題と平面応力問題は同じ形式の応力ひずみ関係式 (3.191) で表現できるが、ここでは一例として平面ひずみ問題の方を対象とする。したがって応力ひずみ関係は式 (3.176) で表され、その逆関係は

$$\sigma_{xx} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{xx} + \lambda \epsilon_{yy}, \quad \sigma_{yy} = \lambda \epsilon_{xx} + (\lambda + 2\mu) \epsilon_{yy}, \quad \sigma_{xy} = 2\mu \epsilon_{xy}$$

と表現できるが、式 (3.47) (3.48) を考慮して、Lamé 定数の代わりに Young 率と Poisson 比を用いると

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ (1-\nu) \epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy} \right\}, \quad (5.74a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left\{ \nu \epsilon_{xx} + (1-\nu) \epsilon_{yy} \right\}, \quad \sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} 2 \epsilon_{xy} \quad (5.74b, c)$$

とも表される。

5.6.2 定ひずみ三角形要素

(1) 変位関数

平面問題は x - y 面内の問題だけで閉じていて、 z 方向の成分はその結果を用いて算定できるので、応力ひずみ関係を除けば見かけ上 2 次元問題と同じである。したがって平面問題の 1 有限要素の仮想仕事式も

$$\int_V \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sigma_{ji} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V \sum_{i=1}^2 X_i \delta u_i dV - \int_S \sum_{i=1}^2 F_i \delta \bar{u}_i dS = 0 \quad (5.75)$$

のように、式 (5.73) の総和の範囲を 2 までに変更するだけでいい。まず、いくつかの行列を

$$\left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\} \equiv [\sigma_{xx} \quad \sigma_{yy} \quad \sigma_{xy}]^T, \quad \left\{ \boldsymbol{\epsilon} \right\} \equiv [\epsilon_{xx} \quad \epsilon_{yy} \quad 2\epsilon_{xy}]^T, \quad (5.76a, b)$$

$$\left\{ \mathbf{u} \right\} \equiv [u_x \quad u_y]^T, \quad \left\{ \mathbf{X} \right\} \equiv [X_x \quad X_y]^T, \quad \left\{ \mathbf{F} \right\} \equiv [F_x \quad F_y]^T \quad (5.76c, d, e)$$

と定義しておき、仮想仕事式 (5.75) に代入するとそれは

$$\int_V \delta \left\{ \boldsymbol{\epsilon} \right\}^T \left\{ \boldsymbol{\sigma} \right\} dV - \int_V \delta \left\{ \mathbf{u} \right\}^T \left\{ \mathbf{X} \right\} dV - \int_S \delta \left\{ \mathbf{u} \right\}^T \left\{ \mathbf{F} \right\} dS = 0 \quad (5.77)$$

と表すことができる。

この式 (5.77) を見る限り、第 1 項の最も重要な内力仮想仕事項には変位の 1 階の微係数しか現れない。したがって、最も低次な有限要素は x, y の 1 次多項式以下でいいから

$$\left\{ \mathbf{u} \right\} = \begin{pmatrix} 1 & x & y & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x & y \end{pmatrix} \left\{ \boldsymbol{\alpha} \right\}, \quad \left\{ \boldsymbol{\alpha} \right\} \equiv [\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \alpha_5 \quad \alpha_6]^T$$

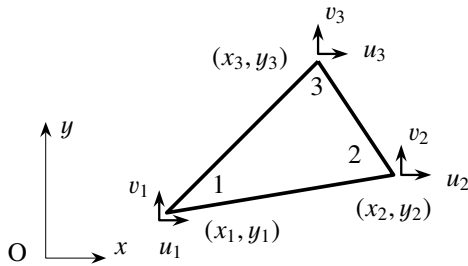


図 5.38 定ひずみ三角形要素

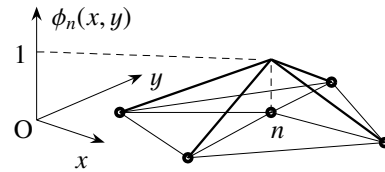


図 5.39 定ひずみ三角形要素の区分的多項式

と置けばいい。この変位関数の未知係数 α_i は 6 個だから、例えば図 5.38 に示したような三角形要素を考え、各頂点を要素の節点としてその x, y 方向の変位成分を有限要素の自由度とすれば、全部で 6 個の未知係数をこの六つの変位成分で置き換えることができる。このようにすると上式から

$$\{u\} = (N) \{q\} \tag{5.78}$$

と置ける。ここに $\{q\}$ は節点変位成分であり

$$\{q\} \equiv [u_1 \ v_1 \ u_2 \ v_2 \ u_3 \ v_3]^T, \quad (N) \equiv \begin{pmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{pmatrix} \tag{5.79a, b}$$

と定義し、さらに

$$N_i \equiv N_i(x, y) = (2A_{jk} + b_i x + a_i y)/2A, \tag{5.80a}$$

$$2A_{jk} \equiv x_j y_k - x_k y_j, \quad b_i \equiv y_j - y_k, \quad a_i \equiv x_k - x_j, \tag{5.80b, c, d}$$

$$A \equiv (\text{三角形の面積}) = (a_2 b_1 - a_1 b_2)/2 = (a_3 b_2 - a_2 b_3)/2 = (a_1 b_3 - a_3 b_1)/2 \tag{5.80e}$$

と定義した。ただし上式中の (ijk) は (123) の偶置換である。また、三角形の面積を正の値として得るためには、図 5.38 に示したように節点番号を反時計回りに $(1,2,3)$ の順に設定する必要がある。

式 (5.78) で近似した変位関数 $\{u\}$ は線形なので要素の辺に沿っても変位は線形に変化する。また $\{q\}$ に節点の変位成分を用いているから、相隣接する要素間の辺上でも変位そのものの連続性が保証され、二つの要素が重なったり離れたりしない。ただし変位の勾配 (ひずみ) は要素内で一定になり、要素間では連続しない。このことから「定ひずみ三角形要素」と呼ばれている。変位関数 N_1 等を図 5.4 で示した区分的多項式と同じように、節点 n を囲む四つの三角形要素上で定義された区分的多項式 $\phi_n(x, y)$ として示したのが図 5.39 である。

(2) 剛性方程式

さて、式 (5.74) の応力ひずみ関係は

$$\{\sigma\} = (C) \{\epsilon\} \tag{5.81}$$

と表現できる。ここに

$$(C) \equiv \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\nu)/2 \end{pmatrix} \tag{5.82}$$

と定義した。また、ひずみ成分は式 (3.6) のひずみの定義から

$$\{\epsilon\} = (D) \{u\} \tag{5.83}$$

表 5.5 平面ひずみ問題に対する要素剛性行列

$\bar{k}_{11} = \bar{\alpha} b_1^2 + \bar{\beta} a_1^2$	$\bar{k}_{12} = (\nu + \bar{\beta}) a_1 b_1$	$\bar{k}_{13} = \bar{\alpha} b_1 b_2 + \bar{\beta} a_1 a_2$
$\bar{k}_{14} = \nu a_2 b_1 + \bar{\beta} a_1 b_2$	$\bar{k}_{15} = \bar{\alpha} b_1 b_3 + \bar{\beta} a_1 a_3$	$\bar{k}_{16} = \nu a_3 b_1 + \bar{\beta} a_1 b_3$
$\bar{k}_{22} = \bar{\alpha} a_1^2 + \bar{\beta} b_1^2$	$\bar{k}_{23} = \nu a_1 b_2 + \bar{\beta} a_2 b_1$	$\bar{k}_{24} = \bar{\alpha} a_1 a_2 + \bar{\beta} b_1 b_2$
$\bar{k}_{25} = \nu a_1 b_3 + \bar{\beta} a_3 b_1$	$\bar{k}_{26} = \bar{\alpha} a_1 a_3 + \bar{\beta} b_1 b_3$	$\bar{k}_{33} = \bar{\alpha} b_2^2 + \bar{\beta} a_2^2$
$\bar{k}_{34} = (\nu + \bar{\beta}) a_2 b_2$	$\bar{k}_{35} = \bar{\alpha} b_2 b_3 + \bar{\beta} a_2 a_3$	$\bar{k}_{36} = \nu a_3 b_2 + \bar{\beta} a_2 b_3$
$\bar{k}_{44} = \bar{\alpha} a_2^2 + \bar{\beta} b_2^2$	$\bar{k}_{45} = \nu a_2 b_3 + \bar{\beta} a_3 b_2$	$\bar{k}_{46} = \bar{\alpha} a_2 a_3 + \bar{\beta} b_2 b_3$
$\bar{k}_{55} = \bar{\alpha} b_3^2 + \bar{\beta} a_3^2$	$\bar{k}_{56} = (\nu + \bar{\beta}) a_3 b_3$	$\bar{k}_{66} = \bar{\alpha} a_3^2 + \bar{\beta} b_3^2$
$\bar{\alpha} \equiv 1 - \nu$	$\bar{\beta} \equiv (1 - 2\nu)/2$	

と書くことができる。ここに

$$(D) \equiv \begin{pmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{pmatrix} \quad (5.84)$$

と定義した。

式(5.81) (5.83) を仮想仕事式(5.75) に代入し、式(5.78) の変位関数を代入して整理すると、最終的に仮想仕事式は

$$\delta\{q\}^T \left[(k)\{q\} - \{f\} - \{g\} \right] = 0$$

と表され、この式が任意の仮想節点変位 $\delta\{q\}$ に対して常に成立しなければならないことから、平面ひずみ問題の剛性方程式は

$$\{f\} + \{g\} = (k)\{q\} \quad (5.85)$$

となる。つまり、剛性行列 (k) と要素の表面力と体積力の等価節点外力ベクトル $\{f\}$ および $\{g\}$ は

$$(k) \equiv \int_V (B)^T (C) (B) dV, \quad (B) \equiv (D) (N), \quad (5.86a, b)$$

$$\{f\} \equiv \int_S (N)^T \{F\} dS, \quad \{g\} \equiv \int_V (N)^T \{X\} dV \quad (5.86c, d)$$

と定義できる。さらに、以上の関係式を用いてひずみと応力は

$$\{\epsilon\} = (B)\{q\}, \quad \{\sigma\} = (C)(B)\{q\}$$

で求めることができる。また要素の厚さを h とする ($V = Ah$) と、剛性行列は

$$(k) = \frac{hE}{4A(1+\nu)(1-2\nu)} (\bar{k}) \quad (5.87)$$

と書け、 (\bar{k}) の各要素の陽な表現は表 5.5 に示した。

(3) 等価節点外力

式(5.86c) (5.86d) の表面力と体積力の等価節点外力の値を、それぞれの外力成分が一様な場合に限って陽な結果を示しておく。つまり 1 要素内とその k 辺上で

$$\{X\} \equiv \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \end{Bmatrix}, \quad \{F^{(k)}\} \equiv \begin{Bmatrix} p_x^{(k)} \\ p_y^{(k)} \end{Bmatrix} \quad (5.88a, b)$$

として、すべての成分が一定だとする。この「 k 辺」とは、図 5.40 に示したように節点 k に対峙する辺を指す。式 (5.88) を式 (5.86c) (5.86d) に代入すると

$$\left\{ f \right\} = \frac{hA}{3} \begin{Bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_x \\ B_y \\ B_x \\ B_y \end{Bmatrix}, \quad \left\{ g \right\} = \frac{h}{2} \begin{Bmatrix} p_x^{(2)} \ell_2 + p_x^{(3)} \ell_3 \\ p_y^{(2)} \ell_2 + p_y^{(3)} \ell_3 \\ p_x^{(3)} \ell_3 + p_x^{(1)} \ell_1 \\ p_y^{(3)} \ell_3 + p_y^{(1)} \ell_1 \\ p_x^{(1)} \ell_1 + p_x^{(2)} \ell_2 \\ p_y^{(1)} \ell_1 + p_y^{(2)} \ell_2 \end{Bmatrix} \quad (5.89a, b)$$

となる。式 (5.89a) は、体積力の等価節点外力が要素内の総和を三つの節点に等分配されていることを示している。一方式 (5.89b) も、 k 辺の総表面力をその辺の両端の 2 節点に等分配していることを示している。

(4) 数値解析例と応力の精度

まず簡単な例として、第 3.6.4 節で取り上げた図 3.30 の両端単純支持梁の問題に似せた図 5.41 の系を有限要素解析してみよう。図 3.30 で定義されている記号を用いると、 $\ell = 8\text{ cm}$, $c = 2\text{ cm}$ の領域（奥行き 1 m）とし、Young 率は 205 GN/m^2 , Poisson 比は 0.3 とし、分布外力は 980 kN/m とした。また端部の境界条件は式 (3.198) の条件ではなく、図 5.41 の上図に示したような支持条件にした。また、元の問題の図 3.30 は左右対称な物体なので、図 5.41 はその右半分だけを解析対象にしている。したがって、左端の条件も図示したようにした。

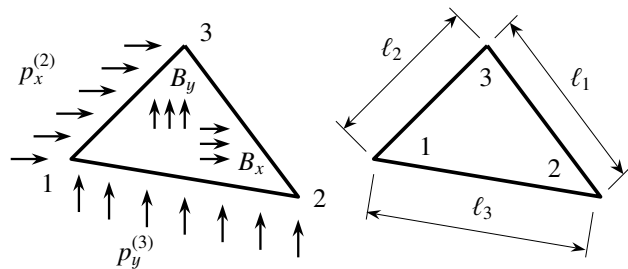


図 5.40 等価節点外力

求められた変位を 1000 倍に誇張して同図の左下に、また求められた応力分布と式 (3.199) の比較を右下に示した。応力の有限要素解については、直応力 σ_{xx} は同図上の左端付近に縦に並ぶ八つの要素における値、せん断応力 σ_{xy} は右端付近の縦の 8 要素の値である。定ひずみ要素の場合の応力は要素領域の図心（図中の黒丸）における値だと解釈することが多いので、式 (3.199) の値もその位置に対応した 2 断面毎で算定してプロットしてある。ただし、直応力の場合は 2 断面の差が小さく重なってしまっている。境界条件が若干異なるが、定性的にはよく似た解を得、この程度の少ない要素分割数であることを考えると、定量的にも工学的にはいい結果が求められていると考えていい。この平面問題のプログラムもまえがき書いた方法で入手可能である。図 5.41 用のデータファイル²⁷も例として添付してある。

またこの文書の有限要素の定式化に従う限りは、変位を近似関数で表した上でその微係数で応力を求めているため、応力の近似度は変位のそれよりも劣る。ここで定式化した定ひずみ要素の場合がその極端な例であり、要素内で一定である。例えば図 5.7, 5.15, 5.30 から明らかにように、構造部材の場合であっても応力の精度が変位の精度よりも悪いことには、特に設計という観点からは十分に注意しなければならないが、実用現場で梁の桁高方向の分割数をこんなに少ないままで済ます技術者はいるはずはないと思う。

ただこの両端単純支持梁の問題の場合は、生じる応力のうち重要な直応力は線形分布だし、次に重要なせん断応力もせいぜい放物線分布だったから、ここで用いたような非常に粗い要素分割でもそこそこの値が得られたと推測できる。つまり、特に応力集中や特異な現象が生じない問題ではかなり粗い要素分割でも十分なよう

²⁷ そこに置いた他のプログラムのデータも同様だが、'0.0' という数値を省略したデータファイルを使うとコンパイラによっては実行時エラーになるので、きちんと '0.0' という数値をデータファイルには書き込んでください。すみません。

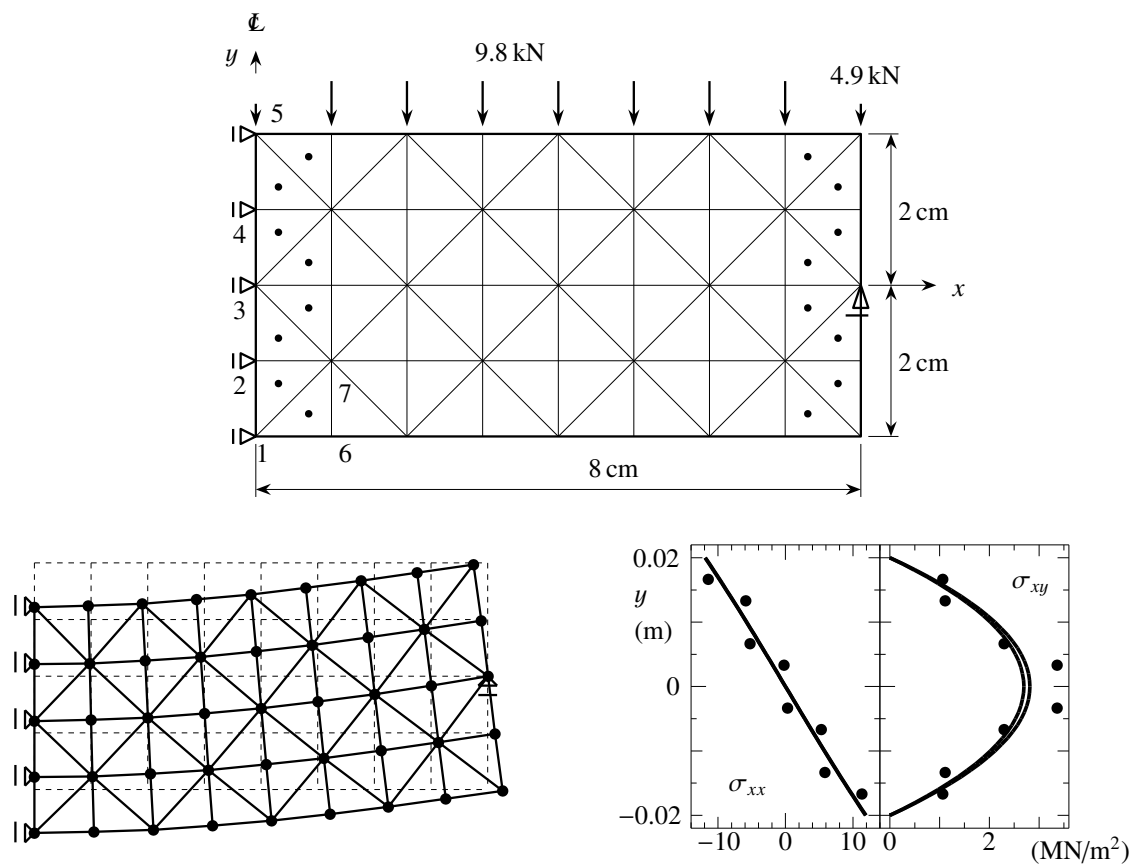
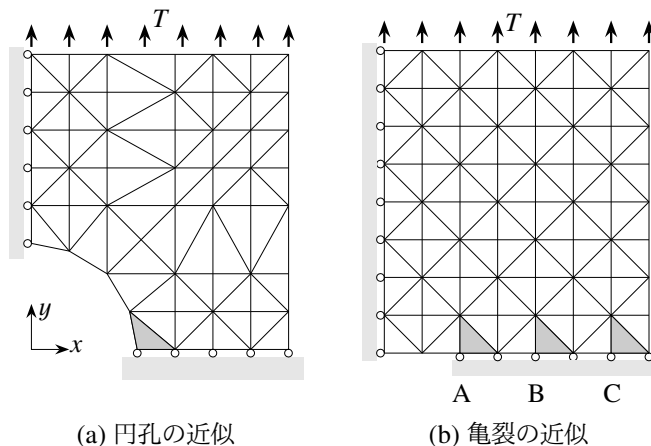


図 5.41 定ひずみ三角形要素による解析例

に見える。しかしこのままでは読者に誤解を持たれ兼ねないので、一つずつだが応力集中と特異性のある問題をとても粗い要素分割で解いておく。

最初は図 3.42 に示した円（柱）孔回りの応力を求めてみよう。円孔表面で生じる応力集中係数は式 (3.229) のように 3 である。もちろんこの解析解は無限体の解であるが、そもそも無限体を有限要素法で解析することは困難なことは明らかだ。それを無理やり図 5.42 (a) のように、かなり狭い有限な領域内の粗い要素分割で解いてみた。対称性を利用して $1/4$ の領域のみを対象とし、円孔半径を $\sqrt{2}$ として領域の幅を $(2 + \sqrt{2})$ 、高さを $(2.5 + \sqrt{2})$ とした。単位と材料定数は以下の結果には影響しないので省略する。



(a) 円孔の近似 (b) 亀裂の近似
図 5.42 非常に粗い要素分割で何が起きるか

上部の荷重位置付近に並んだ要素の応力比 σ_{yy}/T はほぼ 1 前後だったが、円孔表面近くの例えば網掛けした要素で得られた応力比 σ_{yy}/T は 3.80 だった。孔側に角があることと右側の自由表面の存在とが無限体の場合の応力集中係数の 3 をさらに増大させるはず²⁸だが、その解析解を著者は持っていない。建設現場で有限要素解析を実施する場合も同じように正解がわからない状況にあるだろう。では、この 3.80 という応力集中

²⁸ レポート用紙を 2 穴バインダに綴じるときに開けた綴じ孔のところが容易に破れるのは、その紙の端っこの縁の存在のせいだ。

係数はどのくらい正しいのか。どう判断するのか。難しいが、正解ではないはずだ。この例にはどんな問題が存在して、どんな対処法が可能だろうか。

そもそも要素数が少ない: これはがんばってデータを作成すればいい。

円をきちんとは表せない: 要素数をかなり増やすか、後述の高次要素を使う。

無限体ではない: 横幅の領域をもっと大きくするか、特殊な要素（解説は略す）を使う。

この対処法を採用すると節点数が多くなる傾向が強いので、最近のコンピュータの能力が非常に高いとは言え、計算時間は増えそうだ。昨今は、まず要素分割もコンピュータで自動化できる場合もある。そのとききちんと第4章までを勉強した技術者なら、どの辺りの要素分割を密にすればいいかわかるはずだから、その知識を活かすべきだ。あるいはアダプティブ有限要素法というものもある。これは一旦計算された結果を自動的に判断して、必要に応じて節点を移動したり（r法）次節で説明する高次要素を導入したり（p法）あるいは分割数を増やしたり（h法）する手法である。どのくらい信頼性があるのかは著者は知らないで、別途文献を参照して欲しい。

では次に特異性がある問題、つまり第3.6.4(7)節の亀裂が存在する無限体を対象としてみよう。無限体中にある亀裂先端は特異点で応力は無限大になる。これは無理だろうが乱暴な要素分割をしてみたのが図5.42(b)である。ここも $1/4$ の領域を対象として、幅は3.5、高さは4とした。図は点Aが亀裂先端になるようにしたときの境界条件を示しているが、そのときの亀裂先端横の網掛けした要素の応力比は $\sigma_{yy}/T = 1.76$ 程度だった。亀裂が長くなると応力も大きくなるし、また亀裂が領域の右側の自由表面に近づいても特異性は高くなるので、亀裂先端が点Bになるようにすると先端横の網掛けした要素の応力比は $\sigma_{yy}/T = 2.89$ になり、さらに自由表面に近づけた点Cを亀裂先端にすると先端横の網掛け要素の応力比は $\sigma_{yy}/T = 4.99$ になった。亀裂が自由表面に近づくとついて応力比が次第に大きくなるものの応力集中程度の解しか求められておらず、亀裂そのものの特性をうまく捉えられていない。もちろん亀裂先端付近の要素をさらに小さく分割すれば改善はできそうだが、実はいくら小さくしても正解に（存在するとして）収束はしない。というのも、計算機の中で無限大の値は扱えないからだ。この場合も無限大の領域をモデル化できていない問題もあるが、もっと本質的な特異性による問題のため、正しい応力は求めることはできない。現場でこんな状況になったときはどう判断するのだろうか。これに対処する一つの方法として近年X-FEMという方法が開発され広く利用されている。これについても別途文献を参照して欲しい。

5.6.3 高次要素や非力学問題

(1) 形状関数

前節の「定ひずみ三角形要素」では要素内のひずみと応力が一定になり、その解の精度はよくない。精度を上げるには通常多くの要素数が必要になる。また円孔の例のように境界が曲線である場合にも同様なことが必要になる。それを改善する手段の一つに高次要素がある。しかし、多項式の次数が上がることや要素形状が複雑になることは剛性行列等を求める積分を煩雑にし、そういった積分に数値計算を用いる必要も生じる。そのような場合には、実際の座標に代わる座標として自然座標と呼ばれるものを用いると便利である。面積座標と呼ばれるものがその一つの例である。自然座標を用いると、微分や積分演算が非常に簡単に行えるため数値計算に適するが、その詳細については別途文献を参照して欲しい。

剛性行列等の積分を数値的に行うためには座標と節点座標との関係式も必要になる。例えば前節の「定ひず

「定ひずみ三角形要素」の場合には

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} N \end{pmatrix} \{x\}, \quad \{x\} \equiv [x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad x_3 \quad y_3]^T \quad (5.90a, b)$$

と定義したことになっていて、これは式(5.78)と形式的に同じ表現だ。式(5.78)が要素内の任意点の変位を節点の変位成分で表したものであることから $\begin{pmatrix} N \end{pmatrix}$ を変位関数と呼んだのに対し、上式(5.90)は要素内の任意点の座標値を節点の座標値で表したものであるからこの $\begin{pmatrix} N \end{pmatrix}$ の方は形状関数と呼ばれる。そして前節の「定ひずみ三角形要素」の変位関数と形状関数は同じ多項式で与えられていて、同じ次数の多項式で変位関数と形状関数を与える要素をアイソパラメトリック要素と呼んでいる。

(2) 線形ひずみ三角形要素

近似度を上げるために用いられる高次要素の一例として、要素内でひずみが線形に変化し得る三角形要素が考えられる。この要素では変位関数に2次の多項式までを含み、空間座標の $1, x, y, x^2, xy, y^2$ の6項が用いられる。したがって三角形の各辺の中点にさらに三つの節点を設け、頂点とその中点の計6箇所の x, y 方向の変位成分を要素自由度に用いればいい。この変位関数を図5.4で示した区分的多項式と同じように、節点 n を囲む四つの三角形要素上で定義された区分的多項式 $\phi_n(x, y)$ として示したのが図5.43である。

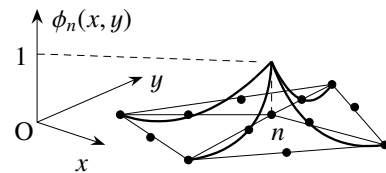


図 5.43 線形ひずみ三角形要素

ただ要素形状は直線辺の三角形だから、形状関数の方は式(5.90)のまま1次多項式で与えられている。したがって、形状関数の次数が変位関数のそれより低いことからサブパラメトリック要素と呼ばれている。ちなみに、形状関数の次数の方が変位関数のそれより高い要素をスーパーパラメトリック要素と呼んでいる。具体的な表現や剛性行列等については別途文献を参照のこと。さて、この線形ひずみ三角形要素の辺上では変位が連続するでしょうか。

(3) 曲線辺をもつ要素や四辺形要素

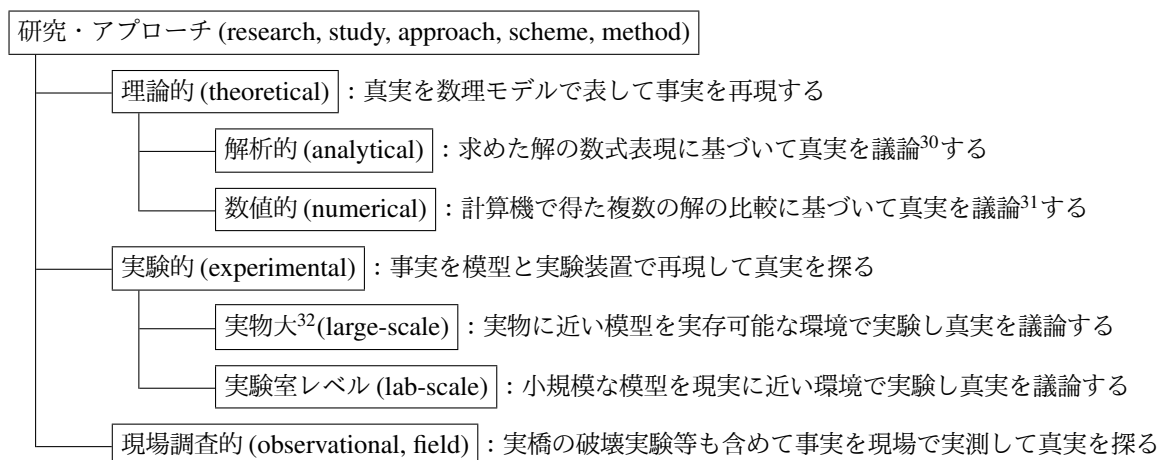
前節の要素をさらに発展させ、形状関数にも前節の変位関数と同じ2次多項式を用いれば、曲線辺を持つ3辺高次(アイソパラメトリック)要素が求められる。また同様に、四辺形要素も上の面積座標に対応するような自然座標を導入して定義することができる。積分は数値的に行わざるを得ないが、具体的な数値的面積積分等については別途文献を参照のこと。

(4) 非力学問題の有限要素

この章に書くのは相応しくないかもしれないが、例えば拡散や浸透流の問題であっても、その数理モデルの弱形式さえ求められれば有限要素定式化は可能である。例えば温度や密度等の未知関数を、図5.39, 5.43のような区分的多項式で近似しさえすれば、その弱形式を用いた有限要素近似が可能になる。ただし変位関数の選択の仕方にはかなりの工夫が必要な場合が多いようだ。また時間の要因が不可欠な場合もあり、それに関係した種々の問題もあるようだが、具体例は別途文献を参照して欲しい。

数値解は解析解か? 解析的な解(ここでは敢えて英訳を書いておくと analytical solution)と数値(解析)的な解(numerical solution)はもちろん違う。著者の推測では、解析的な解しかなかった時代には、当たり前だが解析解はそもそも解析的な解だった。何のことかわからない人の方が多いか。英語で書くと closed-form の

表 5.6 三つのアプローチ



解, 日本語では閉じた解あるいは陽な解 (explicit solution) と直訳するが, そういった解が解析解である。簡単に言うと, ノートに式で表すことができる解が解析解である。これに対し, 陰な解 (implicit solution: 積分や極限といった作用を含んだものや, 何らかの数値的な計算, 例えば逐次代入法 [もう誰も知らないか] や繰り返し計算を用いないと求められないような解) は, 厳密には解析的な解ではないだろう。が, しかし, それは後述の数値解ではない。というのも, 式の「表現」から直接どのようなパラメータがどう影響するかが把握可能だからだ。例えば共振曲線の「式 (解析的な解)」を見れば (微分すれば) 正確な共振点を求めることが可能だが, 数値解析をして種々の周波数の外力で共振曲線を描いても, 正確な共振点は決して求めることができないことを考えれば, その違いが明らかだ。

さて, コンピュータが広く利用されるようになると, 有限要素法のように計算手法そのものに誤差がある方法も含んで計算機が出す解を, 解析解と区別して数値解と呼ぶようになった。しかし, 数値的に解を求めることを数値解析と呼ぶことから混乱が生まれ, 数値的な解も「解析して」求められる解だから, つまり実験で求められたものではない解や値だから, それを解析解とか解析値と呼ぶ人達が増えてきたように思う。特に実験屋さんが間違っって使っているような印象がある。実際に日本人による英文論文²⁹で, 実験と数値解析をした研究序論に ‘experimental and analytical studies’ とあった。正しくは ‘experimental and numerical studies’ である。特に解析「値」という言葉を使うようになってからさらに混乱は増えたと思う。また彼らは数値モデル (numerical model) を解析モデルと呼ぶが, 対応する英語があるだろうか。analysis model じゃ変である。analytical model は理論そのものだ。敢えて訳すと ‘model to be analyzed numerically’ か。数値的な解や値を, 数値解あるいは数値解析解や数値解析値と呼んでもらえるといいのだが, あるいは常に「的」をつけたらどうだろう。解析的解と数値的解。解析的解を求める行為を「解析する」とし, 数値的解を求める行為は「数値解析する」として欲しいものだ。

破壊力学に関する初期の有限要素法の本をいくつかご執筆になった東京大学の宮本博先生の例えば文献 [193] の「緒言」には, 「非軸対称問題にいたっては, 解析解がほとんどないので, 有限要素法によらざるをえないであろう。」とある³³のだが, 実はその宮本博先生の講義に座っていたことがある。非線形破壊力学だったと

²⁹ 橋梁について世界中の専門家が書いたある洋書でも「数値的」を ‘analytical’ と表現していた。もはや全世界的な大混乱である。

³⁰ もちろん定量化するためには数値解析を併用するかもしれない。

³¹ もちろんプログラムを作るためには解析的な結果がまず必要。

³² 某研究所の施設名が元かもしれないが「実大」という用語も使うようだ。英訳は ‘full-scale’ かもしれない。

³³ これも誤解されるかな。正しい意味は「式表現の解析的な解がほとんど無いので数値的に近似解を求めざるをえない」のであって, 「今までの手法による数値解析解がほとんど無いので有限要素法を活用しなければならない」という意味では決してない。

思う。全く中身がわからない授業（長手方向に圧縮を受けた亀裂問題かな）だったが、その中では有限要素法等の数値解析に変換する「前の」解析解の大切さを強く説いておられた。大いにそうだと思う。どんなパラメータが答に強い影響を与えるのか調べるといふ点については、数値解析にはほとんどメリットは無いからだ。とても賢い人であれば無次元のパラメータに気付き、それをを用いてパラメトリック・スタディ³⁴をすればいい結果は得られるかもしれないが、なかなか難しいところだ。研究・アプローチの簡単な分類を表 5.6 に示した。真実と事実を区別³⁵していることに注意して欲しい。もちろん、この三つのアプローチを網羅した研究が一番望ましいのではあるが、なかなか難しい。また最近あるところでは気になったのだが、萌芽的研究を除いて工学的研究では実証や検証（事実の予測や事実との比較）の無い研究には全く意味が無い。理論的研究と称して数学的に美しい問題を設定してそれを独自の理論や手法を用いて解いたものの、その解が現実をほとんど説明すらできない研究は工学的には意味は無い³⁶。しかし逆に実用的研究ってのは大学でやる研究じゃないだろう。米軍が大学の教育・研究に交付している膨大な資金³⁷は、特に実用的研究だけを対象としているわけではない。朝日新聞(2014/10/1) オピニオン欄における UCLA の竹崎正道先生の名言「プロジェクトは結果が既に予測された研究」は秀逸である。

‘Excuse me?’ 言い直してもらうには ‘Pardon?’ …と習うが、米国中西部では人によってはこう言う。もう一つ中西部方言に ‘You bet!’ というのもある。通常の ‘Sure!’ に対応する。ん、‘Sure!’ も方言か? 少なくとも米語だろうか。Agatha Christie の ‘Murder on the Orient Express’ に出てくる chauffeur が、シカゴにはいたことがないと主張するが、Poirot の問いかけに ‘You bet!’ を乱発する。ところで最近、第 1 著者の父が TV 字幕の「すみません」に文句を言っている。そのうち正しい日本語になるんだろうなあ。

³⁴ 昨今、パラメータ・スタディとか、ひどい場合はパラスタとか呼ぶらしい（下品だなあ）が、グローバリゼーションの時代（呵呵）、真面目な表現をしましょう。その他、「プレゼン」「コスパ」「アポイント」「パブコメ」等も嫌いな表現だ。

³⁵ 第 1 著者の中学校担任の丸山真先生に教えてもらった。

³⁶ 著者自身が天に唾してるのかな。呵呵。

³⁷ 工学研究で軍用と全く無関係なものは無いと考えるを得ない。と同時にその研究成果が直接軍用に関係するわけでもない。第 1 著者留学時の奨学金や共同研究時の外部資金は陸軍や NASA だったが、学問つまり基礎研究にも米国は軍を通して、我が国の教育・研究資金総額とは比べものにならないくらいの資金援助をしている。日本でも米軍からの研究費補助が受けられる。要は倫理的なバランス感覚だろう。ただし、防衛省側がテーマを指定する我が国のやり方は大学の教育・研究方針や存在意義に反するから大問題になっているのだ。それはやはり軍事研究に相当するからだ。ただ日本学術会議の決定には現実的な実効性に若干の不安が残る。例えば米国大学に留学希望の日本人学生や米国大学でポストドクトラルフェローになる日本人教員が、米国側の受け入れ教員の研究費（留学生の場合は奨学金）の支援を受けて渡米する場合に、その研究費が米軍による外部資金だった場合にはどう判断することになるのだろうか。決定を厳密に遂行するなら渡航を禁止するのだろうか。まさかだが、過去に米軍の研究費援助を得て取得した PhD やポストドクトラルフェローの研究業績は抹消ということにならないといいのだが。

第6章

安定問題と梁-柱理論

6.1 安定問題とは

安定問題の意味と実例等を既に知っている読者は第6.4節からどうぞ。さて、例えばプラスチック製の30cmのものさしを手で引張って壊そうとしても普通は無理だが、これを押しと図6.1の左上の図のように簡単に曲がって壊れそうになる。このとき、ものさしが曲がらないようにどんなに注意しても、すぐに曲がってしまうこと

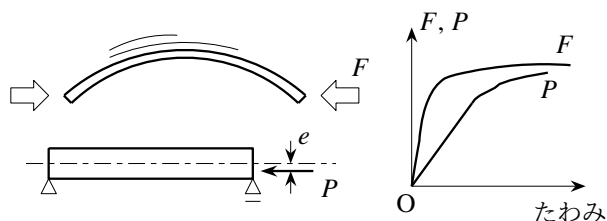


図6.1 細長い棒を押し曲げる（右図は概念）

にも気付いて欲しい。さらに両端を握って普通に曲げようとしたときに比べると、両方から押し縮めたときの方が小さい力で「突然」大きく曲がるように感じないだろうか。では、第4章までに学んだ柱や梁の理論では、このような圧縮外力を作用させたものさしはどのような挙動を示すことになっていただろうか。もし正確に図心に軸力を加えることができたとすると、式(4.22)(4.28)からは、このものさしは単に縮むだけで曲がらないという答しか得られない。しかし実際には図6.1に示したように簡単に曲がってしまう。なぜだろう？それは、図心を正確に押すことが実際にはできないからだと思った読者もいるだろう。しかし、もし図6.1の左下の図のように図心から e だけ離れた箇所を押した場合には、第4章の図4.24のように $C_2 = eP$ の集中モーメントが作用したのと同じだから、図6.1の右側の図のようにたわみは単に P に比例するだけで、壊れ始めないうちは力を加えるに従って線形的に曲がっていくだけだ。だからやはり「突然」大きく曲がるといったことは起きないというのが理論解だ。

もしかすると第4章で誘導した初等梁理論は間違っていたんじゃないだろうか。その誘導過程で、何か間違いあるいは見落としをしていなかっただろうか。例えば図6.2上半分の細い線のように、90度に折れ曲がった片持ち梁を水平に引っ張ってみる。外力の作用線は左端を通るので左端には反作用モーメントは生じず、同図下半分のような曲げモーメント分布になる。しかし変位を求めると右図上半分の太い曲線のように載荷点が右上に変位して、当然、左端には反作用モーメントが発生しているはずなのに答はゼロだ。何が間違っているんだろう。そもそも梁は変形できるのに、変位前の細い線の状態ですり合いを取っているのだろうか。本当は変位後の太い線の状態ですり合いを取るべきじゃないのだろうか。実際第C.6.2節の方

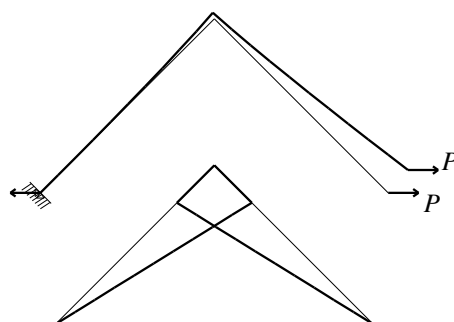


図6.2 固定端のモーメントはゼロなのか

法で解析すると反作用モーメントを確認できる。もしかすると上述のものさしの問題も、実際に変位・回転した状態でつり合いを考えた上で理論を修正すれば解決できるのかもしれない。すなわち、図心に圧縮力だけが作用した場合に曲がった状態でつり合う可能性を、第4章では検討し忘れていただけなのかもしれない。

ただ、構造力学の対象は橋梁や航空機・船体・杭・建築物等の比較的大きな構造であり、供用中・使用中の実際の構造全体をちょっと離れた位置から観たときには、目に見えるくらいの大変位が生じることは少ないよう¹にも感じるだろう。否、橋を歩いて渡っているときにトラックが通ると、かなり揺れていると感じると主張する読者もいるだろう。しかし実際に揺れ変位の振幅を測定すると、橋の長さに比べれば無視できるくらい非常に小さいのだ。実は人体は加速度には敏感だが変位にはとても鈍感なので、非常に重いトラックであってもそれがゆっくり移動した場合の変位は感じず、勢いよく通過したときの橋の揺れの加速度を感じ取るのである。エレベータの始動時と停止時しかその動きを感じないのと同じ状況だ。したがって、変位する前の図4.5のような状態や図6.2の細い線の状態でつり合いを考えて設計しても十分な安全を確保でき、またその方が簡便である。このような理論を、変位が非常に小さい範囲内の理論であることから微小変位理論と呼んでいる。これは未知関数等の線形項のみを取り出して定式化されており、線形理論の範疇に入る。しかし上述の30cmのものさしの例でもわかるように、現実の構造部材であっても、この微小変位理論の枠の中では予測できない現象が存在する可能性がある。微小でない変位状態を考える理論を有限変位理論と総称²している。こういった理論は本質的には非線形理論になる。

線形理論の範囲内なら、ものさしは圧縮に対して単純に縮むだけだった。しかし上述のものさしの実験からは、圧縮力が大きくなるとこの縮むだけのつり合い状態が安定ではなくなり、それ以外の状態つまり曲がった状態に移行してしまうことが初めてわかった。このような現象を扱う問題を安定問題と称している。棒の安定問題を解析するためには、圧縮された棒が曲がった状態でつり合う可能性があるか否かを検討する必要がある、上述の有限変位理論の範囲で支配方程式等を定式化する必要が出てくるのだ。ただ鋼構造の実際の不安定現象等を念頭に置き、変位は比較的大きいが変形（ひずみ）そのものは小さく、材料はほとんど弾性域にあるものとして、この章では主に弾性安定を対象として安定問題の取り扱い方の基礎を説明する。

6.2 剛体バネモデルによる安定問題の例

6.2.1 有限変位問題と安定・不安定

(1) 変形した状態でつり合いを考える

棒の安定問題を議論する前に、安定問題のいくつかの数理的取り扱い方について、簡単な剛体バネモデル³を対象として考えておこう。図6.3に示したように剛な棒が回転自由な支持条件で壁に取り付けてあり、それが線形の回転バネで支持されているものとする。この回転バネ⁴は棒の回転角度に比例した反作用モーメントを回転の逆方向に発生するバネで、その比例バネ係数を k とす

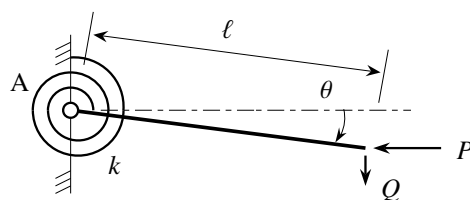


図6.3 回転バネで支持された剛棒のつり合い

¹ ジェット旅客機の主翼先端は、地上にいるときに比べて飛行中には1mくらい持ち上がった状態にある。離陸するときに注意深く主翼の変形を眺めてみると面白いかもよ。

² 英語の「微小 (infinitesimal)」に対しての finite (有限) であって、「限りがある」という意味ではなく、大変位理論と等価である。ただ、大変位理論という言葉はあまり使わない。変位が大きくなると一般的には変形 (ひずみ) も大きくなり、弾性範囲内の定式化の意味が無くなるからである。変形も大きい範囲を扱うのは大変形理論と呼ばれる。

³ 東京大学の堀井秀之先生に教えてもらった貴重な例である。

⁴ 機械式の時計の中で見た人も思う。

る。重力は無視し、バネの自然状態で剛棒は水平になっているものとする。ここでは2種類の外力 P および Q が作用した系が安定かどうかを検討する。

まず棒を回転させようとする外力が無い $Q = 0$ の場合、棒が水平なままの $\theta = 0$ の状態の力のつり合いの解は、壁側の点 A の水平反力が P で水平のままだという答が当然のように求められる。しかし安定問題を知らなくても、前述のものさしの実験を踏まえて想像を巡らせれば、その答はとても不自然に感じられると思う。というのも、もしかしたら P を載せた途端 $\theta = \pi/2$ の壁の位置まで急にクルッと回転してしまうように感じられるからだ。もしそうならこの問題でも安定性を確認する必要があるだろう。前節で推測したように、系が変位した状態でつり合いを考える必要があるだろう。つまり、図 6.3 のように水平状態から時計回りに θ だけ回転した状態が静的つり合い条件を満足するかどうかを確認する必要があるというわけだ。そこで支持点 A 回りの反時計回りのモーメントのつり合いをとると、 $k\theta$ が反時計回りのバネのモーメント抵抗なので

$$k\theta - P\ell \sin \theta - Q\ell \cos \theta = 0 \quad (6.1)$$

を得る。 Q が作用していないとき $\theta = 0$ が上式を満足するのは明らかであり、それが上述した当然の答に相当する。つまり、 P の作用だけならこの棒は回転せずにいられることをこのつり合い式は示しているが、前述の 30 cm のものさしの場合と同様、 $\theta = 0$ 以外になる可能性は本当に無いのだろうか。

(2) 分岐現象

まず $Q = 0$ の場合には、つり合い式 (6.1) は

$$k\theta - P\ell \sin \theta = 0 \quad (6.2)$$

なので $\theta = 0$ が当然の解である。そこで、もし $\theta \neq 0$ の状態があり得るとすると、外力と回転角の関係がわかり易いように書き直すと

$$P = \frac{k}{\ell} \frac{\theta}{\sin \theta} \quad \text{あるいは} \quad \frac{P\ell}{k} = \frac{\theta}{\sin \theta} \quad (6.3a, b)$$

とも表現できる。この式を図示するのは容易であるが、まずは $\theta = 0$ になるときの $P \neq 0$ の解を求めるために、式 (6.3b) の右辺で $\theta \rightarrow 0$ の極限⁵をとってみると、それは1になる。したがって、ここで考えているモデルは、外力 P が

$$P_{cr} \equiv \lim_{\theta \rightarrow 0} \{ \text{式 (6.3a) の } P \} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \left\{ \frac{k}{\ell} \frac{\theta}{\sin \theta} \right\} = \frac{k}{\ell} \quad (6.4)$$

で定義される値を持っていても棒は回転せず、 $\theta = 0$ のままにいる可能性を示している。実は式 (6.3) をそのまま図示すると、 $P \geq P_{cr}$ の範囲でしか $\theta \neq 0$ の答が無いことが明らかになるのだ。その範囲で式 (6.3) を満足する P と θ の関係が図 6.4 の $B \rightarrow C$ と $B \rightarrow C'$ の太い曲線の経路である。つまり $P > P_{cr}$ の範囲においては $\theta \neq 0$ のつり合い状態が存在する。一方、 $P < P_{cr}$ の場合は式 (6.3) は解を持たないが、元の式 (6.2) に戻れば、 P がどんな値であろうと $\theta = 0$ がつり合い状態の解であることを示している。つまり図 6.4 の $O \rightarrow A$ から B を越えて D の方までの $\theta = 0$ のままの経路も正しいつり合い状態なのである。

以上の結果をまとめると、この系のつり合い状態は

- $0 \leq P \leq P_{cr}$ の範囲では、回転しない $\theta = 0$ の解しか存在しないのに対し、

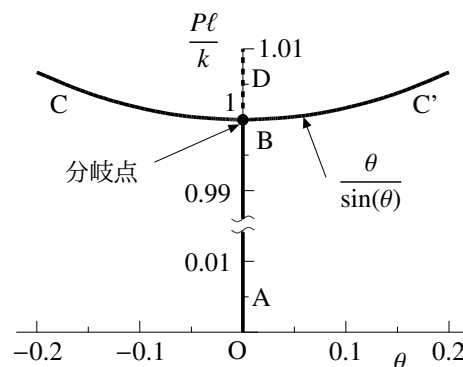


図 6.4 回転バネで支持された剛棒のつり合い経路

⁵ 数学で「零分の零」や「無限大分の無限大」になる関数の極限を求めたとき、何の役に立つかわからなかった人も多かったのでは？

- $P > P_{cr}$ になると、回転しない解 $\theta = 0$ の他に式 (6.3) を満足する $\theta \neq 0$ の解が存在し、つり合い状態が3通り可能になる

ことを示している。このように、式 (6.4) で定義された外力レベルは複数のつり合い経路に枝分かれする限界点であることから分岐点と呼ばれており、式 (6.4) の荷重の値 P_{cr} を分岐荷重と呼んでいる。一種の限界荷重なので添え字に 'critical' と書いてあることが多い。あるいは第 6.3 節で例示するように、構造部材の同様の不安定現象を座屈と呼ぶので、この分岐荷重のことを座屈荷重と呼ぶこともある。なお、この章では分岐点近傍の挙動に注目しているので、図の縦軸には原点を含んでいない場合⁶が多いことに注意して欲しい。

(3) つり合い状態近傍の乱れと安定性

いよいよ安定問題について考えよう。つまり上の例で外力 P を P_{cr} よりも大きくしたとき、母なる自然はこの三つのつり合い状態のうちどのつり合い経路を選ぶのかという問題だ。もし三つの状態共にある意味で「同じような」安定状態なら、自然は三つの状態のどれかを確率的に選択するだろうから、三つのうちのどれか一つが同じ確率で自然界では観察されるはずだ。しかし、もしどれかが不安定な状態であれば自然界はその状態を保持できず、現実にはほとんど起こり得ないだろう。したがって、自然界における系の挙動を予測するためには、つり合い条件だけでなくそのつり合い状態が安定か否かについても検討する必要がある、そのためには何らかの判定規準（安定規準）が別途必要になるのだ。

そこでまた 30 cm のものさしを取り出し、今度は長手方向にぶら下げてみよう。たいていは片端に小さい穴が開いているのでそこを 2 本の指で軽くつまむとまっすぐだらんとぶら下がる。その状態が重力場におけるつり合い状態であることは誰もが認めるはずだ。そしてそれをちょっと揺すってみても、結局は元のまっすぐにぶら下がった状態に落ち着くだろうから、そのつり合い状態は「安定」だと呼んでもよさそうだ。次に、ものさしをそおっと机の上で倒立させてみよう。なかなか難しいから頭の中で倒立させればいい。この倒立状態も理論的にはつり合い状態であることを誰もが認めるだろう。しかしこれにちょっとでも触るとすぐにものさしは倒れてしまう。これは「不安定」な状態と呼んでいいだろう。以上の実験を踏まえると、あるつり合っている対象を少しだけ動かしてみれば、安定か不安定かが判別できそうなことがわかる。

では実際に式 (6.3) を満たしてつり合っている系を少しだけ乱したときの応答を算定してみよう。このバネモデルの一つのつり合い状態を θ_0 とすると、それは式 (6.1) の点 A 回りのモーメントの総和が零、つまり

$$\sum M(\text{反時計回り}) \equiv k\theta_0 - P\ell \sin \theta_0 - Q\ell \cos \theta_0 = 0 \quad (*)$$

を満足している。そこで、この外力は変えずに回転角を少しだけ乱して、時計回りに増えて $\theta_0 + \Delta\theta$ になったとすると、モーメントの総和は

$$0 + \sum \Delta M = k(\theta_0 + \Delta\theta) - P\ell \sin(\theta_0 + \Delta\theta) - Q\ell \cos(\theta_0 + \Delta\theta)$$

となるが、 $\Delta\theta$ は非常に小さく $|\Delta\theta| \ll 1$ であることを考慮すれば

$$\sin(\theta_0 + \Delta\theta) = \sin \theta_0 \cos \Delta\theta + \cos \theta_0 \sin \Delta\theta \approx \sin \theta_0 + \Delta\theta \cos \theta_0, \quad \cos(\theta_0 + \Delta\theta) \approx \cos \theta_0 - \Delta\theta \sin \theta_0$$

と近似できるので、これと式 (*) を上式に代入すると

$$\sum \Delta M = (k - P\ell \cos \theta_0 + Q\ell \sin \theta_0) \Delta\theta \quad (6.5)$$

⁶ 齊木功先生がいつも気になさるので波線を入れる方がよく、幸い Ngraph にはその機能もあるが、面倒なのでごめんなさい。

となる。この $\sum \Delta M$ は系全体の反時計回りのモーメント抵抗の乱れであり、 $\Delta\theta$ は逆に時計回りの乱れ回転角を正にとっていた。時計回りに強制的に乱れを起こそうとしたとき、もし反時計回りの抵抗力が正であれば、それは系が乱れに抵抗しようとしていることになり、結果的に乱れを加える前のつり合い状態に戻ろうとする。つまり、そのつり合い状態は「安定」だということになる。すなわち、式(6.5)の右辺が正の $\Delta\theta$ に対して正であれば安定だと判断できる。したがって

$$k - Pl \cos \theta_0 + Ql \sin \theta_0 > 0 \quad (6.6)$$

であれば「安定」だということになる。これをこの系の「安定規準」と呼ぶことにする。

あるいは机の上で倒立させたものさしに触れたときの応答のように、動的に考えるともっと理解し易いかもしれない。つまり、つり合い状態 θ_0 を少しだけ「動的に」乱したときの乱れ $\Delta\theta(t)$ (時間の関数) が、時間に伴って発散しようとするのか、減衰あるいは振動しようとするのかを判定すれば、その状態が「安定」か否かの判断ができるだろう。では、この系の運動方程式をまず求めよう。式(6.5)は反時計回りのモーメントであり、 $\Delta\theta$ は時計回りの回転角だったから、この剛棒の回転慣性を J とすると乱れの動的な運動は時計回りのモーメントの運動方程式の

$$-(k - Pl \cos \theta_0 + Ql \sin \theta_0)\Delta\theta = J\Delta\ddot{\theta} \quad (**)$$

で支配される。ここに、 $(\ddot{})$ は時間に関する2階の微係数を表している。この運動方程式の解の性質について検討すると、 $J > 0$ なので

- もし式(**)の左辺の括弧の中が負なら、つまり $(k - Pl \cos \theta_0 + Ql \sin \theta_0)/J = -\mu^2 < 0$ であれば、上の方程式とその解は

$$\Delta\ddot{\theta} - \mu^2\Delta\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \mathcal{L}(\sinh \mu t, \cosh \mu t)$$

となる。これは乱れが時間と共に発散することを示しているから「不安定」な状態を意味する。

- 逆に式(**)の左辺の括弧内が正、つまり $(k - Pl \cos \theta_0 + Ql \sin \theta_0)/J = \mu^2 > 0$ の場合は

$$\Delta\ddot{\theta} + \mu^2\Delta\theta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta\theta = \mathcal{L}(\sin \mu t, \cos \mu t)$$

となり、乱れは振動解である。ここでは減衰の効果を含めていないので、乱れが振動解になる場合には「安定」な状態を意味する。

となる。したがって、この系が安定であるための条件は式(**)の左辺の括弧内が正であることであり、それはまさに式(6.6)の安定規準に一致する。

ここでは横荷重が無い $Q = 0$ の場合だけを対象にすると、安定規準式(6.6)は

$$k - Pl \cos \theta_0 > 0 \quad (6.7)$$

となる。するとこの安定規準式からは、 $\theta_0 = 0$ のまっすぐな状態は $k > Pl$ の場合、つまり $P < P_{cr}$ においてのみ安定であることがわかる。したがって、図 6.4 の $O \rightarrow B$ は安定なつり合い経路であるが、 $B \rightarrow D$ のつり合い経路は不安定で自然界では観測され難いことになる。このことから前節の結論は次のように改められる。

- $0 \leq P \leq P_{cr}$ の範囲では、回転しない $\theta = 0$ が唯一解でそれは安定解である。
- $P > P_{cr}$ の範囲では、 $\theta = 0$ は不安定解なので自然界では生じ難い一方で、式(6.3)を満足する $\theta \neq 0$ の二つの解の方が安定解である(次節で示す)。ただ自然がその二つの解のどちらを選ぶかはわからない。

一方、もし Q が一定の場合には、 θ_0 はつり合い式

$$P\ell = \frac{k\theta_0 - Q\ell \cos \theta_0}{\sin \theta_0} \quad (6.8)$$

を満足するので、これを式 (6.6) に代入すると、つり合っている系の回転角 θ_0 で表した安定規準は

$$\frac{1}{\sin \theta_0} \{k \sin \theta_0 - k\theta_0 \cos \theta_0 + Q\ell\} > 0 \quad (6.9)$$

とも表すことができる。分岐後の経路の $B \rightarrow C$ と $B \rightarrow C'$ が安定かどうかについては次節で確認する。

6.2.2 エネルギーを利用した安定規準

(1) 第2変分と安定性

もう少し違うアプローチからも安定規準を考察してみよう。簡単のために最初は外力 Q が無い場合を対象とする。第5章では線形理論の弱形式から全ポテンシャルエネルギーというスカラー量を誘導し、つり合い状態はその全ポテンシャルエネルギーが最小になる状態に相当することを示した。したがって、つり合っている状態の外力を一定に保ったまま強制的に（どうやるかはともかく）さらに変形させようとする、全ポテンシャルエネルギーは増加する。しかしそこで強制を取り除くと、その系はつり合おうとして全ポテンシャルエネルギーが小さくなる方向の運動をするため、元のつり合い点すなわち初めに与えてあった外力レベルの唯一のつり合い点に戻ろうとする。つまり、全ポテンシャルエネルギーを最小にするつり合い状態は安定だと判断できる。

このように考えると、複数のつり合い状態が存在する場合にはそれぞれのつり合い状態が持つ全ポテンシャルエネルギーを算定して、それが最小になる状態のみが安定だと判定できるし、多分その最小値がより小さい方のつり合い状態を自然は選ぶだろうとも推測できる。そこで式 (6.2) から全ポテンシャルエネルギー Π を算定するために、この式がその仮想仕事式つまり第1変分であると置き

$$\delta\Pi = (k\theta - P\ell \sin \theta)\delta\theta = 0$$

と表示しておく。これを θ について積分すると

$$\Pi = \frac{1}{2}k\theta^2 + P\ell \cos \theta \quad \text{あるいは} \quad \Pi = \frac{1}{2}k\theta^2 - P\ell(1 - \cos \theta) \quad (6.10a, b)$$

によって全ポテンシャルエネルギーを定義できる。後者の式 (6.10b) の方が P がする外力仕事との関係で物理的にはわかり易い外力ポテンシャルになっているが、ポテンシャルの原点が違うだけなので、以下では前者の式 (6.10a) の方を用いる。一方、上式の第1変分 $\delta\Pi$ をさらに θ で微分（変分）することにより、第2変分（2階の微係数に相当する）は

$$\delta^2\Pi = (k - P\ell \cos \theta)\delta\theta^2 \quad (6.11)$$

となる。あるつり合い状態が全ポテンシャルエネルギーの最小原理として認識されるためには、そのつり合い状態で汎関数 Π は下に凸な曲面になっていなければならない。第5章でも使ったが、曲面が上に凸なのか下に凸なのかを調べるには、高校で習った関数のグラフと2階の微係数の関係から類推されるように、この式 (6.11) の第2変分の符号を調べればよいことが直感的に理解できるだろう。つまり上式 (6.11) が正である条件

$$\delta^2\Pi > 0 \quad \rightarrow \quad k > P\ell \cos \theta \quad (6.12)$$

を満足するつり合い状態は安定だと判断できる。この式は前に得た安定規準式 (6.7) の θ_0 を θ に置き換えたものに一致し、 $\theta = 0$ のまっすぐな状態は $P < P_{cr}$ の場合のみが安定である。さらに重要なのは、このように $\theta = 0$ の分岐点では $\delta^2\Pi = 0$ を満足しているので、これも分岐条件だということだ。すなわち図 6.4 の点 B が分岐点であり、 $B \rightarrow D$ は全ポテンシャルエネルギーが上に凸なつり合い経路なので不安定な状態である。

以上の結果をまとめたのが図 6.5 である。図中の一点鎖線が $Q = 0$ のときの安定規準式 (6.12) を示している。この線より上方は $\delta^2\Pi < 0$ となる不安定な領域、下方が $\delta^2\Pi > 0$ となる安定領域である。つり合い経路は太い実線と点線で、図 6.4 の挙動に似ている。 $P > P_{cr}$ の $\theta = 0$ というつり合い解が点線で示されているのは、その状態が第 2 変分が負の領域にあり、全ポテンシャルエネルギーが最大になる不安定なつり合い状態だからだ。これがちょうど、机の上で倒立させた 30 cm のものさしのつり合い状態と同じようなものだ。一方、実線で示した $\theta \neq 0$ のつり

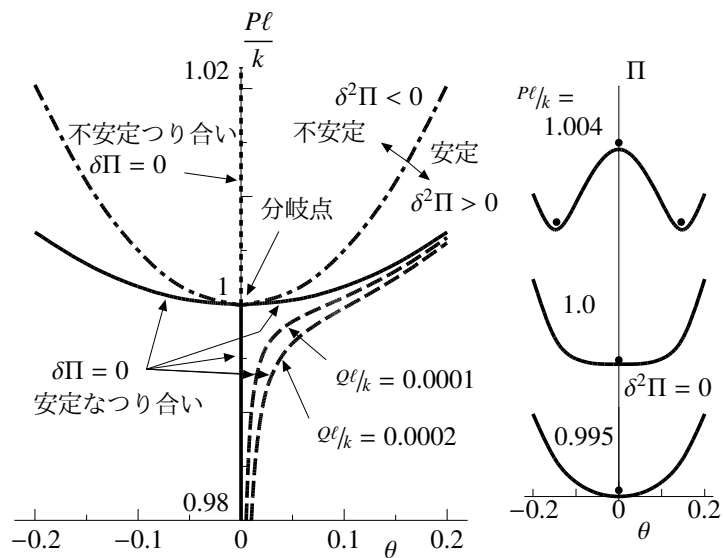


図 6.5 回転バネで支持された剛棒のつり合い経路と安定・不安定

合い状態は一点鎖線よりも下方にあるため安定である。すなわち、このモデルの外力を零から増やしていくと、外力が P_{cr} に至るまでは $\theta = 0$ のまっすぐな状態が唯一のつり合い状態であつ安定である。そしてもう一つ重要なのは、 $\delta^2\Pi = 0$ を満足する $P = P_{cr}$ で分岐が可能になることだ。さらに外力を増加させて $P > P_{cr}$ になると回転した状態の方が安定なので、どちらかの方向に回転して静止する。

同じ図 6.5 の右側に、式 (6.10) で計算した全ポテンシャルエネルギーの分布をそれぞれの外力レベルで示した。縦軸の数値にはあまり意味が無いので省略した。一番下の $P = 0.995 \times P_{cr}$ の場合の分布図から、 $\theta = 0$ が唯一の安定なつり合い状態であることがわかる。その上の図が $P = P_{cr}$ になった瞬間で、第 2 変分も零になるのでかなりフラットな曲線になっているが、下に凸になっている。さらに外力レベルが $P = 1.004 \times P_{cr}$ に上がった一番上の図では $\theta = 0$ のつり合い状態が全ポテンシャルエネルギーの最大点であるのに対し、 $\theta \neq 0$ の二つの解は最小点に相当し、 $\theta \neq 0$ の方が安定であることがわかる。ただ二つのつり合い状態のエネルギーレベルが同じなので、回転の方向を自然も我々も決定できない。

(2) 回転方向の外力も存在する場合

では最初の図 6.3 の問題に戻って、積極的に回転させようとする力 Q が存在する棒を対象とする。 Q がある一定値をとる場合のつり合い式 (6.1) の結果を図 6.5 の $\theta > 0$ の領域に破線で示した。最も重要なことは明確な分岐点が存在しないことだ。それは、この外力 Q によって $\theta = 0$ という解がつり合い式の解ではなくなるからであり、外力レベルの低い段階からすでに回転し始めているからだ。ただ明確な分岐点は存在しないものの、 P が P_{cr} に近づくほど回転角の増加傾向が大きくなり、非線形挙動を示しながら回転角が増大する。さらに外力レベルが大きくなるにつれて、 $Q = 0$ の分岐後の解に漸近していくような挙動を示す。エネルギー的な考察を前節と同様に行うと、式 (6.1) が仮想仕事の原理になるような Π の第 1 変分を

$$\delta\Pi = (k\theta - P\ell \sin\theta - Q\ell \cos\theta) \delta\theta = 0$$

と置いた上で、この第 2 変分を求めると

$$\delta^2\Pi = (k - P\ell \cos\theta + Q\ell \sin\theta) \delta\theta^2 > 0 \tag{6.13}$$

が安定規準であり、これは式(6.6)の θ_0 を θ に置き換えたものに一致する。この安定規準は図示していないが、図中の破線のつり合い経路はすべて安定だった。このような一定外力 Q の存在は棒を最初から少しだけ回転させる影響を持っており、後述の初期不整の存在とほぼ同じ影響を与える。実際に我々の身の回りで起こっていることは、このような初期不整の存在が避けられない状況下の非線形挙動であり、 $Q = 0$ のときに得たような、明確な分岐点が存在して変形挙動が急変するという現象は滅多に起きないと考えるべきである。

ものさしの例に戻ると、たいていのものさしは完全にはまらずぐではなく、最初から少しだけ曲がっているだろう。あるいは図心からずれた所を押している場合もある。このような状況でものさしを押したときの挙動は明確な分岐点の無い図6.5の破線のようなものになり、加える力があるレベルに近づくにつれて曲がり具合の程度が「急に」増大する。そのため、ものさしを押したときに「突然」曲げが大きくなるように感じたのである。 $Q = 0$ のときに観察できるような明確な分岐は、いわゆる完全系、つまり最初の状態が理想的にまっすぐな系⁷に、曲がるような状況を生じさせる载荷条件が無いときのみ起こることを留意しておいて欲しい。

(3) 安定な分岐と不安定な分岐

ところで、分岐後の状態が必ずしも安定だとは限らないことを示すために、回転バネではなく、通常の伸び縮みバネで図6.6のように支えられた剛棒モデル⁸の挙動を調べてみよう。回転バネモデルの場合とバネ定数 k の次元が異なるため、この系の場合の分岐荷重は $P_{cr} = kl$ となるが、分岐後の挙動も図6.3のモデルとは全く異なる。厳密解は文献[172]等に詳しいし容易に導くことができるので割愛するが、その挙動を図6.7にまとめた。

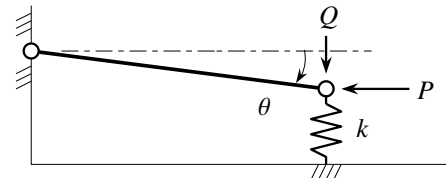


図6.6 伸び縮みバネと剛棒のモデル

図中の一点鎖線が $Q = 0$ のときの安定規準で、この線より上方が不安定な、下方が安定な領域である。したがって $Q = 0$ なら分岐点までの $\theta = 0$ の状態のみが安定で、それ以外のつり合い経路はすべて不安定だ。また回転させようとする外力 Q が存在する場合、この図に示したような非常に小さい Q に対する安定規準は $Q = 0$ の一点鎖線で表した規準にほぼ重なり、破線で示したつり合い経路のピークまでのつり合い状態のみが安定である。自然界では一点鎖線よりも下方にあるつり合い状態以外は観測できず、棒は下の床か左の壁にぶつかって止まることになる。しかも、前節までの回転バネの場合とは異なり、分岐点における全ポテンシャルエネルギーの分布は同図の右側の一番上に示したように上に凸であり、不安定な分岐点である。

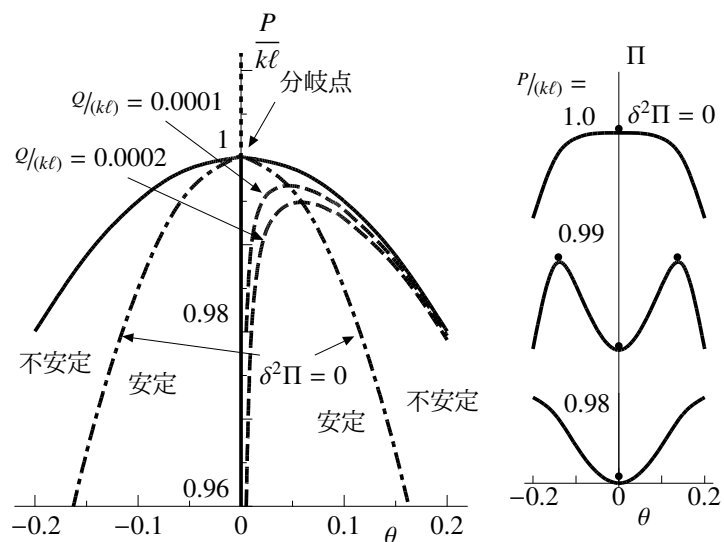


図6.7 伸び縮みバネと剛棒のモデルの挙動

後述するが、回転バネの場合も伸び縮みバネの場合も分岐点では第2変分が零になるが、前者が正の第4変分を持つのに対し、後者はそれが負なので不安定な分岐点になる。ちなみに第3変分はどちらも零である。

⁷つまり現実には存在しないと考えるべきであろう。

⁸第1著者が最初に例にしようとしたのがこのモデルであったが、分岐後不安定になることを東京大学の堀井秀之先生に相談した結果、図6.3のモデルを教えていただいた。

演習問題 6-1

1. 図 6.6 の安定問題を複数のアプローチを用いて解き、図 6.7 の結果を求めよ。

6.2.3 接線剛性と安定・不安定

もう少し違った観点からも安定条件を捉えてみよう。図 6.8 に示したように、あるつり合い状態では外力 P の作用によりこの载荷点は左方に v だけ変位している。このつり合い状態から v をさらに増加させるためにもし P も増加させなければならないようなら、その系は安定であろう。つまり $dP/dv > 0$ になるつり合い状態は安定だと考えていいだろう。式 (6.8) と $v = \ell(1 - \cos \theta_0)$ を考慮すると

$$\frac{dP}{dv} = \frac{dP}{d\theta_0} \frac{d\theta_0}{dv} = \frac{1}{\ell^2 \sin^2 \theta_0} \left[\frac{1}{\sin \theta_0} \{k \sin \theta_0 - k\theta_0 \cos \theta_0 + Q\ell\} \right] > 0 \quad (6.14)$$

となり、式 (6.9) の条件と一致する。

このように、外力増分とその方向の载荷点の変位増分とを結び付ける剛性をつり合い状態で算定し、その符号を用いることによっても安定・不安定を議論できそうだ。特にポテンシャルエネルギーの存在しない現象やモデル等では、このようにして安定を判定できるかもしれない。この (dP/dv) を、あるつり合い点における接線剛性と呼ぶことがある。さらに上式 (6.14) と式 (6.13) を比較すれば明らかなように、第 2 変分は結局

$$\delta^2 \Pi = \delta\theta \times (\text{接線剛性}) \times \delta\theta \quad (6.15)$$

で定義されていると捉えてもいいので、接線剛性が正になる条件が安定規準であり、分岐点では接線剛性は零になると考えればいいことになる。確かに図 6.4 から明らかなように、分岐点ではつり合い経路の接線剛性が零になっていて、前節の $\delta^2 \Pi = 0$ と同じ条件になっている。

演習問題 6-2

2. 分岐点で式 (6.3) の接線剛性 $(dP/d\theta)$ が零になることを示せ。

6.2.4 比較的小さい変位状態の安定・不安定

(1) 比較的小さい変位理論

プレートガードのウェブ等の鋼板は非常に薄いためやはり座屈し易い構造要素の一つだが、実は分岐後の変位がそれほど大きくはならず、棒に比べると比較的大きな抵抗力を保持できることがわかっている。さらに、一度分岐したあとに別の異なる特性の分岐点が現われる等の複雑な非線形挙動を示す (図 8.13 参照) こともある。これに対して梁や柱の場合には最初の分岐後の変位がすぐに大きくなってしまい、一旦分岐してしまうと、分岐後が安定なつり合い状態であっても変形が大きくなり過ぎ、実際には材料が降伏する等して抵抗力を失うことによって構造は壊れてしまう。このことはつまり、梁や柱の場合には最初の分岐点近傍の挙動だけを知ることができれば、工学的には十分な精度でその安全性 (安定性) を把握できるということを示唆している。そこでここでは $\theta = 0$ のつり合い状態の近傍だけを取り扱うことができるような、比較的小さい変位の範囲内で安定を論じ直しておこう。これはあるつり合い状態近傍だけで線形化した理論なので、元の有限変位理論に対比させて線形化された有限変位理論と呼ばれる。

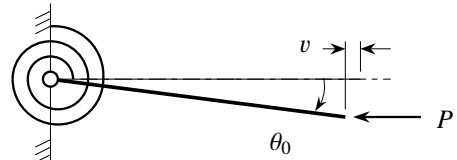


図 6.8 接線剛性と安定・不安定

では、式(6.1)で $|\theta| \ll 1$ という近似を用いて $\sin \theta \approx \theta, \cos \theta \approx 1$ を代入すると、線形化されたつり合い式が

$$k\theta - P\ell\theta - Q\ell = 0 \tag{6.16}$$

と求められる。したがって式(6.4)の P_{cr} を用いて

$$\theta = \frac{Q\ell/k}{1 - P\ell/k} = \frac{Q/P_{cr}}{1 - P/P_{cr}} \tag{6.17}$$

という関係を得る。 $Q = 0$ のときの分岐点は、式(6.16)が $Q = 0$ で $\theta \neq 0$ の解を持つ条件から $P = P_{cr}$ と求められるが、 θ が不定になることに注意すべきである。つまり図6.9の分岐点を通る水平の一点鎖線上のすべての点がこの θ の解になるので不定なのだ。一方 Q が一定値を持つ場合の外力と回転角の関係式(6.17)から得られる挙動を図6.9の実線で示した。破線が式(6.1)の厳密解なので、小さい変位の領域ではこの厳密解との差異が非常に小さいことが明らかだ。また式(6.17)の表現からも明らかのように、つり合い経路は P_{cr} 以上には決して及ばない。このように、特に分岐点近傍の挙動さえわかればいいのであれば、この程度の近似的線形理論でも十分であることがわかった。ちなみに、もし

$$\beta \equiv \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}} \tag{6.18}$$

と定義すると、式(6.17)は

$$\theta = \beta \frac{Q}{P_{cr}}$$

とも書け、 β は外力 Q の影響を増幅する係数として捉えることができる。

安定規準についてもエネルギー的アプローチに従えば、つり合い式から逆算して

$$\delta\Pi = (k\theta - P\ell\theta - Q\ell)\delta\theta$$

が第1変分なので、安定規準は第2変分を用いて

$$\delta^2\Pi = (k - P\ell)\delta\theta^2 > 0$$

すなわち $P < P_{cr}$ であることがわかる。文献[95]等では、線形化された理論の範囲内のひずみエネルギーと外力ポテンシャルとの等置で安定規準を決定しているが、 Q の存在がある場合にそのアプローチには疑問が生じる等、正確な安定規準ではない。エネルギー的に安定を論ずる場合には必ず第2変分で議論すべきである。

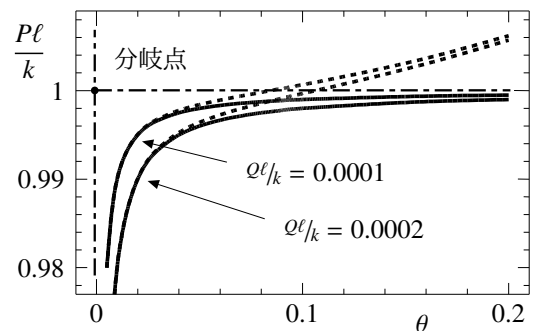


図6.9 比較的小さい変位の範囲内の安定

(2) 初期不整がある場合

この線形化された有限変位理論を用いた場合も、 $Q = 0$ のときの完全系には存在する分岐点が非零の Q によって無くなった。これに対し、もし载荷前に構造のどこかが歪んでいた場合にも、棒を回転させるような Q の作用と同じ効果をその歪みを持つことは容易に予想できると思う。载荷前の初期状態に存在するこのような歪み等を初期不整と呼んでいる。この初期不整がある場合も前

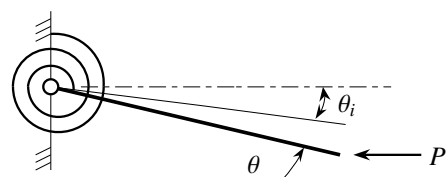


図6.10 初期不整があるモデル

節と同様に線形化された有限変位理論で議論できるだろうか。そこで図 6.10 のように角度を定義し、 θ_i が外力を作用させる前に存在していた初期不整であるとすると、モーメントのつり合いは

$$k\theta - P\ell \sin(\theta_i + \theta) = 0 \tag{6.19}$$

となり、 $|\theta| \ll 1$ および $|\theta_i| \ll 1$ の近似をすると、再度式 (6.4) の P_{cr} を用いて

$$\theta = \beta \frac{P}{P_{cr}} \theta_i$$

となる。ここに β は式 (6.18) で定義した係数と同じだが、この場合は初期不整の影響の増幅率として捉えることができる。初期不整 θ_i を与えた場合の P と θ の関係を図 6.11 に示した。図中の破線は式 (6.19) の厳密な挙動である。図 6.11 を図 6.9 と比較しても明らかなように、完全系でなくそうにするような外力の影響とこの初期不整の影響とは本質的に同じ効果を持ち、式 (6.18) で定義した β で応答が増幅されることがわかる。

比較的変位が小さい理論の範囲で、エネルギー的アプローチによる分岐点の安定規準をまとめると

$$\begin{cases} \delta^2\Pi > 0 & \text{安定} \\ \delta^n\Pi = 0 \quad (n \geq 2) & \text{中立} \\ \delta^2\Pi < 0 & \text{不安定} \end{cases} \tag{6.20}$$

となる。通常「中立」な分岐点を $\delta^2\Pi = 0$ で規定することが多いが、それはこの比較的変位の小さい理論の範囲内の規準であることには注意しておく必要がある。図 6.5 にも示したように、有限変位理論の範囲内では分岐点のポテンシャルエネルギーはまだ下に凸の汎関数になっており

$$\delta^4\Pi > 0 \tag{6.21}$$

のように第 4 変分以降が正の値をとるため、分岐点そのものは厳密には安定状態なのだ。これに対し図 6.6 の伸び縮みバネ系の場合は分岐点の特性がこれとは逆になり

$$\delta^4\Pi < 0 \tag{6.22}$$

となるため、その分岐点是不安定状態だと判断できるわけだ。したがって安定条件も厳密には最低次の非零変分量が正であることで書き改める必要があるだろうから、ここで説明した線形化された有限変位理論では分岐点の安定性を正確には判定できないことには注意する必要がある。式 (6.16) をもっと高次項まで考えながらエネルギー的考察で初期不整感度等を組織的にまとめ、さらに座屈後の挙動についても詳細に説明した文献としては文献 [14] が挙げられる。

6.3 座屈現象の特徴と例

6.3.1 2種類の座屈現象

(1) 分岐座屈

今まで見てきた不安定現象は分岐現象と呼ばれているが、それは変形パターン（モード；形状；特性）が異なる複数のつり合い状態が可能になった時点で経路変更が生じる可能性があるからだ。その経路変更現象は安

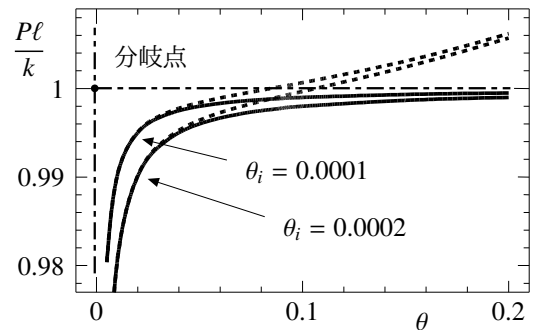


図 6.11 初期不整がある場合の挙動

定的に生じることもあるが不安定な場合もある。ただしその両方共を総じて不安定現象と呼んでいる。そして構造力学ではそれを座屈現象と総称することが多い。座屈現象そのものは以下に示すように通常二つに分類される。また座屈後の挙動も第6.3.2節に示すように2種類に分類され区別されることがある。

その構造部材で起こる分岐座屈の代表例を図6.12に示したが、これは図のインセットに示した片端固定の柱の圧縮で生じる曲げ座屈である。この柱の図心を外力 P で圧縮していくと、ある外力レベルに達するまではたわみが発生せず、柱はまっすぐなまま縮むという変形のみが生じる。ところがその限界の外力レベルに至ったところで、それまでと同じく単純に縮むつり合い状態と曲がってつり合う状態の2種類のつり合い状態が可能になる。さらに大きい外力レベルに対しては、まっすぐなまま縮むつり合い状態の方は不安定になり、曲がった状態の方が安定になるので自然界では曲がった状態が選択され、柱は曲がってしまう。図6.4の剛棒回転バネモデルの挙動に非常によく似ている。

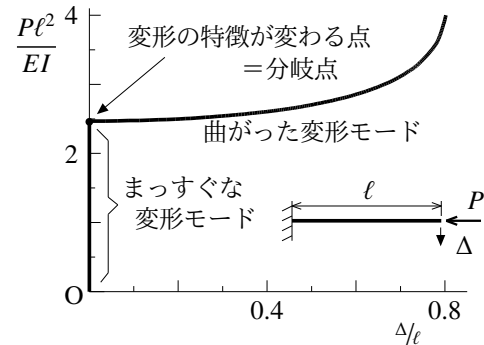


図6.12 柱の曲げ座屈

図6.4の剛棒回転バネモデルの挙動に非常によく似ている。このように、変形の特徴が異なる二つ以上のつり合い状態が可能になる臨界点を分岐点と称したが、分岐点に至るまでの変形の特性と異なる特性を持つ状態に突然移行する現象を分岐座屈と呼んでいる。

もう一つの代表例を図6.13に示したが、浅い角度で交わる骨組や盛り上がり（ライズ）の浅いアーチ等で顕著な現象である。この系は外力も構造も左右対称なので外力の増加に伴って生じる変形も左右対称だと考えられる。確かに点Bに到達するまでは左右対称な変形をする。しかしこの点Bにおいて、左右非対称な変形モード、例えば右半分には上に凸の曲げ変形が生じ、左半分には下に凸の曲げ変形が生じてつり合うという変形モードが可能になるのだ。つまり点Bが分岐点で、経路B→Cは左右非対称な変形モードである。しかもこの場合の分岐経路B→Cは、前の柱の例とは異なり不安定なつり合い状態になっている。一方、点Bを過ぎて点Aのピークを通過して点Cに至るつり合い経路は左右対称な変形を保持したままのつり合い状態になっている。しかしこれらの状態も不安定なつり合い状態なのだ。ということは、この図のBから直接Cへの経路の変形状態や、BからAを経てCに至る経路の変形状態を実験で観察するのは非常に難しいことになる。そのような点Bではどのようなことが起こり得るのかについては第6.3.2節で説明する。ところで、この図のB→Cの経路とB→A→Cの経路が交わっているように見えるが、この交点には意味が無いことには注意して欲しい。というのも系の変形形状が異なっていて、A→C側では中央のたわみ角が零なのに対し、B→C側ではそれが非零だからだ。

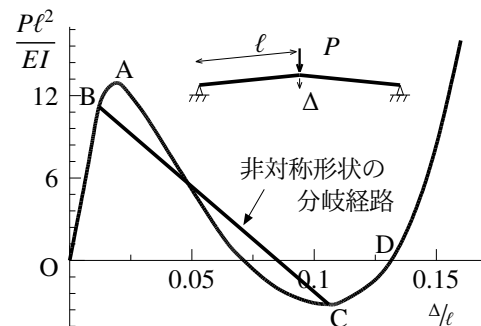


図6.13 分岐現象の例

(2) 極値座屈

図6.13と同じような構造ではあるが、骨組やアーチの尖り具合やライズによっては点Bのような(対称変形が非対称変形に移行するような)分岐点が存在しない場合もある。その場合には点Aまでの左右対称なつり合い状態は安定である。しかし、点Aに到達したあとのCに向けて降下するつり合い経路は不安定であり、実験でこの経路のつり合い状態を観察するには工夫が必要になる。つまり点Aもある種の不安定点である。このように、つり合い経路に極値が存在する場合にも系は不安定になる。このような座屈は分岐座屈とは呼ばず、

通常は次節で分類する座屈後の挙動で分類することが多く、かつてはこれを飛び移り座屈とか屈服座屈 [125] と呼んでいた。しかしこの文書では、分岐座屈との差異を表現するために極値座屈という造語を新たに導入しておく。同じような座屈現象はあとで説明する図 6.15 の薄肉円管の曲げでも起こる。ただし不安定を判定する規準は、分岐座屈の判定規準のうちの第 6.2.3 節で示した接線剛性を用いた規準である。

6.3.2 座屈点およびそのあとの挙動

(1) 飛び移り現象

前節の分岐点も極値になる点も、どちらも座屈が発生する臨界点なので座屈点と呼ぶことにする。図 6.12 の柱の場合には、座屈したあとも材料が降伏等せずに抵抗を失わなければ連続して安定なつり合い経路が存在する。例えば少し太めのまっすぐなピアノ線を圧縮した場合等には、ピアノ線は単に曲がっていくだけで外力には静的に抵抗し続けられる。しかし図 6.13 のアーチ状の骨組の場合は、点 B であれ点 A であれ、その座屈点以降にそういった安定なつり合い経路が連続しては 1 本も存在しない。このように座屈点直後の経路に安定なつり合い状態が一つも存在しない場合には、実験では動的な応答が見られる。例えば図 6.13 の場合は点 B の分岐点直後の連続したつり合い状態が二つ共不安定なので、外力を単調に増やしていく実験の場合には、点 B に至った外力レベルのまま図の右方の $\Delta/\ell \sim 0.15$ あたりの安定な状態にまで動的に移行する現象が観察される。それは点 C から点 D 方向への右上がりのつり合い経路が安定な状態だからだ。このように、あるつり合い点から、それと連続しない他の安定なつり合い点へと動的に移行する現象を飛び移り現象と称している。

それに似た、もう一つの代表例を図 6.14 に示した。これは **William** のトグルと呼ばれる構造系で、前節の例と同じような骨組だが両端が固定されている。この場合には分岐点はないが、外力を増加させてあるレベルに達するとピーク点 A に到達する。このピーク点は前節の極値座屈点であり、そのあとに連続するつり合い状態は不安定だ。しかし、同じ外力レベルでそれよりも大きく変位した状態に別の安定なつり合い点が存在するため、 $\Delta/\ell \sim 0.04$ あたりの安定状態へと動的に飛び移る。飛び移った先の状態は安定であるが、今度はその状態から逆に外力 P を減少させていくと、下に凸のピーク点 B のつり合い状態から $\Delta/\ell \sim 0.01$ あたりの安定状態へと飛び移る。実はこのような現象を示す座屈を「飛び移り座屈」と呼ぶ [125] ことがある。しかし、分岐座屈する図 6.13 の場合も分岐点で飛び移り現象が発生するため、座屈の分類として「飛び移り座屈」という言葉を使うのは適切ではないと考え、この文書では用いないことにした。

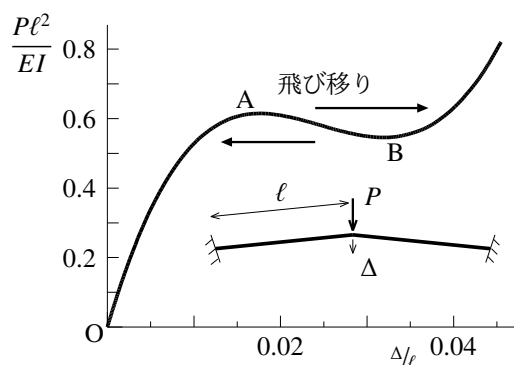


図 6.14 William のトグル

さてこのような現象を見ると、座屈現象が必ずしも普通の生活とは無縁な力学現象ではないことに気付く人もいると思う。例えば図 6.14 の挙動を利用するとキーボードの疲れ難いキー支持構造を作ることができる。つまり、キーを押し下げて点 A に達すると、それ以上の力を加えなくてもキーは大きく沈み込む。そのあと押さええている力をちょっとだけ緩めて点 B に至るとキーは元の位置の方に飛び移ろうとするわけだ。またガラス玩具「ビードロ」も



写真 6.1 飛び移り現象とビードロ・髪クリップ

William のトグルと同じ原理で音を出していることは容易に想像できると思う。さらにある種の廉価な「髪クリップ」等にも飛び移り現象を利用したのがある。髪クリップは図 6.13 の点 B で飛び移ったあと力を抜くと、点 D で留まることによって髪の毛を挟むことができる。また橋構造にとっては終局状態の一つである（悪玉の）座屈であるが、それが必要不可欠な（善玉の座屈）機能になる構造もあり得る。例えば太陽電池のような巨大な宇宙構造にそういったものがある。もし巨大構造を分解してスペースシャトルで運んだ場合、宇宙空間における組み立て作業には手間と大きな危険が伴うことは容易に想像できる。しかし全体構造をそのまま地上で、例えば座屈を有効利用して比較的小さい外力でたたむことが（力を加えたときの飛び移り現象を利用）でき、たたんだものを宇宙空間で放出しただけで自分自身が展開（力を除くときの飛び移り現象を利用）できれば非常に便利である。このような構造を自己展開型構造と呼んでいる。その具体例に自動車の窓の内側に吸盤で貼り付ける網状のシェード（第 L.2 節の図 L.5）がある。ねじりながら圧縮することによって直径 10 cm 程度の 3 重の輪になってドアポケットに収納されているが、利用するときに取り出して手を離すだけで、自身の内部の力だけで約 30 cm 四方の窓の大きさに拡がるのだ。

(2) 屈服現象

変形経路上の極値点や分岐点における外力レベルの状態が安定であっても、図 6.7 と同じようにそれ以外に安定なつり合い状態が一つも存在しない場合には飛び移る先すら無いから、系はそのまま崩壊してしまう。このような不安定現象は屈服現象と呼ばれる。図 6.15 に示したのは、薄肉円管に等曲げを作用させたときの挙動 [52] である。第 C.5 節には一つの近似的な解析モデルと結果を示したが、肉厚が非常に薄い円管なので、最初は円形をしていた断面が、曲げが加わるにつれて上下につぶれ始めて楕円形状になる。それに伴い梁の高さが小さくなるため、断面 2 次モーメントも小さくなって実質的な曲げ剛性が次第に小さくなる。その影響で、図に示したように断面変形の無い線形挙動よりも柔らかい挙動へとずれ始める。最終的には、断面がある程度扁平な楕円形状になったところで抵抗力のピークを迎えて崩壊に至る。これも「屈服座屈」と称する [125] ことがあるが、図 6.7 のように安定なつり合い状態が座屈後に存在しない分岐座屈もあり得るため、この文書ではそういった分類を避けた。

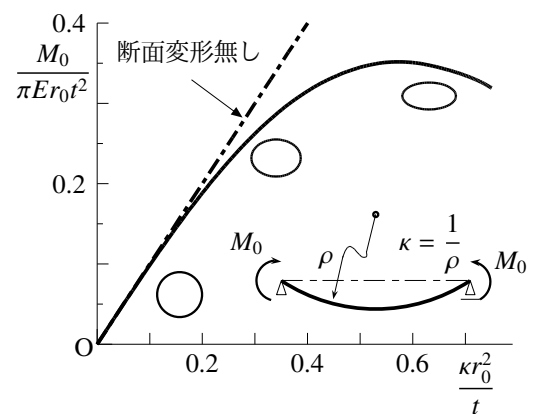


図 6.15 半径 r_0 肉厚 t の薄肉円管の曲げ

(3) 座屈は幾何学的な変化が原因、しかし・・・

このような座屈は構造工学的には非常に重要な問題で、特に圧縮を受ける鋼構造部材の設計に当たっては必ず考慮しなければならない。特に、材料としての強度にはまだ余裕があるにもかかわらず、ちょっとした変形による幾何学的な原因で構造系が強度を失う現象を座屈と捉えていることに留意すべきである。例えば図 6.15 のような現象は降伏等の材料的な限界によっても発生し得るが、単に材料非線形性のみによって生じる同様の応答は座屈とは呼ばないのが普通である。つまり座屈は幾何学的な非線形性が原因となって起こる変形特性の急激な変化やピークの存在のことを指すのだ。ただ材料非線形性に影響された「分岐」もあり、例えば鋼の引張試験片に生じる微視的なすべりが原因の「絞り」（断面が部分的に細くなる現象）がそれに当たる。これについては第 12.7 節の一つ例示したが、幾何学的非線形性と共に材料非線形性の両方に起因した不安定現象の代表例である。そのようなものも含め、塑性座屈等については文献 [41] 等を是非参照して欲しい。

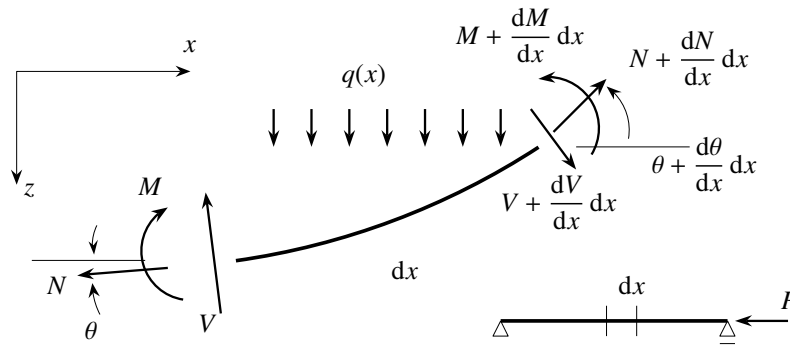


図 6.16 梁-柱のつり合い状態

6.4 梁-柱の力学

6.4.1 梁-柱の境界値問題と座屈

(1) 梁-柱理論

最も基礎的な構造部材の一つである「柱」を圧縮すると、ある外力レベルで分岐座屈が起こり「梁」としての曲げ挙動に突然変わってしまうことがある。その現象を対象とできる力学理論を梁-柱理論と呼ぶ。前述したように、その柱の分岐座屈では座屈荷重レベル付近の挙動だけを把握すれば工学的には十分なので、第 6.2.4 節で定式化した比較的変位の小さい範囲の理論として、つまり線形化された有限変位理論の枠組の中で梁-柱理論を定式化する。

1 本のまっすぐな等断面・均質材料の棒に軸力 P が作用したときに、それが曲がってつり合っている状態を対象としなければならない。ただしそのとき、微分要素には一般的には図 6.16 のように、曲げに関する分布外力も作用することにしておく。まず x 方向の力のつり合いより

$$\left(N + \frac{dN}{dx} dx\right) \cos\left(\theta + \frac{d\theta}{dx} dx\right) - N \cos \theta + \left(V + \frac{dV}{dx} dx\right) \sin\left(\theta + \frac{d\theta}{dx} dx\right) - V \sin \theta = 0$$

となる。ここで座屈点近傍では $|\theta| \ll 1$ なので $\sin \theta \approx \theta = -dw/dx$, $\cos \theta \approx 1$ と近似すると、上式は

$$\frac{d}{dx} \left\{ N(x) - V(x) \frac{dw(x)}{dx} \right\} = 0 \tag{6.23}$$

となる。同様に z 方向の力のつり合いより

$$\frac{d}{dx} \left\{ V(x) + N(x) \frac{dw(x)}{dx} \right\} + q(x) = 0 \tag{6.24}$$

となり、また左端回りのモーメントのつり合いから

$$\frac{dM(x)}{dx} - V(x) = 0 \tag{6.25}$$

を得る。ここまでなら、モーメントのつり合い式だけが第 4 章の微小変位理論の式 (4.18) と一致している。

さてここで対象としているのは大きな軸力の影響でちょっとだけ曲がってしまった部材の挙動なので、座屈点近傍では、軸力がその他の断面力よりも比較的大きいと考えていい。すなわち、大まかなオーダー比較と（次元が異なるといった些細なことはとりあえず無視して各項間の比較を目的と）して

$$|N(x)| \sim 1 \text{ のオーダー, } |V(x)| \sim \left| \frac{dw}{dx} \right| \text{ のオーダー} \ll 1 \tag{*}$$

程度だと近似していい⁹ことになる。すると、上で得たつり合い式のうち式(6.23)の第2項は第1項に比べると無視できるくらい非常に小さいが、式(6.24)の第2項は第1項とほぼ同じオーダーになる。したがって、式(6.25)を式(6.24)に代入して V を消去した上で、この近似式(*)によって修正した式(6.23)も列挙すると

$$\frac{dN(x)}{dx} = 0, \quad \frac{d}{dx} \left\{ \frac{dM(x)}{dx} + N(x) \frac{dw(x)}{dx} \right\} + q(x) = 0 \quad (6.26a, b)$$

が最終的なつり合い式になる。軸力のつり合い式(6.26a)は微小変位理論のそれと同じである。そして、曲げのつり合い式(6.26b)の第2項が線形の初等梁理論には無い非線形付加項で、座屈解析で最も重要な項である。

境界条件も同様の演算を行えば、第4章の式(4.26)で定義した記号 n_i を用いて

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i N = F_i, \quad (6.27a)$$

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(\frac{dM}{dx} + N \frac{dw}{dx} \right) = S_i, \quad (6.27b)$$

$$-\frac{dw}{dx} = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M = C_i \quad (6.27c)$$

となる。式(6.27b)のせん断力に関する条件の内力第2項が初等梁理論とは異なるが、この項が必要なことはあとで図6.17等で説明する。

ここで基本的に解きたい対象は図6.1のように端部に軸力 P だけが作用した系なので、式(6.27a)にこの境界条件を代入して式(6.26a)を解くと

$$N(x) = -P = \text{const.} \quad (6.28)$$

が軸力に関する解となる。したがって、この結果を上をつり合い式と境界条件式に代入して整理すると、梁-柱理論の曲げに関するつり合い式は

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} - P \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + q(x) = 0, \quad 0 < x < \ell \quad (6.29)$$

と表され、境界条件は

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(\frac{dM}{dx} - P \frac{dw}{dx} \right) = S_i, \quad (6.30a)$$

$$-\frac{dw}{dx} = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M = C_i \quad (6.30b)$$

となる。元々は非線形だったが、オーダー比較で近似した結果軸力が一定になるので、ここまでの表現では見かけ上は定数係数の線形理論になっているのは興味深い。逆に言うと、そういった限定的な設定における支配方程式であることを十分に認識しておく必要がある。

あとは構成方程式が必要となるが、これは初等梁理論と同じ式(4.13b)で与えられると考えていい。厳密なアプローチについては第6.6節および第C.4節にその概要を示してあるが、梁-柱理論として整合する構成方程式は、軸力と軸ひずみに関する方を

$$N(x) = EA \epsilon, \quad \epsilon = \frac{du(x)}{dx} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw(x)}{dx} \right)^2 \quad (6.31a, b)$$

と近似 ($\{dw/dx\}^2$ を無視) して捉えるべき¹⁰であることがわかっている。伸びひずみの第2項が、たわむことによって生じる非線形的な伸びひずみ成分である。梁-柱の場合は、線形の伸びひずみ du/dx よりもたわみ角 dw/dx の方のオーダーが1段階大きいので、たわみ角の非線形項が無視できなくなる。しかし通常、梁-柱理論の枠組の中でこの軸力の構成方程式が必要になることは稀なので、この章では考えないことにする。実際ある程度細長い棒の場合(極端な例はピアノ線等)で、比較的小さい変位の範囲内では、軸の伸びひずみの影響は曲げによるひずみに比べて無視できるくらい小さいのも事実である。

⁹ 結果を知っているからこそそのいい加減なオーダー比較かもしれないが。呵呵

¹⁰ この近似が、式(*)のオーダー比較によって式(6.23)の第2項を無視した近似と整合している。

したがって、式(4.13b)の曲げモーメントと曲率の関係を上式に代入すると、たわみ $w(x)$ で表した梁-柱理論のつり合い式(6.29)は

$$-EI \frac{d^4 w(x)}{dx^4} - P \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + q(x) = 0 \tag{6.32}$$

となり、式(6.30)の境界条件は

$$w = \text{与える} \text{ あるいは } n_i \left(-EI \frac{d^3 w}{dx^3} - P \frac{dw}{dx} \right) = S_i, \tag{6.33a}$$

$$-\frac{dw}{dx} = \text{与える} \text{ あるいは } n_i \left(-EI \frac{d^2 w}{dx^2} \right) = C_i \tag{6.33b}$$

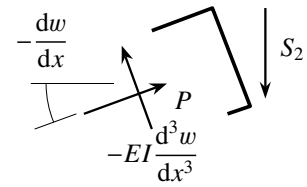


図 6.17 せん断力の境界条件への軸力の寄与成分

と表される。式(6.33a)のせん断力の境界条件に軸力 P の成分が含まれているのは、変形後の軸方向が元の x 方向とたわみ角 dw/dx の分だけ傾いているからである。その右端の様子を図 6.17 に例示したので容易に理解できると思う。否、 P は水平方向の外力だったと反論する読者がいるかもしれない。しかし dw/dx が非常に小さいので式(6.28)のように軸力 N そのものもほぼ P であり、軸力は曲がった梁の軸方向の断面力なので、この図のように考えても構わないのだ。

もちろん、軸方向の分布外力が存在する場合には式(6.28)のような一定軸力にはならない。しかしその場合でも、軸方向の境界値問題が曲げと独立しているために、軸方向の力のつり合い式(6.26a)に分布外力を含め、適切な境界条件から $N(x)$ をまず算定しておけば、同じように解けるはずだ。例えば図 6.18 に示したように柱の自重に相当する等分布外力 p_0 が作用している柱の場合には、軸力が

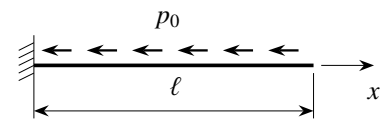


図 6.18 柱の軸力が分布している場合

$$N(x) = p_0 (x - \ell)$$

と求められる。したがって、この式を式(6.26b)に代入して、軸方向の等分布外力がある場合の梁-柱のつり合い式を求めると

$$\frac{d}{dx} \left\{ -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + p_0 (x - \ell) \frac{dw(x)}{dx} \right\} + q(x) = 0 \tag{6.34}$$

のような変数係数の微分方程式¹¹になる。こいつは手強いぞ。第 6.4.2 (4) 節で簡単に説明するが、詳細については文献 [95] 等を参照のこと。

演習問題 6-3

3. 図を用いて式(6.32)(6.33)を誘導せよ。特に境界条件については熟考せよ。

(2) 付加項の物理的な意味と Euler 座屈

せん断力の境界条件式(6.33a)に軸力 P が含まれる理由は図 6.17 で説明した。ではつり合い式(6.32)の第 2 項はどのような物理成分なのだろう。それを考えるために最も基本的な系、つまり図 6.19 に示した両端単純支持された棒の座屈問題を解こう。この場合は分布外力が存在しないので、つり合い式は式(6.32)より

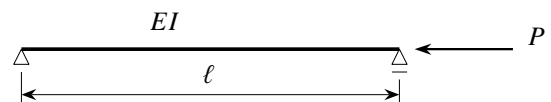


図 6.19 単純支持された棒の座屈

$$-EIw'''' - Pw'' = 0$$

¹¹ 国家公務員試験の 2 次試験に誘導過程が出題されたことがある。やはり第 1 著者は国家公務員にはなれないと実感した。ってことは、土木職国家公務員は非整数次の Bessel 関数の値も計算できないと駄目らしいぞ。むむむ。すごいつ！

であり、境界条件は式 (6.33) から両端共に

$$w = 0, \quad -EIw'' = 0$$

で与えられる。ここに ()' は x に関する微係数であり、以下でも用いる。ただしこの節に限っては、少し物理的な理解を深めるために、標準的な微分方程式の解法を用いていないことには注意して欲しい。その標準的な解法は次の節で示す。さて図より明らかなように左右対称の系なので、両端のせん断反力も零であることが容易に予想される（としては本当はいけないよ）。したがって、上式のつり合い式を1回積分しても、せん断力の境界条件と対称条件を考慮すると

$$-EIw''' - Pw' = \text{const.} = (\text{せん断力}) = 0$$

となる。さらにもう1回積分しても、上式の単純支持の境界条件を考慮すると

$$-EIw'' - Pw = \text{const.} = 0 \quad (a)$$

を得る。そこで、曲げモーメントの構成則式 (4.13b) を用いると第1項は曲げモーメントそのものであり、第2項を右辺に移すと、この式 (a) は

$$M(x) = w(x) \times P \quad (6.35)$$

という表現とみなすことができる。

この式の物理的な意味を理解するために、図 6.20 のようにたわんだ状態を考える。すると、そのたわみが生じている変位後の断面 A から眺めたときに、式 (6.35) の右辺 $\{w(x) \times P\}$ は端部の軸力 P がたわみ $w(x)$ と作るモーメントであることがわかるはずだ。そしてその断面 A には図のよ

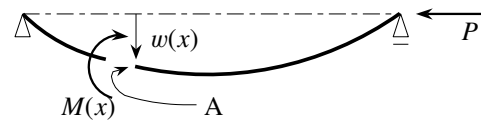


図 6.20 単純梁の変形後のつり合い状態

うな内力曲げモーメント $M(x)$ が生じてつり合っていないといけないはずだ。つまり、式 (6.35) は、たわんだ状態における内力曲げモーメント $M(x)$ と端部の軸力 P が作る付加モーメント $\{w(x) \times P\}$ との、断面 A におけるモーメントのつり合いそのものであることがわかる。すなわちつり合い式 (6.32) の第2項は、たわんだ状態の断面で考慮すべき、端圧縮外力が作る付加的な曲げモーメントに関連した成分である。この式 (6.35) を見れば、変形した状態でつり合いを考えようとする幾何学的非線形問題の一端が理解できると思う。

さて本題に戻って解析を続けよう。2回積分して得た上式 (a) は2階の常微分方程式であり、通常の手段を用いれば

$$w(x) = a \sin \mu x + b \cos \mu x \quad (b)$$

が一般解である。ただし軸力 P は圧縮を正として μ を

$$\mu^2 \equiv \frac{P}{EI} > 0 \quad (6.36)$$

で定義した。両端のたわみが零になる境界条件に式 (b) を代入すると、結局

$$w(0) = b = 0, \quad w(\ell) = a \sin \mu \ell + b \cos \mu \ell = 0$$

であればいい。したがって $b = 0$ であると同時に

$$a \sin \mu \ell = 0 \quad (c)$$

が成立していなければならない。

この式 (c) は二つの可能性を提供している。一つは $a = 0$ であるが、これだと結局 $w(x)$ が恒等的に零ということになり、曲げ変形は発生しない。もちろんこれはいわゆる「当たり前解」であり、柱がまっすぐなままの解で、安定不安定を問わず常に解の一つであり得る。あるいは座屈前の解と考えてもいいだろう。しかしこの当たり前解は正解ではあるが「欲しい解」ではない。今ここで問題にしているのは「軸力のみで作用で曲がる解が存在するか否か」だったはずだ。したがって $a \neq 0$ となる解の存在の可能性を捜す必要があるわけだ。それには式 (c) の二つ目の可能性、つまり

$$\sin \mu \ell = 0$$

であればいいことがわかる。したがって、もし

$$\mu \ell = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots \quad (d)$$

になるような μ が存在した場合には、 $a \neq 0$ の解を持つことができることになる。それが「欲しかった解」だ。式 (6.36) の定義を上式 (d) に代入すると

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{n\pi}{\ell} \quad \rightarrow \quad P = P_{\text{cr}(n)} \equiv \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 EI, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.37)$$

で定義される限界荷重 $P_{\text{cr}(n)}$ に外力が達したときに $a \neq 0$ でもよくなり、座屈が発生する可能性があるのだ。通常荷重 P は零から増加させていくので、最初の分岐座屈点は $P_{\text{cr}(n)}$ の最小値、つまり $n = 1$ のときの

$$P_E \equiv P_{\text{cr}(1)} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} \quad (6.38)$$

が最小の座屈荷重となる。これが基本的な **Euler** 座屈の解であり、この P_E が最も基本的な柱の座屈荷重で **Euler** 荷重と呼ばれている。結局積分定数 a は不定のままだから、求められたたわみ形状は

$$w(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \quad (e)$$

となり、大きさは不定だが sine 曲線の半波長の形状で座屈しようとするのがわかる。このような座屈形状を座屈モードと呼んでいる。梁-柱理論が比較的変位の小さい近似理論として定式化されていることを考えれば、座屈後にどうなるかという情報、つまり a を決定する情報を与えてくれないのは仕方がない。ちょうど図 6.9 で実線が $P \geq P_{\text{cr}}$ には至らなかったことや、 $P = P_{\text{cr}}$ の一点鎖線上の解がすべて座屈後の不定解だったことと同じ状況だ。座屈後の挙動を知る必要がある（図 6.9 の破線を描きたい）場合には、近似の無い有限変位理論を用いる必要がある。以上のような問題は、数学では「微分方程式の固有値問題」と呼ばれており、当たり前解（自明な解）以外の解の存在から、固有値（Euler 荷重）と固有関数（座屈モード）が求められているのだ。

通常的设计では、設計断面の応力を算定し、それを基準値（強度）と比較して安全性を確認する。この座屈荷重に対応する軸応力からその強度を、つまり軸圧縮強度を計算すると

$$\sigma_{\text{cr}} \equiv \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \quad (6.39)$$

となる。ここに A は棒の断面積であり

$$\lambda \equiv \frac{\ell}{r}, \quad r \equiv \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (6.40a, b)$$

と定義した。 r は断面の回転半径と呼ばれ、断面定数だけで計算できる長さの次元を持ったパラメータで、断面寸法を代表する長さと考えればいい。 λ は細長比ほそながひと呼ばれ、断面寸法と比較したときの棒の細長さの程度を表すパラメータである。式 (6.39) から明らかのように、座屈応力は細長比の 2 乗に反比例している。したがっ

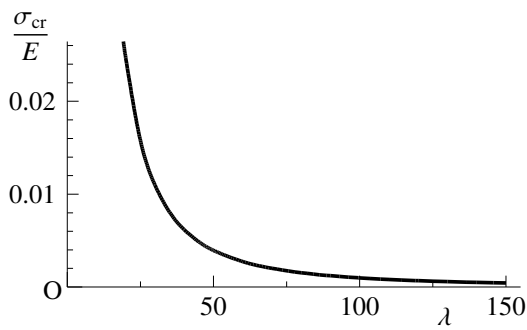


図 6.21 Euler 曲線

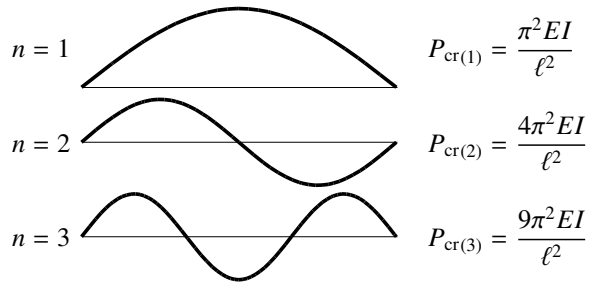


図 6.22 座屈モードと次数

て、柱が細長くなればなるほど急激に軸圧縮強度は低くなる。結果を図 6.21 に示した。もちろん、材料の降伏応力を σ_Y としたとき、縦軸が (σ_Y/E) を超える部分はあまり意味が無いが、それについては後述する。この曲線を **Euler 曲線** と呼ぶ。

ところで、式 (6.37) の $n \neq 1$ の場合の値は何だろう。例えば $n = 2$ の値は式 (6.38) の Euler 荷重の 4 倍になる。もし、この単純梁を注意深く圧縮するとき例えば棒の中央をちょっとだけ手で支えることによって Euler 荷重後もまっすぐなまを維持できれば、その 4 倍の外力に達したときにもう一つの分岐点が存在することになるのだ。そして、そのときのたわみの解は式 (e) とは異なり

$$w(x) = a \sin\left(\frac{2\pi x}{l}\right)$$

となる。この座屈モードは sine 曲線の 1 周期分で中央が節になるので、そのまま棒の中央をちょっとだけ支え続けてもこの 2 次座屈は避けることができない。3 次モードまでを図 6.22 に示した。このような高次の座屈は通常は発生しないが、例えば後述のように、柱の中間にバネ支持等を設けることによってほんのちょっとでも拘束すると、この高次モードに対応する座屈荷重レベルまで強くできることを示唆している。そういう意味からは、高次のもも含め座屈モードは設計上も非常に重要な概念である。

6.4.2 柱の曲げ座屈

(1) 単純な軸圧縮力が作用した場合

前節では付加項の物理的な意味を明らかにしたが、ここでは固有値問題の標準的な解法を用いて柱の座屈荷重を求める。図 6.23 に示した棒を柱と呼ぶが、つり合い式は式 (6.36) の μ を用いると

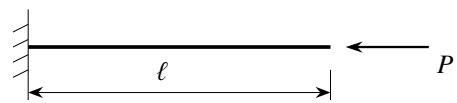


図 6.23 柱の曲げ座屈

$$w''''(x) + \mu^2 w''(x) = 0$$

である。左端 $x = 0$ の境界条件は $w = 0$ と $w' = 0$ である。一方、右端 $x = l$ の境界条件は μ を用いて

$$-EI(w'''' + \mu^2 w'') = 0, \quad -EIw'' = 0$$

となる。せん断力が作用していない境界条件の第 1 式の表現については十分注意すること。常微分方程式を解く常套手段として $\exp(\xi x)$ を上のつり合い式の w に代入すると、その ξ についての特性方程式が

$$\xi^4 + \mu^2 \xi^2 = 0$$

となる。 $\xi = 0$ が 2 重根で $\xi = \pm i\mu$ が他の 2 解だから、一般解は $\exp(0) \times (a + bx)$ と $\exp(\pm i\mu x)$ で

$$w(x) = (a + bx) + c \sin \mu x + d \cos \mu x \tag{6.41}$$

と求められる。これを境界条件に代入すると順に

$$a + d = 0, \quad b + \mu c = 0, \quad -\mu^2 b = 0, \quad \mu^2 (c \sin \mu \ell + d \cos \mu \ell) = 0$$

となるので、行列表示をすると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \\ 0 & -\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu^2 \sin \mu \ell & \mu^2 \cos \mu \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となる。右辺は零だから、もし左辺の係数行列が正則で逆行列が存在するならばすべての積分定数は零になり、それは座屈前の曲がらない解であり、無意味な解と呼ばれる。

ここでは座屈する可能性を検討しているので、積分定数の少なくとも一つが非零になる可能性、つまり上式が無意味ではない解を持つ可能性を探る必要があり、それはこの係数行列が正則でなくなる可能性を探ることに等しい。正則でない条件は、この係数行列の行列式が零になることである。第1列の第1行以外がすべて零なので、行列式は右下の3×3の部分行列を用いて簡単に計算でき、座屈が可能なのは

$$\det(\text{係数行列}) \rightarrow 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ -\mu^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu^2 \sin \mu \ell & \mu^2 \cos \mu \ell \end{pmatrix} = \mu^5 \cos \mu \ell = 0 \quad (6.42)$$

でなければならないという条件を得る。したがって、最小の座屈荷重が

$$\cos \mu \ell = 0 \rightarrow \mu \ell = \frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad P_{\text{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} = \frac{1}{4} P_E \quad (6.43a, b)$$

と求められる。つまり式(6.38)で定義した Euler 荷重の1/4の軸力で座屈する。求められた結果を上の変立方程式に再度代入して積分定数を計算すると、結局 $a = -d$ 以外は零になり、座屈モードは

$$w(x) = a \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2\ell} \right)$$

と求められる。もちろん a は不定で、座屈モードは sine 曲線の1/4波長分に相当する。

前述のように、このように設定された問題を微分方程式の固有値問題と呼び、 μ が固有値に、座屈モードが固有関数に相当する。座屈荷重はこのように境界条件に強く支配され、値が大きく異なる。その違いを明確化するために

$$P_{\text{cr}} = k_b \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = k_b P_E, \quad k_b = \left(\frac{\mu \ell}{\pi} \right)^2 \quad (6.44a, b)$$

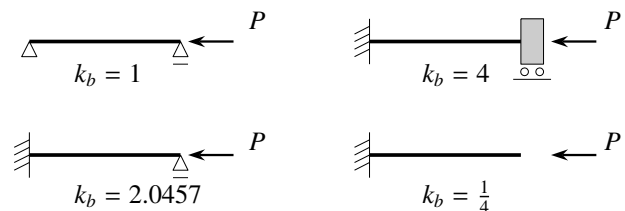


図 6.24 代表的な境界条件の場合の柱の座屈

と¹²置き、座屈係数 k_b で境界条件の影響を表現することがある。代表的な境界条件の場合の座屈係数を図 6.24 に示しておいた。でもこれってわかり易いですか。これよりも次の有効座屈長の方がわかり易いと思う。

さて、Euler 荷重で座屈する単純梁の座屈モードは sine 曲線の半波長分であったのに対し、柱のモードは1/4波長分になっている。つまり図 6.25 に示した座屈形状を見て比較すると明らかなように、「長さ ℓ の柱」が座屈するときの状況（下から二つ目の図）は「長さ 2ℓ の単純支持された棒」が座屈するときの状況（下の図）と

¹² バネ定数の k と区別するために添え字 b を用いているが、慣例では添え字を付けない。また、梁の剛性行列 k_b と混同しないこと。

表 6.1 有効座屈長

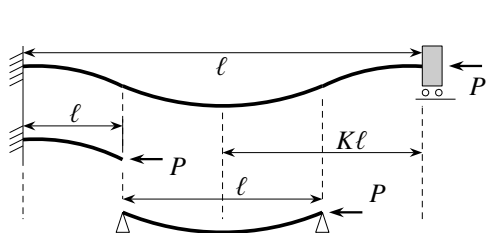


図 6.25 種々の柱の座屈形状

境界条件		有効座屈長 ($K\ell$)
両端単純支持		ℓ
片持ち		2ℓ
両端固定		0.5ℓ
片端固定片端単純支持		0.699ℓ

一致していることがわかる。したがって、Euler 荷重公式の ℓ を 2ℓ にした外力が柱の座屈荷重になっており、それは Euler 荷重の $1/4$ になる。このことから k_b の見方を変えて式 (6.44) を

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(K\ell)^2}, \quad K \equiv \sqrt{\frac{1}{k_b}} \quad (6.45a, b)$$

と読み替えることもできることがわかる。この $(K\ell)$ は有効座屈長と呼ばれ、対象としている座屈モードの sine 半波分の長さに対応する。 K は有効座屈長係数と呼ばれる。つまり上の例以外の境界条件の場合も、生じるであろう座屈モードを想像すれば、その sine 半波分の長さから $(K\ell)$ を推定できるから、 k_b を算定するよりは求め易いと思う。代表例を表 6.1 にまとめた。さらに実際の骨組中の一部材の座屈を対象とする場合には、部材毎の境界条件がここに示したような理想的なものではなく、接合された相隣接する部材同士が互いに弾性支持し合っていることになるので注意する必要があるが、その場合も有効座屈長の考え方でおおよその座屈荷重を見積もることができそうだ。個々の詳細な結果や例については文献 [95] 等を参照のこと。

(2) 端部が弾性支持された柱の場合

骨組中の 1 部材のモデルとしては不十分だが、一つの簡単な例として図 6.26 のように柱の先端が線形バネで支持されている場合の曲げ座屈を解いておこう。これは、ちょっとした支持が軸圧縮強度をどのくらい変化させるかを実感するための例だと考えて欲しい。境界条件は普通の柱の場合とほとんど同じだが、右端のせん断力の境界条件において式 (4.29) の左辺第 2 項のようなバネによる付加項を考慮する必要がある。つまり、この梁-柱の場合の右端のせん断力の境界条件は式 (6.33a) で $S_2 = -k w(\ell)$ と考えればよいから、 $n_2 = 1$ なので

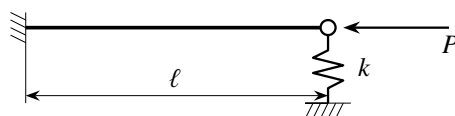


図 6.26 弾性支持された柱の曲げ座屈

$$-EI w'''(\ell) - P w'(\ell) + k w(\ell) = 0 \quad (6.46)$$

と改訂すればいい。したがって、他の条件も含めた境界条件を μ を用いて表すと

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad w''(\ell) = 0, \quad -w'''(\ell) - \mu^2 w'(\ell) + \frac{k}{EI} w(\ell) = 0$$

となる。したがって、一般解の式 (6.41) をこの境界条件に代入して整理すると順に

$$a + d = 0, \quad b + \mu c = 0, \quad c \sin \mu \ell + d \cos \mu \ell = 0, \quad -\mu^2 b + \frac{k}{EI} (a + b \ell + c \sin \mu \ell + d \cos \mu \ell) = 0$$

と表される。これを行列表示して、係数行列の行列式が零になる条件から座屈荷重を求める。この係数行列も比較的簡単な形になっているので、容易に

$$\det(\text{係数行列}) = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \\ 1 & \ell - \frac{\mu^2 EI}{k} & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \\ \ell - \frac{\mu^2 EI}{k} & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell - 1 \end{pmatrix} = \mu \left(\ell - \frac{\mu^2 EI}{k} \right) \cos \mu \ell - \sin \mu \ell = 0$$

となることがわかる。したがって、式(4.42)で定義したバネに関するパラメータ α_s を用いて書き直すと

$$\tan \mu \ell = \frac{\mu \ell}{\alpha_s} \{ \alpha_s - (\mu \ell)^2 \} \tag{6.47}$$

が座屈荷重を求めるための特性方程式になる。 μ に関して陽な表現になっておらず、座屈荷重は数値的にしか計算できないが、まずは二つの特別な場合¹³を考えておこう。

一つの特異な状態はバネが存在しない場合で、それは $\alpha_s = 0$ とすればいいから特性方程式(6.47)は

$$\cos \mu \ell = 0$$

となる。これはまさに式(6.42)で得た普通の柱の座屈に関する特性方程式であり、座屈荷重は Euler 荷重の $1/4$, ($k_b = 1/4$) になる。もう一つの特異な場合はバネが剛になった場合である。この場合には、式(6.47)で $\alpha_s \rightarrow \infty$ という極限を考えればよく、結局

$$\mu \ell = \tan \mu \ell \tag{6.48}$$

が特性方程式になる。これは演習問題 6-4 の 5 番の片端固定・片端単純支持梁の座屈の特性方程式に一致し、座屈係数が $k_b \approx 2.0457$ と求められる。この二つの答を踏まえると、 k が零でも無限大でもない一般的なバネ定数の場合の座屈係数は、そのバネの剛性を代表するパラメータ α_s の大きさに依存して、この 2 者の座屈係数の中間の値をとることがわかる。類似の問題を第 6.5.1 節でも再度解析するが、式(6.47)の結果を図 6.27 に示した。バネ定数の増加に対する座屈係数の増加の速さが比較的大きいことがわかり、ちょっとした拘束や支持等の補強によって軸圧縮強度をぐんっと上げることが期待できることを示している。

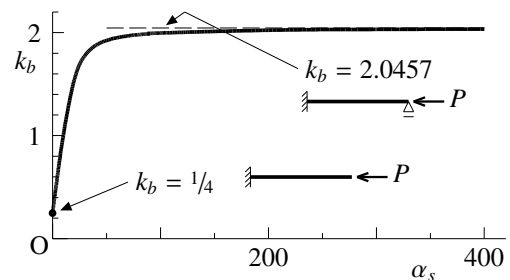


図 6.27 弾性支持された柱の座屈係数

(3) 変形と共に向きが変わる軸圧縮力が作用した場合

境界条件をよりよく理解するために面白い問題を解いておこう。それは図 6.28 に示したように、柱の先端に作用している軸圧縮力の向きが常に柱の軸線に沿った方向になるように保たれている場合である。このような力を追随力とか一般的には非保存力¹⁴と呼ぶ。具体的にはロケットの推力や庭の水撒きに使うホース先端



図 6.28 追随力が作用した棒の曲げ座屈

部分を思い浮かべるといい。例えばホースを地面に置いたまま水量を増していき、ある水量以上になると

¹³ 新しい式を得た等のときに、それが正しいかどうかを確認するためには、極端な場合を想定するといいい。

¹⁴ 式(5.63)の第3項にあるような外力ポテンシャルが定義できる力を保存力と呼んでいる。追随力のような力は、外力仮想仕事は定義できるがポテンシャルを定義できないので、非保存力と呼ばれる。

ホースがその向きをいろんな方向に変えながら地面の上を「のた打ち回る」のが観察される。これも一種の不安定現象だろうから、梁-柱理論で解けるのではないだろうか。

たわみ角は非常に小さいので、軸力に関する右端の境界条件は近似的には前の例と同じと考えてよく、軸力は $N = -P = \text{const.}$ と考えていいはずだ。前節の柱の場合と異なる境界条件は右端のせん断力に関するものだけで、軸力 P が斜めに作用していることから

$$-EIw''' - Pw' = S_2 = -P \sin(\text{たわみ角}) \simeq -Pw' \quad \rightarrow \quad -EIw''' = 0$$

となる。見かけ上、初等梁理論のせん断力の境界条件に一致することに注意して欲しい。したがって式(6.41)の一般解をすべての境界条件に代入すると

$$a + d = 0, \quad b + \mu c = 0, \quad -\mu^2(c \sin \mu \ell + d \cos \mu \ell) = 0, \quad -\mu^3(c \cos \mu \ell - d \sin \mu \ell) = 0$$

となるので、行列表示すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \\ 0 & 0 & \cos \mu \ell & -\sin \mu \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る。しかしながら

$$\det(\text{係数行列}) = -\sin^2 \mu \ell - \cos^2 \mu \ell = -1$$

と一定値をとることからすべての積分定数は零以外にはなり得ず、結局座屈は生じないことを結論付ける。

これは観察とは異なる結論になってしまったが、それは実は、梁-柱理論がそのままでは適用できない不安定現象の基本的な代表例だったからなのだ。詳細については文献[95]等を参照して欲しいが、この問題を解決するには(のた打ち回るホースのような)動的な問題として解く必要があるとされている。つり合い式(6.32)左辺が z 方向の梁-柱に作用する力の総和だから、Newtonの法則からその運動方程式は

$$-EI w''''(x, t) - P w''(x, t) + q(x, t) = m \ddot{w}(x, t)$$

となる。ここに m は単位長さ当たりの質量であり、上付ドットは時間に関する微分を表す。境界条件は上で求めたように

$$w(0, t) = 0, \quad w'(0, t) = 0, \quad w''(\ell, t) = 0, \quad w'''(\ell, t) = 0$$

である。調和振動解は $w \sim \phi(x) e^{i\omega t}$ と置いていいので、これを上の運動方程式に代入すると一般解は

$$\phi(x) = a \sinh \mu_1 x + b \cosh \mu_1 x + c \sin \mu_2 x + d \cos \mu_2 x$$

となり、境界条件は単に $\phi(0) = 0, \phi'(0) = 0, \phi''(\ell) = 0, \phi'''(\ell) = 0$ となる。ここに

$$\mu_1 \equiv \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\sqrt{\frac{p^2}{4} + \zeta} - \frac{p}{2}}, \quad \mu_2 \equiv \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\sqrt{\frac{p^2}{4} + \zeta} + \frac{p}{2}}, \quad p \equiv \frac{P\ell^2}{\pi^2 EI}, \quad \zeta \equiv \frac{m\omega^2 \ell^4}{\pi^4 EI}$$

と定義した。この一般解を境界条件に代入して、積分定数 $a \sim d$ に有意な解が存在するための条件、つまり係数行列の特異性から振動数を求めるための方程式が

$$(p^2 + 2\zeta) + 2\zeta \cosh \mu_1 \ell \cos \mu_2 \ell + p \sqrt{\zeta} \sinh \mu_1 \ell \sin \mu_2 \ell = 0$$

と求められる。

この系の固有振動数の最低次からの二つを順に ω_1, ω_2 と記すことにすると、 $P = 0$ のときに上式から得られる振動数はそれぞれ $\zeta = 0.127, 4.98$ となり、式(9.190)の片持ち梁の第1次と第2次の固有振動数に一致する。ところが、外力 P が大きくなるにつれて上式から得られる固有振動数は変化し、図 6.29 のようにこの二つの振動数がお互いに近づき始め、ある外力レベル $P = P_{cr}$ (図中の丸印) で両者が一致してしまう。そして、このレベルを超える外力に対しては振動数が複素数 ($\omega \rightarrow \sigma \pm i\tau$) になるため、解が

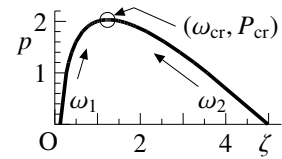


図 6.29 軸力と振動数の関係

$$\exp(i\omega t) \rightarrow \exp(\mp\tau t)\exp(i\sigma t)$$

となる。これは時間と共に発散する解を含んでおり、系が動的不安定になることを意味する。だから水撒きホースは不規則に動き回り続けることになる。この二つの固有振動数が一致する条件から

$$p = 2.0315, \quad \zeta = 1.2322 \quad \rightarrow \quad P_{cr} = 2.0315 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}, \quad \omega_{cr} = 1.110 \frac{\pi^2}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (6.49a, b, c, d)$$

が座屈荷重¹⁵になる。なぜ静的な梁-柱理論では解けないかって? うーむ・・・

(4) 等分布外力による座屈

第 6.4.1 (1) 節の最後に説明したが、図 6.18 のような軸方向の等分布外力がある場合の梁-柱のつり合い式は変数係数の微分方程式

$$\frac{d}{dx} \left\{ -EI \frac{d^3 w(x)}{dx^3} + p_0 (x - \ell) \frac{dw(x)}{dx} \right\} + q(x) = 0 \quad (6.34) \text{再掲}$$

であった。そこで文献を読むと、 $q(x) \equiv 0$ のとき

$$\xi \equiv \frac{2}{3} \sqrt{\frac{p_0}{EI}} (\ell - x)^3, \quad u(\xi) \equiv \frac{dw(x)}{d\xi}$$

という変数変換をすると、上の式 (を 1 回積分した式) は $u(\xi)$ に対する

$$\xi^2 \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \xi \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left\{ \xi^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \right\} u = 0$$

という方程式に変換できる (なんてことがどうしてわかるんだろう)。ところで、 n 次の Bessel 方程式が

$$x^2 \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + x \frac{\partial y(x)}{\partial x} + (\alpha^2 x^2 - n^2) y(x) = 0$$

と表され、その解が n 次の Bessel 関数であることを踏まえると、上式は非整数の $1/3$ 次の Bessel 方程式なので、その一般解は $\pm 1/3$ 次の第 1 種 Bessel 関数の線形和になる。

あとは通常通り、境界条件を満足する有意な解の存在条件から座屈荷重を求めることができる。自由端の条件から $+1/3$ 次の Bessel 関数は候補からはずれ、もう一つの $-1/3$ 次の Bessel 関数が $\xi = 0$ で特異な関数であることから、その存在条件を求めるには工夫が必要だが、文献 [95] の丁寧な説明を追跡すれば、最終的には固定端の条件 ($w'(0) = 0$) から、最小の座屈荷重を決定する式が

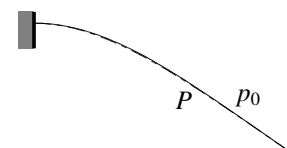


図 6.30 分布力载荷の柱

$$J_{-\frac{1}{3}}(\xi_{cr}) = 0, \quad \text{ここに} \quad \xi_{cr} \equiv \frac{2}{3} \sqrt{\frac{(p_0)_{cr} \ell^3}{EI}}$$

¹⁵ 文献 [95] の $p = 2.008$ や、 $p = 0$ の場合も含めて表にある値は間違い。

となるので、その解 ξ_{cr} から座屈荷重 $(p_0)_{cr}$ が求められる。整数次の Bessel 関数 $J_n(x)$ の値を漸化式と $J_n(+\infty) = 0$ で求めるプログラムは持っているが、これってどうやれば・・・むむむ。そこで Scilab というソフトウェアを用いて 2 分法¹⁶で解いたところ $\xi_{cr} = 1.86635$ となり、文献 [95] の値を確認できた。したがって

$$(p_0)_{cr} \ell = 7.83734 \frac{EI}{\ell^2} = 0.794089 \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

となる。つまり、先端の集中荷重の場合の約 3 倍程度の荷重が必要で両端単純支持梁のそれに近づき、Euler 荷重の約 80% 程度になる。座屈モードを描くには Bessel 関数を積分するわけだが、難しいなあ。そこで Maxima の登場¹⁷となる。なんと超幾何関数になるらしい。なんだそれは。習った記憶が無いぞ。図 6.30 には細い線で描いてみたが、実線が分布外力の場合の座屈モードであり、一点鎖線が先端集中荷重の場合のモードである。間違っていなければいいのだが、ほとんど重なるようだ。本当だろうか。

演習問題 6-4

4. 両端固定の棒の座屈係数が図 6.24 に示した値になることは図 6.25 を見れば明らかであるが、標準的な手順で微分方程式を解き、固有値問題として座屈係数を求めよ。また 2 次の座屈係数を求めよ。
5. 片端固定・片端単純支持の棒の座屈荷重は

$$\mu \ell = \tan \mu \ell$$

という固有方程式の解であることを示し、その結果、座屈係数が図 6.24 に示された値になることを数値的¹⁸に確認せよ。

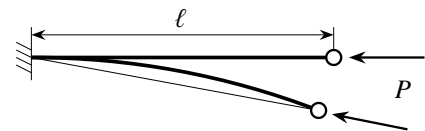


図 6.31 基部向きに载荷された柱

6. 図 6.31 にあるように、圧縮力が常に柱の基部に向くように載せられたときの座屈荷重を求めよ。
7. 式 (6.49c) を求めてみよ。

6.4.3 軸圧縮力と曲げを受ける棒

(1) 等分布外力が作用した場合

図 6.32 に示したような等分布外力が作用した両端単純支持梁の場合には最初から棒が曲がっているので分岐現象は起きず、図 6.9 の実線のように $P \rightarrow P_E$ に近づくにつれて急激にたわみが大きくなる挙動を示すと予想される。つり合い式は式 (6.32) のまま

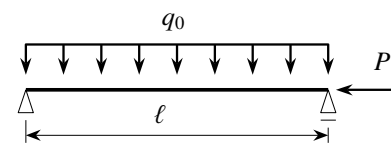


図 6.32 等分布外力が作用した棒

$$-EIw'''' - Pw'' + q_0 = 0$$

であり、境界条件は両端で $w = 0, -EIw'' = 0$ である。式 (6.36) で定義した μ を用いると、齊次解は前節と同様になり、特解が $\left\{ \frac{q_0 x^2}{2P} \right\}$ であればいいことから、一般解は

$$w = a + bx + c \sin \mu x + d \cos \mu x + \frac{q_0 x^2}{2P}$$

となる。これを上の両端の境界条件に代入すると、まず $x = 0$ の条件から

$$d = -a = \frac{q_0}{\mu^2 P}$$

¹⁶ プログラミングでは <http://www.infsup.jp/saito/materials/15scilab.intro.pdf> を利用。すぐできた。感謝。Bessel 関数についてもインターネット情報から。ちなみに漸化式 $J_{n+1}(x) = 2n J_n(x)/x - J_{n-1}(x)$ と $n = 2/3$ を用いた。

¹⁷ Maxima なら 1 行で ξ_{cr} が求められる。

¹⁸ 例えば第 O.3.2 節の 2 分法が使える。

となり, $x = \ell$ の条件を加えると

$$b = -\frac{q_0 \ell}{2P}, \quad c = \frac{1}{\mu^2 \sin \mu \ell} \frac{q_0}{P} (1 - \cos \mu \ell)$$

を得る。したがってたわみは

$$w(x) = \frac{q_0}{\mu^2 P} \left[\frac{1 - \cos \mu \ell}{\sin \mu \ell} \sin \mu x + \cos \mu x - 1 \right] + \frac{q_0}{2P} x(x - \ell)$$

となり, その2階の微係数から曲げモーメントは

$$M(x) = -EIw'' = \frac{EIq_0}{P} \left[\frac{1 - \cos \mu \ell}{\sin \mu \ell} \sin \mu x + \cos \mu x - 1 \right]$$

と表現できる。

たわみが最大になるのは w' を計算するまでもなくスパン中央になるので, 上式に $x = \ell/2$ を代入すると

$$w_{\max} = \frac{q_0 \ell^4}{\pi^4 EI} \left(\frac{P_E}{P} \right)^2 \left[\frac{1}{\cos(\mu \ell/2)} - 1 - \frac{\pi^2 P}{8 P_E} \right]$$

となる。右辺括弧内の分母に $\cos(\mu \ell/2)$ という項があるが, これが零になるのは

$$\cos \frac{\mu \ell}{2} = \cos \sqrt{\frac{P \ell^2}{4EI}} = \cos \left(\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{P}{P_E}} = \frac{\pi}{2}$$

より, $P = P_E$ を満足するときであることがわかる。すなわち, 例えば等分布外力 q_0 が一定のまま軸力 P を増加させていった場合には, その軸力が Euler 荷重に一致したときにたわみが無限大になり, 座屈する。曲げモーメントも同様にスパン中央で最大になり

$$M_{\max} = \frac{q_0 \ell^2 P_E}{\pi^2 P} \left[\frac{1}{\cos(\mu \ell/2)} - 1 \right]$$

となる。これも $P \rightarrow P_E$ で無限大になる。図 6.33 の破線が上式で示した二つの解であり, 図 6.9 の実線によく似た変化を示している。この $\cos(\mu \ell/2)$ がたわみや曲げモーメント, ひいては応力の軸力による増幅の影響を代表したのになっており, 剛体バネモデルにおける式 (6.18) の増幅係数 β と同じ機能を持っている。ここではさらに設計の観点からもう少し使い易い表現で近似して式 (6.18) の β との対応を明確にしておく。

設計に必要なのは P が座屈荷重の近傍の近似解なので, $\cos(\mu \ell/2)$ を $\mu \ell/2 \approx \pi/2$ の近傍で Taylor 展開する [9] ために

$$\cos \frac{\mu \ell}{2} = \sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\mu \ell}{2} \right)$$

から始めて, 式 (6.38) の Euler 荷重を用いて $1 \gg \pi/2 - \mu \ell/2 > 0$ の条件下で展開すると

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\mu \ell}{2} \right) - O \left\{ \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\mu \ell}{2} \right)^3 \right\} \\ &\approx \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{P}{P_E}} \right\} = \frac{\pi}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(1 - \frac{P}{P_E} \right)} \right\} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{P}{P_E} \right) - O \left[\left(1 - \frac{P}{P_E} \right)^2 \right] \right\} \right] \approx \frac{\pi}{2} \left[1 - \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{P}{P_E} \right) \right\} \right] = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{P}{P_E} \right) \end{aligned}$$

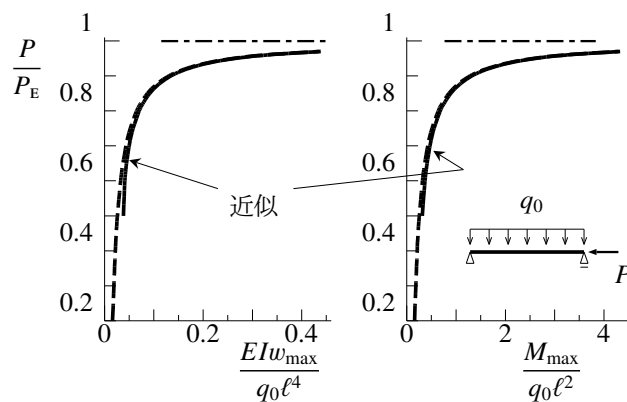


図 6.33 等分布外力が作用した棒の応答

と¹⁹なる。つまり

$$\cos \frac{\mu \ell}{2} \approx \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{P}{P_E} \right) = \frac{\pi}{4} \frac{1}{\beta_E}, \quad \beta_E \equiv \frac{1}{1 - P/P_E} \tag{6.50a, b}$$

である。この近似の β_E はまさに式 (6.18) の β を柱に適用した増幅率である。この近似を用いると最大たわみと最大曲げモーメントは

$$w_{\max} \approx \frac{q_0 \ell^4}{\pi^4 EI} \left(\frac{P_E}{P} \right)^2 \left[\frac{4}{\pi(1 - P/P_E)} - 1 - \frac{\pi^2 P}{8 P_E} \right], \quad M_{\max} \approx \frac{q_0 \ell^2 P_E}{\pi^2 P} \left\{ \frac{4}{\pi(1 - P/P_E)} - 1 \right\} \tag{6.51a, b}$$

という表現になる。図 6.33 の実線がこの 2 式である。厳密解との差異はほとんど無いことが明らかである。設計に適用した例は後述する。

(2) 端曲げ集中モーメントが作用した場合

端部に集中モーメントが作用する図 6.34 のような場合も分布外力が作用した場合と同じような状況だろう。この場合は分布外力が無い代わりに境界条件が

$$w(0) = 0, \quad -\{EIw''(0)\} = -C_0, \\ w(\ell) = 0, \quad -EIw''(\ell) = C_0$$

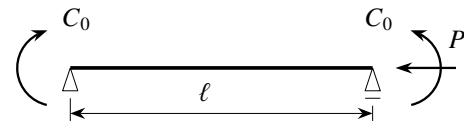


図 6.34 端曲げ集中モーメントが作用した棒

で与えられる。これも同様に微分方程式を解くと、一般解は $w(x) = a + bx + c \sin \mu x + d \cos \mu x$ になるから、境界条件に代入して整理すると

$$w(x) = \frac{C_0}{P} \left\{ \frac{1 - \cos \mu \ell}{\sin \mu \ell} \sin \mu x + \cos \mu x - 1 \right\}$$

と求められる。最大値はやはりスパン中央で発生するので、それを計算すると

$$w_{\max} = \frac{\ell^2 C_0 P_E}{\pi^2 EI P} \left\{ \frac{1}{\cos(\mu \ell / 2)} - 1 \right\}$$

となる。前節の等分布外力が作用した場合と同様分母に $\cos(\mu \ell / 2)$ があり、 $P \rightarrow P_E$ で無限大になることを示している。

たわみの 2 階の微係数から曲げモーメントの最大値も

$$M_{\max} = \frac{C_0}{\cos(\mu \ell / 2)}$$

となる。ここで、前節で導入した近似と同様 cosine の部分を近似表示すると、例えば最大曲げモーメントは

$$M_{\max} \approx \frac{4 C_0}{\pi(1 - P/P_E)} = \frac{4}{\pi} \beta_E C_0 \tag{6.52}$$

となる。これも式 (6.50b) の β_E で増幅されている。図 6.35 に以上の結果を表示した。図中の破線は梁-柱としての厳密な応答、実線が近似した応答である。

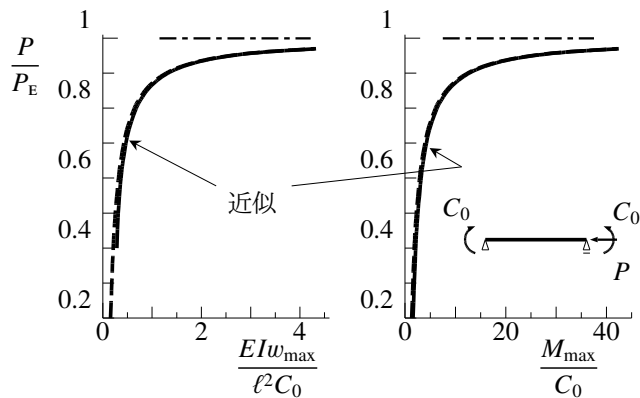


図 6.35 端集中モーメントが作用した柱の応答

¹⁹ O ('Big Oh') という記号は Landau の記号と呼ばれ「 $\phi(z) = O(\psi(z))$ as $z \rightarrow z_0$ 」は「 $|\phi| \leq \xi |\psi|$ for $|z - z_0| < \delta$ になるような正の数 ξ と δ が存在する」ことを意味する。つまり $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|\phi|}{|\psi|} < \infty$ である。一方小文字 o ('Little Oh') の「 $\phi(z) = o(\psi(z))$ as $z \rightarrow z_0$ 」は「任意の正の数 ξ に対して $|\phi| \leq \xi |\psi|$ in $|z - z_0| < \delta$ が成立するような δ が存在する」ことを意味する。つまり $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|\phi|}{|\psi|} = 0$ である。したがって $\phi = o(\psi)$ なら $\phi = O(\psi)$ も成り立つが、逆は成り立たない。

(3) 軸力と曲げの相関式

前節の結果を用いて設計で必要となる応力成分を算定しておこう。まず、式(4.16)が軸力と曲げモーメントの作用下で発生する応力の一般的な表現である。したがって、最外縁応力は

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{W}$$

となる。ここに W は式(4.15)で $W \equiv I/e$ と定義された断面係数であり、 e は、断面の中立軸から最も外の縁までの z 方向の距離である。この式に、前節の最後の結論で求められた曲げモーメントの表現式(6.52)を代入すると、曲げと軸力を受ける棒に発生する最大応力は

$$\sigma_{\max} \approx \frac{P}{A} + \frac{4C_0}{\pi W(1 - P/P_E)} = \frac{P}{A} + \frac{4}{\pi W} \beta_E C_0 \quad (6.53)$$

と表すことができる。右辺第2項には式(6.50b)の β_E があり、これが曲げ応力の成分を座屈現象が増幅する係数に相当している。

特に弾性完全塑性体で材料特性をモデル化すると、この最大応力は降伏応力 σ_Y を超えてはいけなから辺々 σ_Y で割って

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_Y} \approx \frac{P}{P_Y} + \frac{4C_0}{\pi M_Y(1 - P/P_E)} \leq 1 \quad (6.54)$$

という関係式が求められる。この式は設計の照査段階で用いられる軸力と曲げを受ける部材の強度相関式の基礎になるものである。ここに

$$P_Y \equiv A\sigma_Y, \quad M_Y \equiv \frac{I\sigma_Y}{e}$$

と定義したが、前者は全断面が一様に降伏応力になったときの全断面降伏軸力、後者は最外縁の応力が降伏応力に達した瞬間の初期降伏曲げモーメントである。

6.4.4 初期たわみのある棒

次に図 6.36 にあるように、外力を載せる前に初期たわみ $w_i(x)$ が存在する場合を検討する。図では w_i をかなり誇張してある。このときのつり合い式は、この章の誘導を最初からやり直しても求めることができるが、図 6.20 で見たような軸力による付加曲げモーメント効果を考えると

$$-EIw'''' - P(w + w_i)'' = 0$$

でいいことは明らかである。簡単のために初期たわみは

$$w_i(x) = w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

でモデル化できるとする。これは Euler 座屈モードと一致しているから、Euler 座屈に最も悪い影響を及ぼすと考えられる初期不整なので、ここで用いることにした。これを上式に代入し、式(6.36)を考慮すれば

$$w'''' + \mu^2 w'' = \mu^2 \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

がつり合い式で、境界条件は両端で $w = 0$, $-EIw'' = 0$ である。

この問題の特解が

$$\frac{\mu^2}{(\pi/\ell)^2 - \mu^2} w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

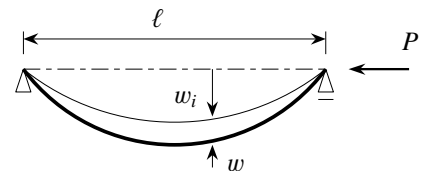


図 6.36 初期たわみのある棒の圧縮挙動

であることは容易に算定できる。一般解はこれに斉次解を加えたものであるが、もし P が座屈荷重に達していないなら $\mu^2 \neq (\pi/\ell)^2$ となるので、斉次解の積分定数を境界条件から決定するとそれはすべて零になる。したがって解は特解のみで与えられ、上式を式 (6.38) の Euler 荷重を用いて書き直すと

$$w(x) = \frac{P}{P_E} \frac{1}{1 - P/P_E} w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \tag{6.55}$$

となる。この2階の微係数を用いると、曲げモーメントも

$$M(x) = \frac{P}{1 - P/P_E} w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) = \beta_E P w_0 \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

と表される。やはり式 (6.50b) の β_E によって増幅されていることがわかる。

最大曲げモーメントはスパン中央で発生するので、上式に $x = \ell/2$ を代入すると

$$M_{\max} = \frac{w_0 P}{1 - P/P_E}$$

となるから、式 (6.53) と同様に最大応力を算定すると

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{w_0 P}{W(1 - P/P_E)}$$

と表現できる。この表現と式 (6.53) を比較すると明らかなように、初期たわみが存在する系の問題は、端部に ($w_0 \times P$) の集中モーメントが作用している問題と等価になっている。この結論も前節の初期不整を持った剛体バネモデルの結論と同じである。

ところで、柱の座屈実験から座屈荷重を算定する方法に Southwell 法というものがある。これは式 (6.55) を用いた方法である。例えば、この式を2回微分して曲率を計算し、それを $x = \ell/2$ で算定して項の順番を入れ替えると

$$\kappa(\ell/2) \equiv -w''(\ell/2) = P_E \times \frac{\kappa(\ell/2)}{P} - w_i(\ell/2) \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2 \tag{6.56}$$

と表現できる。したがって、曲率 κ あるいは軸線から最外縁までの距離 e を乗じた曲げひずみ $\epsilon \equiv \kappa \times e$ と外力 P を測定し、横軸に ϵ/P を、縦軸に ϵ をプロットして得られる直線の傾きが P_E になることを、式 (6.56) は示している。図 6.37 に示したのは、アクリルで製作したものさしのような薄板を重りで圧縮し、重りから軸力を、板の両表面のひずみゲージから曲げひずみ成分を測定してグラフ化したものである。

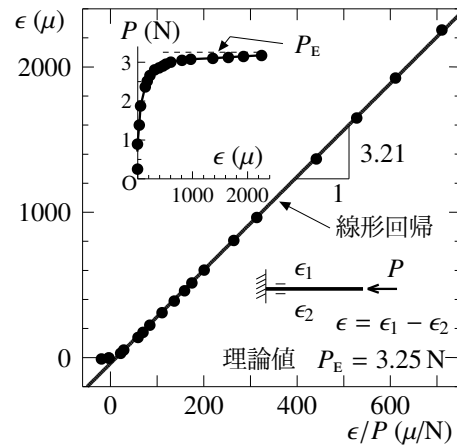


図 6.37 Southwell 法による座屈荷重の求め方の例

リルで製作したものさしのような薄板を重りで圧縮し、重りから軸力を、板の両表面のひずみゲージから曲げひずみ成分を測定してグラフ化したものである。インセットの荷重ひずみ曲線からは、板の両端部処理の精度が低いことによる理想的ではない境界条件の影響や、初期不整の影響のために、理論的な座屈荷重より低い軸力レベルで大きく曲がり始めてしまうので、座屈荷重を推測するのは非常に難しい。しかし Southwell プロットからはこの程度の簡単な実験でも $P_E \sim 3.21 \text{ N}$ と求めることができ、約 1.2% の誤差²⁰で座屈荷重を求めることができている。なお、この実測値は東北大学における学部の学生実験で実際に得たデータである。

²⁰ 実測値は測定誤差を含むが、それを除けば事実だ。一方理論値はあるモデルを用いて理想的な境界条件等の下で得られる真実に過ぎない。だから工学系の現象把握においても「誤差」というのは、事実を真実がどのくらい予測できているかという尺度として捉えるべきなので、分母は本来は実測値なのだろうと感じている。

6.4.5 柱の非弾性座屈

(1) 弾・完全塑性体と非線形弾性体の場合

柱の弾性座屈荷重が式 (6.44a) で算定できることはわかったが、実際の材料には降伏応力等の弾性抵抗の限界が存在するため、このままでは現実的な限界応力とは言えないかもしれない。非弾性の最も簡単な材料モデルに弾・完全塑性体モデルがあり、これは図 6.38 のような応力ひずみ関係で定義される。この材料では、柱の軸応力は σ_Y で表された降伏応力を超えられないので、単純支持棒の限界応力式 (6.39) も σ_Y を超えることは無い。つまり

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leq \sigma_Y$$

となるはずである。この両辺を、降伏応力で割ると

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y} = \frac{1}{\lambda^2} \leq 1 \tag{6.57}$$

と表現できる。ここに

$$\bar{\lambda} \equiv \frac{1}{\pi} \lambda \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \tag{6.58}$$

は細長比パラメータと呼ばれる。この関係式 (6.57) を示したのが図 6.39 の実直曲線である。実曲線の方はいわゆる Euler 曲線であり、 $\bar{\lambda}$ が 1 より小さい領域では意味が無くなるため点線にしてある。柱が比較的短く（太く）細長比パラメータが小さい領域では、限界応力は座屈応力ではなく降伏応力、つまり材料そのものの一種の強度で与えられることになる。これが図の水平な実線の部分に相当する。

しかし、例えば高張力鋼等の応力ひずみ曲線のように、弾・完全塑性体モデルでは表しきれないような非線形抵抗を持つ材料も存在する。また塑性という特性では、载荷と除荷でその経路が異なるのが普通である。そこで、まず簡単な材料モデルとして図 6.40 に示したような非線形弾性体を考え、それでできた柱の座屈公式を検討しておこう。ただしこの材料は、図にも示したように载荷と除荷の経路が同じ弾性モデルであることには注意して欲しい。

剛体バネモデルの節で見たように安定問題の取り扱い方には、近似の無い有限変位理論を用いる以外に、式 (6.5) で見たように、あるつり合い位置からの増分理論として問題を捉える方法があった。したがって、材料の性質が非線形になった場合には、ここで用いている比較的小さい変位で表した理論を、座屈が発生する瞬間の増分応力と増分ひずみとの関係に基づいたものに読み換えればいい。すなわち、この節で用いている弾性の Young 率 E の代わりに、座屈する瞬間の増分 Young 率つまり接線 Young 率 E_t を使えば正しい座屈応力を算定できそうだ。したがって、ここで考えているような非線形弾性体でできた柱の座屈応力は

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_t}{\lambda^2}, \quad \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y} = \frac{E_t}{E} \frac{1}{\lambda^2} \tag{6.59a, b}$$

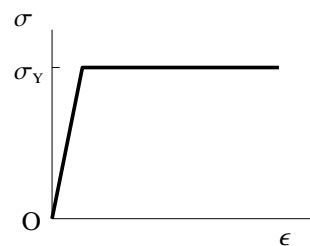


図 6.38 弾・完全塑性体のモデル

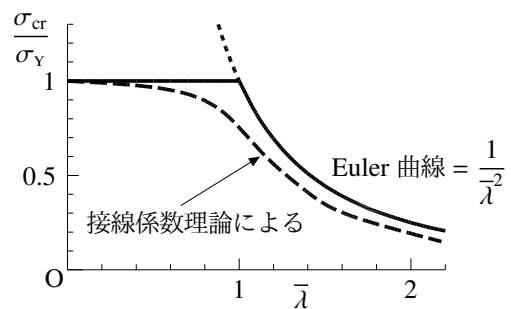


図 6.39 弾・完全塑性体の座屈曲線

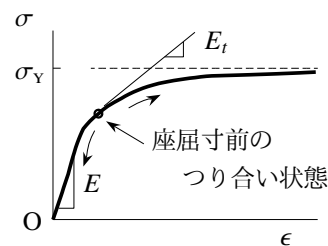


図 6.40 非線形弾性体モデル

となる。すなわち係数 (E_t/E) が材料非線形性の影響を代表しており、接線 Young 率を用いていることから接線係数理論と呼ばれる。この影響を模式的に示したのが図 6.39 の破線である。ここでは図 6.40 にもあるように、 σ_Y を降伏応力ではなく、応力の上限值である終局応力のようなものでモデル化してあることには注意すること。一般には接線 Young 率 E_t が初期の Young 率 E よりも小さくなるので、座屈応力は通常の Euler 曲線および σ_Y レベルより小さくなる。

(2) 非弾性座屈

ところで前節の非線形弾性は、本当は非常に限られた材料が示す特性であり、多くの材料は塑性と呼ばれる非可逆的特性を持っているのが普通である。その特徴を簡単に示したのが図 6.41 である。最も特徴的なのは、荷重経路と除荷経路が異なっている点だ。ただし、たいていのモデルでは、これも図示したように除荷の抵抗係数を弾性係数と同じにしている。さて、剛体バネモデルに対する定式化でも示したように、安定問題の検討ではあるつり合い状態を与える外力条件が不変なままで²¹複数のつり合い状態が可能になる点を探すのが原則だった。したがって非弾性座屈でも、作用させた軸力が不変のまま曲がる条件を探さなければならないだろう。しかし弾塑性材料では図 6.41 のように、荷重される部分と除荷される部分の接線抵抗係数が異なるため、座屈して断面内のひずみが一様でなくなった瞬間に、もし荷重域と除荷域の領域の握り方が同じだとすると、軸力つまり作用外力が変化してしまう。

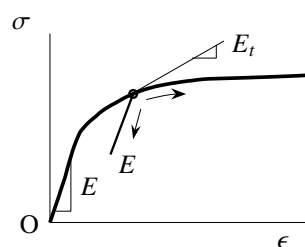


図 6.41 一般的な弾塑性モデル

ということは、軸力が変化しないように、荷重域と除荷域の領域の握り方に違いが生じながら座屈すると考えなければならないことになる。例えば図 6.42 の左の分布図が、矩形断面の場合の座屈直前の応力分布だったとしよう。それが座屈した直後には、今度は右に示した分布図のように、応力分布のうちの (c-d-e) で囲まれた三角形の面積 (増分荷重応力の総和) が (e-f-g) で囲まれた三角形の面積

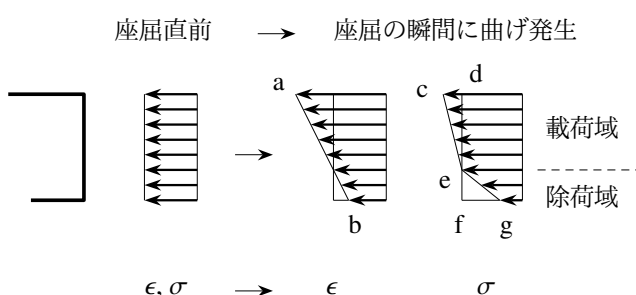


図 6.42 弾塑性柱の座屈の瞬間の応力分布

(増分除荷応力の総和) と等しくなるように曲がると考えなければならない²²ことになるわけだ。したがって増分ひずみは、図 6.42 の右から二つ目の図の直線分布 (a-b) のように、その零になる位置は図心からずれることになる。以上の考察から座屈応力を求めると

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2} \quad (6.60)$$

と書くことができ、矩形断面の場合の E_r は

$$E_r = \frac{4EE_t}{(\sqrt{E} + \sqrt{E_t})^2}$$

と定義される。この限界応力は換算係数理論による座屈応力と呼ばれ、 E_r は Kármán による換算係数と呼ばれている。換算係数は断面形状毎に E と E_t で定義される。このようにして求められる非線形弾性座屈公式 (6.59) や非弾性座屈公式 (6.60) と、いわゆる Euler 座屈公式とを比較すれば明らかのように、どの公式も形式的な表

²¹ 座屈ではなく塑性崩壊も古典的には外力不変のままの継続的な塑性ひずみの生成として定義されている。第 11.5 節参照。

²² もうこの段階で、このような考え方に無理があるように感じると思う。材料がそんな気持ちになるだろうか。

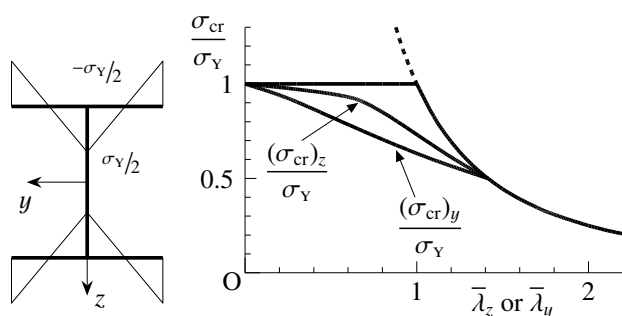


図 6.43 残留応力の影響による座屈荷重の減少

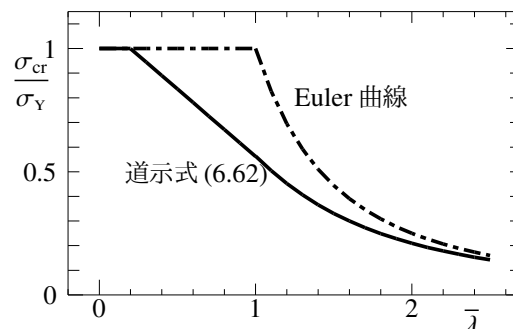


図 6.44 示方書で規定されている圧縮強度

現は同じである。当然 $E > E_r > E_t$ であることから、三つの係数の大小関係は

$$E > E_r > E_t$$

となるので、前節の接線係数理論の座屈応力と合わせて示すと

$$\sigma_{cr}(E) > \sigma_{cr}(E_r) > \sigma_{cr}(E_t)$$

という大小関係になる。

以上のように、載荷域と除荷域を区別して求められる換算係数理論は接線係数理論よりも力学的には合理的に見える。しかしながら、弾塑性体の座屈を取り扱う場合には、外力が不変のままの乱れを考えるのが不適当であるという結論を、Shanley [83] は簡単なモデルを用いて示した。すなわち実際の現象では、接線係数理論で求められる応力レベルで分岐現象が可能になるが、そのレベルと換算係数理論による応力レベルの中間レベルで、外力が増加しながら曲げ変形が増大すると考えられている。したがって、設計等で弾塑性の影響を考慮して座屈応力を算定する場合には、安全側でもあることから接線係数理論による座屈応力が用いられる。その他の塑性座屈等については文献 [41] 等を参照のこと。実際には、柱そのものが予め曲がっていることや溶接部に分布する残留応力等の種々の初期不整の影響で、ここで得た座屈応力よりさらに低い応力レベルで変形が大きくなり始める。したがって、設計に用いる公式等にはこのような複雑な影響も取り入れてあり、後述のように安全側の評価ができるようになっている。

(3) 残留応力がある場合

初期不整の一つである残留応力の影響についても例を示しておこう。鋼構造のように、圧延で造られた部材や薄板を溶接して組み上げた部材の接合部等には残留応力が存在するのが普通だ。ここでは最も基本的な例として、圧延 I 形断面の場合の残留応力の影響について概説する。計算法については文献 [184] 等に詳細が示されているので、ここには結果のみを図示しておく。

材料は弾・完全塑性体で、図 6.43 の左図にあるようなパターンの残留応力がフランジ部に存在するものとする。σ_Y は降伏応力である。細長比パラメータと座屈応力の関係を図 6.43 の右図に示した。ここに λ_z は強軸曲げに関する細長比パラメータであり、λ_y は弱軸に関するものである。二つの曲線はそれぞれの軸に関する曲げ座屈応力を表し、曲げを受けている面を下添え字で区別してある。残留応力の存在によって座屈応力は弾・完全塑性体の座屈曲線図 6.39 よりさらに下がっている。その他の残留応力分布に対する座屈曲線等についても、別途文献を参照して欲しいが、残留応力は断面形状や残留の原因に依存してその分布が異なるため、実際の設計に用いられる座屈曲線は断面形状によっても分類されている。

6.4.6 1 軸部材の引張強度と圧縮強度

このように、1 軸状態にある材料の強度は引張と圧縮で異なることになる。引張状態では、材料そのものの強度を構造部材の強度に直接関連付けていいから、許容応力設計法の考え方では、降伏応力を用いて引張許容応力 $\sigma_a^{(t)}$ (引張強度) は

$$\sigma_a^{(t)} = \frac{\sigma_{cr}^{(t)}}{\gamma}, \quad \sigma_{cr}^{(t)} \equiv \sigma_Y \quad (6.61)$$

で与えられる。ここに γ は安全率と呼ばれる係数で、現在の構造材料では通常 1.7 程度の値をとる。安全率は、荷重や構造あるいは解析における不確かさや誤差を考慮するための余裕の係数である。これに対し、圧縮許容応力 $\sigma_a^{(c)}$ (圧縮強度) は座屈応力で定義され、引張同様の安全率を用いて

$$\sigma_a^{(c)} = \frac{\sigma_{cr}^{(c)}}{\gamma}, \quad \frac{\sigma_{cr}^{(c)}}{\sigma_Y} = \begin{cases} 1.0 & \bar{\lambda} \leq 0.2 \\ 1.109 - 0.547\bar{\lambda} & 0.2 < \bar{\lambda} \leq 1.0 \\ \frac{1.0}{0.773 + \bar{\lambda}^2} & 1.0 < \bar{\lambda} \end{cases} \quad (6.62a, b)$$

のように規定 [176] されている。図 6.44 にその関数を Euler 曲線と比較して描いた。

6.4.7 剛性方程式と座屈解析

(1) 剛性方程式

弾性の梁-柱理論は見かけ上線形理論なので、第5章で用いた手法をそのまま使って要素剛性方程式を求めることができるはずだ。変位で表したつり合い式が式 (6.32) だから、まず弱形式の最初の段階で

$$- \int_0^\ell \delta w (-EIw'''' - Pw'' + q) dx = 0$$

と書くことができる。被積分関数の第 1, 2 項についてそれぞれ 2 回あるいは 1 回部分積分して整理し、式 (6.33) で与えられる境界条件を代入すると、仮想仕事式が

$$EI \int_0^\ell w'' \delta w'' dx - P \int_0^\ell w' \delta w' dx - \int_0^\ell q \delta w dx - S_1 \delta w_1 - C_1 \delta \theta_1 - S_2 \delta w_2 - C_2 \delta \theta_2 = 0 \quad (*)$$

となる。第5章で扱った初等梁理論のそれと異なるのは第2項のみである。用いる変位関数に必要な条件は初等梁理論と同じなので、その式 (5.21) を上式 (*) 第2項に代入すると、 P に比例した剛性行列が新たに追加されて、剛性方程式は

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \left((k_b) - (k_G) \right) \begin{Bmatrix} w_1 \\ \theta_1 \\ w_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (6.63)$$

となる。ここに (k_G) 以外はすべて第5章で定義されている。この (k_G) は幾何剛性行列と呼ばれるもので、上式 (*) 第2項より

$$(k_G) \equiv (k_G)_{ij}, \quad (k_G)_{ij} \equiv P \int_0^\ell \psi'_i \psi'_j dx$$

で定義される。具体的に関数を代入して積分を実行すると

$$(k_G) = P \begin{pmatrix} 6/5\ell & -1/10 & -6/5\ell & -1/10 \\ & 2\ell/15 & 1/10 & -\ell/30 \\ & & 6/5\ell & 1/10 \\ \text{Symm.} & & & 2\ell/15 \end{pmatrix} \quad (6.64)$$

という値を持つ。なお幾何剛性という名称は、この安定問題を考えるに当たっては変位したあとの幾何形状でつり合いを考えることが重要だったこと（幾何学的非線形性の考慮）に由来している。

(2) 固有値解析と座屈荷重

式(6.63)を用いて、例えば両端単純支持棒の座屈荷重を計算してみよう。まずこの要素剛性方程式を一つだけ使い、全長を一つの有限要素として解いてみる。上の剛性方程式に両端の境界条件を代入すると、結局、まず解くべき式は剛性方程式の第2,4行だけになる。つまり

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left(EI \begin{pmatrix} 4/\ell & 2/\ell \\ 2/\ell & 4/\ell \end{pmatrix} - P \begin{pmatrix} 2\ell/15 & -\ell/30 \\ -\ell/30 & 2\ell/15 \end{pmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (a)$$

を満足するようにたわみ角 θ_1 と θ_2 を求めればよい。しかし左辺が零ベクトル（広義で）であるから、もし右辺の係数行列が正則なら逆行列が存在し、その結果たわみ角は零となり座屈しない。あるいは、それは座屈する前の解（自明な解）と考えればよい。したがって逆に、この係数行列が特異になるときに座屈が発生すると考えていいから、この係数行列の行列式を零にする条件から座屈荷重が決定できる。つまり、剛性方程式の解が零ベクトルにならない、あるいは無意味な解にはならない条件から、剛性行列の固有値問題として座屈問題が記述される。具体的にこの場合には

$$\det \left(EI \begin{pmatrix} 4/\ell & 2/\ell \\ 2/\ell & 4/\ell \end{pmatrix} - P_{cr} \begin{pmatrix} 2\ell/15 & -\ell/30 \\ -\ell/30 & 2\ell/15 \end{pmatrix} \right) = 0$$

である。ここで $\xi \equiv P_{cr}\ell^2/EI$ と定義すると、この行列式は

$$\left(4 - \frac{2\xi}{15} \right)^2 - \left(2 + \frac{\xi}{30} \right)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \left(2 - \frac{\xi}{6} \right) \left(6 - \frac{\xi}{10} \right) = 0 \quad (b)$$

となる。したがって

$$\xi = 12, 60 \quad \rightarrow \quad P_{cr}(1 \text{ 要素近似}) = \frac{12EI}{\ell^2}, \quad \frac{60EI}{\ell^2}$$

と座屈荷重の近似値が求められる。式(6.37)から、第1次と第2次の厳密な座屈荷重はそれぞれ

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}, \quad \frac{4\pi^2 EI}{\ell^2}$$

であったことを用いれば、上の解の誤差はそれぞれ $12/\pi^2 - 1 \approx 0.22 \sim 22\%$, $60/4\pi^2 - 1 \approx 0.52 \sim 52\%$ の過大評価であったことを示している。

もちろん梁-柱理論のたわみの一般解には sine, cosine が含まれており、有限要素近似の変位関数として選んだ多項式が厳密解ではない以上、このような近似解しか求められないのは当然である。有限要素法は、要素の数を増やしたときにその近似解が厳密解に収束することを保証しているに過ぎない。したがって精度のいい座屈荷重を求める

表 6.2 有限要素法で求めた座屈荷重

要素数	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
1	1.21585	1.51982	—	—	—
2	1.00752	1.21585	1.44915	1.51982	—
4	1.00051	1.00752	1.03330	1.21585	1.24930
8	1.00003	1.00051	1.00250	1.00752	1.01731
16	1.00000	1.00003	1.00016	1.00051	1.00123

ためには、やはり対象を複数の有限要素に分割して近似度を上げる必要がある。表 6.2 にその結果を示した。ただし ζ_k は k 次の座屈荷重の有限要素解と厳密解の比で

$$\zeta_k \equiv \frac{\text{有限要素解}}{\text{厳密解}} = \frac{(P_{cr})_k \ell^2}{(k\pi)^2 EI}$$

と定義した。表の第1行は上の計算結果であり、第2行は要素を二つにして4自由度として計算したものである。2要素だけでも、工学的に最も重要な最低次の座屈荷重が誤差0.8%程度で得られている。近似解が厳密解より大きくなるのは、近似することによってモデルの変形が真の変形より拘束されたものになる等、その剛性が大きく評価されてしまうからである。これは表5.3で示した有限要素法による固有振動数の近似解が持つ特徴（厳密解より高めの振動数になること）と同じ特性である。

(3) 剛性行列による安定判定

ここでは比較的小さい変位の範囲内の梁-柱理論を元にして、式(6.63)の剛性行列は軸力 P が作用した構造系の接線剛性とと考えていい。式(6.14)では接線剛性の正負によっても系の安定不安定を判定できることを示した。この節の剛性行列でも同じ判定ができるはずだ。例えば1要素で解いた場合の式(a)を見てみよう。式(6.14)と異なり、この場合の接線係数は行列になっている。したがって「係数の正定値性」は「係数行列の正定値性」と読み替えなければならず、結局その安定条件は

$$\det(\text{係数行列のすべての小行列}) > 0$$

でなければならない。したがってこの例では

$$30 - \xi > 0 \quad \text{および} \quad \left(2 - \frac{\xi}{6}\right)\left(6 - \frac{\xi}{10}\right) > 0 \quad \rightarrow \quad 12 > \xi$$

となる。一つ目が式(a)の接線係数行列の第1行第1列の正定値条件で、二つ目が 2×2 行列の行列式(b)からの結論である。この二つの条件から $12 > \xi$ においてのみ系は安定であるとわかり、第1次の近似座屈荷重がこの近似した系の不安定発生源であることがわかる。この係数行列の正定値性による安定判定は、安定なHookeの弾性体が持つべきPoisson比の範囲を求めるときの式(3.81)でも用いた。別の見方をすると次のようなことが成り立つ。ある与えられた P に対する式(a)の「接線」係数行列²³の固有値(P ではなく、 $\{e\}$ を固有ベクトルとして境界条件を代入した全体剛性を用いた $(K_t)\{e\} = \lambda\{e\}$ で、「接線」行列 $(K_t) \equiv (K_b) - (K_G)$ の固有値 λ のこと)は、系が安定な場合にはすべてが正である。しかし、最初の分岐点で最小固有値が零になり、そのあと P を増加させていくと固有値 λ の小さい方から順に負になっていくことになる。

演習問題 6-5

- 剛性方程式(6.63)を用いて図6.24のそれぞれの場合を2要素程度で解き、座屈荷重 P_{cr} の近似解を求めてその精度を議論せよ。また、有限要素法のプログラムを作ることができるならば、それを用いて要素数が増えたときの精度の改善について考察せよ。

6.5 その他の梁-柱の座屈

6.5.1 バネ支持された梁-柱の座屈

式(6.37)と図6.22の座屈モードからわかるように、梁-柱の長さを半分にすれば座屈荷重を4倍に上げることができる。つまり強い構造にできるということだ。図6.27でもその効果を示したように、これを工学的に応用し、例えば途中で支点を設けることができない梁の中間

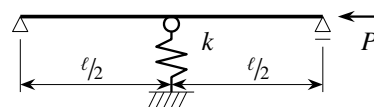


図 6.45 中央をバネ支持された梁-柱

²³ 式(6.59)の誘導でも考えた増分理論的な扱いに基づいた接線係数のこと。

に対傾構を配置する等、比較的柔な支持点の設置が軸圧縮強度を上げる効果を考えてみよう。その中間の対傾構等は主部材ではないことから、それほど剛ではない可能性が高いので、梁の中間を柔らかく支えていると考えざるを得ない。そこで、図 6.45 に示したように中央をバネで弾性的に支持された単純支持梁-柱の曲げ座屈を解いてみよう。

バネの左右の部分は式 (6.32) の梁-柱の式で支配されているから、その一般解は式 (6.41) で与えられる。境界条件は両端で $w = 0, w'' = 0$ であるから

$$w(x) = bx + c \sin \mu x \quad (0 < x < \ell/2), \quad w(\xi) = \bar{b}\xi + \bar{c} \sin \mu \xi \quad (0 < \xi \equiv (\ell - x) < \ell/2)$$

が解の候補となる。四つの積分定数を $x = \ell/2$ の連続条件で決定すればいい。この連続条件は、集中荷点の条件式 (4.45) (4.47) および図 6.26 のバネ支持の境界条件式 (6.46) を参考にすると

$$\begin{aligned} w(\ell/2-) &= w(\ell/2+), & w'(\ell/2-) &= w'(\ell/2+), & -EI w''(\ell/2-) &= -EI w''(\ell/2+), \\ \{-EI w'''(\ell/2-) - Pw'(\ell/2-)\} &+ k w(\ell/2-) &= &\{-EI w'''(\ell/2+) - Pw'(\ell/2+)\} \end{aligned}$$

とならなければならないことがわかる。せん断力の連続条件にバネ支持の反力が含まれていることに注意すること。 x と ξ に関する奇数階微係数の符号の違いに注意しながら、上の一般解をこの条件に代入すれば

$$\begin{pmatrix} \ell & 2 \sin\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) & -\ell & -2 \sin\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) \\ 1 & \mu \cos\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) & 1 & \mu \cos\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) \\ 0 & -\mu^2 \sin\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) & 0 & \mu^2 \sin\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) \\ \left(\frac{k\ell}{2EI} - \mu^2\right) & \frac{k}{EI} \sin\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) & -\mu^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b \\ c \\ \bar{b} \\ \bar{c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る。この係数行列が特異になる条件は

$$\sin\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) \left[\alpha_s \sin\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) - \left\{ \frac{\alpha_s \mu \ell}{2} - 2(\mu\ell)^3 \right\} \cos\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) \right] = 0 \tag{6.65}$$

となり、これが座屈荷重を与える特性方程式になる。ここに α_s は式 (4.42) で定義したバネ剛性を代表するパラメータである。

面白いことに式 (6.65) は常に

$$\sin\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\mu\ell}{2} = \pi \quad \rightarrow \quad k_b = 4 \tag{6.66}$$

という解を与える。つまり、中央のバネによってそこを節とする sine 1 波の座屈モード（両端単純支持梁-柱の 2 次座屈モード）が、バネ剛性とは無関係に可能になっている。柔らかく支持しているにもかかわらず、この解が常に存在することには少しは心を動かして欲しいところだ。しかし、この荷重が必ずしも最小の座屈荷重であるとは限らないのである。式 (6.65) のもう一つの可能性は

$$\alpha_s \tan\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) = \alpha_s \left(\frac{\mu\ell}{2}\right) - 16 \left(\frac{\mu\ell}{2}\right)^3 \tag{6.67}$$

である。これも陽な表現にはなっていないので二つの特別な場合をまず検討しよう。まず最初は $\alpha_s \rightarrow 0$ 、つまりバネが無い場合である。このときは $\mu\ell > 0$ なので上式は

$$\cos\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\mu\ell}{2} = \frac{\pi}{2} \quad \rightarrow \quad k_b = 1$$

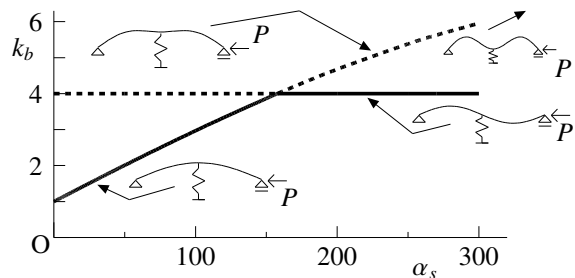


図 6.46 中央をバネ支持された梁-柱の座屈係数

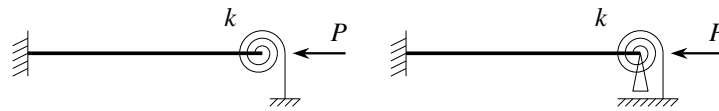


図 6.47 片端を回転バネ支持された柱の座屈

つまり Euler 荷重になるという当然の結果を得る。次に $\alpha_s \rightarrow \infty$ の場合、つまりバネ支持ではなく普通の支承が配置された場合になるが、この解は

$$\tan\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) = \frac{\mu\ell}{2} \quad (6.68)$$

となる。これは演習問題 6-4 の 5 番の片端固定・片端単純支持梁の座屈の特性方程式において、梁の長さを半分にした式に一致する。すなわち、バネ支持部のたわみ角が零になるような対称の座屈モード ($b = \bar{b}, c = \bar{c}$) に対応している。これにも少しは驚いて欲しい。つまり $\alpha_s \rightarrow \infty$ にしたときには式 (6.66) の解が得られると予想した読者もいたかもしれないからだ (第 1 著者は実際そう思った)。式 (6.67) は式 (6.66) 以外の解を数学が予測したわけなので、この中央でたわみ角が零になるモードを探し出してくれたことになる。数学はすごい!

特別な場合も含めて、以上の結果をバネ剛性と座屈係数の間の関係でまとめたのが図 6.46 である。まず α_s が小さい場合の座屈係数は 1 に近い。座屈モードも図中に示したように sine 半波に近い形をしていて、バネ支持の影響が小さい。そしてこのパラメータ α_s が $16\pi^2 \approx 157.9$ より小さい場合には、式 (6.67) の解の方が最小の座屈荷重を与える。しかし $\alpha_s = 16\pi^2$ になったとき、式 (6.66) と式 (6.67) の座屈荷重が一致する。 $\alpha_s > 16\pi^2$ であるような比較的剛なバネを配置すると、sine 1 波の座屈モードで座屈することになる。したがって、図中の実線で示した $k_b = 4$ が最初に発生する座屈荷重である。ちなみに、 α_s が非常に大きくなったときの式 (6.67) の解を求めると、座屈係数が $k_b = 8.1815$ になる。このモードを図中右上に示しておいたが、片端固定・片端単純支持の梁を二つ左右対称に並べたモードの座屈である。これが式 (6.68) の場合に相当する。このように、完全な支持ではなくとも、柔な支えや拘束が中間にあると座屈荷重を上げることができる。それはつまり有効座屈長を短くしていると考えればわかり易い。工学的にはとても重要な結果であり、座屈モードを知っておくことと予測できることの重要性を示唆している。

演習問題 6-6

9. 図 6.47 の二つの系の座屈荷重を求めよ。

6.5.2 骨組の座屈

前節では骨組の一部を簡単なバネで置き換えた。門型ラーメンの梁部が剛体の場合と変形できる場合の例は文献 [95] にあるが、ここでは図 6.48 の左側に示したような単純な十字の骨組を対象としてみよう。水平の主部材の中央に長さ ℓ^* の太い梁が 2 本剛結されている。その梁のヤング率と断面積・断面 2 次モーメントをそれぞれ E^*, A^*, I^* とする。前節同様、両端の境界条件を満足する一般解は

$$w(x) = bx + c \sin \mu x \quad (0 < x < \ell/2), \quad w(x) = \bar{b}(\ell - x) + \bar{c} \sin \mu(\ell - x) \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と表すことができる。まず中央の幾何学的な連続条件はたわみとたわみ角で

$$w(\ell/2-) = w(\ell/2+), \quad w'(\ell/2-) = w'(\ell/2+)$$

のように表される。そして中央のせん断力の連続条件は、前節のバネを 2 本の短い梁の引張・圧縮抵抗で置き換えればよいから、例えば式 (5.19) の剛性方程式からもわかる抵抗係数を用いて

$$\{-EI w'''(\ell/2-) - P w'(\ell/2-)\} + \frac{E^* A^*}{\ell^*} \{w(\ell/2-) + w(\ell/2+)\} = \{-EI w'''(\ell/2+) - P w'(\ell/2+)\} \quad (6.69)$$

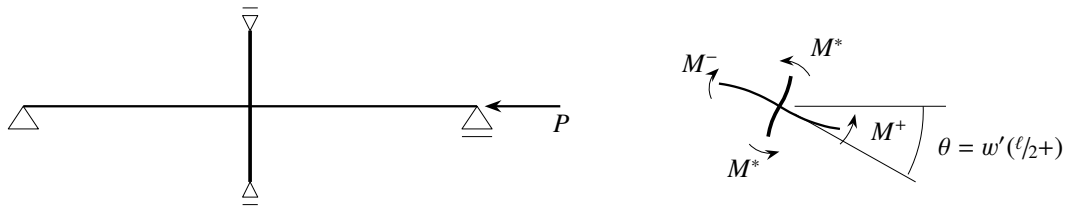


図 6.48 十字骨組の座屈

とすればいい。またモーメントの連続条件にも、図 6.48 の右側に示したように短い梁の抵抗モーメント M^* を考慮しなければならない。この抵抗モーメントは両端単純支持梁の片端に集中モーメントを作用させたときの解の式 (4.37a) を使うことができ

$$M^* = \frac{3E^*I^*}{\ell^*} \theta = \frac{3E^*I^*}{\ell^*} w'(\ell/2+)$$

と考えればいい。ここでは簡単のために、たわみ角の連続条件を使って右側のたわみ角を用いた。したがってモーメントの連続条件は

$$-EI w''(\ell/2-) = -EI w''(\ell/2+) + 2M^* = -EI w''(\ell/2+) + \frac{6E^*I^*}{\ell^*} w'(\ell/2+) \quad (6.70)$$

となる。

しかし、骨組解析では多くの場合、曲げ変形に対して軸方向変形は無視されることが多い。これは、軸方向の抵抗係数 EA/ℓ が曲げ剛性 EI/ℓ^3 よりも細長比の 2 乗程度大きいことがその根拠である。ここでも同様に扱うことにすると、上式 (6.69) の左辺第 2 項は他の項よりもかなり優位になるので、このせん断力の連続条件は

$$w(\ell/2-) + w(\ell/2+) = 0$$

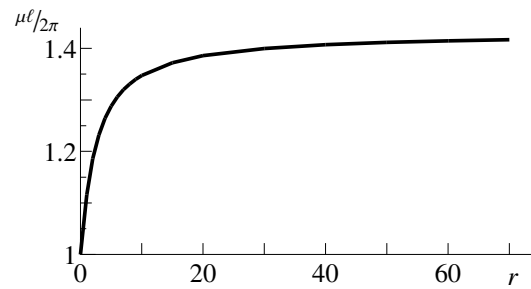


図 6.49 十字骨組の座屈荷重

であればいいことになる。したがって、上のたわみの連続条件から $w(\ell/2-) = 0, w(\ell/2+) = 0$ が成立するので、それとたわみ角の連続条件を満足する一般解はひとつの未定定数 c だけで

$$w(x) = c \left(\sin \mu x - \frac{2x}{\ell} \sin \frac{\mu \ell}{2} \right) \quad (0 < x < \ell/2), \quad w(x) = -c \left\{ \sin \mu(\ell - x) - \frac{2(\ell - x)}{\ell} \sin \frac{\mu \ell}{2} \right\} \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

と表すことができる。これをモーメントの連続条件式 (6.70) に代入することによって

$$EI c \mu^2 \sin \frac{\mu \ell}{2} = -EI c \mu^2 \sin \frac{\mu \ell}{2} + c \frac{6E^*I^*}{\ell^*} \left\{ \mu \cos \frac{\mu \ell}{2} - \frac{2}{\ell} \sin \frac{\mu \ell}{2} \right\}$$

を得るので、 c が非零の任意の定数でなければならない条件から

$$\left\{ (\mu \ell)^2 + 6 \frac{E^*I^*}{\ell^*} \frac{\ell}{EI} \right\} \sin \frac{\mu \ell}{2} = 3 \frac{E^*I^*}{\ell^*} \frac{\ell}{EI} (\mu \ell) \cos \frac{\mu \ell}{2} \quad (6.71)$$

のように特性方程式が求められる。短い梁の特性を次の剛性比

$$r \equiv \frac{E^*I^*/\ell^*}{EI/\ell} \quad (6.72)$$

で代表させることにすると、剛性比が零 $r = 0$ の場合は上式は $\sin(\mu \ell/2) = 0$ になって、座屈荷重は $\mu \ell = 2\pi$, つまりオイラー座屈の 2 次の座屈荷重になるが、これは中央のたわみをゼロにしたからである。あるいは前節のバネの場合を参考にして

$$\alpha_s = \frac{k \ell^3}{EI} > 16\pi^2, \quad k \equiv \frac{2E^*A^*}{\ell^*}$$

の場合を対象にしていると捉えればいい。逆に $r \rightarrow \infty$ の場合は上式 (6.71) が

$$\tan\left(\frac{\mu\ell}{2}\right) = \frac{\mu\ell}{2} \rightarrow \mu\ell = 8.987$$

となり、これは前節の式 (6.68) に一致し、中央でたわみ角がゼロになる座屈モードに相当している。任意の剛性比 r に対する座屈荷重を図 6.49 にプロットした。前節のバネの場合と同様、剛性比をそれほど大きくしなくても 20% くらいの強度上昇が実現できることがわかる。

6.5.3 弾性床上的梁-柱の座屈

弾性床に置かれた梁-柱の場合には、式 (6.32) の通常の梁-柱理論のつり合い式と式 (4.89) の弾性床上的梁のつり合い式とを比較すれば明らかのように

$$-EIw''''(x) - Pw''(x) - k_w w(x) + q(x) = 0 \quad (6.73)$$

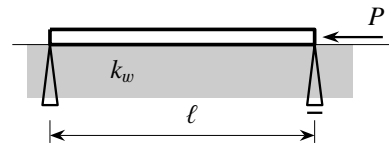


図 6.50 弾性床上的梁-柱の座屈

がそのつり合い式となる。境界条件は通常の梁-柱の式 (6.33) と同じだ。例えば図 6.50 に示したように、 $q(x) \equiv 0$ で両端が単純支持された場合の座屈問題は、通常の梁-柱の解法と同じように $w \sim \exp(\xi x)$ をつり合い式に代入し、その特性方程式

$$EI\xi^4 + P\xi^2 + k_w = 0$$

から特性根を計算すれば一般解を得る。それを境界条件に代入し、 w が恒等的には零にならずに有意な解が存在するための問題、つまり固有値問題として P_{cr} を探し出せば座屈荷重を決定することができる。詳細は省略するが、式 (6.44a) で定義された座屈係数の値が

$$k_b \equiv \frac{P_{cr}}{P_E} = n^2 + s_w \frac{1}{n^2\pi^4} \quad (6.74)$$

と求められる。ここに P_E は式 (6.38) で定義した Euler 荷重であり

$$s_w \equiv \frac{k_w\ell^4}{EI} \quad (6.75)$$

は弾性床の反力特性を代表するパラメータである。

通常の梁-柱の座屈では、式 (6.37) から明らかなように第 2 次モードの座屈荷重は第 1 次座屈荷重の 4 倍も大きかった。ところが式 (6.74) の座屈荷重は、弾性床の反力係数によっては $n = 2$ の座屈荷重の方が $n = 1$ の荷重より小さくなることもある。例えば式 (6.74) の $n = 1$ の座屈荷重が、 $n = 2$ の座屈荷重より大きくなる時のパラメータ s_w を計算すると

$$1 + \frac{s_w}{\pi^4} > 4 + \frac{s_w}{4\pi^4} \rightarrow s_w > 4\pi^4 \approx 390$$

となる。つまり $s_w = 400$ 程度になると、 $n = 2$ の sine 1 波の座屈モードの座屈荷重 ($k_b^{(n=2)} = 5.03$) の方が、sine 半波の座屈モードのそれ ($k_b^{(n=1)} = 5.11$) よりも小さくなる。ちなみに $n = 3$ の場合は $k_b^{(n=3)} = 9.46$ であり、 $n = 1, 2$ の場合の 2 倍程までは大きくならない。表 6.3 にはその他の場合も例示したが、さらに大きな $s_w = 900$ になると $n = 3$ の座屈荷重の方が $n = 1$ のそれよりも小さくなっている。つまり、弾性床の反力係数によっては、相対的に短い周期の座屈モードに対する座屈荷重の方が最小値になり得るという、非常に興味深い性質を示している。

表 6.3 弾性床上的座屈係数

s_w	$n = 1$	2	3
0	1	4	9
100	2.03	4.26	9.11
300	4.08	4.77	9.34
400	5.11	5.03	9.46
500	6.13	5.28	9.57
900	10.2	6.31	<u>10.0</u>

演習問題 6-7

10. つり合い式 (6.73) を誘導し, 座屈係数の式 (6.74) を求めよ。

6.5.4 Timoshenko 梁-柱の座屈

このように, 弾性床上の梁-柱では比較的短い波長モードの高次座屈が重要になる場合がありそうだ。そうなるかと細長いことを前提とした初等梁理論を基礎とした梁-柱理論を適用することには問題があるかもしれない。つまり, 棒の一部分の比較的短い長さをモードの最長波長とするような曲げ現象が重要になる棒を対象とする場合には, 第 4.6.3 節で説明したせん断変形の影響も考慮した方がいいと考えられる。そこでここでは, いわゆる Timoshenko 梁理論を用いて座屈荷重を求めておこ

う。理論の誘導の詳細や計算手順については文献 [42] 等²⁴を参照してもらうことにして割愛し, 両端単純支持の場合の座屈公式を挙げておく。まず Engesser の公式と呼ばれる理論の座屈係数は

$$k_b = \frac{1}{1 + \alpha_T \pi^2} \quad (6.76)$$

となり, その改訂公式と呼ばれる方は

$$k_b = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4\alpha_T \pi^2}}{2\alpha_T \pi^2} \quad (6.77)$$

である。ここの α_T は式 (B.15) で定義したせん断変形の影響を表すパラメータである。この 2 者の違いは, 断面力としてのせん断力の構成則をどのようにモデル化するかの違いから生じる。

パラメータ α_T は細長比の逆数の 2 乗に相当していたから, この平方根の逆数を横軸にとって座屈係数を整理して図 6.51 に示した。つまり横軸の左に行くほど短い梁-柱になるが, かなり短い場合の座屈荷重は Euler 荷重から数十%の低減が見られる。 α_T は材料定数比 (E/G) にも比例しており, 長い柱であってもせん断抵抗が比較的小さい場合にも座屈荷重が低下する。ただし上の二つの公式による違いは僅かである。さらに, このくらい短い柱の場合には伸びの影響も比較的大きくなるが, これについても文献 [42] 等を参照して欲しい。

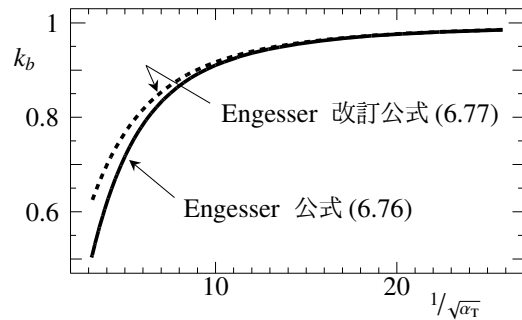


図 6.51 Timoshenko 梁の座屈荷重

6.5.5 弾性床上の Timoshenko 梁-柱の座屈

以上の二つの状況が重なった状態, つまり弾性床上の Timoshenko 梁-柱の場合にはさらに面白い結果を示す。これも詳細は文献 [42] 等を参照して欲しいが, Engesser の公式に対応する理論の枠組の中でつり合い式を無次元化して示すと

$$(1 - \pi^2 k \alpha_T) \bar{w}'''' + (\pi^2 k - s_w \alpha_T) \bar{w}'' + s_w w = 0$$

となる。 $\alpha_T = 0$ としたものは式 (6.73) になる。ここに

$$\bar{w} \equiv \frac{w}{\ell}, \quad (') \equiv \frac{d}{d\xi}, \quad \xi \equiv \frac{x}{\ell}$$

は第 4.6.3 節でも用いた無次元量である。また境界条件は

$$\begin{aligned} \bar{w} = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad - (1 - \pi^2 k \alpha_T) \bar{w}''' - (\pi^2 k - \alpha_T s_w) \bar{w}' = \text{与える}, \\ - (1 - \alpha_T s_w) \bar{w}' - \alpha_T (1 - \pi^2 k \alpha_T) \bar{w}''' = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad - (1 - \pi^2 k \alpha_T) \bar{w}'' + \alpha_T s_w \bar{w} = \text{与える} \end{aligned}$$

²⁴ あるいは付録 C を参照のこと。

と表される。

一例として、両端単純支持梁-柱の固有値問題を解くと、その座屈係数が³

$$k_b = \frac{(n\pi)^4 + s_w \alpha_T (n\pi)^2 + s_w}{\pi^2 \{ (n\pi)^2 + \alpha_T (n\pi)^4 \}} \quad (6.78)$$

となる。この関係を示したのが図 6.52 であるが、弾性床の反力係数 s_w は図中の値 $s_w = 200$ に固定した。横軸は座屈モードの次数 n であり、縦軸が式 (6.78) の座屈係数である。各 n 毎の値を線で結ぶことに意味は無いが、同じ

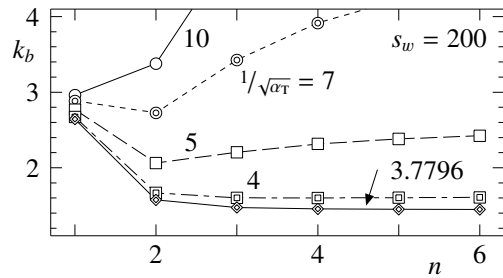


図 6.52 弾性床上の Timoshenko 梁の座屈荷重

α_T 毎に線でつないで区別し易くした。線の横に付けた 3.7796 から 10 までの数字が $1/\sqrt{\alpha_T}$ の値である。それが $1/\sqrt{\alpha_T} = 10$ くらい細長い場合（一番上の実線）には、普通の梁-柱と同様高次モードになるにつれて座屈荷重が単調に増大している。しかし α_T の値が大きくなり、より短い Timoshenko 梁-柱あるいはせん断抵抗の弱い柱になるにつれて、高次モードの座屈荷重の方が最小値を持つようになる。しかも $1/\sqrt{\alpha_T} = 4$ 以下になると、1 次以外の異なるモードの座屈荷重同士がほぼ同じレベルになるのも大きな特徴である。こういった現象は塑性座屈等（例えば粘土の 3 軸圧縮試験供試体に生じるせん断帯）にも見られ、同じ荷重レベルに現れるせん断帯のパターン（座屈モード）が試験片によって異なっていたり、一つの試験片に現れるパターンが小さい載荷ステップ毎に変化したりすることがある。これはとても重要なことで、いわゆる Euler 座屈が座屈の本質だと思っ

6.6 大きく変位する棒の力学

6.6.1 棒の有限変位理論

前節までは比較的小さい変位の範囲で理論を定式化して用いたため、座屈後の挙動については予測することはできなかった。ここでは、大きく変位するものの材料は弾性を保持する範囲の棒理論を紹介し、柱の座屈後の挙動について概説する。図 6.16 のような変位した状態のつり合いを考え、式 (6.23) を誘導したときに使った微小たわみ角の近似を用いないことにすれば、その非線形の支配方程式²⁵を求めることができる。したがって三角関数があるままの形で残り、結局、つり合い式が

$$(N \cos \theta + V \sin \theta)' = 0, \quad (-N \sin \theta + V \cos \theta)' + q = 0, \quad M' + (1 + \epsilon) V = 0 \quad (6.79a, b, c)$$

となる。ここに ϵ は軸線の伸びひずみで

$$\epsilon \equiv \sqrt{g_0} - 1, \quad g_0 \equiv (1 + u')^2 + (w')^2 \quad (6.80a, b)$$

と定義した。元々単位だった軸線微分要素の変位したあとの長さが $\sqrt{g_0}$ になることは、Pythagoras の定理からも理解できるだろう。同様に、境界条件は

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (N \cos \theta + V \sin \theta) = F_i, \quad (6.81a)$$

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (-N \sin \theta + V \cos \theta) = S_i, \quad (6.81b)$$

$$\theta = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M = C_i \quad (6.81c)$$

²⁵ 誘導については付録 C を参照のこと。

となる。一方、たわみ角と変位の関係は

$$\sin \theta = -\frac{w'}{\sqrt{g_0}}, \quad \cos \theta = \frac{1+u'}{\sqrt{g_0}} \quad (6.82a, b)$$

となる。たわみ角 θ が小さく、伸びひずみが非常に小さく $|e| \ll 1$ と考えれば、上式は $\theta = -w'$ と近似できて、微小変位理論の関係式 (4.4) に一致する。

断面力と変位の関係は、Bernoulli-Euler 梁の場合は近似無しに微小変位理論のそれと同じ表現で

$$N = EA \epsilon, \quad M = EI \kappa \quad (6.83a, b)$$

となるが、 ϵ は式 (6.80) で定義した軸の伸びである。また κ は軸の曲率で

$$\kappa \equiv \theta' \quad (6.84)$$

と定義される。以上の式で境界値問題として棒の非線形問題を記述できる。ただし、限定された問題以外は何らかの数値解析法²⁶を用いない限り、解を得ることは不可能である。

ちなみに、梁-柱理論程度に変位が比較的小さい場合、式 (6.80) の変位勾配の 2 次項までで

$$\epsilon \simeq u' + \frac{1}{2}(u')^2 + \frac{1}{2}(w')^2 \quad \rightarrow \quad \epsilon \simeq u' + \frac{1}{2}(w')^2$$

と近似でき、さらに第 2 項は第 1 項にくらべて高次項で無視できると近似することによって、上式の右式のよように、式 (6.31b) の関係を得る。また式 (6.60) (6.84) から

$$\kappa = -\frac{1}{\sqrt{g_0}} (w'' \cos \theta + u'' \sin \theta)$$

となるが、これも伸びひずみが非常に小さくかつ比較的小さい梁-柱理論程度の変位レベルでは、微小変位理論のそれと同様 $\kappa \simeq -w''$ と近似していいことがわかる。

6.6.2 座屈後挙動

大きく変位する棒の支配方程式は強い非線形性を持っているため、解析的に解くことは一般には困難である。しかし座屈荷重くらいは厳密に求めることができる。これについては第 C.2.4 節で詳しく説明する。ここではその座屈点直後の挙動を摂動法によって求めてみる。方法については文献 [14] に詳細に述べられているので、ここには結果のみを列挙する。まずこの章の最初に用いた図 6.3 の棒を対象とする。棒の回転角 θ を用いた全ポテンシャルエネルギーは

$$\phi(\theta) \equiv \frac{1}{2} k \theta^2 - P \ell (1 - \cos \theta) \quad (6.85)$$

となる。これを座屈点 $P = k/\ell$, $\theta = 0$ の近傍で摂動させる（具体的には第 4 変分まで求める）ことによって、外力と回転角の最初の摂動を

$$\frac{P \ell}{k} = 1 + \frac{1}{6} \theta^2 \quad (6.86)$$

のように求めることができる。この関係式は、図 6.4 の厳密な曲線とほとんど重なってしまい、区別がつかないくらいの精度で求められている。

次に一様断面の両端単純支持梁の Euler 座屈を対象としよう。前節の大変位理論を踏まえれば、この系の全ポテンシャルエネルギーは

$$\phi(u, w) \equiv \frac{1}{2} EI \int_0^\ell \kappa^2 dx + \frac{1}{2} EA \int_0^\ell \epsilon^2 dx + P u(\ell) \quad (6.87)$$

²⁶ 数値解析手法についても付録 C を参照のこと。

と定義していい。εは式(6.80)で、κは式(6.84)で定義されている。これも座屈点 $P = P_{cr}$, $w = 0$, $u = -\frac{Px}{EA}$ の近傍で摂動させる（この場合も第4変分まで求める）と

$$\frac{P}{P_{cr}} = 1 + \frac{1 - \frac{4P_{cr}}{EA}}{8\left(1 - \frac{P_{cr}}{EA}\right)^2\left(1 - \frac{2P_{cr}}{EA}\right)} \left(\frac{\pi w_0}{\ell}\right)^2, \quad \text{ただし} \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2 \sqrt{g_0}}, \quad \sqrt{g_0} = 1 - \frac{P_{cr}}{EA} \quad (6.88a, b, c)$$

のような関係を得る。ここに w_0 は sine 形状の座屈モードの振幅、つまり単純支持梁中央の座屈後のたわみの大きさである。ただ通常は、軸線の伸び $\frac{P_{cr}}{EA}$ は単位量に比べれば無視できるくらい小さいので、上式も実際には

$$\frac{P}{P_E} = 1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\pi w_0}{\ell}\right)^2, \quad P_{cr} \approx P_E \quad (6.89a, b)$$

程度と考えてもいい。図 6.12 にも示したように、これは非常に平べったい放物線である。

6.6.3 伸びない棒の理論 — Elastica

式(6.80)で定義した軸の伸びが厳密に零（不伸張）になる場合の理論が **Elastica** と呼ばれる著名な棒理論である。鋼等の構造材料でできた細長い棒が曲げを主に受ける場合、この軸の不伸張の仮定は実用的であることが知られている。近似ではなく厳密に不伸張とする Elastica 理論では、式(6.80)を用いて

$$(1 + u')^2 + (w')^2 \equiv 1 \quad \rightarrow \quad \epsilon \equiv 0 \quad (6.90)$$

という制約条件を課している。したがって必然的に式(6.83a)の軸力の構成関係は無意味になるが、つり合い式から $N(x)$ が無くなることは無い。すなわち、式(6.90)の付帯条件を満足するためには、その反力としての軸力が変形とは無関係に存在しなければならないからだ。ちょうど式(3.158)の非圧縮性（体積不変）流体の応力ひずみ関係に、流体の変形とは無関係に静水圧 p が存在しなければならないのと同じ理屈である。したがって不伸張の棒の理論には、軸力の構成関係が無くなった代わりに式(6.90)の制約条件が加わり、その他の方程式は前節の有限変位理論のそれと見かけ上同じになる。軸力 $N(x)$ は変形とは無関係の独立した未知関数である。変分原理で定式化する場合には、軸力 $N(x)$ は、式(6.90)の付帯条件を組み込むための Lagrange の未定乗数に相当する物理量²⁷になる。その定式化は第 C.2.5 節に示した。

この理論で、先端に集中モーメント C_0 が作用した片持ち梁を解くと、任意点の変位成分が

$$u(x) = \frac{EI}{C_0} \sin \frac{C_0 x}{EI} - x, \quad w(x) = \frac{EI}{C_0} \left\{ \cos \frac{C_0 x}{EI} - 1 \right\}$$

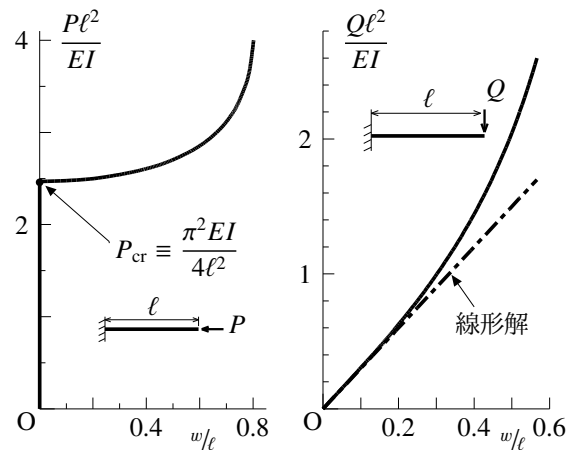
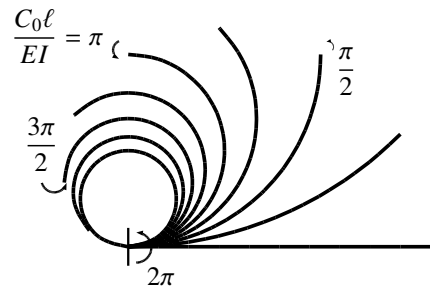


図 6.53 Elastica の変形

この理論で、先端に集中モーメント C_0 が作用した片持ち梁を解くと、任意点の変位成分が

²⁷ 第 3.5.2 (4) 節で説明したように、非圧縮性流体の静水圧 p も体積不変の制約条件を汎関数に組み込むときの Lagrange の未定定数に相当する物理量である。

と求められる。この場合のみ非線形微分方程式が容易に解ける。変位した梁の形状は図 6.53 に示したような円弧の一部である。というのも、長手方向に曲げモーメントが一樣なので曲率も長手方向に一定になるからだ。そして $c_0 \ell / EI = 2\pi$ で梁が真円になる。また前節の柱を解くと、解が楕円積分で表される。同様に片持ち梁のせん断の問題も楕円積分を用いて解を求めることができる。詳細については、前者は例えば文献 [95] 等を、後者は文献 [10] 等を参照のこと。結果を図 6.53 に示した。いずれも縦軸が P あるいは Q の外力レベルで、横軸は棒先端の z 方向変位である。

図 6.53 の左下図が柱の圧縮に対する応答である。この章の最初に用いた回転バネと剛棒のモデルと同じように、座屈荷重 P_{cr} 以上の圧縮力に対する応答は安定で、外力の増加につれてたわみも増えている。したがって材料が降伏しない限り、柱が座屈したあとも抵抗力を保持しており、安定なつり合い状態になる。ただ一般的な柱の場合には、座屈後のポテンシャルエネルギーの第 4 変分等が非常に小さいため、小さい外力増分に対する変位増分が非常に大きくなってしまふ。この図でも P_{cr} を超えるとすぐに横軸 (w/ℓ) が 0.5 程度にまで達している。これに伴い発生するひずみも大きくなって材料の弾性限界を超え、系の抵抗力を失うのが普通である。同じ図の右下図が、片持ち梁の先端にせん断力を加えたときの応答である。図中の一点鎖線が式 (4.39a) で求めた線形応答である。この場合には、幾何学的非線形性は剛性を大きくする効果を持っていて、変位が線形理論のそれよりも次第に小さくなっていくのは興味深い。

一般に細長比がある程度大きい場合には、軸の伸び縮みは単位量や曲げ変形に比べて無視できるくらい小さくなる。したがって *Elastica* 理論で問題を解決できる場合もあり、求められる解も軸の伸びを考慮した数値解等との差は非常に小さい。せん断を作用させた片持ち梁の場合の差異を定量的に示すと、細長比が 10 程度までに小さくなったとしても、 $Q\ell^2/EI \approx 2.0$ くらいの外力レベルのたわみ量が、*Elastica* の解より 1.5% 増加する程度である。しかし *Elastica* も解析解が存在するのはこの 3 例くらいで、結局は何らかの非線形数値解析に頼らざるを得ない。一つの方法を第 C.6.2 節に示しておいた。

6.6.4 ケーブル

さて、曲げ剛性 EI を無限大にして、棒の両端をヒンジで接合した系をトラスとみなすことができるように、その逆の $EI \rightarrow 0$ の極限がケーブルや弦に相当することは容易に想像できよう。ケーブルもその材料的な特長から、長大構造系には欠かせない構造部材である。有限変位理論を紹介したついでに、前節の伸びない棒が曲げに抵抗できない場合の支配方程式を求めておこう。曲げ剛性を零にしたので、支配方程式中の曲げモーメントも無視すればいい。前節と同様、軸線が伸びないことに対する反力としての抵抗力が $N(x)$ であるとする、つり合い式 (6.79) と不伸張の条件式 (6.90) とは

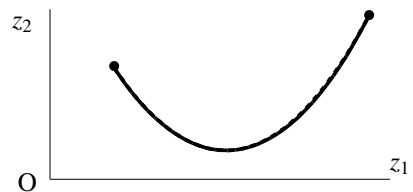


図 6.54 懸垂曲線 — 自重のみによるケーブルのつり合い形状

$$(N z_1') = 0, \quad (N z_2') + mg = 0, \quad (z_1')^2 + (z_2')^2 = 1 \tag{6.91a, b, c}$$

と書くことができる。ここで m は棒の単位長さ当たりの質量であり、分布外力は棒の一樣な自重 mg のみとした。 g は重力加速度である。さらに

$$z_1 = x + u, \quad z_2 = w \tag{6.92a, b}$$

と定義した z_1, z_2 は、棒軸線上の任意点の変形後の位置ベクトルの x, z 方向成分である。

そこで、関係式 $z_2' = z_1' \frac{dz_2}{dz_1}$ を式 (6.91b) に代入して式 (6.91a) を考慮した式と、同じ関係式を式 (6.91c) に代

入した式が、それぞれ

$$N \frac{d^2 z_2}{dz_1^2} (z_1')^2 + mg = 0, \quad (z_1')^2 = \left\{ 1 + \left(\frac{dz_2}{dz_1} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (a, b)$$

となるので、式 (b) を式 (a) に代入すると

$$N \frac{d^2 z_2}{dz_1^2} \left\{ 1 + \left(\frac{dz_2}{dz_1} \right)^2 \right\}^{-1} + mg = 0 \quad (c)$$

が曲げに関するつり合い式である。一方 x を適切に選んでやれば、式 (b) から正の符号だけを採用して

$$z_1' = \left\{ 1 + \left(\frac{dz_2}{dz_1} \right)^2 \right\}^{-1/2}$$

と置いてもいいから、これを式 (6.91a) の軸方向のつり合い式に代入した上で、式 (c) を用いて整理すると

$$\frac{d}{dz_1} \{N + mgz_2\} = 0$$

という軸力に関するつり合い式を得る。すなわち

$$N + mgz_2 = -\lambda = \text{const.}$$

となる。これを再度式 (c) に代入し直して $N(x)$ を消去した上で面倒な演算を続けると、最終的に得ることができるつり合い式は

$$\frac{d}{dz_1} \frac{mgz_2 + \lambda}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz_2}{dz_1} \right)^2}} = 0 \quad (6.93)$$

となる。これはケーブルの変形後のつり合い形状 $z = z_2(z_1)$ を支配する方程式であり、この方程式の解は懸垂曲線と呼ばれている。解の一般的な形は

$$z_2 = \frac{a}{mg} \cosh \left(\frac{mg}{a} z_1 + b \right) - \frac{\lambda}{mg}$$

であり、定数 a, b, λ は両端の境界条件とケーブルの長さから決定される [182]。

実はこの問題は変分問題の最も有名なものの一つでもある。そこで、例えば文献 [182] を参考にしてその問題を記述しておく。不伸張であることから、つり合っている形状 $y = y(x)$ のケーブルの全長が元の長さ ℓ に等しい条件は

$$J(y) \equiv \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx = \ell$$

と表される。この式を付帯条件としながら、ケーブル全体の持つ総ポテンシャルエネルギー

$$I(y) \equiv mg \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2} dx$$

を最小にする問題が、ケーブルの形状決定問題の一つの数学的記述になる。すなわち、Lagrange の未定乗数 λ を用いた

$$I(y) + \lambda J(y) \rightarrow \text{最小}$$

という変分原理の Euler 方程式が、式 (6.93) の (z_1, z_2) を (x, y) に置き換えたものに一致する。その解の懸垂曲線そのものを図 6.54 に例示した。ほとんど重なっているが参考のために破線で示したのは、ケーブル形状の両端の位置を一致させた上で最下点の z_2 座標が同じ値になるようにした放物線である。

6.6.5 弦を考えてみる

弦はケーブルと同じものだが、力学理論としては、大きな張力 $T_0 = \sigma_0 A$ で引張られて直線状態にあるものが微小変位の範囲で運動するものを対象としている。すなわち式 (6.32) の梁-柱理論程度の変形・変位の範囲で、曲げ剛性が零になったものと考えていい。つまり式 (6.32) で $P = -T_0$ とした上で、 EI を零と置いた

$$T_0 w'' + q = 0$$

がそのつり合い式になる。これは式 (6.91) で $z_1 \simeq x$ として z_1, z_2 の 2 次項を無視して求められる

$$N = \text{const.} = T_0, \quad N z_2'' + mg = 0$$

と等価である。もしこれが運動していれば、Newton の法則から

$$T_0 w'' + q = m \ddot{w}$$

が運動方程式になる。ここに m は棒の単位長さ当たりの質量であり、上に付したドットは時間微分である。さらに分布外力が零であれば、上式は

$$w'' = \frac{m}{T_0} \ddot{w} \quad (6.94)$$

と変形でき、式 (3.155) と同じ波動方程式になる。つまり弦を伝わる波の速度 c が

$$c \equiv \sqrt{T_0/m} = \sqrt{\sigma_0/\rho}$$

であることを示している。ここに ρ は弦の密度である。

‘October:’ 昨今の学生さんでシーザーという人物を知らない人は少なくない。それはさておき、セプテットは七重奏。八重奏はオクテットと呼ばれる。オクターブは8度の音程である。蛸の足は8本だ。しかし9月がセプテンバーでオクトーバーは10月だ。Novはnineに似ていて、Decはデシリットルのように10と関係がありそうだ。どうしてだろう。何が? 8月は?



写真 6.2 来島海峡大橋 キャットウォーク 1999年竣工 (中沢正利先生撮影)



‘door:’ 第1 著者が留学していた頃と考えるに、米国では家の中の自室はもちろんトイレも、出かける・使っていないときは開けておくのが礼儀である。また街の中に自動ドアはそんなにあるわけではない。タクシーも同様であることには注意が必要だ。また、取っ手が横棒である場合は「押す」、縦の取っ手は「引く」というのが原則（先輩に教えられた）のようで、便利だと思った。ドアを開けて女性に道を譲るとたいていは笑顔で‘Thank you!’と言われるが、日本国内ではそうはならない。口に出すのが恥ずかしいのだろうか。そうそう、レストランにおけるレジ支払い後に西日本の客は「ありがとう」と言うが、東日本の客は無言らしい。「ご馳走様」くらいは言うのかなあ、ううーむ。

第7章

ねじりを受ける薄肉断面棒の力学

7.1 円柱と円管のねじり

7.1.1 円柱のねじり

(1) 薄肉断面材の立体構造の力学

第6章まででは平面内のみで変形が生じる構造を扱ってきたが、実際の構造ではそういうことは稀であり、立体的に挙動する構造系になっているのが普通である。そういった3次元構造系の部材を棒でモデル化してもいい場合には、第6章までに扱ってきた軸方向の抵抗とそれに直交する二つの軸回りの曲げ抵抗に加えて、ねじり変形による抵抗が発生することは容易に想像できる。もちろんそれが設計を左右するようなレベルであるか否かは別問題だが、例えば平面図がS字等に曲がった梁や斜橋はもちろん、直線梁の平面内の曲げであつても断面形状と載荷位置によってはねじりが生じる。ここでは主に鋼構造のモデルである薄肉断面棒部材に焦点を絞り、ねじりの力学の基礎を概説する。弾性論や材料力学等の教科書等にある充実断面も含む一般的なねじり理論に、断面が薄肉であることを利用した近似を導入した構造力学としてのねじり理論の基礎である。ただし文献 [171, 172] からの抜粋である。またこの章では簡単のために括弧無しの太字で行列を表している。

(2) ねじりによる変形

最も基本的な例として図 7.1 にある円柱のねじりを考えよう。図中の2重矢印は、ねじり集中モーメントを、普通の右ネジがその矢印方向に締まっていくような回転方向に作用させることを意味する。第4章で用いた曲げに対する基本的な仮定と同じように考えることにすると、この円柱をねじったときの変形の特徴は

- ねじられて回転したあとも、平面だった断面はほぼ平面のままであり、
- ねじられる中心の回りに断面は一様に回転する

と近似仮定できそうだ。この仮定を図 7.2 の右図に示した。原点回りに断面内の点 (r, θ) が $\varphi(x)$ だけ回転すると考えるのである。

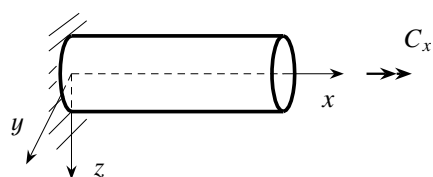


図 7.1 左端を固定された円柱のねじり

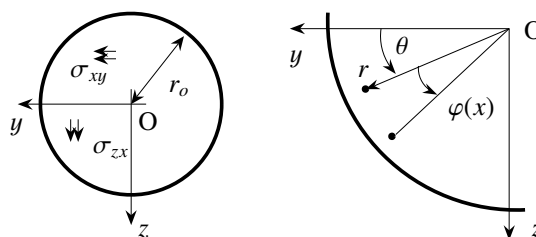


図 7.2 円柱断面に生じる応力と回転変位

図 7.2 の右図を幾何学的に考察すれば、点 (r, θ) の x, y, z 方向の各変位成分は

$$u_x(x, y, z) \equiv 0, \quad \left[\text{最低限 } \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0, \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \text{ つまり } u_x(x, y, z) = u_x(x) \text{ でいい} \right], \quad (7.1a)$$

$$u_y(x, y, z) = r \cos(\theta + \varphi) - r \cos \theta \approx -r\varphi \sin \theta = -z\varphi(x), \quad (7.1b)$$

$$u_z(x, y, z) = r \sin(\theta + \varphi) - r \sin \theta \approx r\varphi \cos \theta = y\varphi(x) \quad (7.1c)$$

となる。ただし、それぞれの式の第2式から第3式への近似では、ねじりによる回転角が微小である条件つまり $|\varphi(x)| \ll 1$ を用いている。この式(7.1)をひずみの定義式(3.6)に代入すると、零でない成分は

$$\epsilon_{xy} = -\frac{1}{2} z \frac{d\varphi(x)}{dx}, \quad \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} y \frac{d\varphi(x)}{dx} \quad (7.2a, b)$$

の二つだけである。

(3) 合応力

式(7.2)を Hooke の法則式(3.46)に代入すれば、応力は

$$\sigma_{xy} = -Gz\varphi'(x) = -Gr \sin \theta \varphi'(x), \quad \sigma_{zx} = Gy\varphi'(x) = Gr \cos \theta \varphi'(x) \quad (7.3a, b)$$

の2成分だけが非零である。()' は x に関する微係数を表し、以下でも用いる。また G はせん断弾性係数である。まず合応力の候補の一つである y 方向のせん断力を、最初の応力成分を用いて算定してみると

$$V_y = \int_A \sigma_{xy} dA = \int_0^{r_o} dr \int_0^{2\pi} r d\theta \sigma_{xy} = -G\varphi' \int_0^{r_o} r^2 dr \int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta = 0$$

のように確かに零になる。同様に z 方向のせん断力も零である。次に、式(4.11)の曲げモーメントを念頭に置いて、この断面内のせん断応力で定義できる合応力に思いを巡らせると、もう一つの断面力である x 軸回りの **Saint-Venant** のねじりモーメントが

$$T_S(x) \equiv \int_A (-z\sigma_{xy} + y\sigma_{zx}) dA \quad (7.4)$$

と定義できそうだ。符号は、正の断面における正のモーメントの向きを2重矢印で示したときに、それが x の正方向を向くように定義してある。式(7.3)を式(7.4)に代入して整理すると

$$T_S(x) = G \left\{ \int_A (y^2 + z^2) dA \right\} \varphi'(x) \Rightarrow GJ\varphi'(x) \quad (7.5)$$

となる。ここに J は、円形断面に対して次式で定義される **Saint-Venant** のねじり定数で

$$J \equiv \int_A (y^2 + z^2) dA = \int_0^{r_o} dr \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{\pi}{2} r_o^4 \quad (7.6)$$

という値を持ち、円柱の場合には断面の極2次モーメントに一致している。その次元は断面2次モーメントと同じく [長さ]⁴ である。 φ' はねじり率と呼ばれる。**Saint-Venant** のねじりモーメントはねじり率に比例し、その比例抵抗係数 GJ は **Saint-Venant** のねじり剛性と呼ばれる。

(4) つり合い式と境界条件

結局、断面に発生した抵抗力はこの **Saint-Venant** のねじりモーメントしか無いので、図 7.3 のような微分要素の x 軸回りのモーメントのつり合いから

$$\left(T_S + \frac{dT_S}{dx} dx \right) - T_S = 0$$

がつり合い式である。よって長さ ℓ の棒のねじりのつり合い式は

$$T_S'(x) = 0, \quad 0 < x < \ell \quad (7.7)$$

と表される。一様断面の場合のつり合い式をねじり回転角 $\varphi(x)$ で表すと、式 (7.5) を上式に代入して

$$GJ\varphi''(x) = 0 \quad (7.8)$$

となる。なお、ここでは分布外力トルクのようなものを無視している。

境界条件の代表的なものは図 7.1 の両端の条件であろう。つまり、左端のような回転固定の条件と、右端のようなねじり外力を与える条件との二つである。図 7.1 に定義したねじり外力の C_x の方向を正とすると、一般的な境界条件は

$$\varphi = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i T_S = (C_x)_i \quad (i = 1, 2) \quad (7.9)$$

と書くことができる。ただし簡単のために式 (4.26) の記号 n_i を用い、左端 $x = 0$ の条件は $i = 1$ の場合、右端 $x = \ell$ の条件は $i = 2$ の場合とした。力学的境界条件にも式 (7.5) を代入すると

$$\varphi = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (GJ\varphi') = (C_x)_i \quad (i = 1, 2) \quad (7.10)$$

のようにねじり回転角 φ だけで表すことができる。

例: まず、図 7.1 の問題を解いておこう。右端で与えるねじり外力 C_x を T_0 と記すことにすれば境界条件は

$$\varphi(0) = 0, \quad T_S(\ell) = GJ\varphi'(\ell) = T_0$$

である。つり合い式 (7.8) の一般解は

$$\varphi(x) = ax + b$$

となるから、上の境界条件にこれを代入して積分定数 a, b を決定すると、結局

$$a = \frac{T_0}{GJ}, \quad b = 0$$

を得る。したがって、解は

$$\varphi(x) = \frac{T_0}{GJ} x, \quad T_S(x) = T_0 = \text{const.} \quad (7.11a, b)$$

と求められる。図 7.4 の右側に、ねじりによる円柱母線の変形を模式的に示した。式 (7.3) に式 (7.11a) を代入すると y, z 軸上の応力分布を求めることができ、図 7.4 の左側に示したようになる。原点回りのねじり抵抗が発生しているのが明確だ。

7.1.2 円管のねじり

(1) 円管のねじり定数 J

さて薄肉に近づけるために円管を対象としよう。円管のねじり変形の特徴も円柱のそれとほとんど同じだと推測できるので、前節の式 (7.3) の応力分布までは同じ結論になると考えていだろう。これを Saint-Venant の

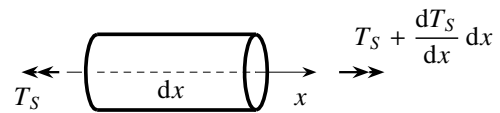


図 7.3 Saint-Venant のねじり力に関するつり合い

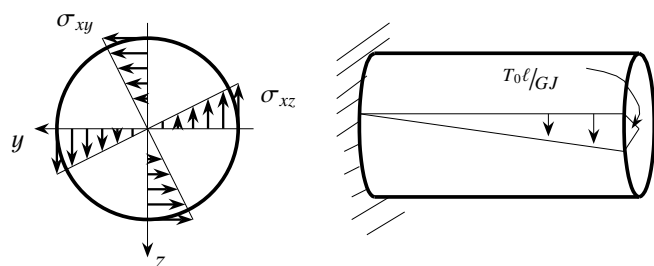


図 7.4 円柱断面に生じるせん断応力分布と変形

ねじりモーメントの定義式(7.4)に代入すると、 r_i が内半径で外半径が r_o の円管の場合には

$$T_S(x) \equiv \int_A (-z\sigma_{xy} + y\sigma_{zx}) dA = \int_{r_i}^{r_o} dr \int_0^{2\pi} r d\theta r^2 G\varphi'$$

のように、円柱の場合とは積分範囲が異なるだけだ。結局 Saint-Venant のねじり定数が

$$J = \int_{r_i}^{r_o} \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta = \frac{\pi}{2} (r_o^4 - r_i^4) \tag{*}$$

という値を持つ。また前節の境界値問題の基礎式も円柱のそれと同じである。せん断応力分布を図7.5に示した。

(2) 薄肉円管のねじり定数 J

いよいよ薄肉断面にするために円管の肉厚を非常に薄くしよう。つまり図7.6のように肉厚中心線の半径を r_c として肉厚を t としたとき

$$r_c \gg t \text{ あるいは } (\text{径厚比}) \equiv \frac{D}{t} \gg 1, \quad D \equiv 2r_c$$

であるような寸法比を持つ管は、鋼構造でよく用いられる薄肉円管だ。この半径 r_c と肉厚 t を用いて式(*)を書き直すと

$$J = \frac{\pi}{2} \left\{ \left(r_c + \frac{t}{2} \right)^4 - \left(r_c - \frac{t}{2} \right)^4 \right\} = 2\pi r_c^3 t \left\{ 1 + \left(\frac{t}{D} \right)^2 \right\}$$

となる。ここで、上述のように断面内の二つの寸法同士の大小関係が著しい場合には、最後の表現の括弧内の第2項は第1項に比べて無視できるくらい小さいと考えていい。したがって、薄肉円管の Saint-Venant のねじり定数は

$$J \approx 2\pi r_c^3 t \tag{7.12}$$

と近似できそうだが、これは果たして合理的な結論だろうか。なお工学的には r_c は r_i でも r_o でも構わない。

薄肉ということ: この結論は以下のように、実は薄肉断面材であることを別の角度から近似解釈しても得ることができる。まず、実際には図7.7の左側の図に示したように r 方向には線形分布する応力は、肉厚が非常に薄いため応力の外径側と内径側の応力差はとて小さくなる。そこで、その厚さ方向への分布を無視し、同図の右側の図のように肉厚方向には一様なせん断応力が生じていると近似し、その応力値は分布の平均値でもある肉厚中心線上の応力で代表させて

$$\tau \equiv G\varphi'(x) r_c$$

と近似するのだ。こうすることによって Saint-Venant のねじりモーメントは、微分面積を $dA = t r_c d\theta$ と近似してもいいから

$$T_S(x) = \int_A \tau r_c dA = G\varphi'(x) \int_0^{2\pi} t r_c^3 d\theta$$

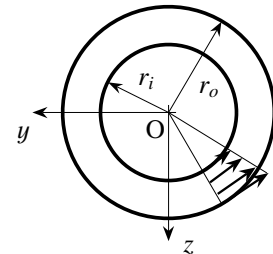


図7.5 円管のせん断応力分布

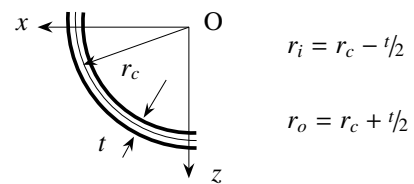


図7.6 薄肉円管の断面諸量

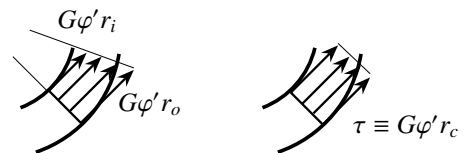


図7.7 薄肉円管断面に発生するせん断応力分布の近似

と算定できる。この式と式 (7.5) の表現を等置すれば J は右辺の積分項で定義できて、その値は

$$J = \int_0^{2\pi} t r_c^3 d\theta = 2\pi r_c^3 t \tag{7.13}$$

となる。これは式 (7.12) と一致するのだ。

すなわち肉厚が非常に薄い場合には、その薄い肉厚方向への力学的挙動をある程度簡略化しても、工学的には十分な精度を持つ理論を定式化できるということだ。第4章の梁理論の場合も、寸法が長さに対して比較的小さい断面の方向の応力分布を簡略化することによって、扱い易く精度も失われない初等梁理論を定式化できた。ここでも上の近似のように、断面を代表する二つの寸法の間「薄肉」という極端な大小関係がある場合には、比較的小さい寸法である肉厚方向への応力分布等を簡略化しても精度が失われないことが明らかになった。次の節では、このような考えに基づいて任意の薄肉閉断面棒部材のねじり理論を定式化する。

演習問題 7-1

1. 両端が固定された図 7.8 の丸棒の中央にねじり外力 T_0 を作用させたときの、任意断面のねじり角を求めよ。荷重点の (不) 連続条件については、曲げ問題の条件式 (4.45) (4.47) を参考にしながら式 (7.9) の境界条件を元にして熟考せよ。

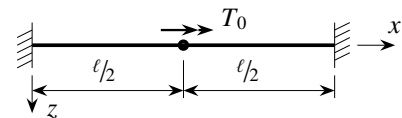


図 7.8 両端固定丸棒のねじり

7.2 薄肉閉断面棒の Saint-Venant のねじり

7.2.1 セン断流とねじりモーメント

前節の結論を踏まえ、任意の薄肉閉断面棒のねじりについて一般的な定式化を試みる。ただ断面は閉断面とする。閉断面はあとで出てくる開断面とは異なり、肉厚中心線が「端っこ」を持たずに閉じた曲線になるような断面である。簡単のために、図 7.9 のような x 軸回りのねじりを考え、原点が断面のねじり中心であるとする。そして肉厚中心線に沿った新しい座標を s 軸とする。

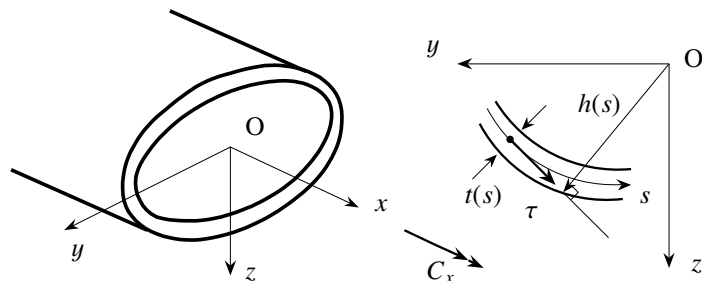


図 7.9 任意の薄肉閉断面の Saint-Venant のねじり

薄肉円管の例からも明らかなように、せん断応力の肉厚方向の分布は一樣と近似していい。したがってせん断応力 σ_{sx} を直接扱うのではなく、図 7.9 に示したようにその肉厚における代表値 τ を肉厚中心線上の σ_{sx} の値で定義し、その「合応力」の $(t \times \tau)$ が肉厚中心線上に発生して抵抗しているものと近似解釈する。そのせん断応力 $\tau(x, s)$ の作用線までの原点からの距離を $h(s)$ と表す。また肉厚は s 方向に一樣である必要は無いので $t(s)$ と一般化しておく。

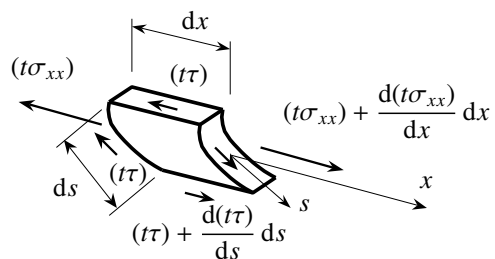


図 7.10 微分薄肉要素の力のつり合い

このように考えて図 7.10 のように $(t \times ds \times dx)$ の微分要素を取り出すと、応力に t を乗じた「合応力」が図示したようにそれぞれの面に発生していると考えていい。この x 方向の力のつり合いは

$$\frac{\partial(t\sigma_{xx})}{\partial x} + \frac{\partial(t\tau)}{\partial s} = 0$$

と¹なる。これを s で積分すると

$$t(s)\tau(x, s) = t(s_0)\tau(x, s_0) - \int_{s_0}^s \frac{\partial(t\sigma_{xx})}{\partial x} ds$$

と表現できる。ここに s_0 はある基準となる位置の s 座標値である。棒をねじっているだけなので、円柱の場合と同様、第1次近似としては軸方向の直応力は発生せず、せん断応力だけで抵抗していると考えてもよさそうだ。したがって、上式右辺第2項の直応力に関する項を第1項に比べて無視すれば

$$t(s)\tau(x, s) = t(s_0)\tau(x, s_0) = s \text{ 方向には const.}$$

という関係が成り立つ。あるいは、ここで考えた「合応力」を新しく

$$q(x, s) \equiv t(s)\tau(x, s) \quad (7.14)$$

で定義して、これをせん断流と呼ぶことにすると、上の結論は

$$q(x, s) = q_0(x) = s \text{ 方向には const.}, \quad \tau(x, s) = \frac{q_0(x)}{t(s)} \quad (7.15a, b)$$

とも書くことができる。つまり薄肉断面を肉厚幅の水路とみなし、そこを流れる水の流量がせん断流なのである。そして、閉じた水路だから任意の水路地点で総流量は同じ（一定）であり水路幅にはよらないから、せん断流も任意の点 s の肉厚断面では一定になるのである。

このように、断面内の応力がせん断流で表現できるので、Saint-Venant のねじりモーメントは

$$\begin{aligned} T_S(x) &\equiv \oint \{t(s)\tau(x, s)\} h(s) ds \\ &= q_0(x) \oint h(s) ds \end{aligned}$$

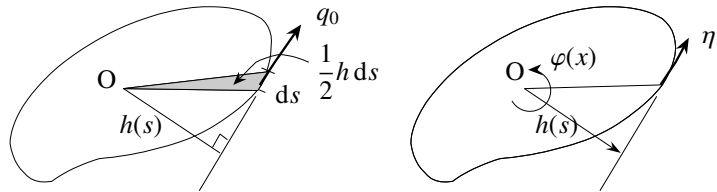


図 7.11 ねじり抵抗を受け持つ面積

と定義してもいい。せん断流はある x の断面内では一定なので、最後の式では $q_0(x)$ を積分の外に出すことができる。ここで、図 7.11 の左図の網掛けが施された三角形の面積が $\{1/2 h(s) ds\}$ になることを踏まえると、上式の1周積分値は肉厚中心線で囲まれた部分の面積の2倍になっていることがわかる。つまり

$$\oint h(s) ds = 2A_c \quad (7.16)$$

である。ここに A_c は図 7.11 の細い曲線で描かれた肉厚中心線で囲まれた部分の面積である。

したがって、せん断流がわかれば Saint-Venant のねじりモーメントは

$$T_S(x) = 2q_0(x)A_c = 2t(s)\tau(x, s)A_c \quad (7.17)$$

と算定でき、この逆関係としてせん断応力は近似的に

$$\sigma_{sx}(x, n, s) \simeq \tau(x, s) = \frac{T_S(x)}{2A_c t(s)} \quad (7.18)$$

と表現できることになる。 n はあとで図 7.20 にも示すような x, s 軸に直交する肉厚方向の座標である。

¹ s 方向のせん断応力のつり合いは最終的な合応力 Saint-Venant のねじりモーメントのつり合いに相当するので、ここでは考えない。あるいは σ_{ss} の様子がわからないので無視するとしてもいい。

7.2.2 閉断面の Saint-Venant のねじり定数

一方図 7.11 の右図に示したように、ある断面の肉厚中心線上の任意点 (x, s) の s 方向の変位成分を $\eta(x, s)$ とし、 x 方向の変位成分を $u(x, s)$ とすると、直交曲線座標系でこの σ_{sx} に対応するせん断ひずみ成分 ϵ_{sx} は式 (3.6) と同様

$$\epsilon_{sx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)$$

で定義できる。円柱や円管の場合は u の s 方向の微係数を無視したが、断面形が円形ではなくなったので、以下では考慮することにする。原点がねじり回転角 φ の中心で、線形理論なので回転角も小さく $|\varphi| \ll 1$ とみなせるから、図からも明らかなように

$$\eta(x, s) = h(s) \varphi(x)$$

と考えていい。したがって上のひずみの定義に代入して

$$\epsilon_{sx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial s} + h(s) \varphi'(x) \right) \quad (7.19)$$

となる。一方 Hooke の法則式 (3.46) と式 (7.15b) (7.17) (7.18) から

$$2\epsilon_{sx} = \frac{1}{G} \sigma_{sx} \approx \frac{1}{G} \tau = \frac{q_0(x)}{Gt(s)} = \frac{T_S(x)}{2GA_c t(s)} \quad (7.20)$$

と関係付けられる。式 (7.19) と式 (7.20) から ϵ_{sx} を消去して整理すると

$$\frac{\partial u(x, s)}{\partial s} = \frac{T_S(x)}{2GA_c t(s)} - h(s) \varphi'(x) \quad (7.21)$$

が Saint-Venant のねじりモーメント $T_S(x)$ と変位成分 $u(x, s)$ および $\varphi(x)$ との関係になっている。

式 (7.21) の両辺をある s_0 から s 上で閉断面内 1 周積分 ($s_{0+} \equiv s_0 + \epsilon$ から $s_{0-} \equiv s_0 - \epsilon$ まで; $\epsilon \rightarrow 0$) すると

$$\begin{aligned} \oint(\text{右辺}) ds &= \frac{T_S}{2GA_c} \oint \frac{ds}{t(s)} - \varphi' \oint h ds = \frac{T_S}{2GA_c} \oint \frac{ds}{t(s)} - 2A_c \varphi', \\ \oint(\text{左辺}) ds &= \oint \frac{\partial u}{\partial s} ds = u(x, s_{0-}) - u(x, s_{0+}) = u(x, s_0) - u(x, s_0) = 0 \end{aligned}$$

となる。第 1 式では再度式 (7.16) を用いた。また第 2 式の演算で最後から二つ目の式は、断面内に任意に選んだ積分開始点 s_0 の x 方向変位 u の食い違い量であり、閉断面である以上このような食い違いが生じているはずはないから、それは零にならなければならない、最終的に第 2 式は零になる。したがって、左辺右辺の積分演算結果を等置することにより

$$0 = \frac{T_S(x)}{2GA_c} \oint \frac{ds}{t(s)} - 2A_c \varphi'(x)$$

という関係を得るので、これから Saint-Venant のねじりモーメントは

$$T_S(x) = G \frac{4A_c^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \varphi'(x) \Rightarrow GJ \varphi'(x)$$

と表現でき、等置できる。したがって、この等置から任意の閉断面の Saint-Venant のねじり定数は

$$J \equiv \frac{4A_c^2}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \quad (7.22)$$

で定義すればいいことになる。

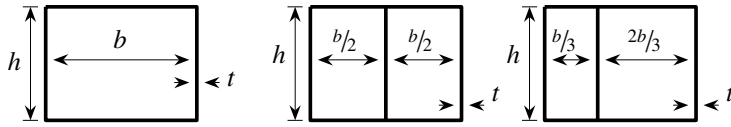


図 7.12 箱形断面のねじり定数

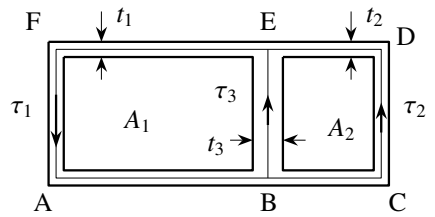


図 7.13 2室断面の場合の例

薄肉円管の場合の例: では前節の薄肉円管に対して, 上式の成否を確かめてみよう。この場合は

$$A_c = \pi r_c^2, \quad \oint ds = 2\pi r_c$$

なので, 上の式(7.22)に代入することによって

$$J = \frac{4\pi^2 r_c^4}{2\pi r_c / t} = 2\pi r_c^3 t$$

となり, 式(7.13)の値を得る。

演習問題 7-2

- 図 7.12 の一番左の図にあるような, 断面の高さが h で幅が b , 肉厚 t が一定値を持つ箱形断面のねじり定数を求めよ。

7.2.3 多室断面のねじり定数

箱形断面でできた橋梁部材や船体等では, 断面の中がさらに仕切られて多室になっていることの方が多い。その場合も同様の考え方でねじり剛性を算定できる。図 7.13 のように, 左右外壁側の断面のせん断流を

$$q_1 \equiv t_1 \tau_1, \quad q_2 \equiv t_2 \tau_2$$

と置くと, 点 B および E におけるせん断流の連続性から, 中仕切り壁中のせん断流は

$$q_3 \equiv t_3 \tau_3 = q_1 - q_2$$

でなければならない。ねじり中心から作用線までの距離を $h(s)$ で定義すると, 2室断面の Saint-Venant のねじりモーメントは, それぞれの s 軸方向を正とするせん断応力 τ_i で定義したせん断流 q_i を用いて

$$T_S(x) \equiv \int_{EFAB} q_1 h ds + \int_{BCDE} q_2 h ds + \int_{BE} (q_1 - q_2) h ds$$

で定義できる。さらに積分の向きを逆にした場合は $\int_{BE} (-q_2 h) ds = \int_{EB} (q_2 h) ds$ になるから

$$T_S(x) = \oint_{\partial A_1} q_1 h ds + \oint_{\partial A_2} q_2 h ds = 2(A_1 q_1 + A_2 q_2) \tag{*}$$

と表現できる。ここに ∂A_i は面積 A_i を囲む閉曲線に沿った積分経路を示している。

一方, 式(7.20)はそれぞれの断面で

$$2\epsilon_{sx} = \frac{q_i}{Gt_i}$$

と書くことができるので, これと式(7.19)から式(7.21)の代わりに

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{q_i}{Gt_i} - h\varphi'$$

とも書くことができる。これを例えば ∂A_1 に沿って周積分すると

$$0 = \int_{EFAB} \frac{q_1}{Gt_1} ds + \int_{BE} \frac{q_1 - q_2}{Gt_3} ds - 2A_1\varphi'$$

つまり

$$q_1 \oint_{\partial A_1} \frac{1}{Gt(s)} ds - q_2 \int_{BE} \frac{1}{Gt(s)} ds = 2A_1\varphi'$$

という関係を得る。同様の演算を ∂A_2 に対しても行うと

$$-q_1 \int_{BE} \frac{1}{Gt(s)} ds + q_2 \oint_{\partial A_2} \frac{1}{Gt(s)} ds = 2A_2\varphi'$$

となる。ここで左辺の q_i の各係数を

$$\xi_i \equiv \oint_{\partial A_i} \frac{ds}{t(s)}, \quad \xi_{12} \equiv \int_{BE} \frac{ds}{t(s)}$$

と定義しておいて、上2式を連立させて q_i について解くと

$$q_1 = \frac{2(A_1\xi_2 + A_2\xi_{12})}{\xi_1\xi_2 - \xi_{12}^2} G\varphi', \quad q_2 = \frac{2(A_1\xi_{12} + A_2\xi_1)}{\xi_1\xi_2 - \xi_{12}^2} G\varphi'$$

と求められる。これを式(*)に代入すれば、最終的に Saint-Venant のねじりモーメントを $\{GJ\varphi'(x)\}$ と表現することができ、その関係式からねじり定数が

$$J = 4 \frac{A_1(A_1\xi_2 + A_2\xi_{12}) + A_2(A_1\xi_{12} + A_2\xi_1)}{\xi_1\xi_2 - \xi_{12}^2} \quad (7.23)$$

と定義できることになる。多室の一般論についても同様に算定できるが、具体的な J の表現については別途文献を参照のこと。

演習問題 7-3

3. 図 7.12 の右の二つの図に示した 2 室箱形断面の J を求め、演習問題 7-2 の 2 番の答と比較せよ。また隔壁の位置と J の関係を求めて考察せよ。

7.2.4 つり合い式と境界条件

任意の薄肉閉断面棒の支配方程式は円柱・円管のそれと同じで、つり合いは式 (7.7) あるいは式 (7.8) で、境界条件も式 (7.9) あるいは式 (7.10) で与えられる。つまり任意の閉断面棒のねじり角 $\varphi(x)$ に関する境界値問題の表現は、断面形状によらずすべて同じになる。断面形の違いは断面定数 J の違いとなつてのみ現われ、初等梁理論等と同じような棒理論が定式化された。ただ厳密には、円柱や円管を除いた他の断面の場合には、閉断面であっても一般には次の節以降で議論するそりを考慮しなければならない場合もある。これについては第 7.4 節で考慮する。

7.3 薄肉開断面棒のねじり

7.3.1 薄肉長方形断面棒のねじり

(1) 断面に発生するせん断応力の概況

橋梁の代表的形式であるプレートガーダは、図 7.14 にあるような、肉厚 t が非常に薄い平板を複数用いて構成された断面になっている。この断面は肉厚中心線（この図では y - z 面内の z 軸に沿う線）に「端っこ（この

図では $z = \text{const.}$ の面つまり上下面の箇所) 」があるので開断面と呼ばれる。鋼構造のほとんどすべての部材には、このような薄肉長方形断面を持つ部分とその断面内に含んでいる。任意の薄肉断面部材のねじり抵抗を知るためには、この長方形断面棒が

$$l \gg b \gg t$$

を満足するくらい薄肉で細長い場合のねじり挙動を知る必要がある。まずは円柱や円管とほぼ同様に、ねじりに抵抗する内力は断面に発生するせん断応力、つまり直角座標系の成分で示すと σ_{xy} と σ_{zx} の二つだと考えられる。ただ上式の幾何学的な条件によって、さらに大胆かつ有効な近似ができるかもしれない。

このような開断面の場合には、図 7.15 に示したように、その二つのせん断応力成分はどちらも自由表面では零になるように分布しなければならない。つまり図 7.15 に示したように、 σ_{zx} は上面で零から始まって下へ進むにつれて次第に大きくなることできるが、下面ではまた零に戻る。これに対し σ_{xy} は右面で零で、左に進むにつれて大きくなることできるが、薄肉のためにすぐに零に戻らざるを得ない。そうすると、その二つのせん断応力の絶対値同士の相対的な大きさは、それぞれが分布する長手方向の寸法にそのまま対応していると考えてもよさそうだ。つまりこの場合は非常に薄肉であることから、その長手方向の寸法の割合に応じて

$$b \gg t \quad \rightarrow \quad |\sigma_{zx}| \gg |\sigma_{xy}|$$

と近似できそうだ。一方このせん断応力は、ねじり外力に抵抗するような分布になっていなければならないから、少なくともこの大きい方の σ_{zx} は、 z 軸を境に左右反対称つまり符号が異なるように分布しなければならないが、したがって肉厚中心線 z 軸上で零になると予想される。以上の考察から、発生する応力成分に対して

$$\sigma_{xy} \equiv 0, \quad \sigma_{zx}^* \equiv \sigma_{zx}|_{y=0} = 0$$

の2条件を近似仮定できそうだ。第2式の上付きの*は、肉厚中心線 ($y = 0$) 上の値であることを明示するための記号である。Hooke の法則式 (3.46) にこれを代入すれば、せん断ひずみに対する仮定も同様に

$$\epsilon_{xy} \equiv 0, \quad \epsilon_{zx}^* \equiv \epsilon_{zx}|_{y=0} = 0 \tag{7.24a, b}$$

と表現できる。

(2) 断面の回転とせん断流

円柱の場合を少し一般化し、断面が任意の回転中心 (y_s, z_s) 回りに $\varphi(x)$ だけ回転して抵抗していると考えよう。図 7.16 にその様子を示したが、この幾何学的な考察から任意点の変位の y, z 方向成分が

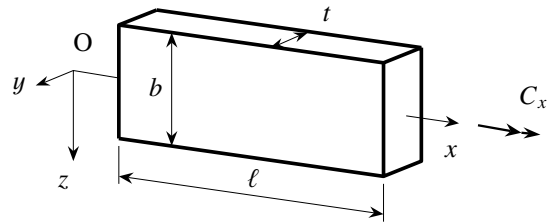


図 7.14 薄肉長方形断面棒

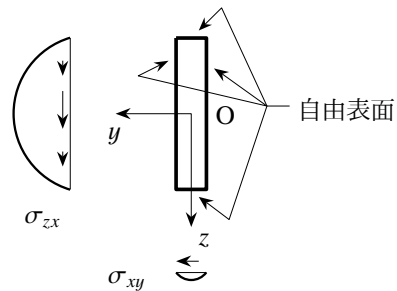


図 7.15 せん断応力分布の概況

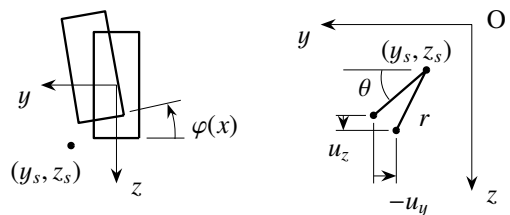


図 7.16 ねじりを受けた薄肉長方形断面

$$-u_y(x, y, z) = r \cos \theta - r \cos(\theta + \varphi) \approx r \varphi \sin \theta = (z - z_s) \varphi(x), \tag{7.25a}$$

$$u_z(x, y, z) = r \sin(\theta + \varphi) - r \sin \theta \approx r \varphi \cos \theta = (y - y_s) \varphi(x) \tag{7.25b}$$

と表現できる。それぞれの式の第2式から第3式へも、 φ が微小であることを用いて近似した。

これを式(7.24a)の仮定に代入すると

$$0 = 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial y} = -\frac{\partial u_y}{\partial x} = (z - z_s)\varphi'(x)$$

となるから、1回積分すると

$$u_x(x, y, z) = u_x(x, 0, z) + y(z - z_s)\varphi'(x) \tag{a}$$

という関係になる。もう一つのひずみの仮定式(7.24b)に式(7.25)を代入すると

$$0 = 2\epsilon_{zx}^* = \frac{\partial u_x}{\partial z} \Big|_{y=0} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \Big|_{y=0} \rightarrow \frac{\partial u_x(x, 0, z)}{\partial z} = y_s\varphi'(x)$$

であるから、これも1回積分すると

$$u_x(x, 0, z) = u_x(x, 0, 0) + zy_s\varphi'(x) \tag{b}$$

となる。この式(b)を式(a)に代入して整理すると、 x 方向変位は

$$u_x(x, y, z) = u(x) + (yz + zy_s - yz_s)\varphi'(x) \tag{7.26}$$

となる。ここに $u(x)$ は断面の原点の x 方向変位成分 $u_x(x, 0, 0)$ を置き換えて定義したもので、断面の x 方向への一様な変位量である。これに対し第2項は y と z の関数になっており、円柱や円管とは異なり、ねじりによって断面が平面でなくなる量を表している。これは後述の「そり」を表しているのだが、これによって直応力 σ_{xx} が生じてしまうことがわかる。しかし、前節の閉断面の場合と同様、薄肉長方形断面板単体の場合にも直応力 σ_{xx} は比較的小さいものとして無視することにする。直応力の効果は第7.4節で考察する。

式(7.24)の仮定をそのまま鵜呑みにすれば、伸びひずみの ϵ_{xx} 以外で零でないひずみ成分は ϵ_{zx} のみであり、式(7.25)と式(7.26)をひずみの定義式(3.6)に代入すれば

$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = y\varphi'(x)$$

と求められる。したがってHookeの法則式(3.46)に代入するとせん断応力が

$$\sigma_{zx}(x, y, z) = 2Gy\varphi'(x) = G(2y)\varphi'(x) \tag{7.27}$$

と表すことができる。これを示したのが図7.17の左側の図である。 z 軸を対称軸にして反対称に線形分布をしているから x 軸回りの抵抗モーメントが生じており、これがねじりに抵抗する合応力を生み出す。

しかしこれが不合理なことに多くの読者はすぐに気付くだろう。つまり、断面の上下面 $z = \pm b/2$ の自由表面でせん断応力 σ_{zx} が零になっていないのである。ちょうどTimoshenko梁のせん断応力分布と同じような状況だ。もしこの y 方向の線形分布が正しいとしても、上下面はこのせん断応力成分にとっての自由表面なので図7.17の右側の図に示したように、上下面に近づくにつれて応力は零にならないといけない。これも初等梁理論におけるせん断応力(せん断変形)に対する仮定と同様、仮定を真として定式化したことによる不合理あるいは矛盾点である。これはさらに別の力学的な考察で修正しなければならない。そこで、前節で扱った円管をつぶしたものが長方形断面だろうと見当を付け、応力分布がどうなるべきかについて思考実験してみよう。

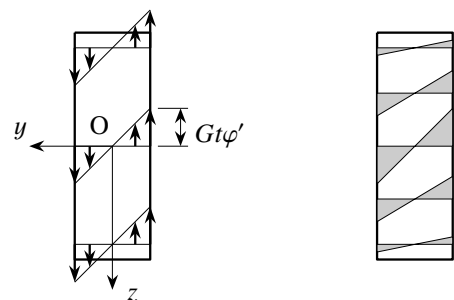


図 7.17 ねじりによるせん断応力分布

まず図 7.18 の左側の図には前節の薄肉円管の結果そのままを示してある。右側の図はそれをある程度水平方向につぶした状態を模式的に捉えたものであるが、右下にある σ_{zx} の y 方向の分布は、上で求められたものと同様、ほぼ z 軸を反対称軸とした分布をするだろう。また σ_{zx} の z 方向分布についてはこの右側の図の右端の図のように、一様ではないが上下面で零になるような何らかの分布を

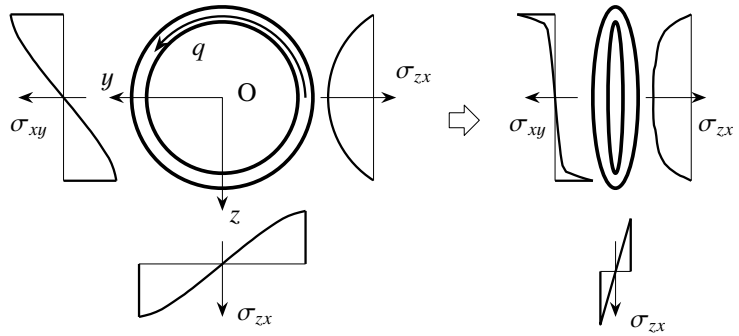


図 7.18 セン断応力分布の大まかな把握

しなければならない。一方 σ_{xy} の分布については、仮定ではすべて零としたが、この図のように考えると、この上下面付近だけで零ではない値を維持するのではないかと想像できる。つまりこの付近は σ_{zx} の方も小さくなるので、 σ_{xy} が相対的に小さいという最初に立てた仮定がそもそも成立しない箇所だと考えるべきだろう。

そこで元の問題に戻って、あの便利な「せん断流」を思い出しながら、このつぶれた円管中に流れているであろうせん断流と比較しながら、長方形断面で求められた結果を「解釈」してみよう。図 7.19 の左側の図にあるように、仮定の範囲内では線形に分布したせん断応力が発生している。これは、 z 軸を境にした片側の三角形分布の面積に等しい $q =$

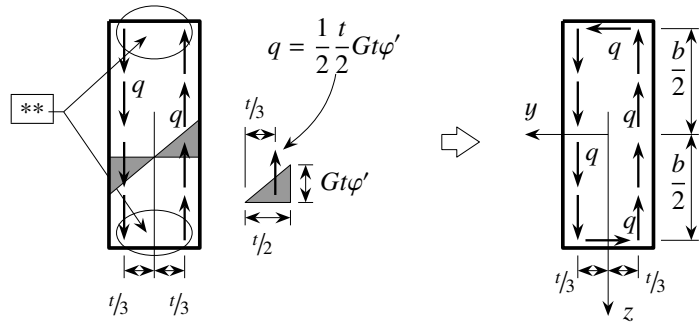


図 7.19 薄肉長方形断面中のせん断流の考え方

$G^2\phi/4$ というせん断流が z 軸から左右に $t/3$ だけ離れた線上すなわち分布三角形の重心の位置を流れていることを意味する。では ****** マークを付した上下面付近はどうなっているだろう。せっかくせん断流という便利なものを考えておきながら、上下面付近ではその流れが連続していない。この計算結果と円管をつぶしたときの思考実験とを、せん断流の概念を用いて結び付けると、同じ図 7.19 の右側に示したようなせん断流を上下面のごく近傍のみで考えればいかもしれないという結論に達する。つまり、上下面付近だけは σ_{xy} のせん断抵抗が集中して存在しており、モデルとして上下面ぎりぎりのところに、 σ_{zx} が作るせん断流と同じ大きさの $\pm y$ 方向のせん断流 q を「連続して流す」ような抵抗が存在すると考えてみたらいいのではないだろうか。

この部分は非常にわかり難いとは思ふ。しかし、文献 [172] のように仮想仕事の原理を用いてしまうと、モデルの物理的な意味がわからなくなる。多分にここの記述は、結果を知っている者の詭弁²になっているとは思ふが、力学的な矛盾を無くすためにせん断流を用いて解釈・説明したものである。

(3) ねじりモーメントとせん断応力

前節の考え方（こじつけ）を認めてもらえるなら、せん断流の考え方を加えることによって、最初に設定した近似的なひずみや応力場への仮定を少しだけ緩めて力学的に意味のある理論を構築できそうだ。このせん断流が作る x 軸回りの Saint-Venant のねじりモーメントを算定すると

$$T_S = 2 \times \left\{ \frac{t}{3} \times (b \times q) \right\} + 2 \times \left\{ \frac{b}{2} \times \left(\frac{2}{3} t \times q \right) \right\}$$

² 山口瞳氏が ‘debate’ をこう訳して（あるいは誰かがそう訳すということを記述して）いるのは興味深い。出典は彼の随筆だったと思うが、正確な情報は忘れた。

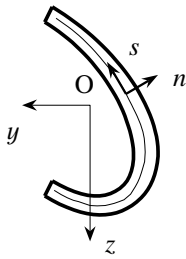


図 7.20 任意の薄肉開断面棒のねじり

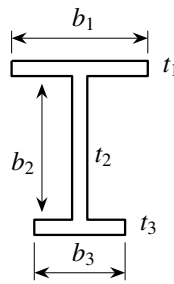
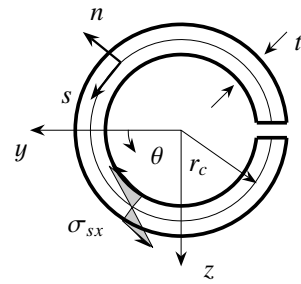


図 7.21 I 形断面棒とスリットの入った円管



となる。右辺第 1 項がせん断応力 σ_{zx} が作る成分であり、第 2 項が前節の説明に沿って新たに加えた上下面近傍の σ_{xy} 成分による寄与分である。図にも示したように

$$q = \frac{1}{2} \frac{t}{2} G t \varphi'$$

であるから、上式に代入して整理すると

$$T_S(x) = G \left(\frac{b t^3}{3} \right) \varphi'(x) \Rightarrow G J \varphi'(x) \tag{d}$$

となる。これより薄肉長方形断面の Saint-Venant のねじり定数が

$$J = \frac{b t^3}{3} \tag{7.28}$$

であることがわかる。また近似的にせん断応力は式 (7.27) と式 (d) から φ を消去して

$$\sigma_{zx}(x, y, z) = \frac{T_S(x)}{J} \times (2y) \tag{7.29}$$

と表される。2y のように '2' が付くのは奇妙だが面白い。

7.3.2 薄肉開断面の Saint-Venant のねじり定数

任意の開断面棒のねじりについての詳細は文献 [171] 等を参照してもらうことにして省略し、Saint-Venant のねじりに関する部分だけを抽出しておく。式 (7.5) と同様、Saint-Venant のねじりモーメントと応力成分は

$$T_S(x) = G J \varphi'(x), \quad \sigma_{sx}(x, y, z) = \frac{T_S(x)}{J} \Theta(y, z) \tag{7.30a, b}$$

と表現でき、ねじり定数は

$$J \equiv \int_A \Theta^2(y, z) dA \tag{7.31}$$

で定義される。ここに Θ は図 7.20 に示した座標系において

$$\Theta(y, z) \equiv 2n \tag{7.32}$$

で定義されている。'2' が付くのが興味深いが、ちょうど式 (7.27) で '2y' になっていることに対応している。この定義を用いて長方形断面の場合の J を計算してみると、 $n = y$ であるから

$$J = \int_{-b/2}^{b/2} dz \int_{-t/2}^{t/2} (2y)^2 dy = \frac{b t^3}{3}$$

となり、式 (7.28) の結果と一致する。また式 (7.30b) も式 (7.29) と一致している。

また長方形断面の集合とみなすことのできる図 7.21 の左側のような断面の場合は、各薄板部分毎の肉厚中心線を対称軸とするようなせん断流によるねじり抵抗の合計³が、全断面の抵抗になるだろうということから、そのねじり定数はそれぞれの長方形断面のねじり定数を加算するだけでいいことになる。したがって、例えばこの I 形断面の場合のねじり定数は

$$J = \sum_{i=1}^3 \frac{b_i t_i^3}{3} \quad (7.33)$$

となる。もう一つの例として、図 7.21 右に示したようなスリットの入った円管の場合を算定してみよう。この場合は円筒座標系で $dA = r dr d\theta$ とすればいいから、式 (7.31) の計算は

$$J = \int_{r_c-t/2}^{r_c+t/2} dr \int_{-\pi}^{\pi} r d\theta \{2(r-r_c)\}^2$$

とすればよく、変数変換等の演算を施すことによって

$$J = \frac{2\pi}{3} r_c t^3$$

が求められる。

ところで、薄肉円管の場合のねじり定数が $2\pi r_c^3 t$ であったことを思い出すと、このスリットの入った薄肉円管断面の場合のそれとの比が

$$\frac{J_{\text{スリット}}}{J_{\text{円管}}} = \frac{4}{3} \left(\frac{t}{2r_c} \right)^2 \sim \frac{1}{(\text{径厚比})^2}$$

になっていることがわかる。特に鋼構造の場合、この径厚比の値が 10 程度あるいはそれ以上になるのは普通である。したがって閉断面の円管のねじり剛性に比べて、スリットの入った開断面部材の持つ Saint-Venant のねじり剛性が百分の一以下になってしまうこともあり得る。開断面が閉断面に比べてねじりに対する抵抗が非常に低いのは、これが原因であり、その根本的な原因は、肉厚中心線上でせん断応力が零になってしまうこと、つまりせん断応力が作るモーメントのアーム長が肉厚程度しか無いことにある。例えばトイレットペーパーの芯をまずそのままねじってみて欲しい。そのときの抵抗を感じ取った上で、芯の筒の母線に沿って鋏で切断し、しかし丸まったままでそおーっとねじってみよう。どう感じましたか。完成系が閉断面の橋梁であっても、架設中に一時的に開断面になるような場合には十分な注意が必要であることを示唆している。

演習問題 7-4

4. 演習問題 7-2 の 2 番で扱った肉厚 t が一定の幅 b 高さ h の箱形断面と、上下フランジが肉厚 t で、幅が b 、ウェブが肉厚 $2t$ で高さが h の I 形断面とはいずれも同じ断面 2 次モーメントを持つ。後者のねじり定数を求め、薄肉の箱形と I 形とのねじり定数の関係を議論せよ。

7.4 薄肉断面棒の曲げねじり

7.4.1 I 形断面棒の曲げねじり

(1) 断面のそり

前節最後の例にあるスリットの入った円管のねじりを、丸めた紙あるいは母線で切断したトイレットペーパーの芯で実演すると、図 7.22 の左側にも描いたように（はならず、本当は紙が重なってしまうが、微小な変形の範囲なら図のように）断面に段差つまりそりが生じるのを観察できたと思う。I 形断面の場合は同図の右側に

³ 接合部のせん断流が連続しないようだが、Saint-Venant のねじり抵抗成分だけを取り出すとこう考えていいということだ。

示したように、ねじったあとの断面がその平面状態を保持できなくなるのだ。このそりは、例えば前節の長方形断面の場合の x 方向変位成分式 (7.26) の第 2 項である。実は充実断面の場合にもそり変位は生じる。例えば直方体形状の消しゴムを紙ケースから取り出してねじってみよう。そして片方の平らだったお尻の面を横からすかして観察してみたい。そこはもう平らではなくなっているだろう。そしてその「そり変位」は式 (7.26) の第 2 項の関数通りの分布（お尻の四角形の対角位置の角同士が同じ向きに盛り上がるかへこんだよう）になっているのが、注意深く観察すればわかると思う。

ではスリットの入った円管棒のどちらかの端部が壁に固定されていたり、ダイヤフラムが入っていて断面が平面を保持するように拘束されている場合を考えてみよう。こうすると、図 7.22 のようなそりを拘束してしまうことになるので、その反作用として軸方向の直応力 σ_{xx} が生じてしまうことも、容易に想像できる。そうすると、この直応力が間接的にねじり外力に抵抗するのではないかとすることも想像できそうだ。このように考えてみると、前節までは無視してきた直応力やそりが、薄肉断面棒の特に開断面の場合には、無視してはいけないような気がしてくる。一般論についてはこれも別途文献 [171] 等を参照して欲しいが、その力学的特性を I 形断面棒に限定して（それしか理解してないので）概説しよう。

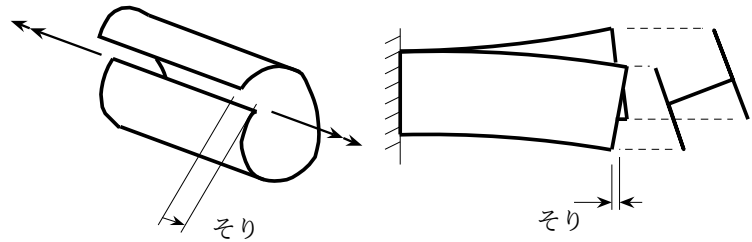


図 7.22 I 形断面棒とスリット入り円管の断面のそり

(2) ねじり変形とフランジの曲げ変形

図 7.22 の右側の図には、ねじりを受けた片端固定の I 形断面棒を上フランジ側から見た状況を示してある。このときこの棒は、式 (7.33) で定義される 3 枚の板の Saint-Venant のねじり定数を通して、開断面棒として抵抗する。しかしその状態で、この同じ図の手前に位置しているフランジだけに注目すると、フランジはその面内で曲げを受けて片持ち梁として変形しているようには見えないだろうか。そして、この曲げによって発生した軸方向の変位成分の上下フランジ間の違いは、ちょうど断面のそり変位成分になっているようにも見える。一方ウェブの方のそりは、前節の薄肉長方形断面とみなすことができ、せいぜい式 (7.26) 右辺第 2 項程度のそり成分しかなく、無視できるほど小さいと考えていいだろう。そこで、このフランジの曲げによる抵抗力つまり直応力 σ_{xx} が、本当にねじりに対する抵抗力になることができるのかどうかを考察しておこう。

図 7.23 には断面寸法と、ねじられて回転した状態の断面図とが描いてある。上フランジだけを上から見る限り、片持ち梁が x - y 面内で y 方向に曲げを受けている状態としても捉えることができる。この曲げによるフランジ中心線の y 方向の変位が

$$v(x) = \frac{h}{2} \varphi(x) \tag{7.34}$$

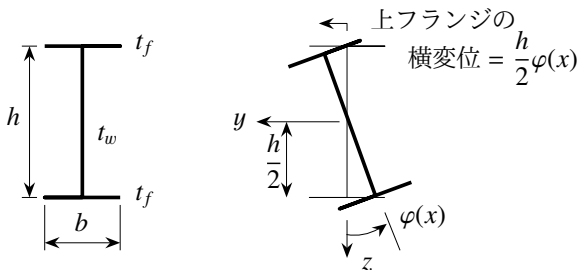


図 7.23 I 形断面のねじり変形

の大きさになっているのは、図 7.23 から明らかだ。もちろん原点回りにねじり回転もしているが、

その抵抗は前節の薄肉長方形断面のねじり抵抗として既に考慮済みである。ここではそれ以外に、上述のようにフランジが曲げを受けることによってフランジ内に生じる直応力やせん断応力がねじり抵抗になる可能性を確認したい。その曲げを受けたフランジ内の応力分布は図 4.74 に示した通りであり、同じ状況を図 7.24 にも示しておいた。このせん断応力は曲げによって発生するせん断力という断面力を発生させる応力である。その

せん断力は図 7.25 の V_f である。このとき上下のフランジは、お互い y 軸の反対方向に曲げを受けていることから、同図の右側に示したように、例えば上フランジには y の正の方向に、下フランジにはその負の方向に同じ大きさのせん断力 V_f が生じていることになる。このように二つのフランジ内のせん断力 V_f が逆向きであることから、それは x 軸回りの偶力 ($h \times V_f$) を発生させ、それがねじり外力に対する抵抗力になるのは明らかではないだろうか。これが曲げによってねじりに抵抗している成分なのだ。少しわかり難いかもしれないので、もう一度考え方を整理しておこう。

1. まずねじられると Saint-Venant のねじり抵抗をするが、それは肉厚中心線上では零になるようなせん断応力 σ_{sx} 成分である。
2. しかし同時に、フランジはその面内で曲げられた状態になり、直応力 σ_{xx} が生じて抵抗する。
3. そしてその直応力 σ_{xx} とつり合うように、フランジ内にはさらに曲げによるせん断応力 σ_{xy} が肉厚方向には一様に（つまり、肉厚中心面にも零でないせん断応力が）生じ、
4. それは合応力としてのせん断抵抗力 V_f を生み出す。
5. そのせん断力 V_f が上下フランジで逆向きに発生していることから、結局 ($h \times V_f$) というねじり抵抗力も生じている

ということになる。

まず V_f を算定しておこう。図 7.23 の右図に戻って、上フランジの y 方向の横変位を $v(x) \equiv (h/2)\varphi(x)$ とすると、初等梁理論式 (4.5a) より、これに伴う x 方向変位つまりそり変位は

$$u(x, y) = -y v'(x) \tag{7.35}$$

になる。したがって、これによって発生する伸びひずみと直応力は

$$\epsilon_{xx} = -y v''(x), \quad \sigma_{xx} = -E y v''(x) \tag{7.36a, b}$$

となり、結局フランジの曲げによって生じる曲げモーメントは

$$M_f(x) \equiv \int_{A_f} y \sigma_{xx} dA = -E I_f v''(x) \tag{7.37}$$

と算定できる。ここに A_f は上フランジ断面積であり

$$I_f \equiv \int_{A_f} y^2 dA = \frac{t_f b^3}{12}$$

は上フランジ断面の z 軸回りの断面 2 次モーメントである。さらに曲げによるせん断力は、図 7.25 の左図のつり合いを考えるまでもなく

$$V_f(x) = M_f'(x) = -E I_f v'''(x) \tag{a}$$

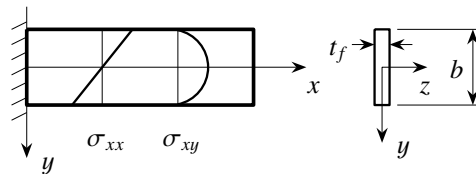


図 7.24 上フランジに発生する曲げ応力成分の分布

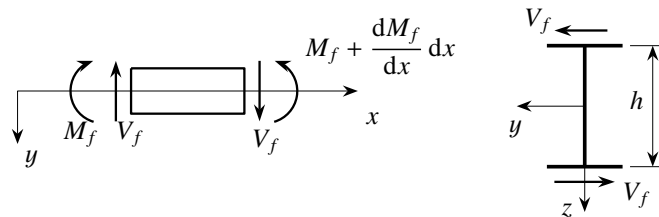


図 7.25 フランジに発生するせん断力とそれが作るねじり抵抗

であることは、初等梁理論から明らかである。また梁理論の範囲内のせん断応力分布も式(4.82)で得ており、上フランジでは

$$\sigma_{xy}(x, y) = -\frac{V_f(x)G_y(y)}{t_f I_f}, \quad G_y(y) \equiv \int_{-b/2}^y \xi t_f(\xi) d\xi \quad (7.38a, b)$$

となっている。 ξ は y に関する積分のための補助変数である。これは上フランジの肉厚方向には一様に分布することから、肉厚中心線上でもこの値のせん断応力が生じたことになる。念のために書いておくが、Saint-Venantのねじり抵抗を生み出しているせん断応力成分 σ_{sx} は肉厚中心線上では零であり、肉厚方向には線形分布をしている。

(3) 曲げねじりモーメント

図7.25の右図にあるように、上下フランジには同じ大きさで逆向きのせん断力 V_f が発生しており、この力が作る抵抗力としての偶力が、ねじり外力に抵抗する成分になっているから、式(a)を用いてその偶力は

$$T_\omega(x) \equiv h \times V_f(x) = h \times \{-EI_f v'''(x)\} \quad (b)$$

となる。式(7.34)を上式(b)の最右辺に代入すると

$$T_\omega(x) = -E \left(I_f \frac{h^2}{2} \right) \varphi'''(x)$$

となるので、右辺の括弧内を新たに

$$I_\omega \equiv I_f \frac{h^2}{2} = \frac{1}{24} t_f b^3 h^2 \quad (7.39)$$

と定義してしまえば、フランジが曲げを受けることによってねじりに抵抗する成分を

$$T_\omega(x) = -EI_\omega \varphi'''(x) \quad (7.40)$$

と書くことができる。ここに、 I_ω はそり2次モーメントと呼ばれ、[長さ]⁶の次元を持つ。ここで便宜上、式(a)の両辺に h を乗じた関係式から、式(b)の T_ω に対応する新たな断面力として

$$T_\omega(x) = M_\omega'(x), \quad \text{つまり} \quad M_\omega(x) \equiv h \times M_f(x) \quad (7.41a, b)$$

になるような $M_\omega(x)$ を定義しておく。これは曲げねじりモーメントと呼ばれる断面力である。式(7.40)に対応させれば

$$M_\omega(x) = -EI_\omega \varphi''(x) \quad (7.42)$$

という関係を持ち、 EI_ω は曲げねじり剛性と呼ばれる。

式(7.38)に式(a)を代入したあと、式(7.34)の $v(x)$ と $\varphi(x)$ の関係を代入すれば、発生するせん断応力も上フランジで

$$\sigma_{xy}(x, y) = \frac{E}{t_f} \left\{ \int_{-b/2}^y t_f(\xi) \left(\xi \frac{h}{2} \right) d\xi \right\} \varphi'''(x)$$

と表現できる。この式と式(7.40)から φ を消去すると、最終的に

$$\sigma_{xy}(x, y) = -\frac{1}{t_f} \bar{Q}_\omega(y) \frac{T_\omega(x)}{I_\omega} \quad (7.43)$$

となる。ここに \bar{Q}_ω はそりに関する断面1次関数であり、上フランジで

$$\bar{Q}_\omega(y) \equiv \int_{-b/2}^y t_f(\xi) \left(\xi \frac{h}{2} \right) d\xi \quad (7.44)$$

と定義した。 ξ は y に関する積分のための補助変数である。

(4) 曲げねじりのつり合い式と境界条件

以上から薄肉断面棒部材のねじりに対しては、前節までの Saint-Venant のねじり抵抗と曲げねじり抵抗の2成分の和で抵抗することがわかった。したがって式(7.7)の Saint-Venant のねじりモーメント T_S に式(7.40)の曲げねじり抵抗モーメント T_ω を加えて

$$\{T_S(x) + T_\omega(x)\}' = 0 \quad (7.45)$$

が正しく新しいつり合い式になる。

境界条件には、単純なねじりに関するものに加えて、曲げねじり抵抗の成分といわゆるそりに関する境界条件とが新たに必要になる。それを誘導するために、図7.24の上フランジの曲げの問題に戻ろう。式(4.25)で示したように、この梁の曲げに関する境界条件は

$$\begin{aligned} v &= \text{与える} & \text{あるいは} & n_i V_f = (S_f)_i \quad (i = 1, 2), \\ -v' &= \text{与える} & \text{あるいは} & n_i M_f = (C_f)_i \end{aligned}$$

となっていた。ただこの場合の $-v'$ と C_f はいずれも、 z 軸の左回り方向を正とするたわみ角およびねじり外力である。まず力の境界条件については、下フランジからの関与分も加えるために、式(b) (7.41b) のように V_f と M_f に h を乗じて偶力の形にすると、少なくとも前者は Saint-Venant のねじりモーメントと整合した物理量になる。さらにたわみ v は、式(7.34)のように $\varphi(x)$ で表されていたから、 v を与える境界条件は φ を与える条件になり、 v' を与える条件は φ' を与える条件になる。以上のことを考慮すると、上式は

$$\varphi = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (h \times V_f) = (h \times S_f)_i, \quad (7.46a)$$

$$-\varphi' = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (h \times M_f) = (h \times C_f)_i \quad (7.46b)$$

と書き換えてもいいだろう。

式(b)から明らかなように、 $(h \times V_f)$ はねじり力に抵抗する曲げねじりに関する成分 T_ω であり、式(7.46a)第2式の右辺は境界で与えるねじり外力であるから、まず第1行の境界条件式(7.46a)は、式(7.9)の力の境界条件に加えるべき $T_\omega = h \times V_f$ の寄与分と考えればよく、Saint-Venant のねじりモーメントに加えて

$$\varphi = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (T_S + T_\omega) = (C_x)_i \quad (c)$$

と捉えればよく、この第2式が曲げねじりも含んだねじり外力に対する力学的境界条件になる。一方、式(7.46b)の $-\varphi'$ に関する幾何学的境界条件は、式(7.35)からも明らかなように、境界でそり変形を規定する条件である。また対応する力の境界条件は、式(7.41b)の M_ω の定義 $h \times M_f$ からわかるように、端部の M_ω に相当する曲げねじり集中モーメント成分である $h \times C_f$ を規定する新しい力学的境界条件になる。したがって、上の式(c)と合わせて書き直すと、曲げねじりの境界条件は

$$\varphi = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (T_S + T_\omega) = (C_x)_i, \quad (7.47a)$$

$$-\varphi' = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M_\omega = (C_\omega)_i \quad (i = 1, 2) \quad (7.47b)$$

となる。ここに C_ω は端部に作用させる曲げねじり集中モーメント $h \times C_f$ として定義したが、実はその次元も [力][長さ]² となることからその物理的意味はあまり明解ではない。これについては後述する。

(5) 応力分布

断面内に発生する直応力はフランジの曲げによるものが主なので、例えば上フランジでは、式(7.36b)に式(7.34)を代入したあと式(7.42)の関係を用いれば

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = y \frac{h}{2} \frac{M_\omega}{I_\omega} \quad (7.48)$$

となる。せん断応力分布は、Saint-Venantのせん断応力成分にフランジの曲げによるせん断応力成分を加え、上フランジでは

$$\sigma_{xz}(x, y, z) = \frac{T_S(x)}{J} \Theta(y, z) - \frac{1}{t_f} \bar{Q}_\omega(y) \frac{T_\omega(x)}{I_\omega} \quad (7.49)$$

と表現される。なお、下フランジでは両式(7.48)(7.49)の曲げねじりに関係した項の符号が異なるだけである。

(6) 直応力分布とねじり抵抗

実際に境界値問題の例を解く前に、曲げねじりモーメント M_ω および対応する曲げねじり集中モーメント C_ω の物理的な意味について少し考察しておこう。この曲げねじりモーメントを発生させている力は、上下フランジのせん断力であった。このせん断力は、上下フランジそれぞれが曲げを受けて直応力分布が発生し、それにつり合うように生じていた。例えば式(7.36b)は上フランジの直応力分布だが、式(7.34)を代入すると次式のようになり、下フランジではその符号が異なるため

$$\text{上フランジ: } \sigma_{xx} = -E y \frac{h}{2} \varphi'', \quad \text{下フランジ: } \sigma_{xx} = E y \frac{h}{2} \varphi''$$

であり、上と下で向きは逆だが y 方向に同じ線形分布をしている。すなわち直応力の分布は図 7.26 の右端の図のように、上フランジについては左突出端が圧縮で右突出端が引張に、下フランジについてはその逆の符号の直応力分布になっている。この応力分布はたいへん興味深い分布である。というのも、同じ図 7.26 の左に模式的に示した曲げと軸力を受ける棒の基本的な三つの合応力、つまり 2 軸回りの曲げモーメントおよび軸力のいずれをも生じさせないからだ。これが、断面のそりに関連して内部に発生する曲げねじりモーメントと呼ばれる抵抗力 M_ω の正体である。また、式(7.47b)の右辺の曲げねじり集中モーメント C_ω も、まさにこの右端の図のような外力の作用をモデル化したものと考えればよい。

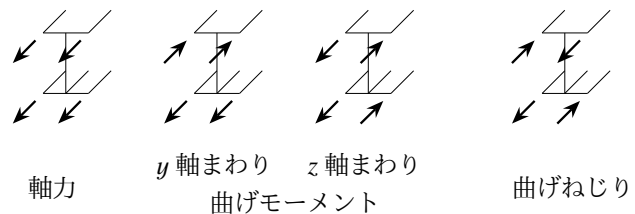


図 7.26 曲げねじり力の直感的理解のための直応力分布の概略

図 7.26 曲げねじり力の直感的理解のための直応力分布の概略

(7) ねじりによる直応力分布とそり関数

ここまでは I 形断面の曲げねじりをフランジの曲げと解釈してわかり易く⁴定式化したのが、一般の薄肉断面棒も充実断面も同じような曲げねじり成分を持っている。具体的な一般理論については文献 [171] 等を参照して欲しいが、前節の I 形断面の結果をもう少し一般的な表現にしておく。まず新たに

$$\omega^*(y, z) \equiv \begin{cases} +\left(\frac{h}{2}\right)y & \text{上フランジで} \\ 0 & \text{ウェブで} \\ -\left(\frac{h}{2}\right)y & \text{下フランジで} \end{cases} \quad (7.50)$$

⁴ 果たしてそうかどうかはわからないが。

という新しい断面座標 $\omega^*(y, z)$ を導入する。「座標」と呼んだが [長さ]² の次元を持っている。これを用いると式 (7.39) (7.44) の断面量は

$$I_\omega \equiv \int_A \omega^{*2}(y, z) dA, \quad \bar{Q}_\omega(y, z) \equiv \int_0^s t_f(y(\xi), z(\xi)) \omega^*(y(\xi), z(\xi)) d\xi \quad (7.51a, b)$$

と定義できる。ここでは、元々の式 (7.44) の $\bar{Q}_\omega(y)$ の定義を、肉厚中心線に沿った s 軸に沿った積分で形式的に置き換えて一般化してある。 ξ は s に関する積分のための補助変数である。その例については別途文献を参照のこと。ちなみに図 7.23 の寸法の I 形断面のそり 2 次モーメントは $(1/24 b^3 h^2 t_f)$ になる。同様にねじりによるそり変位成分も

$$u_x(x, y, z) = -\omega^*(y, z) \varphi'(x) \quad (7.52)$$

と書き表すことができる。この式から $\omega^*(y, z)$ はねじり率 $\varphi'(x)$ が単位量のときのそり変位の断面内分布を示しているから、単位そり関数とも呼ばれる。図 7.27 に ω^* と \bar{Q}_ω の分布図を描いたが、それぞれそり変位とフランジの曲げによるせん断応力分布のパターンとに一致している。

さらに式 (7.41b) の M_ω の定義に式 (7.37) を代入すると

$$M_\omega \equiv \int_{A(\text{上フランジ})} h \times y \sigma_{xx} dA$$

となっていた。一方、式 (7.34) と式 (7.36b) から上フランジの直応力が

$$\sigma_{xx} = -E \frac{h}{2} y \varphi''(x)$$

であるのに対して、下フランジでは符号が逆になるだけなので、上式はさらに

$$\begin{aligned} M_\omega &= \int_{A(\text{上フランジ})} h y \left(-E \frac{h}{2} y \varphi'' \right) dA \\ &= \int_{A(\pm)} \frac{h}{2} y \left(-E \frac{h}{2} y \varphi'' \right) dA + \int_{A(\mp)} \left(-\frac{h}{2} y \right) \left(E \frac{h}{2} y \varphi'' \right) dA \end{aligned}$$

と書いてもいい。したがって式 (7.50) で定義された ω^* を用いると

$$M_\omega = \int_A \omega^* \sigma_{xx} dA \quad (7.53)$$

で新しく導入した断面力を定義できることがわかる。また、式 (7.48) で表される直応力分布も

$$\sigma_{xx} = -E \omega^* \varphi''(x)$$

と書け、式 (7.42) の構成関係を用いると

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \frac{M_\omega(x)}{I_\omega} \omega^*(y, z) \quad (7.54)$$

とも表現できる。 ω^* を定義したことによって後述のように標準的な構造力学モデルになっている。

7.4.2 曲げねじりの境界値問題

(1) 片持ち棒のねじり

支配方程式をねじり角 $\varphi(x)$ で表し、いくつか例を解いておこう。つり合い式は式 (7.45) で与えられるが、式 (7.5) (7.40) を代入するとねじり角 $\varphi(x)$ で表したつり合い式が

$$-EI_\omega \varphi''''(x) + GJ \varphi''(x) = 0 \quad (7.55)$$

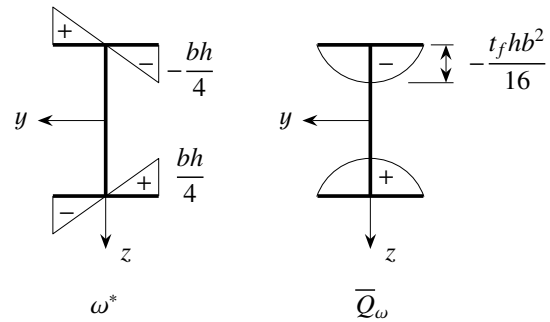


図 7.27 I 形断面の単位そり関数とそりに関する断面 1 次関数

となる。簡単のために断面形状と材料は棒の長手方向に一様であるとした。境界条件も式 (7.47) に示した通りであるが、同様に式 (7.5) (7.40) (7.44) を代入すると

$$\varphi = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (-EI_\omega \varphi''' + GJ\varphi') = (C_x)_i, \tag{7.56a}$$

$$-\varphi' = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (-EI_\omega \varphi'') = (C_\omega)_i \tag{7.56b}$$

($i = 1, 2$) と書くことができる。それぞれの断面力とねじり角 $\varphi(x)$ の関係も再度並べておくと

$$T_S(x) = GJ\varphi'(x), \quad M_\omega(x) = -EI_\omega \varphi''(x), \quad T_\omega(x) = M'_\omega(x) \tag{7.57a, b, c}$$

となる。 M_ω は式 (7.53) で直応力と関係付けられている。したがって曲げねじりによる直応力分布は式 (7.54) で与えられ、曲げねじりをも含めたせん断応力分布が式 (7.49) で算定できる。

最初の例は図 7.28 の片持ち棒である。つり合い式は式 (7.55) あるいは

$$\varphi'''' - \mu^2 \varphi'' = 0 \tag{a}$$

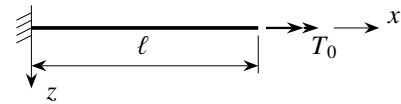


図 7.28 片持ち棒のねじり

と書くことができる。ここに

$$\mu \equiv \sqrt{\frac{GJ}{EI_\omega}} \tag{7.58}$$

と定義した。境界条件は、 $x = 0$ ではねじり角もそり変位も拘束されているので

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi'(0) = 0$$

である。一方 $x = l$ の端部はねじり外力のみが作用したそり自由の端面⁵なので、式 (7.58) の μ を用いると

$$-\varphi''''(l) + \mu^2 \varphi''(l) = \frac{T_0}{EI_\omega} = \mu^2 \frac{T_0}{GJ}, \quad -\varphi''(l) = 0$$

で与えられる。

つり合い式 (a) に $\varphi = e^{\rho x}$ を代入して得る特性方程式が $\rho^4 - \mu^2 \rho^2 = 0$ となるので、 $\rho = 0$ が重根で $\rho = \pm\mu$ が他の 2 根である。したがって一般解は

$$\varphi(x) = (a + bx) + c \sinh \mu x + d \cosh \mu x$$

となる。これを上の四つの境界条件に代入して積分定数を決定すると

$$a = -d = -\frac{T_0}{GJ\mu} \tanh \mu l, \quad b = \frac{T_0}{GJ}, \quad c = -\frac{T_0}{GJ\mu}$$

となるので、ねじり角が

$$\varphi(x) = \frac{T_0}{GJ} x - \frac{T_0}{GJ\mu \cosh \mu l} \{ \sinh \mu l - \sinh \mu(\ell - x) \}$$

と計算できる。第 1 項は式 (7.11) で求められた片持ち棒の Saint-Venant のねじりの解である。つまり、第 2 項が曲げねじりを含めたことによって生じる付加的な抵抗によるねじり角成分である。

⁵ 実構造であればダイアフラム等が設置されていて必ずしもそり変形が自由だとは限らない。現実の境界条件のモデル化はとても難しい。

(2) 曲げねじりと Saint-Venant のねじりの比較

上の例を用いて、曲げねじりと単純な Saint-Venant のねじりの分担率を、右端のねじり角で定量比較してみよう。ねじり角の解の $x = \ell$ の値は

$$\varphi(\ell) = \frac{T_0 \ell}{GJ} \left(1 - \frac{\tanh \mu \ell}{\mu \ell}\right) = \varphi_S(\ell) \left(1 - \frac{\tanh \mu \ell}{\mu \ell}\right), \quad \varphi_S(\ell) \equiv \frac{T_0 \ell}{GJ} \quad (b)$$

となる。 φ_S は Saint-Venant のねじり抵抗のみの場合の解である。リンク機構等の組み立て柱でないとはあり得ないだろうが、もし、曲げねじりのみで抵抗する極端な構造を造ることができる場合を想定すると、元の方程式で EL_ω に比べて GJ を無視すればいいから、つり合い式および境界条件に $\mu = 0$ を代入した方程式で現象は支配される。つまり、つり合い式は

$$-EI_\omega \varphi''''(x) = 0$$

となり、境界条件も変更される。この一般解は

$$\varphi(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$$

となるので、境界条件に代入して積分定数を決定し、この解を ω の下添え字を付けて Saint-Venant の解と区別すると

$$\varphi_\omega(x) = \frac{T_0}{6EI_\omega} (-x^3 + 3\ell x^2)$$

と置くことができる。これに $x = \ell$ を代入すると

$$\varphi_\omega(\ell) = \frac{T_0 \ell^3}{3EI_\omega} = \frac{\mu^2 T_0 \ell^3}{3GJ} = \varphi_S(\ell) \frac{(\mu \ell)^2}{3} \quad (c)$$

となる。

以上の関係式から、 $\varphi(\ell)$ と、 $\varphi_S(\ell)$ および $\varphi_\omega(\ell)$ との比はすべて、無次元量 $(\mu \ell)$ のみで表されていることが明らかだ。そこで

$$r_\omega \equiv \frac{1}{\mu} = \sqrt{\frac{EI_\omega}{GJ}} = \sqrt{2(1+\nu)} \sqrt{\frac{I_\omega}{J}}, \quad \lambda_\omega \equiv \frac{\ell}{r_\omega} \quad \rightarrow \quad \mu \ell = \lambda_\omega \quad (7.59a, b, c)$$

の r_ω を曲げねじりに関する断面の回転半径、そして λ_ω を曲げねじりに関する断面の細長比として定義しておく、この無次元量は $\mu \ell = \lambda_\omega$ である⁶ことがわかる。「断面の」回転半径と呼びながら r_ω は材料定数比を含んでいるので、 λ_ω も純粋に幾何学的な細長さを表しているわけではないが、Poisson 比が同じ材料同士ならこの λ_ω で長さ寸法との比を代表させることができるので、ここでは細長比と呼んでみた。つまり Saint-Venant のねじりと曲げねじりとは、ねじりに関する棒の細長さによってその分担率が異なってくるのが予想される。

そこで、まず $\lambda_\omega \rightarrow \infty$ の極限を考えると $\tanh \lambda_\omega \rightarrow 1$ となることから、式 (b) は

$$\lim_{\lambda_\omega \rightarrow \infty} \varphi(\ell) = \lim_{\lambda_\omega \rightarrow \infty} \varphi_S(\ell) \left(1 - \frac{\tanh \lambda_\omega}{\lambda_\omega}\right) = \varphi_S(\ell)$$

となる。つまり細長くなればなるほど解は Saint-Venant のねじり成分が主になる。一方 $\lambda_\omega \rightarrow 0$ の場合には、まず $\tanh \lambda_\omega$ を Taylor 展開すれば

$$\tanh \lambda_\omega = \lambda_\omega - \frac{\lambda_\omega^3}{3} + \frac{2\lambda_\omega^5}{15} + O(\lambda_\omega^7) \quad \rightarrow \quad 1 - \frac{\tanh \lambda_\omega}{\lambda_\omega} = \frac{\lambda_\omega^2}{3} - \frac{2\lambda_\omega^4}{15} + O(\lambda_\omega^6)$$

⁶ ねじり定数比と呼ばれる [160] こともあるが、 π が乗じられたりそうでなかったりするので注意すること。

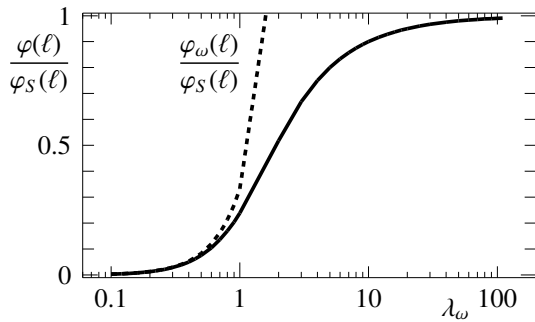


図 7.29 棒の細長さの影響

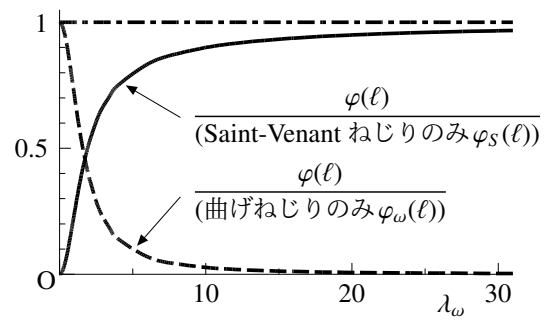


図 7.30 Saint-Venant のねじりと曲げねじりの比率

となる。したがって式 (b) の極限でこれを考慮して式 (c) と比較すると

$$\lim_{\lambda_\omega \rightarrow 0} \varphi(\ell) = \lim_{\lambda_\omega \rightarrow 0} \varphi_S(\ell) \left\{ \frac{\lambda_\omega^2}{3} - \frac{2\lambda_\omega^4}{15} + O(\lambda_\omega^6) \right\} = \varphi_S(\ell) \frac{\lambda_\omega^2}{3} = \varphi_\omega(\ell)$$

となることがわかる。つまり短い棒の解は主に曲げねじり成分が主になる。この比の関係を図 7.29 に示した。図の縦軸は φ/φ_S であり、破線が φ_ω/φ_S なので、 λ_ω が小さいと $\varphi \approx \varphi_\omega$ であり、逆に大きいと $\varphi \approx \varphi_S$ になっていることを示している。また、曲げねじりの解と Saint-Venant のねじりのみの解および曲げねじりのみの解との比率

$$\frac{\varphi(\ell)}{\varphi_S(\ell)}, \quad \frac{\varphi(\ell)}{\varphi_\omega(\ell)}$$

を、 λ_ω をパラメータにしてプロットしたのが図 7.30 である。 λ_ω が比較的小さく棒が短い場合には相対的にそり変位の影響を無視できなくなるため、曲げねじり成分と Saint-Venant のねじり成分を同時に考えなければならない [106] ことがわかる。逆に、ある程度細長いと Saint-Venant のねじり成分が卓越している。そのため、比較的長い部材で後述の横倒れ座屈等が問題にならない場合には、曲げねじりを無視することが多い。ちなみに形鋼の、例えば 380×100 程度の溝形鋼で 5 m 程度の梁を作ったとすると λ_ω が 2 程度になるため、図からも明らかなように曲げねじりと Saint-Venant のねじりの両方を考慮しなければならない。もちろんこの比較はねじり角に関するものであり、曲げねじりによって生じる直応力と曲げによる直応力との比率を示したものではない。すなわち、曲げとねじりを同時に受ける部材の場合に曲げねじりを考慮すべきか否かについては、直応力成分の検討も必要になるので注意する必要がある。

(3) 単純支持点の境界条件

両端単純支持された I 形断面棒の中央に集中ねじり力を作用させた図 7.31 の系を解いてみよう。ねじりに対する単純支持端は、図の左に示した y - z 面内のモデルのように、回転は拘束されているものの、そりについては自由であるものとする。したがってこの問題の境界条件は両端で

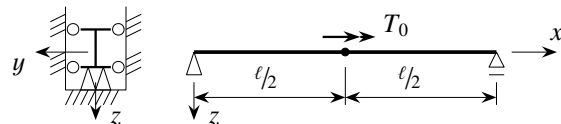


図 7.31 単純支持 I 形棒のねじり

$$\varphi = 0, \quad M_\omega = -EI\varphi'' = 0$$

となる。一方、スパン中央の連続条件は第 4 章の式 (4.47) で表された曲げに関するものと同様、この場合は

$$\begin{aligned} \varphi(\ell/2-) &= \varphi(\ell/2+), & \varphi'(\ell/2-) &= \varphi'(\ell/2+), & M_\omega(\ell/2-) - M_\omega(\ell/2+) &= 0, \\ \{T_S(\ell/2-) + T_\omega(\ell/2-)\} - \{T_S(\ell/2+) + T_\omega(\ell/2+)\} &= T_0 \end{aligned}$$

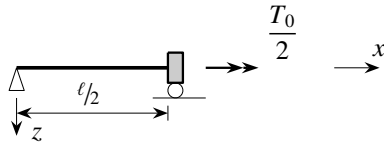


図 7.32 対称な系の半分

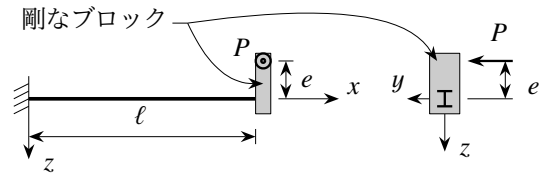


図 7.33 片持ち棒のそりに関する境界条件

でなければならない。一般解は前の問題と同じであるが、スパンの左右を分けて

$$\xi \equiv \ell - x, \quad \frac{d(\quad)}{d\xi} = -(\quad)'$$

という右端からの座標を新しく定義すると

$$\varphi(x) = a + bx + c \sinh \mu x + d \cosh \mu x \quad (0 < x < \ell/2),$$

$$\varphi(\xi) = \bar{a} + \bar{b}\xi + \bar{c} \sinh \mu \xi + \bar{d} \cosh \mu \xi \quad (\ell/2 < x < \ell)$$

が一般解の表現となる。左端 ($x = 0$) の境界条件を代入すると

$$\varphi(x) = bx + c \sinh \mu x$$

のように左側半分から二つの積分定数が残る。同様に右端 ($\xi = 0$) の境界条件を代入すると

$$\varphi(\xi) = \bar{b}\xi + \bar{c} \sinh \mu \xi$$

が右半分の解の候補になる。この2式を上記の中央の連続条件に代入すると、 ξ に関する微係数の符号と x に関するその符号とが奇数階で異なることに注意すれば、結局

$$b = \bar{b} = \frac{T_0}{2GJ}, \quad c = \bar{c} = -\frac{T_0}{2GJ\mu \cosh(\mu\ell/2)}$$

と未定の積分定数を決定できる。左半分だけの解を示しておく

$$\varphi(x) = \frac{T_0}{2GJ}x - \frac{T_0}{2GJ\mu \cosh(\mu\ell/2)} \sinh \mu x, \quad 0 < x < \ell/2$$

となる。前の例と同様第1項が Saint-Venant のねじり成分であり第2項が曲げねじりによる影響である。なおこの問題は、左右の反対称性を予め考慮しておく、図 7.32 のような系を解いても同じ解が求められることは明らかである。

演習問題 7-5

- 図 7.32 の右端の境界条件を示し、これを解いて解が上の例の左半分の解に一致することを示せ。
- 図 7.33 に示したように片持ち棒の先端にダイアフラムを模擬した剛なブロックを取り付け、それを偏心外力でねじった。この問題の境界条件を示し、境界値問題を解け。

7.4.3 一般化した曲げねじり理論における断面座標・定数と応力分布

詳細は文献 [171] 等を参照して欲しいが、任意断面のねじりに関する断面座標・断面定数・応力分布等を公式として列挙しておく。まず、任意の薄肉断面に拡張した Saint-Venant のねじりに関する断面座標 Θ は

$$\Theta(y, z) = \begin{cases} 2n & \text{開断面} \\ 2n + \frac{\oint h(s) ds}{t(s) \oint \frac{ds}{t(s)}} & \text{閉断面} \end{cases} \quad (7.60)$$

と拡張定義される。これを用いてねじり定数は

$$J \equiv \int_A \Theta^2(y, z) dA \tag{7.61}$$

で定義される。閉断面の場合、 Θ の定義式中の $(2n)$ の影響は第2項に比べて無視できることが多い。第2項のみを式(7.61)に代入して求められる J は式(7.22)の定義に一致する。

次に、式(7.53)の曲げねじりモーメントは

$$M_\omega(x) \equiv \int_A \omega \sigma_{xx} dA \tag{7.62}$$

と定義し直され、その断面定数のそり2次モーメントは

$$I_\omega \equiv \int_A \omega^2(n, s) dA \tag{7.63}$$

で拡張定義される。ここに、一般断面のそりに関する断面座標 ω は

$$\omega(n, s) = \omega_s(n, s) - \omega_c, \quad \omega_c = \omega^*(s = \text{図心}), \quad \omega_s(n, s) = \omega^*(s) - nh_s(s) \tag{7.64}$$

と置かれ、肉厚中心線上の単位そり関数が

$$\omega^*(s) = \begin{cases} \int_0^s h(\xi) d\xi & \text{開断面} \\ \int_0^s h(\xi) d\xi - \frac{\oint h(s) ds}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \int_0^s \frac{d\xi}{t(\xi)} & \text{閉断面} \end{cases} \tag{7.65}$$

で定義される。 ξ は s に関する積分のための補助変数である。ここに $h(s)$ および $h_s(s)$ は図 7.34 で定義されている。薄肉長方形断面のときの $\omega(n, s)$ の符号を替えると式(7.26)の第2項の φ' の係数に一致する。また I 形断面に対する $\omega^*(s)$ は式(7.50)に一致する。

s 軸の原点と ω_c は任意に選べるため、通常は $h(s)$ と $h_s(s)$ の原点でもあるねじれ中心点 $S(y_s, z_s)$ を断面のせん断中心と呼ばれる点に一致させることが多い。せん断中心の位置は、断面が

$$\int_A \omega y dA = 0, \quad \int_A \omega z dA = 0 \tag{7.66a, b}$$

という特性を持つように決定される。また式(7.64)の ω_c も

$$\int_A \omega dA = 0 \tag{7.67}$$

になるように選ばれるのが普通である。この y_s, z_s, ω_c の具体的な表現については別途文献を参照のこと。面白いことに、ここでせん断中心と呼んでいる点 S と第 4.6.1 (4) 節で示した曲げのそれとは同一点である。

最後に直応力成分は、式(7.54)の I 形断面の場合の拡張として

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = \frac{M_\omega(x)}{I_\omega} \omega(n, s) \tag{7.68}$$

という分布になる。一方せん断応力成分は

$$\sigma_{sx} = \begin{cases} \frac{T_S}{J} \Theta - \frac{\bar{Q}_\omega(n, s) T_\omega}{t(s) I_\omega} & \text{開断面} \\ \frac{T_S}{J} \Theta - \frac{1}{t(s)} \left(\bar{Q}_\omega(n, s) - \frac{\oint \frac{\bar{Q}_\omega(n, s) ds}{t(s)}}{\oint \frac{ds}{t(s)}} \right) \frac{T_\omega}{I_\omega} & \text{閉断面} \end{cases} \tag{7.69}$$

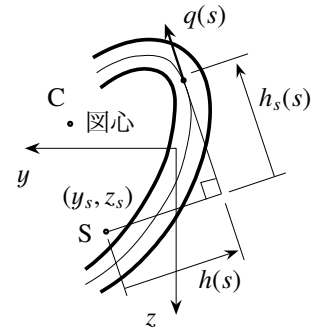


図 7.34 任意薄肉断面内の $h(s)$ と $h_s(s)$ の定義

となる。閉断面の場合の直応力とつり合うせん断応力の算定については別途文献を参照のこと。閉断面の第2項の括弧内の第2項は、閉断面に存在すべきせん断流に関連した項である。開断面の場合の定義は式(7.49)と一致する。また

$$\bar{Q}_\omega(n, s) = \int_{s_0}^s t(\xi) \omega(n, \xi) d\xi \quad (7.70)$$

は曲げ理論における断面1次関数に相当するものであるが、 $n = 0$ 上であればI形断面の式(7.44)と一致する。通常、鋼構造の部材のような薄肉断面であれば、式(7.60)の開断面の場合や式(7.64)の ω_s において n に関する項を無視することが多い。

実際には部材の断面全体が閉断面か開断面のいずれかになっているとは限らず、断面の部分部分が閉じていたり開いた区間があるのが普通である。そんな場合も上の分類を個々の区間で考えれば、適切な断面定数や断面座標および応力分布等を求めることができる。詳細は文献[171]等を参照のこと。

7.5 構造力学体系と充実断面棒のねじり

7.5.1 棒の力学の表現のまとめ

いわゆる構造力学は近似力学理論体系であると述べたが、その理論は次のように系統的に表現されている。対象とする問題の代表的な断面力を R としたとき、その定義と変形 d との関係は

$$R \equiv \int_A c \sigma_{ab} dA = S C d \quad (7.71)$$

と表される。ここで c はこの断面力に関連する座標であり、 S は関連する弾性係数、 C は関連する断面定数で、 A は断面積である。そしてこの応力成分は、その断面力と

$$\sigma_{ab} = S c d = \frac{R}{C} c \quad (7.72)$$

という関係を持ち、断面定数 C は

$$C \equiv \int_A c^2 dA \quad (7.73)$$

で定義される。1軸引張と2軸曲げ・開断面のSaint-Venantのねじりおよび曲げねじりについて、分布外力が無い場合のつり合い式と共に表7.1にまとめた。ただし、曲げにおけるせん断応力 σ_{sx} については式(4.84)を、閉断面の曲げねじりに関するせん断応力 σ_{sx} については式(7.69)を参照のこと。

7.5.2 充実断面棒のねじり

この章では薄肉断面棒を対象としているが、章の最初に考察した円柱のような充実断面の場合の古典的な弾性理論[96]を少しだけここに紹介しておきたい。というのも、消しゴムのねじり実験からも明らかなように、充実断面棒の場合も一般にはそり変位が生じるからだ。この場合も、実験等に基づく変位場の仮定から始められており、それは式(7.1)および式(7.52)で $\varphi(x) = x \varrho$, $\varrho \equiv \varphi'(x) = \text{const.}$ と近似し

$$u_x = \omega(y, z) \varrho, \quad u_y = -zx \varrho, \quad u_z = yx \varrho \quad (a)$$

と仮定する。簡単のため ω の上付きアスタリスクは略した。そり変位 u_x が存在することを最初から仮定してある。これより零でないひずみ成分は

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \varrho \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right), \quad \epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \varrho \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right)$$

表 7.1 構造力学体系の整理

	断面力 R	座標 c	応力成分 ab	弾性係数 S	断面定数 C	変形 d	つり合い式
1 軸引張	N	1	xx	E	A	u'	$R' = 0$
y 軸回り曲げ	M_z	z	xx	E	I_z	$-w''$	$R'' = 0$
	V_z	$\frac{G_z(z)}{t(z)}$	zx	—	I_z	—	$R = M'_z$
$-z$ 軸回り曲げ	M_y	y	xx	E	I_y	$-v''$	$R'' = 0$
	V_y	$\frac{G_y(y)}{t(y)}$	yx	—	I_y	—	$R = M'_y$
St.-V. ねじり	T_S	Θ	sx	G	J	φ'	$R' = 0$
曲げねじり (閉断面)	M_ω	ω	xx	E	I_ω	$-\varphi''$	$R'' + T'_S = 0$
	T_ω	$-\frac{\bar{Q}_\omega(n, s)}{t(s)}$	sx	—	I_ω	—	$R' + T'_S = 0$

となり，対応する応力が

$$\sigma_{xy} = G \varrho \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right), \quad \sigma_{zx} = G \varrho \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) \quad (b)$$

と求められる。この応力成分が x 方向の力のつり合いを満足しなければならないことから

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0 \quad (c)$$

が，単位そり関数 $\omega(y, z)$ を支配している方程式であることがわかる。また，断面の周囲における応力の境界条件から

$$n_y \sigma_{xy} + n_z \sigma_{zx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial z}{\partial s} \left(\frac{\partial \omega}{\partial y} - z \right) - \frac{\partial y}{\partial s} \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} + y \right) = 0 \quad (d)$$

が $\omega(y, z)$ の断面周上の境界条件であり， s はその周に沿った座標である。

したがって，任意の充実断面の形状に対して，式 (c) と境界条件式 (d) を満足するような $\omega(y, z)$ が求められたとすると，式 (7.4) の Saint-Venant のねじりモーメントが次のように表され，ねじり定数を

$$T_S = G \varrho \int_A \left\{ y^2 + z^2 + \left(y \frac{\partial \omega}{\partial z} - z \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right\} dA \quad \rightarrow \quad J = \int_A \left\{ y^2 + z^2 + \left(y \frac{\partial \omega}{\partial z} - z \frac{\partial \omega}{\partial y} \right) \right\} dA \quad (e)$$

と定義できることになる。円断面のように点対称な形状の場合には， ω は定数でなければならず，結局上式から式 (7.6) を求めることができる。しかし（西野文雄先生がおっしゃったことは），断面定数を求めるためだけに偏微分方程式を解かなければならないということは，構造設計を困難にするだけである。しかし，この章でも示したように，薄肉断面である限りは，断面定数は非常に簡単な公式で求めることができている。複雑な充実断面になることが多い一般的なコンクリート部材のねじりに対する設計では，実はここに整理したような偏微分方程式を予め解いておく必要が出てきそうだが，実際にどうしているのか著者は知らない。

以上はそり変位を用いて，それがねじり定数にどのように関わるかを示したが，さらに別の解法についても補足しておこう。まず，式 (c) のつり合い式を満足させるためには

$$\sigma_{yx} = \frac{\partial \phi(y, z)}{\partial z}, \quad \sigma_{zx} = -\frac{\partial \phi(y, z)}{\partial y}$$

を満足するような応力関数 $\phi(y, z)$ が存在すればいいことは誰でも簡単に示すことができるだろう。この関係と上の式 (b) とを等置すると

$$\frac{\partial \omega}{\partial y} = z + \frac{1}{G \varrho} \frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial z} = -y - \frac{1}{G \varrho} \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (f)$$

という関係を得る。これから ω を消去すると

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -2G\varrho \quad (g)$$

が、 ϕ の支配方程式になる。式(c)と同じ微分作用素 ∇^2 が ϕ を支配している。また式(d)の境界条件に式(f)を代入すると

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \quad \rightarrow \quad \phi = \text{const.} \quad (h)$$

という簡単な表現になる。もし断面形が単連結なら、境界条件は

$$\phi = 0 \quad \text{断面周上で}$$

でいい⁷ことになる。この ϕ を任意断面に対して解くことができれば、式(e)に式(f)を代入して整理することにより、Saint-Venantのねじりモーメントは

$$T_S = 2 \int_A \phi \, dA$$

で求めることができる。例えば、主軸半径が a と b の楕円断面の場合には

$$\phi = \frac{-a^2 b^2 G\varrho}{a^2 + b^2} \left(\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} - 1 \right)$$

と求めることができるらしく、結局

$$T_S = G\varrho \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} \quad \rightarrow \quad J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

であり、円形断面 ($a = b = r_0$) であれば式(7.6)になる。また薄肉長方形断面の場合も、近似して式(7.28)を得ることができる。問題は、どうやって式(g)(h)を任意の断面形に対して解けばいいのかである。これについては、特に機械工学関係の類書を参考にして欲しい。例えばこの式(g)と境界条件が膜のつり合い式(8.57)と境界条件に類似していることから、よく薄膜類似という方法を用いることができるようだ。

7.6 ねじりを受ける棒の剛性方程式

7.6.1 曲げねじり問題

曲げねじりに対しても第5章の有限要素法をそのまま用いて剛性方程式を誘導することができる。ねじり角 $\varphi(x)$ で表したつり合い式が式(7.55)で与えられているので、長さ ℓ の棒の基本的な弱形式はまず

$$-\int_0^\ell \{-EI_\omega \varphi''''(x) + GJ \varphi''(x)\} \delta\varphi(x) \, dx = 0$$

と表現できる。被積分関数の第1, 2項に関する積分をそれぞれ2回あるいは1回部分積分することによって、式(7.56)の境界条件を取り込んでいくことができ、最終的な仮想仕事の式が

$$EI_\omega \int_0^\ell \varphi'' \delta\varphi'' \, dx + GJ \int_0^\ell \varphi' \delta\varphi' \, dx - (C_x)_1 \delta\varphi_1 - (C_\omega)_1 \delta\gamma_1 - (C_x)_2 \delta\varphi_2 - (C_\omega)_2 \delta\gamma_2 = 0 \quad (7.74)$$

と表現できる。ただし、簡単のために端部のそりを代表する変位成分を

$$\gamma_1 \equiv -\varphi'(0), \quad \gamma_2 \equiv -\varphi'(\ell) \quad (7.75)$$

⁷ 断面形が作る領域が多重連結の場合には、一つの周上だけで $\phi = 0$ が成立する。ちなみに、ある領域の任意の場所に紐を輪にして投げ込みその両端を掴んで輪を縮めていったときに、どこにもその輪が引っ掛からない場合の領域を単連結領域と呼び、それ以外を多重連結領域と呼ぶ。

と置いた。式 (7.74) の表現および境界条件から判断して、ねじり角 $\varphi(x)$ に仮定する変位関数は梁の曲げの問題と同様の 3 次の多項式でいいことがわかる。すなわち、式 (5.22) の関数 $\psi_n(x)$ を用いて

$$\varphi(x) \sim \varphi_1 \psi_1(x) + \gamma_1 \psi_2(x) + \varphi_2 \psi_3(x) + \gamma_2 \psi_4(x) \quad (7.76)$$

と仮定すればいい。

これを仮想仕事式 (7.74) に代入して有限要素定式化の標準手順を踏めばいいのであるが、この曲げねじり問題と第 6 章の梁-柱の問題とはその表現が非常によく似ていることに気付く。一般解が双曲線関数か三角関数かの違いがあるように、微分方程式の係数の符号の違いで解の性質は全く違ってしまっているが、有限要素定式化の観点から式 (7.55) (7.56) と式 (6.32) (6.33) とを比較すると

$$(w, \theta) \leftrightarrow (\varphi, \gamma), \quad (EI, P) \leftrightarrow (EI_\omega, -GJ), \quad q \leftrightarrow 0, \quad (S, C) \leftrightarrow (C_x, C_\omega)$$

の置き換えによって二つの問題の表現には一対一の対応があることがわかる。したがって式 (7.76) を式 (7.74) に代入して演算を続行するまでもなく、曲げねじり問題の剛性方程式は式 (6.63) を参考にして

$$\begin{Bmatrix} (C_x)_1 \\ (C_\omega)_1 \\ (C_x)_2 \\ (C_\omega)_2 \end{Bmatrix} = \left(\mathbf{k}_\omega + \mathbf{k}_S \right) \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \gamma_1 \\ \varphi_2 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} \quad (7.77)$$

となることが明らかである。ここに

$$\mathbf{k}_\omega \equiv \left((k_\omega)_{ij} \right), \quad (k_\omega)_{ij} \equiv EI_\omega \int_0^\ell \psi_i' \psi_j'' dx, \quad \mathbf{k}_S \equiv \left((k_S)_{ij} \right), \quad (k_S)_{ij} \equiv GJ \int_0^\ell \psi_i' \psi_j' dx \quad (7.78a, b, c, d)$$

で定義された剛性行列はそれぞれ、曲げねじりに関するものと Saint-Venant のねじりに関するものである。行列の具体的な表現はそれぞれ、式 (5.25) の初等梁の曲げ剛性行列と式 (6.64) の幾何剛性行列とに対応しており

$$\mathbf{k}_\omega = EI_\omega \begin{pmatrix} \frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} & -\frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} \\ & \frac{4}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{2}{\ell} \\ & & \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ \text{Symm.} & & & \frac{4}{\ell} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_S = GJ \begin{pmatrix} \frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} & -\frac{6}{5\ell} & -\frac{1}{10} \\ & \frac{2\ell}{15} & \frac{1}{10} & -\frac{\ell}{30} \\ & & \frac{6}{5\ell} & \frac{1}{10} \\ \text{Symm.} & & & \frac{2\ell}{15} \end{pmatrix} \quad (7.79a, b)$$

と陽に表すことができる。

もちろん前の例で見たように $\varphi(x)$ の一般解は双曲線関数なので、梁や柱の問題とは異なり、有限要素法による解は節点においても正解には一致せず近似解に過ぎない。ただ近似度については梁-柱と同程度であり、梁-柱の座屈問題の数値解の例からも明らかなように、比較的少ない要素分割でも工学的には十分な精度で近似解を求めることができる。

演習問題 7-6

7. 式 (7.74) に式 (7.76) を代入して、標準的方法によって剛性行列の式 (7.79) を求めよ。
8. 図 7.28, 7.31, 7.33 等を式 (7.77) の剛性方程式を用いて 2 要素程度で有限要素解を求め、厳密解と比較して精度を論ぜよ。

7.6.2 Saint-Venant のねじり問題

さて図 7.30 でも示したように、一般に細長い構造棒部材では曲げねじり成分がそれほど大きな影響を及ぼさない場合も多い。その場合、式 (7.77) の剛性方程式の第 2, 4 行の左辺の曲げねじり集中モーメントは常に零である上に、要素間でねじり率 $(-\varphi')$ は連続する必要は無く⁸なる。したがって、この左辺が零の第 2, 4 行の式は各要素毎の剛性方程式への「局所的な拘束条件」であり、全体系の剛性方程式に重ねてはいけないのだ。つまりこの 2 式は個々の要素で独立して成立すべき条件で、それは両端の φ_i と γ_i の間の制約条件を与えている。結局この 2 行の式を γ_i について解くと、 GJ も EI_ω も消え去り

$$\begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} = \frac{1}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (7.80)$$

となる。この式は、ねじり率を両端のねじり角の差分で表したものであり、後述のように φ に 1 次多項式を仮定してねじり率 γ を算定したものと同一である。この関係を元の要素剛性方程式 (7.77) の第 1, 3 行に代入することによって剛性行列の縮約が行われ、最終的な要素剛性方程式が

$$\begin{Bmatrix} (C_x)_1 \\ (C_x)_2 \end{Bmatrix} = \frac{GJ}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} \quad (7.81)$$

と求められる。行列の縮約という操作によって自動的に EI_ω の項がすべて消え去っているのは興味深い [33]。すなわち、Saint-Venant のねじりだけを考慮すればいい場合の棒は、ちょうどバネ定数が (GJ/ℓ) の線形バネとしてねじり外力に抵抗していると考えればいい。

もちろん式 (7.81) の剛性方程式は、式 (7.8) で表された Saint-Venant のねじりモーメントのつり合い式と境界条件式 (7.10) とから求められる弱形式

$$\int_0^\ell GJ\varphi' \delta\varphi' dx - (C_x)_1 \delta\varphi_1 - (C_x)_2 \delta\varphi_2 = 0$$

からも誘導できる。この形式は式 (5.14) の柱の仮想仕事式の分布外力項を無視したものに一致しているから、仮定する変位関数も柱の場合と同様 1 次の多項式でいいので、式 (5.16b) (5.16c) の関数 $\phi_i(x)$ を用いて

$$\varphi(x) = \varphi_1 \phi_1(x) + \varphi_2 \phi_2(x)$$

と置けばいい。これを上の仮想仕事式に代入すれば上式 (7.81) の剛性方程式を求めることができる。また Saint-Venant のねじりのみの場合に、節点のねじり角 φ_i が厳密解に一致するのは、柱の場合と同じである。

演習問題 7-7

9. ここで説明した縮約を用いる方法と標準的な方法の両方で、式 (7.80) を求めてみよ。
10. 図 7.28, 7.31, 7.33 等を式 (7.81) の剛性方程式を用いて 2 要素程度で有限要素解を求め、厳密解と比較して精度を論ぜよ。

7.6.3 立体骨組の問題

(1) 簡単な例

いよいよ現実的な 3 次元の立体構造を対象としよう。身の回りの橋梁を見る限り、微分方程式を直接用いてその力学問題を解決するのは難しそうだ。となると有限要素法の出番となる。ねじり変形が生じない平面骨組

⁸ この説明はわかり難いだろうか。Timoshenko 梁の剛性方程式 (B.31) を誘導するときにも用いる考え方であるが、当時文献 [43] を作っているときにも他研究者からこの連続性不要の考え方に異議が出され、西野文雄先生と一緒に驚いたことがあった。そのため文献 [33] にもこの節の内容を発表した。曲げねじり集中モーメントを零にすることには抵抗があるかもしれないが、力学的には非常に明確な考え方だと思っている。

の問題は、例えば式 (5.34) の剛性方程式で z - x 面内の問題を解決できる。そして x - y 面内の問題もほぼ同様の剛性方程式を用いればいい。したがって立体骨組を対象とする場合には、この二つにねじり抵抗に関する剛性方程式を加えればいいことになる。まず答を確かめ易いように、剛性方程式を用いないで済むような簡単な例を一つ解いておこう。

図 7.35 の左側の図の問題は二つの直交する円柱でできた立体構造である。交点のせん断外力の作用で片方の棒がたわんで先端にたわみ角が生じるが、それをもう片方の棒のねじり抵抗も部分的に拘束する。したがって右側の図のようにそれぞれの棒を分離し、それぞれの棒の先端に

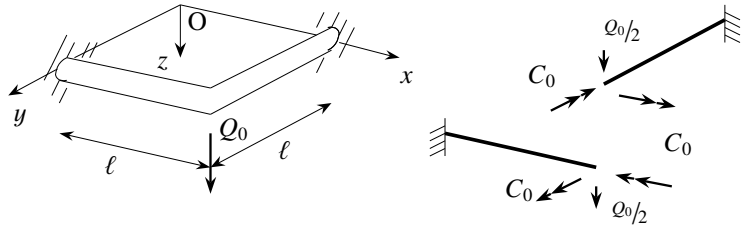


図 7.35 二つの直交する円柱が作る簡単な立体構造

他方からのねじり抵抗と曲げ抵抗に相当する集中モーメント C_0 が二つ、不静定モーメントとして作用していると考えればいい。載荷点に対して対称構造であることから、せん断外力は半分ずつそれぞれの片持ち棒に作用していると考えていいし、上の不静定モーメントもすべて同じ値になっている。まず左手前の棒の曲げを考えると、その曲げによる先端のたわみ角は、式 (4.39b) および式 (4.40b) から

$$-w'(\ell) = (y \text{ 軸右ねじ方向のたわみ角}) = -\frac{q_0/2 \ell^2}{2EI} + \frac{C_0 \ell}{EI}$$

の値を持つ。一方ねじり抵抗は、円柱の場合には Saint-Venant のねじりだけでいいので、式 (7.11a) で得た結果から右奥の棒側の先端のねじり回転角は

$$\varphi(\ell) = (y \text{ 軸右ねじ方向のねじり角}) = -\frac{C_0 \ell}{GJ}$$

となる。この場合の先端の幾何学的な整合性あるいは連続性は、片方の棒のねじり回転角がもう片方のたわみ角に等しくならなければならないことを要請する。つまり、以上の二つの式を等置して

$$-\frac{q_0/2 \ell^2}{2EI} + \frac{C_0 \ell}{EI} = -\frac{C_0 \ell}{GJ} \rightarrow C_0 = \frac{Q_0 \ell GJ}{4(GJ + EI)}$$

のように不静定モーメントが求められる。したがって、例えば左手前の棒の場合には

$$\varphi(x) = -\frac{Q_0 \ell x}{4(GJ + EI)}, \quad w(x) = \frac{Q_0 \ell (GJ + 2EI)}{8EI(GJ + EI)} x^2 - \frac{Q_0}{12EI} x^3 \tag{7.82a, b}$$

というねじり角とたわみの分布を示す。 $GJ = 0$ の極端な場合には、先端にせん断外力 $q_0/2$ が作用した 1 本の片持ち梁の曲げの解を得ることができる。

(2) 要素座標系の要素剛性方程式

剛性方程式を用いた数値解析で気になるのは、曲げや軸力に関する剛性方程式とねじりに関する剛性方程式との連成作用である。長方形断面を例にして簡単に考察してみよう。式 (7.26) で得た x 方向の変位成分は、新しく導入された単位そりを用いれば

$$u_x(x, y, z) = u(x) - \omega(y, z) \varphi'(x), \quad \omega(y, z) = yz_s - zy_s - yz$$

と表現できる。 $u(x)$ は図心で定義された x 方向変位である。一方、曲げと軸力を受ける棒の場合の軸方向の変位成分は、式 (4.3a) を x - y 平面内の曲げにも拡張することによって

$$u(x) - z w'(x) - y v'(x)$$

と表すことができる。ここに $v(x)$ と $w(x)$ はそれぞれ y, z 方向の変位成分で、二つ共せん断中心 S で定義されているものとする。というのも、もし図心等で定義すると第4.6.1(4)節で示したように Saint-Venant のねじりと曲げが連成してしまうからだ。この二つを重ね合わせれば、軸力・曲げとねじりを同時に受ける部材の軸方向変位成分は

$$u_x(x, y, z) = u(x) - zw'(x) - yv'(x) - \omega(y, z)\varphi'(x) \quad (7.83)$$

となり、ひずみを求めて Hooke の法則に代入すれば軸方向の直応力を

$$\sigma_{xx}(x, y, z) = E \{u'(x) - zw''(x) - yv''(x) - \omega(y, z)\varphi''(x)\} \quad (7.84)$$

と表現できる。

これを例えば軸力の定義式(4.9)に代入すると

$$N(x) = EAu' - EJ_z w'' - EJ_y v'' - EJ_\omega \varphi''$$

となり、 y 軸回りの曲げモーメントも同様に式(4.11)から

$$M_z(x) = EJ_z u' - EI_z w'' - EI_{yz} v'' - EI_{\omega z} \varphi''$$

となる。新しく導入した断面定数は

$$J_y \equiv \int_A y^2 dA, \quad J_\omega \equiv \int_A \omega^2 dA, \quad I_z \equiv \int_A z^2 dA, \quad I_y \equiv \int_A y^2 dA, \quad (7.85a, b, c, d)$$

$$I_{yz} \equiv \int_A yz dA, \quad I_{\omega z} \equiv \int_A \omega z dA, \quad I_{\omega y} \equiv \int_A \omega y dA \quad (7.85e, f, g)$$

と定義してある。 I_{yz} は断面相乗モーメントと呼ばれている。さらに、式(7.62)に式(7.84)を代入することによって、曲げねじりモーメントは

$$M_\omega(x) = EJ_\omega u' - EI_{\omega z} w'' - EI_{\omega y} v'' - EI_\omega \varphi''$$

となる。このように立体構造の場合には、変位の微係数で表された変形と断面力の関係がお互いに連成し合い、例えば平面問題の式(4.13)のように分離できていない。コンピュータを用いた数値解析なら、そのような分離そのものが本来は必要無いのではあるが、力学の勉強のために、頭の体操のために少し議論しておこう。

さて第4章でも示したように、原点を図心に選んでやれば y, z に関する断面1次モーメント J_y, J_z を零にできる。さらに、断面相乗モーメントも

$$I_{yz} = \int_A yz dA = 0$$

を満足するように y, z 軸を設定することも可能⁹である。このように選ばれた y, z 軸を断面の主軸と呼ぶ。さらに、式(7.66)(7.67)を満足するようにせん断中心と ω_c を定義することが可能であることから、断面力と変位成分との関係はすべて独立になり

$$N = EAu', \quad M_z = -EI_z w'', \quad M_\omega = -EI_\omega \varphi'', \quad M_y \equiv \int_A \sigma_{xx} y dA = -EI_y v''$$

と関係付けることが可能である。 I_y は式(7.85d)で定義されている。

以上のように変位成分を定義する位置を適切に設定しておけば、立体骨組の剛性方程式は、平面骨組のそれとねじりに関する剛性方程式とを単純に併記すればいいことになる。まず節点の変位成分を

$$\mathbf{u}_i \equiv [u_i \ v_i \ w_i \ \varphi_i \ -w'_i \ v'_i \ \gamma_i]^T \quad (i = 1, 2) \quad (7.86)$$

⁹ 2軸曲げあるいはねじりの力学までを学んで初めて断面の主軸の意味がわかる。それを構造力学の最初に教えるのは愚かなことではないだろうか。求める目的すら学生にはわからないのだから。

と定義する。\$v'_i\$ に負の符号が付いていないのは、正の \$v'_i\$ が \$z\$ 軸右ねじ方向のたわみ角になって通常の集中モーメントの正の向きと一致するからである。これに対応させて、外力成分も

$$f_i \equiv [F_i \ S_{y_i} \ S_{z_i} \ C_{x_i} \ C_{z_i} \ C_{y_i} \ C_{\omega_i}]^T \quad (i = 1, 2) \tag{7.87}$$

と定義する。ここに \$S_{z_i}, C_{z_i}\$ は第 5 章で定義した \$S_i, C_i\$ の下添え記号を書き換えただけのものであり、したがって \$S_{y_i}, C_{y_i}\$ は \$y\$ 方向のせん断外力と \$z\$ 軸右ねじ回りの曲げ集中モーメントである。式 (7.87) の外力成分は、外力仮想仕事項で式 (7.86) の変位成分と仕事をする対となる外力である。軸力と 2 軸回りの曲げ集中モーメントは図心に、せん断外力とねじりに関する集中モーメントはせん断中心に作用しているものとする。簡単のために分布外力項を省略すると、立体骨組の要素剛性方程式は上の記号を用いて

$$\begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_s^A & k_s^B \\ (k_s^B)^T & k_s^C \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \tag{7.88}$$

と表される。ここに \$k_s^x\$ (\$x=A, B, C\$) は、立体骨組の剛性行列をそれぞれ \$7 \times 7\$ の小行列に分割したもので、具体的には

$$k_s^A = \begin{pmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\ & & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & 0 \\ & & & \frac{12EI_\omega}{\ell^3} + \frac{6GJ}{5\ell} & 0 & 0 & -\frac{6EI_\omega}{\ell^2} - \frac{GJ}{10} \\ & & & & \frac{4EI_z}{\ell} & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{4EI_y}{\ell} & 0 \\ \text{Symm.} & & & & & & \frac{4EI_\omega}{\ell} + \frac{2(GJ)}{15} \end{pmatrix}, \quad k_s^B = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12EI_\omega}{\ell^3} - \frac{6GJ}{5\ell} & 0 & 0 & -\frac{6EI_\omega}{\ell^2} - \frac{GJ}{10} \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI_z}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_\omega}{\ell^2} + \frac{GJ}{10} & 0 & 0 & \frac{2EI_\omega}{\ell} - \frac{GJ}{30} \end{pmatrix} \tag{7.89a, b}$$

のような表現になる。\$k_s^C\$ は \$k_s^A\$ の非対角項のみの符号を変えた行列である。部材長が比較的に長い場合等のように、そりを無視する場合には、\$\gamma_i\$ を消去した式 (7.81) の方を重ねればよい。そのため、節点変位・節点外力ベクトルは \$\gamma_i, C_{\omega_i}\$ の無い 6 行になるから

$$k_s^A = \begin{pmatrix} \frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} \\ & & \frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 \\ & & & \frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ & & & & \frac{4EI_z}{\ell} & 0 \\ \text{Symm.} & & & & & \frac{4EI_y}{\ell} \end{pmatrix}, \quad k_s^B = \begin{pmatrix} -\frac{EA}{\ell} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\ell^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_z}{\ell^3} & 0 & -\frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{\ell} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{6EI_z}{\ell^2} & 0 & \frac{2EI_z}{\ell} & 0 \\ 0 & -\frac{6EI_y}{\ell^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_y}{\ell} \end{pmatrix} \tag{7.90a, b}$$

といった行列になる。

演習問題 7-8

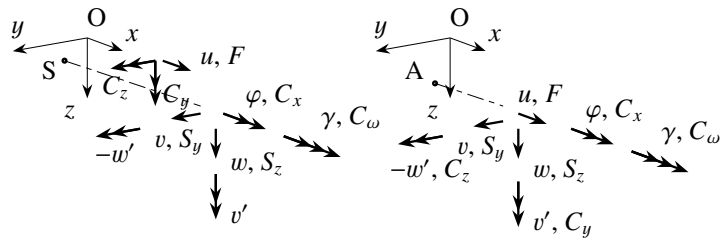
11. L 形や Z 形の断面の主軸を、別途文献の計算例を眺めながら求め、主軸の意味を実感せよ。

(3) 隣り合う要素の断面形状が異なる場合

しかしながら一般に、それぞれの部材は、それが主にどんな抵抗力を期待されているかによって全く異なる断面形状を持っている。しかもそのような相異なる断面を持つ部材で構成された立体骨組では、部材の接合点

で図心同士あるいはせん断中心同士が同一点を通過するように配置できないのが普通である。したがって一般的な立体構造では、上の要素剛性方程式を直接剛性法で単純に重ね合わせることはできない。また一方で前述のように、もしコンピュータで剛性方程式を解くのであれば、曲げと圧縮やねじりとを独立させる必要性はほとんど無く、変位や力のベクトル成分を取って図心等で定義しておく必要はなくなる。

そこで例えば、折れ曲がってもいいが連続した線で全部材の軸線方向に沿った部材骨格を表す線（以下「骨格線」と呼ぶ）を一巡り定義し、各部材毎にこの骨格線が通過する断面内の点 $A(y_a, z_a)$ を決め、その点で剛性方程式の外力ベクトル成分や変位ベクトル成分を定義して剛性方程式を変更すれば直接剛性法が使えるようになる。詳細



式 (7.88) \Rightarrow 式 (7.91)

図 7.36 変位と外力の定義された点を一般化する

については文献 [162, 171, 172] 等を参照して欲しいが、式 (7.86) (7.87) の変位ベクトル成分および外力ベクトル成分の代わりに、任意点 A ですべての成分を定義したベクトル \tilde{u}_i, \tilde{f}_i を定義し、剛性方程式 (7.88) を

$$\begin{Bmatrix} \tilde{f}_1 \\ \tilde{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{k}_s^A & \tilde{k}_s^B \\ \text{Symm.} & \tilde{k}_s^C \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \end{Bmatrix} \tag{7.91}$$

と表したい。図 7.36 に式 (7.88) の剛性方程式における各成分の定義された点と式 (7.91) の定義とを対比させて表示しておいた。便宜上、そり変位および曲げねじり集中モーメントには 3 重矢印を用いた。それぞれの成分同士には

$$u_i = D_u \tilde{u}_i, \quad f_i = D_f \tilde{f}_i$$

の関係があるので、結果的には各剛性行列は

$$\tilde{k}_s^x \equiv D_f^{-1} k_s^x (D_f^{-1})^T \quad \text{あるいは} \quad D_u^T k_s^x D_u \quad (x=A, B, C)$$

のように修正すればいい。ここに

$$D_u^T = D_f^{-1}, \quad D_u^{-1} = D_f^T$$

という関係があり、例えば D_f^{-1} は

$$D_f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_a - z_s & y_s - y_a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -z_a & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ y_a & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_s - y_a & z_s - z_a & 1 \end{pmatrix}$$

と表される。こうすることによって、軸力や曲げおよびねじりに関する剛性方程式同士の連成は避けられなくなるものの、剛性方程式のベクトル成分がある連続した共通の骨格線上の物理量で定義されるため、異なる断面を持つ部材間の連続条件も簡単に表現でき、いわゆる直接剛性法がそのまま適用できる。そりを無視する場合には、上の行列の 7 列 7 行を無視した 6 × 6 の行列を用いればいい。

各行列の陽な表現は、 $\tilde{\mathbf{k}}_s^x = \mathbf{k}_s^x + \Delta\mathbf{k}_s^x$ と差分表示すると

$$\Delta\mathbf{k}_s^A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{EAz_a}{\ell} & \frac{EAy_a}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{12E\tilde{I}_y}{\ell^3} & 0 & 0 & \left(\frac{6E\tilde{I}_y}{\ell^2}\right) \\ 0 & \frac{12E\tilde{I}_z}{\ell^3} & 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{6E\tilde{I}_z}{\ell^2}\right) \\ \frac{12E\tilde{J}_y}{\ell^3} + \frac{12E\tilde{J}_z}{\ell^3} & \left(-\frac{6E\tilde{I}_z}{\ell^2}\right) & \left(-\frac{6E\tilde{I}_y}{\ell^2}\right) & \left(-\frac{6E\tilde{J}_y}{\ell^2} - \frac{6E\tilde{J}_z}{\ell^2}\right) & \frac{4E\tilde{I}_z}{\ell} & \frac{4E\tilde{I}_y}{\ell} \\ \text{Symm.} & & & & \frac{4E\tilde{J}_y}{\ell} + \frac{4E\tilde{J}_z}{\ell} & \end{pmatrix}, \quad (7.92a)$$

$$\Delta\mathbf{k}_s^B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EAz_a}{\ell} & -\frac{EAy_a}{\ell} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12E\tilde{I}_y}{\ell^3} & 0 & 0 & \frac{6E\tilde{I}_y}{\ell^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{12E\tilde{I}_z}{\ell^3} & 0 & 0 & -\frac{6E\tilde{I}_z}{\ell^2} \\ 0 & \frac{12E\tilde{I}_y}{\ell^3} & -\frac{12E\tilde{I}_z}{\ell^3} & -\frac{12E\tilde{J}_y}{\ell^3} - \frac{12E\tilde{J}_z}{\ell^3} & -\frac{6E\tilde{I}_z}{\ell^2} & -\frac{6E\tilde{I}_y}{\ell^2} & -\frac{6E\tilde{J}_y}{\ell^2} - \frac{6E\tilde{J}_z}{\ell^2} \\ \frac{EAz_a}{\ell} & 0 & 0 & \frac{6E\tilde{I}_z}{\ell^2} & -\frac{EAz_a^2}{\ell} & \frac{EAy_az_a}{\ell} & \frac{2E\tilde{I}_z}{\ell} \\ -\frac{EAy_a}{\ell} & 0 & 0 & \frac{6E\tilde{I}_y}{\ell^2} & \frac{EAz_ay_a}{\ell} & -\frac{EAy_a^2}{\ell} & \frac{2E\tilde{I}_y}{\ell} \\ 0 & -\frac{6E\tilde{I}_y}{\ell^2} & \frac{6E\tilde{I}_z}{\ell^2} & \frac{6E\tilde{J}_y}{\ell^2} + \frac{6E\tilde{J}_z}{\ell^2} & \frac{2E\tilde{I}_z}{\ell} & \frac{2E\tilde{I}_y}{\ell} & \frac{2E\tilde{J}_y}{\ell} + \frac{2E\tilde{J}_z}{\ell} \end{pmatrix} \quad (7.92b)$$

となる。 $\Delta\mathbf{k}_s^C$ は $\Delta\mathbf{k}_s^A$ の括弧付きの項のみの符号を変えた行列である。ただし

$$\tilde{I}_y \equiv (z_s - z_a) I_y, \quad \tilde{I}_z \equiv (y_s - y_a) I_z, \quad \tilde{J}_y \equiv (z_s - z_a)^2 I_y, \quad \tilde{J}_z \equiv (y_s - y_a)^2 I_z$$

と定義した。なお断面軸は y, z 軸に平行な場合に限る。こういったことが記載された教科書を他に見たことが無いことや、西野文雄先生達の文献も改訂される予定が無いことから、その内容をコピー¹⁰しておいた。

(4) 全体座標系の剛性方程式と例

直接剛性法がそのまま使えるように剛性方程式を修正したとしても、立体骨組の場合も平面骨組と同様それぞれの部材はそれぞれ異なる方向を向いているため、上の式(7.91)はそれぞれの要素の局所的な座標系における要素剛性方程式に過ぎなくなる。1要素の軸方向の要素座標を ξ とし、それに直交する断面の主軸方向をそれぞれ η, ζ 軸とする。これに対し、すべての要素に共通な全体座標系を (x, y, z) としておいて、この $(\xi, \eta, \zeta) \leftrightarrow (x, y, z)$ の間の座標変換行列 \mathbf{T}_s を

$$\tilde{\mathbf{u}}_i = \mathbf{T}_s \bar{\mathbf{u}}_i, \quad \tilde{\mathbf{f}}_i = \mathbf{T}_s \bar{\mathbf{f}}_i \quad (7.93a, b)$$

と定義する。上棒付きの $\bar{\mathbf{u}}_i, \bar{\mathbf{f}}_i$ が (x, y, z) 全体座標系の成分である。これによって、すべての部材に共通する全体座標系の要素剛性方程式が平面骨組の式(5.40)と同様

$$\begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_1 \\ \bar{\mathbf{f}}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{T}_s^T \tilde{\mathbf{k}}_s^A \mathbf{T}_s & \mathbf{T}_s^T \tilde{\mathbf{k}}_s^B \mathbf{T}_s \\ \text{Symm.} & \mathbf{T}_s^T \tilde{\mathbf{k}}_s^C \mathbf{T}_s \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{u}}_1 \\ \bar{\mathbf{u}}_2 \end{Bmatrix} \quad (7.94)$$

と表現できる。座標変換行列の一般的な表現には例えば Euler 角を用いる等種々の方法があるが、著者はとても苦手なので詳細は別途文献を参照のこと。ここでは図 7.35 の例を、そりを無視した 2 要素の剛性方程式を用いて解き、式(7.82)の解析解と比較する。

¹⁰ 図書館にはあるのだろうが・・・そもそも、昨今の汎用プログラムではどのような処理がなされているのだろう。構造部材要素が定義されていないのかもしれないなあ。

図 7.37 のように x 軸に平行な部材の両節点を 1, 2 として要素 (1) と呼ぶ。これに対して、右側の部材の軸方向要素座標を ξ 、それに直交する座標を図のように定義し、要素 (2) と呼ぶ。要素 (1) は要素座標と全体座標とが一致しているから座標変換行列は単位行列になる。一方、要素 (2) の座標変換行列は

$$T_s = \begin{pmatrix} T_{ss} & \mathbf{0}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}_3 & T_{ss} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \mathbf{0}^T & 1 \end{pmatrix} \quad \text{あるいは} \quad \begin{pmatrix} T_{ss} & \mathbf{0}_3 \\ \mathbf{0}_3 & T_{ss} \end{pmatrix} \quad (7.95a, b)$$

となる。ここで、 $\mathbf{0}$ は 3 行の零ベクトル、 $\mathbf{0}_3$ は 3×3 の零行列であり

$$T_{ss} \equiv \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で定義される行列 T_{ss} が、この問題における全体座標系 (x, y, z) から局所座標系 (ξ, η, ζ) へのベクトル成分の座標変換行列になっている。式 (7.95b) の表現は、そりを無視した 6×6 の場合の座標変換行列である。

円柱では図心とせん断中心が一致しているの、この同じ 2 本の円柱部材に共通な骨格線も図心を通る線である。したがって、簡単のために剛性行列の上波線を省略し、そりも無視するから、以下の行列サイズは 6×6 になる。要素 (1) の全体座標系の要素剛性方程式は、式 (7.94) の中の座標変換行列を取り除いたもので

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_s^A & k_s^B \\ \text{Symm.} & k_s^C \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{Bmatrix}$$

と表すことができる。一方要素 (2) の方は、断面定数が要素 (1) と同じなので同じ剛性行列の記号を使うと、上の座標変換行列を用いて

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} T_s^T k_s^A T_s & T_s^T k_s^B T_s \\ \text{Symm.} & T_s^T k_s^C T_s \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix}$$

となる。したがって直接剛性法がそのまま適用でき、全体剛性方程式は

$$\begin{Bmatrix} \bar{f}_1 \\ \bar{f}_2 \\ \bar{f}_3 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_s^A & k_s^B & \mathbf{0}_3 \\ & k_s^C + T_s^T k_s^A T_s & T_s^T k_s^B T_s \\ \text{Symm.} & & T_s^T k_s^C T_s \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

となる。境界条件は節点の 1 と 3 とですべての変位を拘束しており

$$\bar{u}_1 = \mathbf{0}, \quad \bar{u}_3 = \mathbf{0}$$

であり、荷重条件は節点 2 で

$$\bar{f}_2 = [0 \ 0 \ Q_0 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

と与えられる。したがって、式 (*) でまず解けるのは節点 2 に関する行であり、それは

$$\bar{f}_2 = (k_s^C + T_s^T k_s^A T_s) \bar{u}_2$$

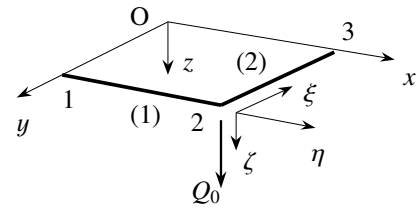


図 7.37 二つの円柱が作る簡単な立体構造の有限要素解析

となる。そりを無視したときの具体的な $\mathbf{k}_s^A, \mathbf{k}_s^C$ は式 (7.90) を用いればよく、式 (7.95b) を用いると

$$\mathbf{T}_s^T \mathbf{k}_s^A \mathbf{T}_s = \begin{pmatrix} 12EI_y/\ell^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -6EI_y/\ell^2 \\ & EA/\ell & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 12EI_z/\ell^3 & 6EI_z/\ell^2 & 0 & 0 \\ & & & 4EI_z/\ell & 0 & 0 \\ & & & & GJ/\ell & 0 \\ \text{Symm.} & & & & & 4EI_y/\ell \end{pmatrix}$$

となる。これを上の表現に代入し、外力 Q_0 のある第3行と連成する行だけを取り出すと第3, 4, 5行のみになり、それが

$$\begin{Bmatrix} Q_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left(\begin{pmatrix} 12EI/\ell^3 & 0 & 6EI/\ell^2 \\ 0 & GJ/\ell & 0 \\ 6EI/\ell^2 & 0 & 4EI/\ell \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 12EI/\ell^3 & 6EI/\ell^2 & 0 \\ 6EI/\ell^2 & 4EI/\ell & 0 \\ 0 & 0 & GJ/\ell \end{pmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \bar{w}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \\ -\bar{w}'_2 \end{Bmatrix}$$

となる。簡単のために I_z を I と略した。したがって

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \\ -\bar{w}'_2 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 24EI/\ell^3 & 6EI/\ell^2 & 6EI/\ell^2 \\ 6EI/\ell^2 & GJ/\ell + 4EI/\ell & 0 \\ 6EI/\ell^2 & 0 & 4EI/\ell + GJ/\ell \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} Q_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

を解けばよく、行列式を計算して逆行列の第1列目の要素を算定すれば

$$\begin{Bmatrix} \bar{w}_2 \\ \bar{\varphi}_2 \\ -\bar{w}'_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{Q_0 \ell^3 (GJ + 4EI)}{24EI(GJ + EI)} \\ -\frac{Q_0 \ell^2}{4(GJ + EI)} \\ -\frac{Q_0 \ell^2}{4(GJ + EI)} \end{Bmatrix}$$

が節点2の変位成分になる。これは式 (7.82) の x に ℓ を代入した厳密解に一致している。残りの行は上の3行とは連成せず、左辺が零で剛性行列が正則なため対応する変位成分もすべて零になる。このように、解法そのものは平面骨組と同じなのでその詳細や他の例については割愛するが、座標変換行列の算定法については別途文献を必ず参照して欲しい。

近年、骨組の有限要素解析をする文献をあまり見ない。汎用プログラムでは構造部材要素をどのように定式化しているのだろう。例えば計算速度を稼ぐために一部に棒部材要素を用いておいて、剛体要素等と呼ばれる特殊なリンクでシェル要素やソリッド要素にそれを連結させることもよく実施されているようだ。このとき、どのようにその断面力や断面のそり等を伝達させているのだろう。マニュアルを読んだことが無いのでよくわからない。また、ここではやや古典的な剛性方程式を誘導したが、弾塑性解析のことも念頭に置くと、わざわざ断面1次モーメント等を零にして曲げと軸力・ねじりを独立させるメリットは無くなる。そういう意味では、ここに説明したような有限要素解析は古いアプローチかもしれないので注意して欲しい。ただし、構造力学の本質を確実に理解するためには、この節の内容も理解できるようになって欲しいところである。

7.7 曲げねじりと安定問題

7.7.1 ねじれ座屈

ねじりの自由度も持ち立体的に挙動する棒も、第6章で取り上げた基本的な分岐座屈の一つである曲げ座屈と同じ様な分岐現象を示すことがある。ここでは代表的な二つを紹介するが、基礎式の誘導や解法については別途文献 [171, 172] 等を参照のこと。

最初の例は図 7.38 に示したような系の分岐現象で、柱の曲げ座屈に非常に似ている。つまり、例えば図示したような単純支持された棒を圧縮した場合に、ある外力レベルまでは棒は単に縮むだけである。これがある外力レベルになったとき、それまでの単に縮むだけの変形特性とは全く異なるねじれ変形を発生させることがある。これを柱のねじれ座屈と呼んでいる。図のような境界条件の場合の座屈荷重は

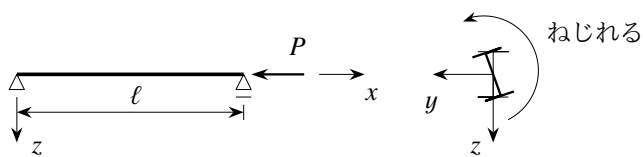


図 7.38 柱のねじれ座屈

$$P_{\varphi} \equiv \frac{1}{r_p^2} \left(GJ + \frac{\pi^2 EI_{\omega}}{\ell^2} \right) \quad (7.96)$$

と求められている。ここに r_p は断面の極 2 次モーメントに関する回転半径であり

$$r_p \equiv \sqrt{\frac{I_p}{A}}, \quad I_p \equiv \int_A \{(y - y_s)^2 + (z - z_s)^2\} dA \quad (7.97a, b)$$

で定義されている。ただし、自己展開型宇宙構造系のように剛性が非常に低いものを除き、通常の鋼薄肉構造断面ではこの P_{φ} はとても大きな値になり、これが系の強度を支配するようなことは稀である。このような座屈が生じる原因は、ねじり変形を許容した場合に断面にそりが発生して断面が平面でなくなり、軸線方向以外の方向への軸力の成分が生じる可能性が発生することにある。ただ、このそり変形は一般には非常に小さいため、上記のように通常の薄肉断面形状の鋼構造でこの座屈が問題になることは無いのである。

7.7.2 横倒れ座屈

もう一つの例は図 7.39 のような分岐座屈である。単純梁に等曲げを作用させた場合には z - x 面内で曲げ変形が生じるが、この集中モーメントがあるレベルに達したときに断面が面外に倒れてしまう現象が起こる。えっ、そんなことあるの？ という読者は、

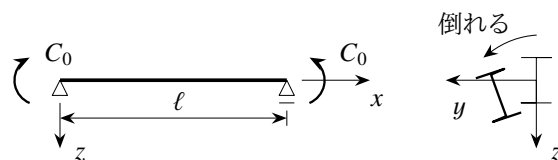


図 7.39 梁の横倒れ座屈

30 cm ものさしの両端を握って曲げて欲しい。そう、曲がるだけで何も起きない。だって帯板状の面が水平になるように握って曲げたんでしょ。そこで、その帯板状の面を立てて、しかもその面内で曲げようとしたらどうなるか、どういう抵抗は手を感じるかを経験して欲しい。あるいは、もしプラスチックのブラインドの羽 1 枚（細長い帯状のケント紙でもいいが、ブラインドの羽のように少しだけ凹状にしておくといい）が手に入った場合には、それを水平面で平らにした状態で端から 10 cm くらいの場所を手で持って欲しい。ちょうど片持ち梁の状態であるが、そおーとしていれば平らなままと保持できていると思う。では、その握っている手の位置をずらして、手から端までの距離を少しずつ長くして行って欲しい。するとだんだん自重による曲げが増大していくわけだが、張り出し部がある程度長くなったところで羽がねじれて横に折り曲げられてしまうはずだ。これがまさにここで対象としている「座屈現象」である。これを梁の横倒れ座屈あるいは横ねじれ座屈と呼ぶ¹¹が、やはりある外力レベルまでの曲げ変形とは大きく異なる、ねじりを伴う変形に突然移行する分岐座屈の代表的な例の一つである。この場合の座屈荷重は

$$(C_0)_{\omega} \equiv \sqrt{\frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2} \left(GJ + \frac{\pi^2 EI_{\omega}}{\ell^2} \right)} \quad (7.98)$$

¹¹ どちらかの呼び名が間違いだということを聞いた記憶があるが、どちらだったか覚えていない。

と求められている。ここに I_y は式 (7.85d) で定義された断面の弱軸 (z 軸) 回りの断面 2 次モーメントである。この横倒れ座屈は、次の節で説明するように、鋼構造の設計に当たっては必ず検証すべき重要な要件の一つになっている。軸力が同時に作用しているような場合の座屈荷重等については別途文献 [172] 等を参照のこと。

7.7.3 曲げ引張・圧縮強度

曲げを受ける部材の引張側は、材料そのものの強度まで耐えられるから、許容応力設計法の考え方では降伏応力を用いて曲げ引張許容応力 $\sigma_a^{(bt)}$ (曲げ引張強度) を

$$\sigma_a^{(bt)} = \frac{\sigma_{cr}^{(bt)}}{\gamma}, \quad \sigma_{cr}^{(bt)} \equiv \sigma_Y \quad (7.99a, b)$$

で与えていい。ここに γ は安全率である。これに対し、曲げを受けた部材の圧縮側の強度は、前節の横倒れ座屈で支配されることがある。つまり、例えば 2 主

桁を複数の対傾構でつないだ場合、その対傾構間隔を座屈長 l とする横倒れ座屈の可能性が生じる。したがって、そうならないように材料そのものの強度とは異なる強度として、曲げ圧縮許容応力 $\sigma_a^{(bc)}$ (曲げ圧縮強度) を規定しなければならないと考えられている。例えば図 7.23 にある I 形断面の場合には、Saint-Venant のねじり定数が比較的小さいことから、式 (7.98) の座屈モーメントから算定できる座屈応力を

$$\frac{\sigma_{cr}^{(bc)}}{\sigma_Y} = \frac{1}{\lambda_b^2} \quad (7.100)$$

のように近似している [168]。ここに σ_Y は降伏応力であり、 λ_b は横倒れ座屈に関する細長比パラメータで

$$\lambda_b \equiv \frac{2K}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \left(\frac{l}{b} \right), \quad K \equiv \sqrt{3 + \frac{A_w}{2A_f}} \quad (7.101a, b)$$

で定義されている。ここに b はフランジ幅であり、 A_w と A_f はそれぞれウェブとフランジの断面積である。この座屈応力と細長比パラメータの関係は、形式的には Euler 荷重のそれと同じである。この理論値に対して、実際の曲げ圧縮許容応力は

$$\sigma_a^{(bc)} = \frac{\sigma_{cr}^{(bc)}}{\gamma}, \quad \frac{\sigma_{cr}^{(bc)}}{\sigma_Y} = \begin{cases} 1.0 & \lambda_b \leq 0.2 \\ 1.0 - 0.412 (\lambda_b - 0.2) & 0.2 < \lambda_b < \sqrt{2} \end{cases} \quad (7.102a, b)$$

のように規定 [176] されている。図 7.40 にその関数を、Euler 曲線と比較して描いた。

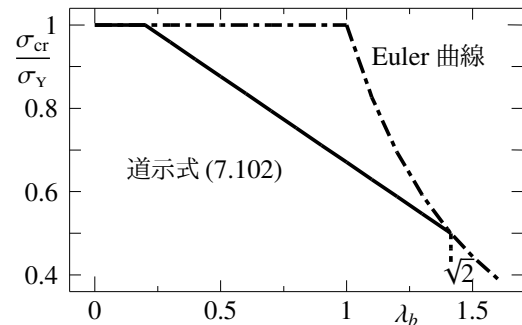


図 7.40 示方書で規定されている曲げ圧縮強度



写真 7.1 東橋 山形県東田川郡朝日村 1932 年竣工



‘serendipity:’「偶然思い付く能力」という風に言われているが、決して「タナボタ」ということではない。解決すべき問題について四六時中一所懸命に考え続けることによって、ひょっとすると頭の中にひらめくかもしれないアイデアに到達することである。なぜだろう、どうしてだろう、ああでもない、こおでもない・・・と悩み続けて初めて serendipity の入り口に立つのである。答に到達できることは稀だろう。イラストレータの南伸坊さんは友人から聞いた脳の活性化に関連して、子供の頃その仕組みがどうなっているのかわからないまま床屋のポールをいつまでも眺めていた [191] 経験等を披露している。また第1著者が学生るとき、酒メーカー支援の classical music についてのあるラジオ番組（司会は芥川也寸志さんと野際陽子さん）で、あるゲストが述べていたと思うのだが、座っているときより立っているときの方が思い付くことは多いらしい。が、いずれにしても、ずうーっと悩み続けることが重要らしい。同じ番組で、二つ並んだサボテンの一つが人に痛められたとき、その横のもう一つのサボテンは翌日もその事件とその人のことを覚えている（異常な電流が流れる）というのがあった。本当だろうか。

第8章

平板の力学の基礎

8.1 構造部材の最小単位

前章までに扱った構造部材は細長い梁等だった。また特に鋼構造を念頭に置いて薄肉部材¹を主な対象とした。しかしその部材を1本1本詳細に眺めると、ほとんどの場合は非常に薄い平板あるいは曲率を持った板の立体的な組み合わせでできている。例えば兵庫県南部地震時に見られた橋脚等の局部座屈等は、梁理論の範囲内で正確に予測するのはほぼ不可能である。この節では、そういった実際の鋼構造の最小単位とも言うべき平板が、どのようにモデル化されているかについて概説しよう。詳細は他の教科書等に譲ることにして、ここでは基本的な考え方と簡単な問題だけを取り扱う。なお円筒橋脚はもちろん平板ではなく曲率を持った薄板から成っているため、この章の平板理論は成立しない。そういった曲率を持つ薄板はシェルと呼ばれ、構造力学の中では最も難しい理論²になる。

ここでは図 8.1 に示したような1枚の薄肉平板を取り扱うが、もちろん、構造部材を構成している平板はこの図のような単純な支持条件や外力条件にはなっていない。例えばI形断面梁の上フランジの張り出し部に着目して、橋軸方向に細長い平板として眺めた場合には、その1辺は自由だが、1辺はウェブと、残りの2辺は部分的に2枚の垂直補剛材と接合された支持状態になっている。しかしこの章では平板の力学理論の基礎を述べるに留めておきたいので、扱う系もこの図のような簡単なものに限定する。この章も文献 [172] からの抜粋である。

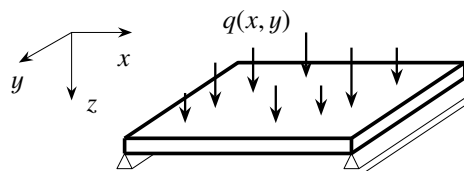


図 8.1 薄い平板のモデル

8.2 支配方程式と境界条件

8.2.1 ひずみの仮定と変位場

第4章では棒の曲げ理論としての初等梁理論を定式化したが、例えば「丸太を縦横に組んだいかだ」のようなものをイメージして、この梁が縦横に多数組み合わせられたものとして平板を捉えてみよう。そうすると、梁で観察された現象とほとんど同じような挙動を平板も示すと予想され、多くの実験から

¹ 船舶も最初は梁として概略設計をすると言ったことがある。艦と舳先で支えた単純梁状態と、中央を単純支持した状態が基本的な支持状態らしい。したがって Atlas が艦を持ち上げた片持ち梁状態の船舶は自重だけで崩壊するらしい。面白いねえ。

² 曲面上の微分幾何は、我々の身の回りの Euclid 幾何ではなく Riemann 幾何で表現されるため、難しい・・・らしい。極座標の応力テンソル成分が、下手をすると圧力の次元を持ってないかもしれない(第 D.4 節参照)ということも想像してみたい。そうすると構成則もどうするか・・・難しいよね。事实现場では、シェル理論そのものは知らずに汎用の有限要素解析プログラムを使っているというのが実態ではないだろうか。今や、修士修了までにシェルを教える(土木系?)大学・大学院はほとんど無いのではないかな。第1著者も航空工学系専攻の授業で「聞いたことがある(呵呵)」だけである。少なくとも、平板の基礎くらいは身に付けて欲しい。

板厚不変の仮定: 板の厚さは変形前後で変わらず,

Kirchhoff-Love の仮定: 梁理論の Bernoulli-Euler の仮定と同様, 板の断面内のせん断変形は無視できる

という二つの基本的な仮定を設けることができることがわかっている。この仮定に基づく板を Kirchhoff 板³と呼ぶ。

図 8.1 に示した座標系のひずみ成分でこの仮定を表現すると

$$\epsilon_{zz} = 0, \quad \epsilon_{zx} = 0, \quad \epsilon_{yz} = 0 \quad (8.1a, b, c)$$

となる。条件式 (8.1a) が第 1 の仮定に, 式 (8.1b) (8.1c) が二番目の仮定に対応している。これを式 (3.6) のひずみの定義に代入すると変位成分で表した仮定が

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0 \quad (8.2a, b, c)$$

となる。したがって, まず式 (8.2a) から

$$u_z(x, y, z) = w(x, y) \quad (8.3)$$

という結論を得る。つまり平板の任意点のたわみは z には依存せず, 例えば板厚中心面上 ($z = 0$) のたわみでその肉厚方向の任意点のたわみを代表させることができることになる。この結論を式 (8.2b) (8.2c) に代入して, z に関して積分すると

$$u_x(x, y, z) = u(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial x}, \quad u_y(x, y, z) = v(x, y) - z \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \quad (8.4a, b)$$

のように, x, y 方向の変位成分も, 板厚中心面上の x, y, z 方向の変位成分 $u(x, y), v(x, y), w(x, y)$ で表現できる。この形は, 式 (4.5) で求められていた棒の変位成分の表現とほとんど同じである。この結果を示したのが図 8.2 である。このように, 3 次元物体でありながら z 方向への拡りが他の 2 方向のそれより極端に小さい平板では, 主に x と y の関数として変位成分を捉え, z については線形項のみを考慮してやればいいのだ。こうして独立変数の数を減らした近似力学が構造力学である。

以上の平板理論の枠組の中で, 変位成分を式 (3.6) のひずみの定義に代入して, 零でない成分を算定すると

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad (8.5a)$$

$$\epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (8.5b)$$

$$\epsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.5c)$$

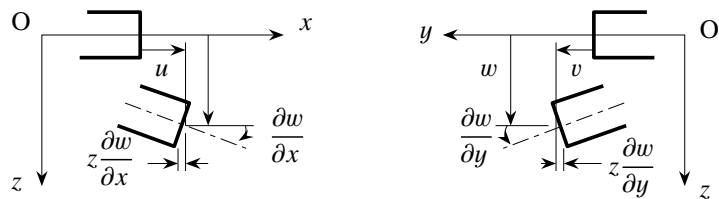


図 8.2 平板の変位に対する仮定

の三つである。式 (8.5a) (8.5b) は曲げを受ける棒のひずみの線形分布式 (4.6) と本質的には同じ表現になっており, 平板の板厚中心面が持つそれぞれの方向に対応する曲率に比例した z 方向へのひずみの線形 (三角形) 分布を示している。式 (8.5c) はこの板厚中心面内のせん断変形で, 棒の場合 ($u = u(x), w = w(x), v \equiv 0$) には存在しなかった量である。こいつが実はとても厄介な量である。

³ せん断変形を考慮した Timoshenko 梁に相当する板を Mindlin-Reissner 板と呼ぶ。

8.2.2 応力と断面力

棒の場合とは異なり 2 次元的に拡った構造系なので、応力ひずみ関係も 1 次元の Hooke の法則のような簡単なものは使えない。図 8.1 には平板表面に直接分布外力が作用しているように描いてあるが、例えば I 形断面梁のウェブのように、実際の構造部材としての平板表面には外力を直接作用させることは稀である。さらにここで対象としているのは非常に薄肉の平板なので、板内部の z 方向の応力成分は他の成分に比べて非常に小さいと考えていい。したがって平板は平面応力状態にあると近似仮定してもいいことになっている。つまり構成関係は式 (3.181) で与えられ、その逆関係は

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{xx} + \nu \epsilon_{yy}), \quad \sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_{yy} + \nu \epsilon_{xx}), \quad \sigma_{xy} = 2G \epsilon_{xy} \quad (8.6a, b, c)$$

となる。これに式 (8.5) を代入して整理すると、応力成分を

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right\}, \quad (8.7a)$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right) - z \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\}, \quad \sigma_{xy} = 2G \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) - z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\} \quad (8.7b, c)$$

のように変位成分で表すことができる。

もちろん平面応力状態では式 (3.182a) のように ϵ_{zz} は零ではないはずだが、平板の最初の板厚不変の仮定式 (8.1a) では ϵ_{zz} を零と置き、事実上、平面ひずみ状態も同時に仮定してしまっている。したがって式 (3.182a) で ϵ_{zz} を零にすると、 $\sigma_{xx} + \sigma_{yy} = 0$ という拘束条件も仮定したことになる。この関係式と式 (3.181) からは、さらに $\epsilon_{xx} + \epsilon_{yy} = 0$ の拘束条件も同時に導入してしまったことになる。これは明らかにおかしい。しかしこれも梁理論の場合と同様、最も重要な応力成分を精度よく求めるために導入した仮定から派生する矛盾であり、ここでも特に注意を払わないことにする。

断面力のうち、棒理論の軸力に対応する平板の面内問題に関する内力は

$$N_x \equiv \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} dz, \quad N_y \equiv \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} dz, \quad N_{xy} \equiv \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} dz \quad (8.8a, b, c)$$

の三つである。ここに t は板厚である。これに応力と変位の関係式 (8.7) を代入すると

$$N_x = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad N_y = \frac{Et}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad N_{xy} = \frac{Et}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (8.9a, b, c)$$

が三つの断面力と変位成分の関係になる。ここでは

$$\int_{-t/2}^{t/2} dz = t, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (8.10a, b)$$

および

$$\int_{-t/2}^{t/2} z dz = 0 \quad (8.11)$$

という関係を用いている。式 (8.11) の左辺は棒の断面 1 次モーメントに対応しており、暗黙のうちに一様な材料でできた板厚中心面上に x - y 面があり、その面上で z が零になるとしているので、式 (8.11) が成立する。

同様に、梁の曲げモーメントやねじりモーメントに対応する断面力は

$$M_x \equiv \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{xx} dz, \quad M_y \equiv \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{yy} dz, \quad M_{xy} \equiv \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{xy} dz \quad (8.12a, b, c)$$

と定義すればいい。式 (8.11) に注意して、式 (8.7) の応力と変位の関係を式 (8.12) に代入すると

$$M_x = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -\frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -\frac{Et^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

がそれぞれのモーメントと変位成分の関係になる。ここで、断面 2 次モーメントに相当する量は単位幅の矩形断面として板の断面を考えれば

$$I^{(p)} \equiv \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz = \frac{t^3}{12} \quad (8.13)$$

なので、梁の曲げ剛性 EI に相当する量としての板の曲げ剛性を

$$D \equiv \frac{E}{1-\nu^2} I^{(p)} = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)} \quad (8.14)$$

で定義し、上のモーメントと変位の間係を

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad M_{xy} = -(1-\nu) D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (8.15a, b, c)$$

と書き表すのが普通である。

ところで M_{xy} の力学的意味はわかり難いのではないだろうか。実はこの断面力はいろいろな所で悪さをするので、図で説明しておこう。定義からこれは、せん断応力 σ_{xy} の中の z に比例した成分が作るモーメントになっている。この分布状況を図 8.3 の左側に示した。これに z を乗じて板厚全体で積分したのが M_{xy} なので、同図の右側に示したような「分布」ねじりモーメントになっていることがわかるはずだが、どうだろう。

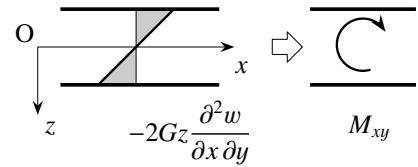


図 8.3 せん断応力が作るモーメント

最後に、応力を断面力で表現しておく。式 (8.9) (8.15) の表現と式 (8.7) の関係式とを見比べることによって

$$\sigma_{xx} = \frac{N_x}{t} + z \frac{M_x}{I^{(p)}}, \quad \sigma_{yy} = \frac{N_y}{t} + z \frac{M_y}{I^{(p)}}, \quad \sigma_{xy} = \frac{N_{xy}}{t} + z \frac{M_{xy}}{I^{(p)}} \quad (8.16a, b, c)$$

と表現できることがわかる。単位幅の板の断面積が t であるから、式 (4.14) の梁の応力・断面力関係と本質的に同じになっている。さらに断面内板厚方向のせん断応力（仮定の式 (8.1b) (8.1c) からは零になる）については、第 4.6.1 節で取り上げたのと同じ考え方を用い、求められた直応力につり合う成分として算定しておく

$$\sigma_{zx} = -\frac{V_x G_z^{(p)}}{I^{(p)}}, \quad \sigma_{yz} = -\frac{V_y G_z^{(p)}}{I^{(p)}}, \quad G_z^{(p)} \equiv \frac{1}{2} \left\{ z^2 - \left(\frac{t}{2} \right)^2 \right\} \quad (8.17a, b, c)$$

となる。ここでは単位幅の長方形断面梁内のせん断応力分布として考えており、 V_x と V_y が梁理論と同様、曲げモーメントの反力として、次の節で定義されるせん断力である。

8.2.3 支配方程式

以上の六つの断面力の定義を踏まえて、平板の微分要素 $dx \times dy$ に発生している内力の定義を示したのが図 8.4 である。一般化するために、この微分要素に作用している x, y, z 方向の分布外力も p_x, p_y, q としておいた。特にモーメントに関しては、正の面上の 2 重矢印で示した向きが座標の正方向を必ずしも指してはいないが、それはそれぞれのモーメントの定義式 (8.12) を、座標の向きとは無関係に梁の曲げモーメントと同じになるように与えたからである。また前節の式 (8.17) 前後で説明したように、曲げに抵抗するであろうせん断力も図には付加してある。

まず図 8.4 の左側の微分要素の面内力のつり合いは

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0 \quad (8.18a, b)$$

となる。さらにこの面内のモーメントのつり合いは $N_{xy} = N_{yx}$ であり、連続体のモーメントのつり合い式 (3.23) と同じで、式 (8.18) でも使っている。この式 (8.18) は第 3 章の連続体の x, y 方向のつり合い式 (3.21) と形式的

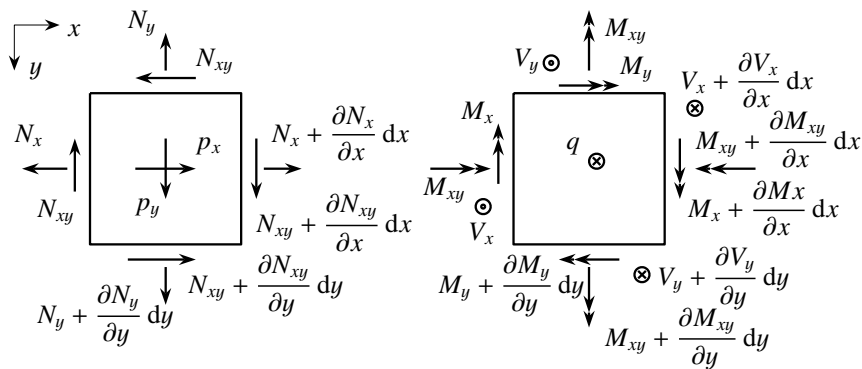


図 8.4 微分平板要素に作用している内力

に一致している。このように、面内問題のつり合い式 (8.18) は第 3 章の連続体のそれと形式的に一致している上に、後述するように境界条件も形式的には連続体の境界条件と同じになるので、第 8.5 節の前までは対象としない。

曲げに関するつり合い式も、図 8.4 の右側に示した微分要素の力とモーメントのつり合いから求めることができる。まず z 方向の力のつり合いから

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + q = 0 \tag{8.19}$$

が求められる。この V_x と V_y は共に梁理論と同様の考えで導入したせん断力であり、変形と一対一に対応した断面力ではない。つまり、板厚面内に発生するせん断応力成分の σ_{xz} と σ_{yx} が仮定と構成則からは零になるため、その合応力としてのせん断力は零になるはずだが、梁理論と全く同じ理由でこの成分も存在し、断面にせん断力という内力が発生していると考えなのだ。この部分に疑問を感じる読者は第 8.2.5 節の数学的誘導を参照して欲しい。次に x 軸回りと y 軸回りのモーメントのつり合いをとると、それぞれから

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - V_x = 0, \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - V_y = 0 \tag{8.20a, b}$$

の 2 式を得る。これがせん断力 V_x, V_y を定義しているとみなしてもいい。式 (8.20) を式 (8.19) に代入してせん断力を消去すると、最終的に平板の曲げに関するつり合い式は

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \tag{8.21}$$

と表現できる。

曲げに関するつり合いの最後の表現式 (8.21) に、モーメントとたわみの関係式 (8.15) を代入すると、板のたわみ $w(x, y)$ で表した曲げに関するつり合い式が⁴

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + q = 0 \tag{8.22}$$

と求められる。あるいは

$$-D \nabla^4 w + q = 0 \tag{8.23}$$

という表現になり、 $q \equiv 0$ のときの解 $w(x, y)$ が重調和関数である⁴ことを示している。ちなみに、もし y 方向に無限に長い平板に y 方向には一様な外力しか作用していない場合には、 w の y 方向の変化が無いため、上式における y に関する微係数を零としていい。その場合のつり合い式は

$$-D \frac{d^4 w}{dx^4} + q = 0 \quad \rightarrow \quad -\frac{E}{1-\nu^2} \frac{t^3}{12} \frac{d^4 w}{dx^4} + q = 0$$

⁴ 重調和関数は、第 3.6.4 節で紹介した Airy の応力関数の斉次解でもあった。どのような関数が重調和関数であるかについては例えば文献 [96] 等を参照のこと。読者が知っているほとんどの関数の組み合わせが重調和関数である。

であるが、もし Poisson 比 ν を無視すれば、最後の式は単位幅の長方形断面の梁の曲げのつり合い式に一致する。「梁を丸太のように縦横に組んで板をモデル化する」と前に記したのは、このような結果に基づいている。ただし、梁理論には M_{xy} という概念が存在しなかったことには注意が必要である。第 4.6.2 節で取り上げた、幅が広い梁の場合に考慮すべきフランジのせん断遅れ・せん断変形に関係しているのが、この断面力である。また円板の曲げの問題の場合には、以上の定式化を極座標で行えばいいが、そんなことしなくても式 (8.23) のままにして極座標の ∇ の表現を使えばいいだけだ。

演習問題 8-1

1. 式 (8.19)~(8.22) を求めよ。

8.2.4 境界条件

(1) 変位の境界条件

簡単のために矩形板のみを対象とする。まず変位を拘束する幾何学的境界条件は、梁理論からの類推から容易にわかるように、たわみとたわみ角を与える条件である。たわみは w そのものを与える条件になる一方で、たわみ角は $x = \text{const.}$ の辺上なのか、 $y = \text{const.}$ の辺上なのかで異なる。これも幾何学的な考察から

$$x = \text{const. の辺上で } \frac{\partial w}{\partial x} = \text{与える}; \quad y = \text{const. の辺上で } \frac{\partial w}{\partial y} = \text{与える}$$

となる。

(2) 力の境界条件

これも梁理論から類推すると、基本的にはせん断力と曲げモーメントを規定する二つの条件で表すことができそうだ。幸い後者は M_x あるいは M_y を規定する条件でいいが、前者については実は M_{xy} が含まれることになって注意が必要になるのだ。板曲げに関する断面力を例えば $x = \text{const.}$ の境界断面で取り出すとせん断力 V_x と曲げモーメント M_x の他に M_{xy} が存在している。この最後の分布ねじりのような断面力 M_{xy} は境界ではどのような成分になっているのだろうか。文献 [172] の解説がわかり易いので、それをここに引用する。

結果的にこの M_{xy} と V_x は、それぞれを独立した境界条件として規定できるような断面力ではなく、お互いに連成して外力に抵抗する内力なのである。これをわかり易く示したのが図 8.5 である。これはある $x = \text{const.}$ の境界辺の肉厚を眺めたものである。まず右上の図のように、せん断力 V_x は幅 dy の部分に $V_x dy$ だけ発生しているだろう。一方ねじりモーメント M_{xy} は、左上図のように微分要素 dy を区切って算定すると、図示したような分布ねじりモーメントである。そしてこの二つのねじりモーメントはそれぞれ、そのすぐ下の図のような偶力すなわち $dy \times M_{xy}$ と $dy \times \left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right)$ といった力の対によるモーメントとしても解釈するこ

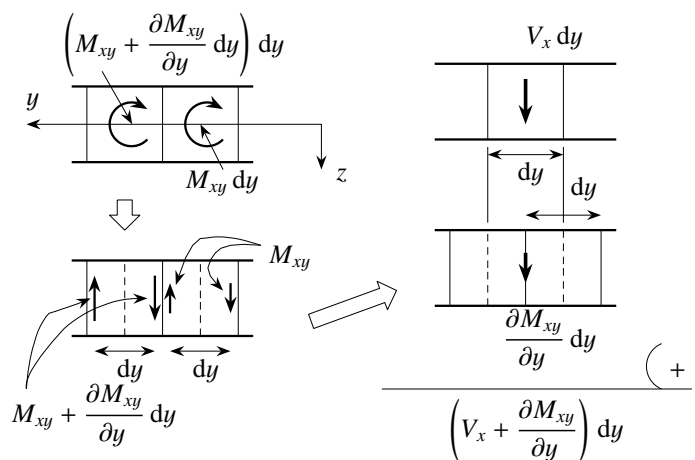


図 8.5 端面のせん断力成分 [172]

とができる。そうすると、隣り合う二つの微分要素の共有点を中心とする2破線間の微分要素 dy にはそれぞれの偶力を作る力成分の差の $\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$ が「せん断力」として生じていると考えればよいことになる。これが右下の図のように、破線間の微分要素 dy に追加される「見かけ上のせん断力」成分とみなすことができる。したがってせん断力に関する境界条件は、図の右側に示したように2種類のせん断力成分の合計で

$$x = \text{const. の边上では } V_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \text{与える}, \quad y = \text{const. の边上では } V_y + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \text{与える}$$

のようになるべきなのである。

モーメントの境界条件は変位のそれと同様、 $x = \text{const.}$ の辺上なのか、 $y = \text{const.}$ の辺なのかで異なることには注意が必要だが、最終的には、式(8.20)を考慮して以上をまとめると、矩形板の境界条件は

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \text{const. 上なら } \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \text{与える}, \quad y = \text{const. 上なら } \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \text{与える} \end{array} \right\},$$

かつ

$$x = \text{const. 上なら } \frac{\partial w}{\partial x} = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad M_x = \text{与える}, \quad (8.24)$$

$$y = \text{const. 上なら } \frac{\partial w}{\partial y} = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad M_y = \text{与える}$$

と表現される。このような、結果を知っている者による誘導に疑問を持った読者は、第8.2.5節の数学的な誘導を参照して欲しい。それを読めば、境界条件に含まれるべき M_{xy} の特殊な取り扱いや、仮定では発生しないせん断力 V_x と V_y の導入に、恣意性が必要ではないことを理解してもらえと思う。

(3) 隅角力

さて、このわかり難いねじりモーメント M_{xy} はもう一つおかしな力に深く関係している。それは、矩形板のように角を持ちその辺の周方向の幾何形状が滑らかでない板の場合は、その角点において不静定反力が発生するということである。上の境界条件と同じように考えると、図8.6に示したように板の角の部分では、角を挟む両面でお互いに逆向きのモーメント M_{xy} が発生している。このモーメントも上の境界条件に対する考察と同じ

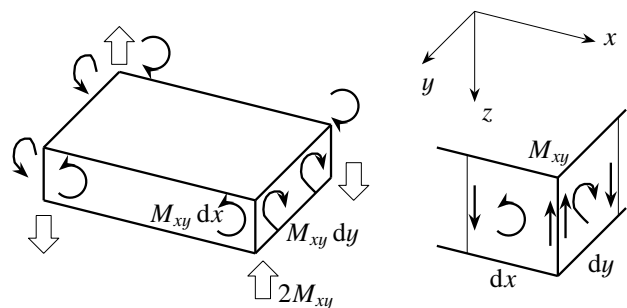


図8.6 ねじりモーメントが作る隅角力

ように偶力として取り扱おうと、図の右側に示したように合計 $2M_{xy}$ の角反力が発生していることになる。つまり、両辺共に単純支持されている場合、その角点には $2M_{xy}$ だけの支点反力が集中して発生し、角が跳ね上がったたり潜ったりするのを防いでいるのだ。これも数学的な誘導については第8.2.5節を参照のこと。

8.2.5 仮想仕事の原理を用いた平板理論の定式化

(1) 変位場とひずみ場

第4.9節と同じように、仮想仕事の原理から平板理論を定式化しておく。まず変位場は式(8.3)(8.4)で与えられる。これをひずみの定義に代入すれば式(8.5)の各成分がひずみ場である。

(2) 仮想仕事式

x - y 面を厚さ t の平板の肉厚中心面にし, $|x| < a, |y| < b$ に広がる長方形平板 ($2a \times 2b$) を対象とすると, 仮想仕事式 (4.104) の体積積分や面積積分は

$$\int_V dV = \int_{-t/2}^{t/2} dz \int_A dA, \quad \int_S dS = \int_{-t/2}^{t/2} dz \int_C ds$$

と置き換えればいい。ただし面積積分の A は平板の肉厚中心面内の面積で, s は肉厚中心面の境界周囲に沿った線座標で, 長方形平板なら s は x か y のどちらかになる。

まずひずみの式 (8.5) の変分量を内力仮想仕事項に代入し, 式 (8.8) (8.12) の断面力の定義を用いると

$$\begin{aligned} \int_V \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} \delta \epsilon_{ij} dV &= \int_A \left\{ N_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + N_{xy} \delta \frac{\partial u}{\partial y} + N_{xy} \delta \frac{\partial v}{\partial x} + N_y \delta \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dA \\ &\quad - \int_A \left\{ M_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + M_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} dA \end{aligned} \quad (8.25)$$

となる。一方, 分布外力仮想仕事項にも変位の式 (8.3) (8.4) の変分量を代入すれば梁理論の場合と同様の表現が求められるが, ここでは式 (4.108c) の分布モーメント m に相当する外力を無視すると, その仕事項と外力の定義をそれぞれ

$$\int_A (p_x \delta u + p_y \delta v + q \delta w) dA, \quad p_x \equiv \int_{-t/2}^{t/2} X_x dz, \quad p_y \equiv \int_{-t/2}^{t/2} X_y dz, \quad q \equiv \int_{-t/2}^{t/2} X_z dz \quad (8.26a, b, c, d)$$

としておけばいい。同様に周囲の境界線上の外力仕事項は

$$\int_{-b}^b \left(F_x^{(x)} \delta u + F_y^{(x)} \delta v + F_z \delta w - C_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \Big|_{|x|=a} + \int_{-a}^a \left(F_x^{(y)} \delta u + F_y^{(y)} \delta v + F_z \delta w - C_y \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \Big|_{|y|=b} \quad (8.27)$$

となる。ここで上付き添え字の $(x), (y)$ はそれぞれ $|x| = a, |y| = b$ 上の外力であることを示し

$$F_x^{(\alpha)} \equiv \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_x dz, \quad F_y^{(\alpha)} \equiv \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_y dz, \quad F_z \equiv \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_z dz, \quad (8.28a, b, c)$$

$$C_x \equiv \int_{-t/2}^{t/2} z \bar{F}_x dz, \quad C_y \equiv \int_{-t/2}^{t/2} z \bar{F}_y dz \quad (8.28d, e)$$

と定義した。ここに $\alpha = x, y$ である。

(3) 支配方程式

まず面内の項, つまり δu と δv の項だけを取り出すと

$$\begin{aligned} \int_A \left\{ N_x \delta \frac{\partial u}{\partial x} + N_{xy} \delta \frac{\partial u}{\partial y} + N_{xy} \delta \frac{\partial v}{\partial x} + N_y \delta \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dA - \int_A (p_x \delta u + p_y \delta v) dA \\ - \int_{-b}^b \left(F_x^{(x)} \delta u + F_y^{(x)} \delta v \right) dy \Big|_{|x|=a} - \int_{-a}^a \left(F_x^{(y)} \delta u + F_y^{(y)} \delta v \right) dx \Big|_{|y|=b} = 0 \end{aligned} \quad (8.29)$$

となる。これに Gauss の発散定理を適用すると

$$\begin{aligned} - \int_A \left\{ \delta u \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x \right) + \delta v \left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y \right) \right\} dA \\ + \int_{-b}^b \left\{ \delta u (v_x N_x - F_x^{(x)}) + \delta v (v_x N_{xy} - F_y^{(x)}) \right\} dy \Big|_{|x|=a} + \int_{-a}^a \left\{ \delta u (v_y N_{xy} - F_x^{(y)}) + \delta v (v_y N_y - F_y^{(y)}) \right\} dx \Big|_{|y|=b} = 0 \end{aligned} \quad (8.30)$$

を得る。ここに ν_x は境界面の外向き法線ベクトルと x の正方向との内積の値で、 $x = a$ で 1, $x = -a$ で -1 の値を持つ。同様に ν_y は $y = b$ で 1, $y = -b$ で -1 の値を持つ。この仮想仕事式の第 1 項から、つり合い式が

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + p_x = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + p_y = 0 \quad (8.31a, b)$$

と求められ、これは式 (8.18) に一致する。境界条件は

$$|x| = a \text{ 上で } \left\{ u = \text{与える あるいは } \nu_x N_x = F_x^{(x)} \right\} \text{ かつ } \left\{ v = \text{与える あるいは } \nu_x N_{xy} = F_{xy}^{(x)} \right\}, \quad (8.32a)$$

$$|y| = b \text{ 上で } \left\{ u = \text{与える あるいは } \nu_y N_{xy} = F_{xy}^{(y)} \right\} \text{ かつ } \left\{ v = \text{与える あるいは } \nu_y N_y = F_y^{(y)} \right\} \quad (8.32b)$$

となる。これも第 3.3.4 節で示した連続体の境界条件と形式的には一致する。

次に曲げの項、つまり δw に関する項をまとめると

$$\begin{aligned} & - \int_A \left\{ M_x \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + M_{xy} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} + M_y \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} dA \\ & - \int_A q \delta w dA - \int_{-b}^b \left(F_z \delta w - C_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \Big|_{|x|=a} + \int_{-a}^a \left(F_z \delta w - C_y \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \Big|_{|y|=b} = 0 \end{aligned} \quad (8.33)$$

となる。第 1 項に Gauss の発散定理を適用すると

$$\begin{aligned} & \int_A \left\{ \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right\} dA - \int_A q \delta w dA \\ & - \int_{-b}^b \nu_x \left(M_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} + M_{xy} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \Big|_{|x|=a} - \int_{-a}^a \nu_y \left(M_{xy} \delta \frac{\partial w}{\partial x} + M_y \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \Big|_{|y|=b} \\ & - \int_{-b}^b \left(F_z \delta w - C_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \Big|_{|x|=a} + \int_{-a}^a \left(F_z \delta w - C_y \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \Big|_{|y|=b} = 0 \end{aligned}$$

を得る。再度第 1 項に Gauss の発散定理を適用すると

$$\begin{aligned} & - \int_A \delta w \left\{ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q \right\} dA \\ & + \int_{-b}^b \nu_x \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \delta w + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \delta w \right) dy \Big|_{|x|=a} + \int_{-a}^a \nu_y \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \delta w + \frac{\partial M_y}{\partial y} \delta w \right) dx \Big|_{|y|=b} \\ & - \int_{-b}^b \nu_x \left(M_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} + M_{xy} \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dy \Big|_{|x|=a} - \int_{-a}^a \nu_y \left(M_{xy} \delta \frac{\partial w}{\partial x} + M_y \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \Big|_{|y|=b} \\ & - \int_{-b}^b \left(F_z \delta w - C_x \delta \frac{\partial w}{\partial x} \right) dy \Big|_{|x|=a} + \int_{-a}^a \left(F_z \delta w - C_y \delta \frac{\partial w}{\partial y} \right) dx \Big|_{|y|=b} = 0 \end{aligned}$$

となるが、さらに第 3 行の下線を付した項に Gauss の発散定理を用い項別に整理すると

$$\begin{aligned} & - \int_A \delta w \left\{ \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q \right\} dA \\ & + \int_{-b}^b \delta w \left\{ \nu_x \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) - F_z \right\} dy \Big|_{|x|=a} - \int_{-b}^b \delta \frac{\partial w}{\partial x} (\nu_x M_x - C_x) dy \Big|_{|x|=a} \\ & + \int_{-a}^a \delta w \left\{ \nu_y \left(2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \right) - F_z \right\} dx \Big|_{|y|=b} - \int_{-a}^a \delta \frac{\partial w}{\partial y} (\nu_y M_y - C_y) dx \Big|_{|y|=b} \\ & - \underbrace{(\nu_x M_{xy} \delta w) \Big|_{-b}^b}_{|x|=a} - \underbrace{(\nu_y M_{xy} \delta w) \Big|_{-a}^a}_{|y|=b} = 0 \end{aligned} \quad (8.34)$$

を得る。最後の下線を引いた項は、矩形板ではなく円板のように周囲が滑らかな曲線を描く場合には無くなる項なので、あとまわしにしよう。

この仮想仕事式が任意の仮想変位に対して成立しなければならない条件から、まずつり合い式が

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q = 0 \quad (8.35)$$

と求められ、これは式(8.21)に一致する。境界条件も、 $|x| = a$ では

$$\left\{ w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad v_x \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \right) = F_z \right\} \quad \text{かつ} \quad \left\{ \frac{\partial w}{\partial x} = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad v_x M_x = C_x \right\} \quad (8.36)$$

である。同様に $|y| = b$ では

$$\left\{ w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad v_y \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \right) = F_z \right\} \quad \text{かつ} \quad \left\{ \frac{\partial w}{\partial y} = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad v_y M_y = C_y \right\} \quad (8.37)$$

となる。これも式(8.24)に一致する。

最後に下線を引いた項だが、これは矩形板の各角における値になっている。例えば $x = a, y = b$ の角では $-2M_{xy} \delta w$ になる。すなわち、もしこの角でたわみ w が規定されている場合には、そこには $2M_{xy}$ の大きさの支点反力が生じることを示している。これは第8.2.4(3)節で説明した隅角力である。このように仮想仕事の原理という数学を用いれば、力学的あるいは幾何学的考察をしなくても支配方程式が正確にかつ自動的に定式化されることがわかる。

8.3 境界値問題の解法の例

8.3.1 変位で表した曲げの境界値問題

最も基本的な例として、図8.7の4辺単純支持された矩形板を解く。任意の分布外力 $q(x, y)$ が作用した場合の $w(x, y)$ で表されたつり合い式は式(8.22)で与えられている。境界条件は式(8.24)から

$$x = 0, a \text{ では } w = 0 \quad \text{かつ} \quad M_x = 0,$$

$$y = 0, b \text{ では } w = 0 \quad \text{かつ} \quad M_y = 0$$

である。力の境界条件はどちらもモーメントが作用していない条件で、モーメントと変位の関係式(8.15)を代入すると、例えば $x = \text{const.}$ の辺では

$$-D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

となる。しかし、この $x = \text{const.}$ の边上では $w = 0$ を y 方向にも保持しているから $\frac{\partial w}{\partial y}$ は零である。したがって上式の第2項は実質的に考える必要が無い。このように考えると、たわみ w で表した境界条件は

$$x = 0, a \text{ では } w = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad y = 0, b \text{ では } w = 0 \quad \text{かつ} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (a)$$

と考えていい。

8.3.2 Navier の解法

式(a)の境界条件の下で式(8.22)のつり合い式を解けばいいが、ここでは境界条件を満足する関数を用いて、たわみ $w(x, y)$ を

$$w(x, y) = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} \quad (b)$$

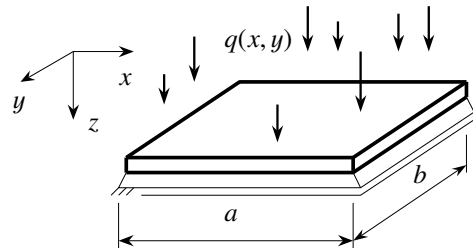


図8.7 4辺を単純支持された矩形板

のように級数で仮定する。sine 関数を選んだのは、境界条件式 (a) をすべて満足するからである。あるいは、ほとんどすべての滑らかな関数は (工学的には) Fourier 級数で表示できることを根拠にして、2重 Fourier 級数で展開したと考えてもいい。これを Navier の解法と呼ぶ。

この仮定した解 (b) を式 (8.22) のつり合い式に代入すると

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D a_{jk} \left\{ \left(\frac{j\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{jk\pi^2}{ab} \right)^2 + \left(\frac{k\pi}{b} \right)^4 \right\} \sin \frac{j\pi x}{a} \sin \frac{k\pi y}{b} = q(x, y)$$

となる。この両辺に

$$\int_0^a dx \int_0^b dy \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \times$$

という演算 (内積あるいは仮想仕事の算定) を行おう。この sine 関数は

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{j\pi x}{a} dx = \begin{cases} a/2 & \text{もし } m = j \text{ の場合} \\ 0 & \text{もし } m \neq j \text{ の場合} \end{cases}$$

という性質 (直交性) を持っている。したがって、上の積分演算を実行すると左辺の級数は実は $m = j, n = k$ の場合の 1 項のみしか残らず、他はすべて零になる。よって個々の a_{mn} に対して

$$D \left\{ \left(\frac{m\pi}{a} \right)^4 + 2 \left(\frac{mn\pi^2}{ab} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^4 \right\} a_{mn} = q_{mn} \quad (c)$$

が成立しなければならない。ここに

$$q_{mn} \equiv \frac{1}{\Delta} \int_0^a dx \int_0^b dy q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad \Delta \equiv \int_0^a dx \int_0^b dy \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} = \frac{a}{2} \times \frac{b}{2} \quad (d)$$

と置いた。式 (c) より

$$a_{mn} = \frac{q_{mn}}{D\pi^4 \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2}$$

と係数を得るから、式 (b) に代入し直せば解を得る。結果的に q_{mn} は関数 $q(x, y)$ の 2 重 sine Fourier 係数に相当する。Fourier 解析や関数の直交性については振動問題の第 9.3, 9.4 節を参照のこと。

分布外力が一様で $q = q_0 = \text{const.}$ の場合には式 (d) より

$$q_{mn} = \frac{16 q_0}{mn\pi^2}, \quad \text{ただし } m \text{ も } n \text{ も 奇数のみ}$$

となる。したがって解は

$$w(x, y) = \sum_{m=\text{奇数}} \sum_{n=\text{奇数}} \frac{16 q_0}{D\pi^6 mn \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}$$

となる。図 8.8 には $0 < y < b/2$ にのみ

$$q(x, y) = q_0, \quad (0 < x < a/2), \quad q(x, y) = -q_0/2, \quad (a/2 < x < a)$$

のような偏在する分布外力を作用させたときの解を、特徴が出るように誇張して示しておいた。図では m, n 共に級数の最初の 10 項までで打ち切った結果を用いてある。

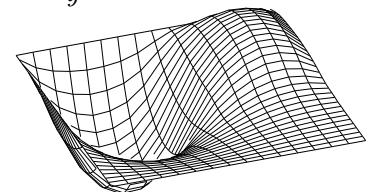
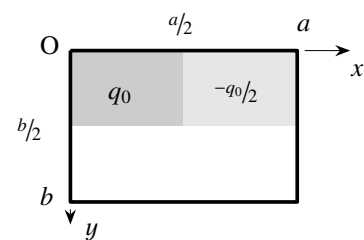


図 8.8 非一様な外力を受ける 4 辺を単純支持された矩形板

演習問題 8-2

2. 図 8.8 の問題を解いてみよ。

8.4 剛性方程式

8.4.1 仮想仕事式

現場の問題を汎用的にしかし数値的に解くために、第 5 章の有限要素法を平板に適用する。つり合い式 (8.21) から Galerkin 形式を求めて Gauss の発散定理を適用し、式 (8.15) の曲げモーメントと変位の関係式を代入して書き直すと、物理的に意味のある表現としての仮想仕事式を

$$\int_x \int_y D \left[\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right\} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] dx dy - \int_x \int_y q \delta w dx dy - (\text{境界項}) = 0 \tag{8.38}$$

のように求めることができる。別の表現も可能だと思うのだが、なぜかこの形を使う。これに変位関数を適切に選んで代入すれば、平板の要素剛性方程式を求めることができる。

8.4.2 変位関数

物体が 2 次元の拡がりを持つ場合、変位関数は一般的には

$$w(x, y) = \sum_{0 \leq i, j \leq N} \alpha_{ij} x^i y^j$$

の形で与えられるが、物理的に適切な変位関数であるためには

1. 式 (8.38) の表現にある 2 階の微係数が存在し
2. 境界条件も併せて考慮すると、要素の周囲に沿って 1 階の微係数が連続つまりたわんだ板の表面が滑らかで
3. 剛体変位と回転を表現できる

という条件を満足しなければならない。実はこの二番目の条件を満足する関数を選ぶのは困難で、しかも苦労の割には精度がよくないことがわかっている。例えば長方形要素を用いた場合に、そのたわみの微係数が 4 隅の節点で連続するような関数を選ぶことができたとしても、その要素の辺に沿っても微係数が連続するとは限らないのである。これは、要素に「辺」を持たない棒要素では考える必要の無かった点である。この条件を満足しない要素は物理的にはおかしく、また厳密解への収束にも問題が残るわけだが、逆に、そういった板要素の方がいい結果を与えることがあることもわかっている。このような要素を非適合要素と呼んでいる。代表的な適合・非適合要素（古典?）を一つずつ紹介しておこう。

表 8.1 適合長方形要素の例

$$\begin{matrix} \frac{1}{x} & \frac{y}{y} \\ \frac{x^2}{x^2} & \frac{xy}{xy} & \frac{y^2}{y^2} \\ \frac{x^3}{x^3} & \frac{x^2y}{x^2y} & \frac{xy^2}{xy^2} & \frac{y^3}{y^3} \\ x^4 & \frac{x^3y}{x^3y} & \frac{x^2y^2}{x^2y^2} & \frac{xy^3}{xy^3} & y^4 \\ x^5 & x^4y & \frac{x^3y^2}{x^3y^2} & \frac{x^2y^3}{x^2y^3} & xy^4 & y^5 \\ x^6 & x^5y & x^4y^2 & \frac{x^3y^3}{x^3y^3} & x^2y^4 & xy^5 & y^6 \end{matrix}$$

表 8.2 非適合長方形要素の例

$$\begin{matrix} \frac{1}{x} & \frac{y}{y} \\ \frac{x}{x} & \frac{y}{y} \\ \frac{x^2}{x^2} & \frac{xy}{xy} & \frac{y^2}{y^2} \\ \frac{x^3}{x^3} & \frac{x^2y}{x^2y} & \frac{xy^2}{xy^2} & \frac{y^3}{y^3} \\ x^4 & \frac{x^3y}{x^3y} & x^2y^2 & \frac{xy^3}{xy^3} & y^4 \end{matrix}$$

1. Hermite 補間式を用いた長方形適合要素: 4 隅の節点で $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$ の四つの自由度を選ぶと、この要素の総自由度が 16 となる。表 8.1 の下線で示した項を用いる。
2. Adini-Clough-Melosh の長方形非適合要素: 4 隅の節点で、 $w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}$ の合計 12 自由度を選ぶ。表 8.2 の下線の項を用いる。

それぞれの特徴やその他の要素についての詳細については有限要素法に関する多くの文献を参照のこと。

8.5 安定問題

8.5.1 比較的変位の小さい範囲の非線形理論

(1) 曲げに関するせん断力のつり合い

柱と同様、大きな圧縮力の作用下で平板やシェルが局部座屈を起こすことは、下敷きやジュースの缶・ペットボトルを長手方向に圧縮してみればすぐにわかるが、実際に兵庫県南部地震時の橋脚等でも多くの局部座屈が発生してしまった。局部座屈は鋼構造部材の設計に当たって考慮すべき重要な点である。このような板の安定問題を解析するために、第 6.4 節で定式化した梁-柱理論と同じように、比較的変位が小さい状態で平板の安定理論を求めてみよう。これは通常 **von Kármán** の板理論と呼ばれている。

図 8.9 のように、少したわんだ状態にある微分要素で断面力のつり合いを考える。図は見易くなるように、 x 方向の力と y 方向の力を別々にしてある。梁-柱理論の誘導でもわかるように、微小変位理論と異なるのはせん断力のつり合いだけなので曲げモーメントは図示していない。せん断力のつり合いをとってみよう。まず左側の図の z 方向の力の総和をとり、分布外力 p_x が無い場合の式 (8.18a) を用いると

$$\begin{aligned} & \left(V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} dx \right) dy - V_x dy + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy - N_x \frac{\partial w}{\partial x} dy \\ & + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dy \right) dx - N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} dx \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \end{aligned}$$

となる。同様に、右側の図の力の総和に p_y 無しの式 (8.18b) を考慮すると

$$\frac{\partial V_y}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

を得る。以上の二つの成分の総和が分布外力 $q(x, y)$ とつり合うことになり、最終的には

$$\left(\frac{\partial V_x}{\partial x} + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right) + \left(\frac{\partial V_y}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + q(x, y) = 0 \tag{8.39}$$

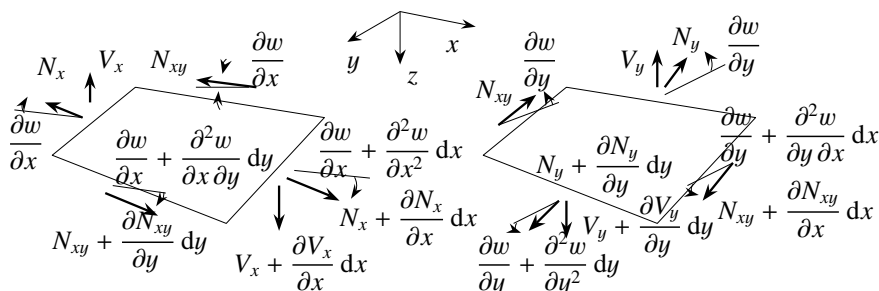


図 8.9 たわんだ状態の微分平板要素のつり合い

がせん断力のつり合い式になる。モーメントのつり合い式が微小変位の範囲内の式 (8.20) で近似できるのは、梁-柱理論の場合と同じである。

式 (8.20) のモーメントのつり合い式を式 (8.39) に代入してせん断力を消去すると、von Kármán の平板のつり合い式は

$$\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) \right) + \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (8.40)$$

と表すことができる。最初の括弧内が式 (8.21) で示される微小変位理論の枠組内の成分で、次の括弧内が少したわんだ影響、つまり面内力による付加的なモーメントの影響を表している。さらに式 (8.15) の構成関係をこれに代入すると、たわみ $w(x, y)$ で表したつり合い式が

$$-D \nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0 \quad (8.41)$$

と表される。

せん断力についての境界条件にも同様の付加項が加わる。 $x = \text{const.}$ の面を例にとると、そのせん断外力に対して境界でつり合う断面力は、図 8.9 左側の左辺に発生している $V_x + N_x \frac{\partial w}{\partial x}$ の成分と右図の左辺に発生している $N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}$ との和がその候補である。一方、 $y = \text{const.}$ の面の場合は $V_y + N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x}$ であるだろうことも、同じ図の奥の辺に発生している内力からわかる。したがって、それぞれの境界条件は

$$\begin{aligned} x = \text{const. 上で} \quad & \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} = \text{与える}, \\ y = \text{const. 上で} \quad & \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} = \text{与える} \end{aligned} \quad (8.42)$$

となる。式 (8.41) と式 (8.18) の面内問題のつり合い式とを連成させ、与えられた境界条件に対して解けば平板の座屈解析ができることになる。

(2) 面内問題を Airy の応力関数で表現した場合

さて梁-柱理論の場合においてそうであったように、この平板の座屈理論でも、面内場のつり合い式は形式的には線形理論の式 (8.18) で表されるが、そのひずみと変位の関係には、ある程度非線形項が含まれる。すなわち梁-柱理論の式 (6.31b) の右辺の表現と同様、ひずみ成分は変位成分の微係数との間が

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2, \quad 2\epsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (8.43a, b, c)$$

という近似非線形関係で与えられることになる。つまり u と v の微係数の非線形項は線形項に比較して小さいとして無視してもいいのだ。一方、その面内のつり合い式 (8.18) は形式的に平面問題のつり合い式と一致しているから、例えば第 3.6.4 節で紹介した Airy の応力関数を用いて解くことができる。つまり式 (3.195) と同じように、面内の応力成分がある応力関数 $F(x, y)$ によって

$$\sigma_{xx} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (8.44a, b)$$

で与えられれば、式 (8.8) に式 (8.44) を代入して得られる

$$N_x = t \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = t \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -t \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (8.45)$$

が、式 (8.18) のつり合い式を自動的に満足するのは明らかである。

ここで w は曲げの問題から派生する乱れのようなものと考えて、式 (8.43) のひずみ変位関係は面内の変位成分 u, v と面内ひずみの関係であると考えておこう。すると、微小変位理論の範囲内の平面問題のための適合条件式 (3.17) がここでも成立すると考えていいから、その左辺にこの式 (8.43) を代入して整理すると

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{yy}}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \epsilon_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (8.46)$$

が、この平板の面内問題に対する新しい適合条件になる。これに式 (8.6) の応力ひずみ関係の逆関係式 (3.181) を代入し、それに式 (8.44) の応力関数で表した応力成分を代入すると、応力関数 $F(x, y)$ は

$$\nabla^4 F(x, y) = E \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \quad (8.47)$$

を満足しなければならない。右辺が零の場合が微小変位理論の式 (3.17) で、その場合の応力関数は重調和関数である。

曲げについてのつり合い式にも応力関数を導入するために、式 (8.45) を式 (8.41) に代入すると、最終的な曲げに関するつり合い式がたわみ $w(x, y)$ と応力関数 $F(x, y)$ で

$$-D \nabla^4 w(x, y) + t \left\{ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right\} + q = 0 \quad (8.48)$$

と表される。 $w(x, y)$ および $F(x, y)$ を未知関数にして、この曲げのつり合い式 (8.48) と面内問題の適合条件式 (8.47) を連成させて、与えられた境界条件を満たすように解くことができれば、任意の面内力に対する座屈問題が解ける。具体的な解等については文献を参照して欲しい。近似的に解いた例を第 8.5.4 節に引用した。

8.5.2 一様な面内場の場合

もし面内問題について理想的に支持された条件の元で、周辺が一様な面内圧縮外力で載荷された板の座屈のみを対象とするなら、Airy の応力関数を用いるまでもなく、一様場の

$$N_x = -p_{x0}, \quad N_y = -p_{y0}, \quad N_{xy} = -p_{xy0} \quad (8.49a, b, c)$$

が面内問題の解と考えていい。ここに p_{x0}, p_{y0} はそれぞれの方向の面内圧縮外力成分である。 p_{xy0} の負の符号は他の二つの圧縮外力に合わせたただけで特に意味は無いが、曲げを受けてせん断状態にあるプレートガードのウェブの状態をモデル化したものに相当する。この式を式 (8.40) に代入すると、一様に圧縮された板の比較的大きな変位が生じた状態の板曲げのつり合い式が

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q(x, y) - p_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2p_{xy0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - p_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (8.50)$$

となる。もし y 方向に無限に長い板で y 方向には一様な外力しか作用せず、端外力も p_{x0} だけなら、上式は

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} - p_{x0} \frac{d^2 w}{dx^2} + q(x) = 0$$

となる。これは式 (6.29) の梁-柱のつり合い式と本質的に同じであり、その程度の非線形性を考慮した理論になっていることが確かめられた。元に戻って、式 (8.50) に式 (8.15) のモーメントとたわみの関係を代入すると、結局たわみで表したつり合い式は

$$-D \nabla^4 w - p_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2p_{xy0} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - p_{y0} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q = 0 \quad (8.51)$$

と書くことができる。

せん断力に関する境界条件は、式(8.42)を用いて、式(8.49)の外力条件の下では

$$\begin{aligned}
 w &= \text{与える} \quad \text{あるいは} & (8.52) \\
 x = \text{const. 上で} \quad \frac{\partial M_x}{\partial x} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - p_{x0} \frac{\partial w}{\partial x} - p_{xy0} \frac{\partial w}{\partial y} &= \text{与える}, \\
 y = \text{const. 上で} \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + 2 \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - p_{y0} \frac{\partial w}{\partial y} - p_{xy0} \frac{\partial w}{\partial x} &= \text{与える}
 \end{aligned}$$

となる。モーメントに関する境界条件は式(8.24)と同じままである。

8.5.3 1方向に圧縮された単純支持板の座屈

最も基本的な例として、図8.10のように4辺単純支持された矩形板を、 x 方向にのみ一様に圧縮したときの座屈問題を解いておこう。式(8.51)より、この問題の場合のたわみ $w(x, y)$ で表したつり合い式は

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - p_{x0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (a)$$

となり、境界条件は前述のように

$$x = 0, a \quad \text{では} \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \quad y = 0, b \quad \text{では} \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (b)$$

でいい。この場合も、Navierの解と同じ様に境界条件を満足する関数で解を表現してみよう。ここではある一組の三角関数を用いて

$$w = a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (c)$$

と置いてみる。この関数は明らかに境界条件式(b)を満足している。式(c)を式(a)に代入して整理すると

$$\left[D \pi^4 \left\{ \left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right\}^2 - p_{x0} \pi^2 \left(\frac{m}{a} \right)^2 \right] a_{mn} = 0$$

となる。この式が非零の a_{mn} を持って座屈して曲がるためには、この係数が零であればいいから、その条件からそれぞれの座屈モード m, n に対する座屈荷重が

$$(p_{x0})_{\text{cr}}^{(m,n)} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(m \frac{b}{a} + \frac{n^2}{m} \frac{a}{b} \right)^2 \quad (8.53)$$

と求められる。

式(8.53)は、 y 方向についての第 n 次座屈モードで、 x 方向については第 m 次座屈モードを持つ座屈荷重を与えている。 n に関しては $n = 1$ のときがこの式の右辺を最小にするので、荷重を零から単調に増加させたときの最初の座屈荷重は $n = 1$ のときの値になる。この分布圧縮座屈荷重を板厚で除して応力の次元にすると、座屈応力は

$$\sigma_{\text{cr}}^{(m)} \equiv \frac{(p_{x0})_{\text{cr}}^{(m,1)}}{t} = \left(m \frac{b}{a} + \frac{1}{m} \frac{a}{b} \right)^2 \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{(b/t)^2} \quad (8.54)$$

と表される。ここで、板の座屈係数 k_p を

$$k_p \equiv \left(m \frac{b}{a} + \frac{1}{m} \frac{a}{b} \right)^2 \quad (8.55)$$

と定義すると、式(8.54)の座屈応力は

$$\sigma_{\text{cr}}^{(m)} = k_p \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{(b/t)^2} \quad (8.56)$$

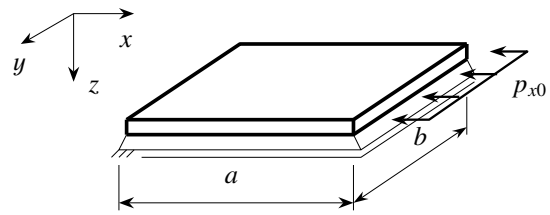


図8.10 4辺を単純支持された矩形板の圧縮

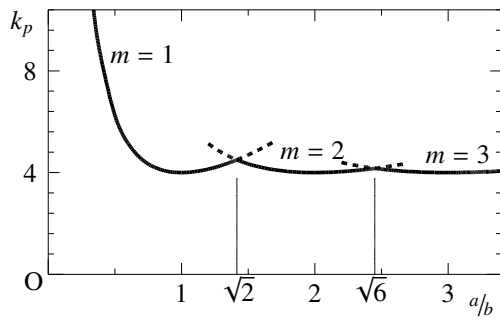


図 8.11 縦横比と座屈係数

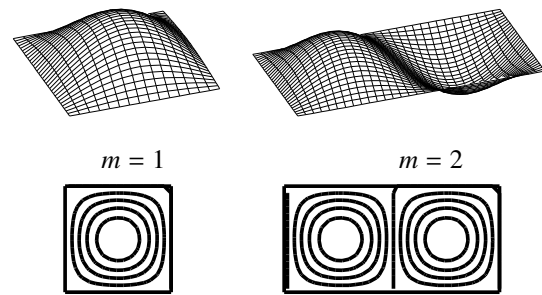


図 8.12 二つの座屈モード

と書くことができる。したがって、板の座屈応力は (b/l) の 2 乗に反比例することがわかる。この (b/l) は幅厚比と呼ばれる寸法比パラメータである。式 (6.39) の梁-柱の座屈荷重との表現上の比較から明らかなように、幅厚比は梁-柱の細長比に対応する重要なパラメータであることがわかる。つまり梁-柱の Euler 荷重や Euler 曲線と、対応する板の物理量の特性は同じになる。基本的にこの式を根拠にした種々の境界条件下の座屈応力から、フランジ板等の圧縮許容応力や最小板厚等が規定されている。

一方、座屈係数の式 (8.55) は板の縦横比あるいは辺長比 (a/b) の関数になっている。これを示したのが図 8.11 である。各縦横比毎に最小の座屈荷重 (係数) を与えるモード m が違っている。例えば $a/b = 1$ のときの最小の座屈係数は $m = 1$ のモードで求められ、 $k_p = 4$ となる。一方、 $a/b = 2$ のときの最小の座屈係数は $m = 2$ のモードで求められ、その座屈係数も $a/b = 1$ のときと同じ $k_p = 4$ となる。梁の座屈モードと座屈荷重の関係と比較すると、異なるモードの座屈係数が同じになるのは妙に感じられるが、一体どういうことだろう。この二つの例の座屈モードを図 8.12 に示しておいた。つまり、二つの正方形が横に並んだ長方形板の最初の座屈は、それぞれの正方形がそれぞれ独立して、逆の曲率を持って座屈するのと同じなのだ。したがって、正方形の座屈荷重とそれを横に 2 枚並べた長方形の座屈荷重とが一致するのである。当然、 $a/b = 3$ のときには $m = 3$ で、やはり同じ最小の座屈係数 $k_p = 4$ になる。ここでは最も簡単な境界条件の解を示したが、一般的な場合も式 (8.56) の形で座屈荷重を表すのが普通である。梁-柱の場合と同様、座屈係数 k_p が面内外力条件・曲げに関する境界条件・縦横比の関数として公式集等に与えられている。

演習問題 8-3

3. 式 (8.54) を求めよ。

8.5.4 座屈後の挙動

さて板の座屈の場合には、座屈後の変位が梁-柱ほどは大きくならないことがわかっている。したがって、座屈後の挙動も von Kármán の理論の枠組の中で解を得ることがある程度はできる。ここでは、曲げのつり合い式 (8.48) と面内問題の適合条件式 (8.47) を関数列と Galerkin 法を用いて近似的に解いた例として、プレートガーダのウェブのように面内で曲げを受ける弾性平板の座屈の解析例 [167] を図 8.13 に示した。集中モーメントのレベルが点 B に至るまでは平板は平面のままを維持するが、この点 B が最初の座屈点であり、安定な経路は板

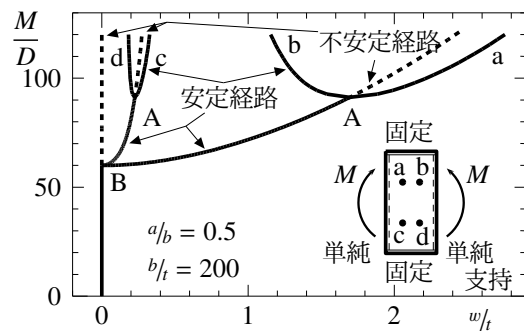


図 8.13 曲げを受ける 2 辺単純支持 2 辺固定の板の後座屈挙動

が面外にたわんだ状態つまり実線の方になる。単純な曲げのみを受けているので、板の上方の 2 点 a, b のたわみと下方の 2 点 c, d のたわみとは異なる挙動を示しているが、それぞれの組は同じ値を持っている。そのあと、たわみが板厚の 2 倍程度に（まだまだ小さい変位状態にある）達したときに、点 A の集中モーメントのレベルで 2 回目の分岐座屈が発生する。点 B から点 A までは、その载荷条件と同様左右対称の変形モードを板は示しながら面外変形をしているが、点 A 以降は左右の対称性も無くなりさらに面外変位が増大していく。なおこの 2 回目の座屈外力レベルが、平板のままの 2 次座屈荷重レベルよりも小さいことも興味深い。

8.5.5 膜を考えてみる

弦と梁の間の関係と同じように、膜は面内張力を受ける平板の曲げ剛性を零にした極限の理論と考えてよさそう。つまり式 (8.51) で曲げ剛性 D を零とし、外力を $-p_{x0} = -p_{y0} = t\sigma_0, p_{xy0} = 0$ と置いた

$$t\sigma_0 \nabla^2 w + q = 0 \quad (8.57)$$

がそのつり合い式になる。ここに σ_0 は膜を等方的に引張っている応力である。膜の周囲が固定されていれば、その境界条件は

$$w = 0$$

である。もしこれが運動していれば、Newton の法則から

$$t\sigma_0 \nabla^2 w + q = m \ddot{w}$$

が運動方程式になる。ここに m は膜の単位表面積当たりの質量であり、上に付したドットは時間微分である。さらに分布外力が零であれば、上式は

$$\nabla^2 w = \frac{m}{t\sigma_0} \ddot{w} \quad (8.58)$$

と変形でき、式 (3.155) と同じ波動方程式になる。つまり膜を伝わる波の速度 c が

$$c \equiv \sqrt{\frac{t\sigma_0}{m}} = \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho}}$$

であることを示している。ここに ρ は膜の密度である。式 (8.58) は弦の運動方程式 (6.94) を 2 次元に拡張したものである。

シェル要素で 3 次元解析ができるか? 例えば上フランジに直接輪荷重を載せたとき（あまり現実味は無いが）の局所的な強度を確かめたいものとする。ここでは輪荷重は、ある程度小さい面に適切に分布させた表面力だとして。この上フランジをシェル要素でモデル化した上で数値解析をし、車輪直下で得られた応力を用いてその箇所の上フランジの表面付近の抵抗挙動を把握できるだろうか。

板厚方向の座標を z としておこう。近頃の汎用プログラムではシェル要素でも σ_{zz} を求めてくれるのだろうか。シェルは板と同様、板表面に直接は荷重は載らないし、板厚方向の応力は零（平面応力）を仮定して構築された理論である。「おや？ 梁に分布外力が載るように、板やシェルにも分布荷重は載るのでは？」という人は正しい。しかし、それは板厚中心面上に作用させることになっている。薄いから大丈夫なのか。しかも、それでもなお平面応力状態を仮定してある。ここが近似力学としての構造力学の面白く不思議なところだ。汎用プログラムが例えば相当応力を出力してくれたとき、そこに σ_{zz} が含まれているかどうかを、皆さんはいつも確かめているのだろうか。

では上フランジの問題に戻ろう。実際には直接上フランジの上面に輪荷重が載っているので、特にウェブ直上ではそれなりに大きな σ_{zz} が発生しているはずである。例えば、梁の上面に直接荷重が載った場合の図 3.31

の σ_{22} を見れば明らかである。この応力は、構造部材の有限要素解析ではどこに行ってしまったのだろう。板曲げによる応力成分 σ_{xx} や σ_{yy} よりも無視できるくらい小さいのであれば問題は無いが、果たして目の前の問題はそういう状況にあるのだろうか。それはシェル要素を用いた有限要素解析をいくら実行しても確認できないのではないだろうか。有限要素解析をしてその解を信じる「前に」、何らかの方法を用いて（頭をちょっと使って）確かめなければならない。さあどうしよう。

‘Biscuit.’ アメリカには無い。呵呵。第1著者が留学していたとき、日本から新しい学生が来ると pancake 屋の夕食に誘う、否、拉致する。日曜 brunch には行列ができる店だ。食べてもらうのは apple pancake である。直径 15 cm くらいで深さ 5 cm くらいのケーキ生地で作った器の中に真っ黒な焼きリンゴのスライスがたっぷり埋まっている。アメリカ人なら男性でもペロリと食べるが、我々は半分食べるのも難しい。しまいにはウェイトレスが来て ‘まだ格闘しますか？ それとも doggie bag に入れますか？’ ということになる。アメリカのデザート等はどうしてあんなに甘くてでかいんだろう。

‘What time do you have?’ あの頃のアメリカ人は腕時計をしない人が多かったのだろうか。道でときどきこんな風に聞かれた。正しい米語だよ。

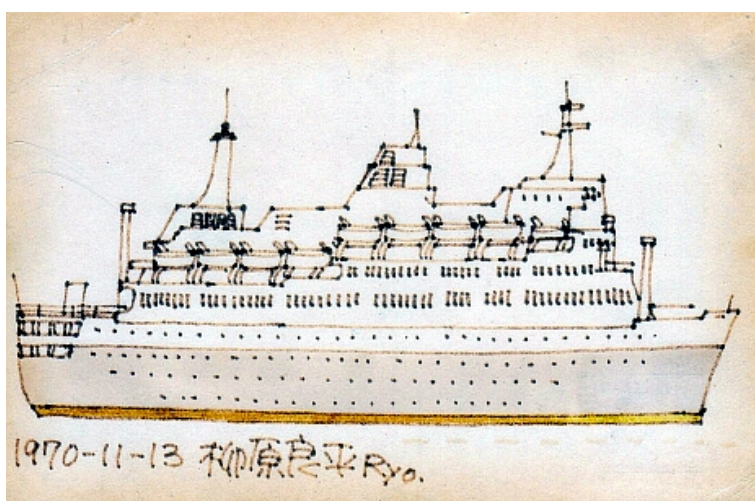


写真 8.1 船舶⁵や航空機・車両も鋼橋と同じ薄肉構造



‘image change?’ ‘minor change,’ ‘parametric study,’ ‘presentation’ and ‘appointment:’ 「イメチェン」は元々日本語か。他ももうすぐ日本語になってしまうのだろうが、「マイチェン」にしなければならない理由があるのか。「パラスタ」「プレゼン」「アポイント」等は、大学人や研究者が使うのは下品だと思う。後2者については、大学生の大半が正しいスペルを知らないのではないかと疑っている。いつから（4文字）略称がこれほど必要・重要視されるようになったのだろうか。第1著者は嫌いである。

⁵ 「船の本」の往復葉書による読者サービスで、希望の船を著者の柳原良平氏が描いて返信してくださった第1著者の宝だ。なぜか本の中の絵が気に入って、「無煙突船最大のロッテルダム号（オランダ客船）」をお願いした。長年部屋に飾っていたため色が落ちてしまっている。ある時期某社宣伝部には他に山口瞳氏や開高健氏が所属していた。

第 II 部

ほぼ線形の動力学



Wabash Avenue Bridge, Illinois 州



Winnipeg にある歩道橋 Esplanade Riel 橋⁶

⁶ 斜張橋である必要は多分無いと思われる。すぐ横に道路用桁橋有り。しかも塔基部のレストランは2008年には営業していなかった。

第9章

振動論の基礎

9.1 1自由度系の振動

9.1.1 非減衰自由振動

(1) 運動方程式

この章は東京大学の伊藤学先生の1970年頃の講義ノートを元にした。当時の教科書は文献[135]だったが、多分元になったのは文献[119]の方だと思われる。まず1自由度系の振動問題を用いて、振動論において最も重要な固有振動数と共振という概念を説明する。多自由度系の場合にはベクトルとしての固有振動モードという概念を説明する。そして梁を例とした連続体の振動の場合には、その固有振動モードが関数になることを説明する。最終的には有限要素法を用いることによって、連続体は見かけ上は多自由度系として近似的に取り扱うことができることを説明する。しかし、共振や周波数応答関数の特性、さらに境界条件によって振動数やモードが異なること等が、数値解析をするまでもなく予想できるような技術者になって欲しい。数値解析手法は便利なツールではあるが、技術者の力学的直感（と言い切ってはまずいか。正確な力学的知識と経験ということになるかな）があってこそ有効に使えるものだ。なお、この文書では弾性範囲のみを対象とするので、強度設計のためにはさらなる学習が必要である。またこの章でも簡単のために括弧無しの太字で行列を表している。

さて、バネ定数 k の線形バネに取り付けた1個の質点の運動を考えよう。バネの質量は無視できるものとする。図9.1のように自然状態のバネの先端に質量 m の質点を付けたところ運動し始めた。そのときの質点の下方への変位（バネの伸び）を $w(t)$ とし、質点には外力 $f(t)$ も作用することができるものとする。このとき、質点の運動方向（図では下方）に作用している力の総和は、図の右端にある力のダイアグラムから

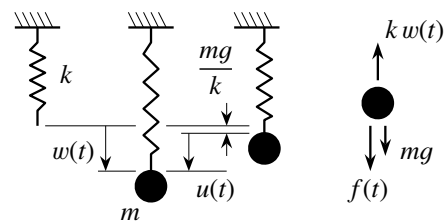


図9.1 1自由度系の振動

$$\sum \text{【下向きの力】} = f(t) + mg - k w(t)$$

である。したがって Newton の運動方程式 (2.1a)¹は

$$\sum \text{【下向きの力】} = f(t) + mg - k w(t) = m \frac{d^2 w(t)}{dt^2} \quad \rightarrow \quad m \ddot{w}(t) + k w(t) = mg + f(t) \quad (9.1)$$

¹ 米国のある雑誌（誌名は失念）の一コマ漫画。Einstein のような人がチョークを持って黒板に向かって立っていて、黒板には3行の式が上から順に ' $F = ma$, $E = mc^2$, $E = mc^2$ ' が書いてあった。式はうろおぼえだが、インターネット上にあるように1行目が $E = ma^2$ だと次元が合わないからさすがに漫画家でも描かないだろう。第1著者にとっては運動方程式 ' $F = ma$ ' があったからこそ面白かったような記憶だが、でも確かに×印が二つあったかもなあ。

となる。以下、上付きドットは時間による微分を表す。

もし $w(t)$ の代わりに

$$u(t) \equiv w(t) - \frac{mg}{k} \quad (9.2)$$

を用いると、 $\ddot{u} = \ddot{w}$ なので、運動方程式 (9.1) は

$$m \ddot{u}(t) + k u(t) = f(t) \quad (9.3)$$

と書き直すことができる。この式 (9.2) の $u(t)$ は、図 9.1 の右から二番目の図に示したように、質点をバネにそおーっと取り付けて静的につり合った状態からの変位である。この形の方程式は、重力とは関係しない水平方向にバネ質点系が摩擦の無い床の上で振動する場合の式に一致する。また社会基盤構造の振動問題では、その構造が供用され始めた時点の既に静的につり合っている状態からの動的な変動に興味があることの方が多いので、以後、原則として自重（死荷重）の項は無視して、静的につり合っている状態からの運動方程式 (9.3) を標準的な運動方程式とする。ここで、外力 $f(t)$ が作用していない振動のことを自由振動と呼ぶ。節題目にある「非減衰」については今はわからなくていい。

上の例は質点の併進運動を対象としたが、社会基盤構造の例えばケーブル等は回転運動もするだろう。そこで次に図 9.2 の振り子運動を考えてみよう。振り子は重力場でしか運動しないので重力加速度 g を考慮しなければならない。そこで振り子の糸は質量が無く伸び縮みもしないものとして、上の支点回りの反時計周りの回転を $\theta(t)$ とする。支点回りにこの振り子に作用しているモーメントは重力の影響のみで、反時計回りを正とすると

$$M(t) = -mg\ell \sin(\theta(t)) \approx -mg\ell\theta(t)$$

だけだ。ここでは揺れは小さく $|\theta(t)| \ll 1$ が成立することを用いて近似した。質量は振り子の先端にしか無いので、式 (2.4) で定義された慣性モーメントは $J = m\ell^2$ となる。したがって回転についての Newton の運動方程式 (2.3) は

$$-mg\ell\theta(t) = m\ell^2\ddot{\theta}(t) \rightarrow \ell\ddot{\theta}(t) + g\theta(t) = 0 \quad (9.4)$$

と表される。これも形式的には式 (9.3) の標準的な運動方程式と同じ形 $[(\ell, g) \leftrightarrow (m, k)]$ になっていることがわかる。したがってこの文書では、主に式 (9.3) を対象とした解法と振動特性を説明する。

(2) 非減衰自由振動

まず式 (9.3) で外力 $f(t)$ が作用していない状態の自由振動解を求めてみよう。運動方程式は 2 階の常微分方程式なので、唯一な解を得るためには時刻 $t = 0$ における状態、つまり初期条件を 2 個与える必要がある。その最も単純な設定は、質点の初期の位置と初期の速度（以下、初速と呼ぶ）を与えることであり、例えば

$$u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = v_0 \quad (9.5a, b)$$

のように与えられることにする。式 (9.3) を辺々 m で割り、 m も k も正の定数なので

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (9.6)$$

と定義すると、運動方程式は

$$\ddot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0 \quad (9.7)$$

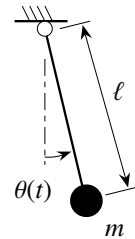


図 9.2 振り子

となる。この微分方程式の一般解を求めるために $u(t) = \exp(\mu t)$ と置き、運動方程式 (9.7) に代入すると、 μ についての特性方程式とその根は

$$\mu^2 + \omega^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = \pm i\omega$$

と求められる。したがって解は

$$u(t) = \bar{A} e^{i\omega t} + \bar{B} e^{-i\omega t}$$

と表現できるが \bar{A} と \bar{B} は複素数だ。そこで後述の Euler の公式 (9.62) を用いて実数解の形にすると

$$u(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = C \sin(\omega t - \zeta), \quad C \equiv \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \zeta \equiv -\tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right) \quad (9.8a, b, c)$$

と求められる。 C は振幅と呼ばれている。二つの積分定数 A と B あるいは C と ζ を初期条件式 (9.5) で決定できれば、それが解になる。 ζ は、0 から始まる sine 関数 $\sin(\omega t)$ の初期 $t = 0$ の位相のずれである。 A と B を使った方の表現を初期条件に代入すると

$$u(0) = B = u_0, \quad \dot{u}(0) = \omega A = v_0 \quad \rightarrow \quad A = \frac{v_0}{\omega}, \quad B = u_0$$

と求められるので、結局、運動は

$$u(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t) + u_0 \cos(\omega t) \quad (9.9)$$

と表される。

図 9.3 にその運動を示した。図に示したように、元の位置と同じ速度で戻るまでの時間 T を固有周期 (単位は s) と呼び、それは 1 s 間に ω rad の速さの運動が 2π 回するのに必要な時間なので

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (9.10)$$

という関係になる。したがって式 (9.6) で定義される ω を固有振動数²と呼ぶ。併進運動の場合の固有振動数が式 (9.6) なので、式 (9.3) と式 (9.4) の運動方程式同士を比較すれば明らかなように、振り子運動の固有振動数は

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (9.11)$$

で定義できる。つまり振り子の長さ ℓ を長くするとゆっくり動き、短くすると速く動くことを示している。時計屋のいろいろな振り子時計 (本当に振り子で動いているのかねえ?) の動きを観察してみるといい。

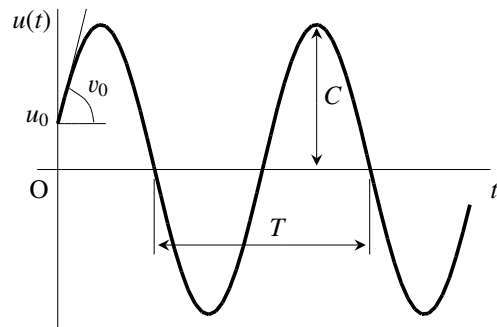


図 9.3 非減衰自由振動

(3) エネルギー

さて、とりあえず理由は考えずに、式 (9.3) に $\dot{u}(t)$ を乗じて時間積分してみよう。

$$\int m \ddot{u} \dot{u} dt + \int k u \dot{u} dt = \int f(t) \dot{u} dt + \text{const.}$$

ここで、第 1 項は

$$K \equiv \int m \ddot{u} \dot{u} dt = \int \frac{1}{2} m \{(\dot{u})^2\} dt = \frac{1}{2} m \int d(\dot{u})^2 = \frac{1}{2} m (\dot{u})^2$$

² 正確には固有円振動数あるいは固有角振動数と呼ぶが、以下、省略して単に固有振動数と呼ぶことにする。固有振動数 f の正しい定義は固有周期の逆数で $f \equiv \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$ (単位は 1/s あるいは Hz) である。ちなみに rad はもちろん無次元だ。

と変形でき、第2項も同様に

$$U \equiv \int k u \dot{u} dt = \int k u du = k \int u du = \frac{1}{2} k u^2$$

となるので、上式は結局

$$K + U = \int f(t) \dot{u} dt + \text{const.}, \quad \text{つまり} \quad \frac{1}{2} m (\dot{u})^2 + \frac{1}{2} k u^2 = \int f(t) \dot{u} dt + \text{const.} \quad (9.12)$$

が成立する。これはエネルギー保存則であり、 K は運動エネルギーであり、 U は位置エネルギーである。右辺は外力の持つエネルギーである。どの状態を基準にするのか明記していないので、右辺には定数の項が残っている。自由振動の場合の解の式(9.9)で、例えば初速が零の場合の解を式(9.12)の各項に代入すると

$$K = \frac{1}{2} m \omega^2 u_0 \sin^2 \omega t = \frac{1}{2} k u_0^2 \sin^2 \omega t, \quad U = \frac{1}{2} k u_0^2 \cos^2 \omega t$$

となり、 $K + U = \text{const.}$ であることがわかる。また K と U の位相が90度ずれているので

$$K_{\text{MAX}} = U_{\text{MAX}} \quad \text{あるいは} \quad |K| = |U| \quad (9.13)$$

であることもわかる。

この最後の結論を用いると、ちょっと面白いことを求めることができる。もしバネにも質量があり、単位長さ当たりの質量が μ_0 である場合の図9.4に示した質量 m の質点の振動を考えてみよう。バネの初期長さに比べると伸びは非常に小さいと考えて、バネの長さは ℓ のままだとする。簡単のために、質点の振動による変位を

$$u(t) = A \sin(\omega t - \zeta)$$

とすると、図から明らかなように、バネの途中の任意点 x の変位 $v(x, t)$ は

$$v(x, t) = \frac{x}{\ell} u(t) = A \frac{x}{\ell} \sin(\omega t - \zeta)$$

になると考えていだろう。これを用いて全体の運動エネルギーを求めると

$$K = \frac{1}{2} m (\dot{u})^2 + \frac{1}{2} \int_0^\ell \mu_0 (\dot{v})^2 dx = \frac{1}{2} \omega^2 A^2 \left(m + \frac{\mu_0 \ell}{3} \right) \cos^2(\omega t - \zeta)$$

である。一方、位置エネルギー(バネの全変形が蓄えている変形のエネルギー)はバネの質量とは無関係で

$$U = \frac{1}{2} k u^2 = \frac{1}{2} k A^2 \sin^2(\omega t - \zeta)$$

となる。この結果を式(9.13)に代入すると

$$\frac{1}{2} \omega^2 A^2 \left(m + \frac{\mu_0 \ell}{3} \right) = \frac{1}{2} k A^2 \quad \rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{\mu_0 \ell}{3}}}$$

と固有振動数が求められる。なぜか、バネの全質量 $\mu_0 \ell$ の三分の一だけが振動数に貢献している。

(4) 自由落下と等速円運動

高校の物理学では関数と微分積分を使ってはいけならしいが、その是非はともかく記憶科目として習って覚えていた公式等の根拠を少し示しておこう。式(9.1)でバネを取り去れば、それは自由落下の運動方程式になるはずだ。簡単のために外力 $f(t)$ も無いものとし、 $w(t)$ を g と逆向きに $y(t) \equiv -w(t)$ と定義し直すと、それは

$$m \ddot{y}(t) = -mg \quad \rightarrow \quad \ddot{y}(t) = -g \quad (*)$$

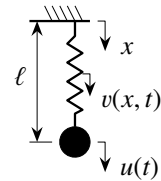


図9.4 質量のあるバネ

である。つまり、加速度が一定 g だから等加速度運動である。初期条件を質点の初期位置と初速で与えるために、式(9.5)に倣って

$$y(0) = y_0, \quad \dot{y}(0) = v_0$$

としておく。すると式(*)の一般解は $w(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + c_1t + c_2$ なので、上の初期条件に代入すると $c_1 = v_0$, $c_2 = y_0$ と求められる。したがって、自由落下の質点の位置は上向きを正とすると

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + y_0$$

になる。もし重力場と直交する水平運動 $u(t)$ の場合には式(*)に相当する運動方程式の右辺は零なので、上の $y(t)$ の答の重力加速度 g の項を無視すればよく、それは等速運動

$$u(t) = u_0t$$

である。ただし、初期条件は $u(0) = 0$, $\dot{u}(0) = u_0$ とした。この両式から t を消去して $x(t) \equiv u(t)$ と置き換えると、例えばボールを $t = 0$ に $(x(0), y(0)) = (0, y_0)$ の位置から、水平に速度 u_0 で、鉛直上向きに速度 v_0 で投げたときの、ある時刻 t のボールの位置 $(x(t), y(t))$ は

$$y(t) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x(t)}{u_0} - \frac{v_0}{g}\right)^2 + y_0 + \frac{v_0^2}{2g}$$

を満足する。これが $t = \frac{v_0}{g}$ に $x = \frac{u_0 v_0}{g}$ の位置で頂点 $y = y_0 + \frac{v_0^2}{2g}$ に達する放物運動であることは、すぐに理解できると思う。

また式(9.4)が水平面内の無重力場の回転運動の場合には、 $\ddot{\theta} = 0 \rightarrow \dot{\theta} = \text{const.}$ ($\theta = \omega t + \text{const.}$) の等速度運動になり、それを等速円運動と呼ぶ。このとき θ 方向の速さは $v_\theta \equiv r\dot{\theta} = r\omega$ なの³で、質点の速度ベクトルは

$$\mathbf{v} = v_\theta \mathbf{e}_\theta, \quad \mathbf{e}_r = \mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta, \quad \mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_x \sin \theta + \mathbf{e}_y \cos \theta$$

である。ここに四つの \mathbf{e}_d ($d = x, y, r, \theta$) は各座標軸方向の単位基底ベクトルであるが、 \mathbf{e}_x と \mathbf{e}_y は空間に固定されている。これから加速度ベクトルは

$$\dot{\mathbf{v}} = v_\theta \dot{\mathbf{e}}_\theta = -v_\theta \dot{\theta} (\mathbf{e}_x \cos \theta + \mathbf{e}_y \sin \theta) = -v_\theta \dot{\theta} \mathbf{e}_r$$

と求められる。つまり加速度は \mathbf{e}_r の負の方向（回転中心方向）に生じていて、その大きさ a は

$$a = v_\theta \dot{\theta} = v_\theta \omega \tag{9.14}$$

である。このことから、向心力が $F = ma = m v_\theta \omega = m r \omega^2 = m \frac{v_\theta^2}{r}$ となるのだ。高校の教科書に載っている誘導過程はかなり難しいが、微分を使えば簡単だ。しかし、この向心力や慣性系・遠心力等の物理的な意味はよくわからないし、流体力学の移流項から求められる式(3.164a)の向心力もよくわからない。

演習問題 9-1

1. 有名な問題。木のとっぺんにいる猿が落ち始めた瞬間に、その木のとっぺんをねらって地上から投げた石は、その落ちていく猿に当たることを証明せよ。もちろん、木に届くだけの十分な大きさの初速を与えることを前提としている。方程式を使わずに、高校等ではどうやって教えてもらったんだろう。
2. 一様な密度 ρ と一様な断面積 A を持つ長さ ℓ の剛棒振り子の振動数を求めよ。

³ これも難しい。

9.1.2 減衰自由振動

(1) 減衰の原因

さて前節で求められた自由振動解は、一旦動かされると未来永劫⁴動き続けるという答になってしまっている。しかし実際に振動する物体は、例えば空気抵抗等によって振動はそのうち止まってしまう。このような振動を減衰振動と呼ぶ。前節では、その節題目が示すように減衰を無視していた。その減衰の原因としては、空気抵抗（速度の2乗に比例）だけではなく、材料の中の何らかの非可逆変形でエネルギーが消費されてしまったり、構造や材料のどこかに摩擦が発生していたりと、種々考えられる。ここではそれをモデル化したもののうち、最も基本的な2種類、つまり速度に比例した粘性抵抗がある場合と、一定の力による固体摩擦抵抗がある場合の振動を説明する。

(2) 粘性減衰

バネが変位に比例した抵抗をするのに対して、粘性抵抗というのは速度に比例した抵抗のことである。典型的なモデルはよく **Kelvin-Voigt** モデルと呼ばれる系で、図9.5に示した。バネでない方の記号はダッシュポットと呼ばれる装置を表し、これが粘性抵抗を受け持っている。図の中央に描いたように、ある種のオイルが密封されたシリンダーに、穴の開いたピストンがついているものを思い描いて欲しい。

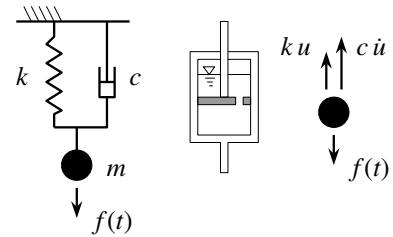


図9.5 粘性減衰

ピストンをゆっくり動かすとオイルは穴をスムーズに通り返け、ほとんど抵抗が発生しない。しかし速くピストンを動かそうとした場合には、オイルはそれほど速くは穴を通り返けられず、これが抵抗力⁵になる。このように、速度に比例した抵抗が発生しているのがダッシュポットであり、その比例係数を c とする。図の右端に示した力のダイアグラムのように、質点にはダッシュポットから上向きに $c \dot{u}(t)$ の抵抗を受けるので、運動方程式は

$$f(t) - k u(t) - c \dot{u}(t) = m \ddot{u}(t) \quad \rightarrow \quad m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = f(t) \quad (9.15)$$

となる。ここで

$$\omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \beta \equiv \frac{c}{2m\omega} \quad (9.16a, b)$$

と定義すると、外力 $f(t)$ が作用していない自由振動の場合には、上の運動方程式 (9.15) は

$$\ddot{u}(t) + 2\beta\omega \dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = 0 \quad (9.17)$$

と書くことができる。ここに c は粘性減衰係数と呼ばれ、 β は（粘性）減衰定数⁶と呼ばれる。

式 (9.17) の解を $\exp(\mu t)$ と置き代入すると、 μ についての特性方程式とその根が

$$\mu^2 + 2\beta\omega\mu + \omega^2 = 0 \quad \rightarrow \quad \mu = \omega \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 1} \right) \quad (9.18a, b)$$

と求められる。この解は β の大きさによって異なる振動挙動に対応したものになる。

⁴ 「一劫」という時間の長さについては諸説あるようだが、第1著者が（単位が取り易いという噂で）受けた笠原一男先生の「国史（中身は浄土真宗の哲学）」の授業では「100km 立方の岩を、年に一度だけ舞い降りてきた天女が、破れないようにそおっと羽衣で1回だけ撫でてそれが磨り減るまで」と定義された。結構長いぞ、呵呵。

⁵ ドアクローザ（ドアダンパー）がその具体例である。

⁶ 多分道路橋示方書 [177] で使っているからだと思うが、最近は h を使う書籍や論文が多いようである。しかしここでは、著者にとって道路橋示方書が金科玉条でもないということとはともかく、最も基本的で重要な物理パラメータの振動数 ω と揃えるためだけの理由でギリシャ文字 β を用いている。

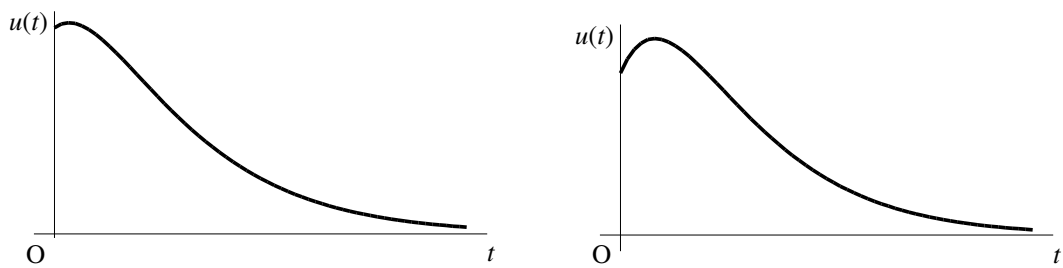


図9.6 過減衰と臨界減衰

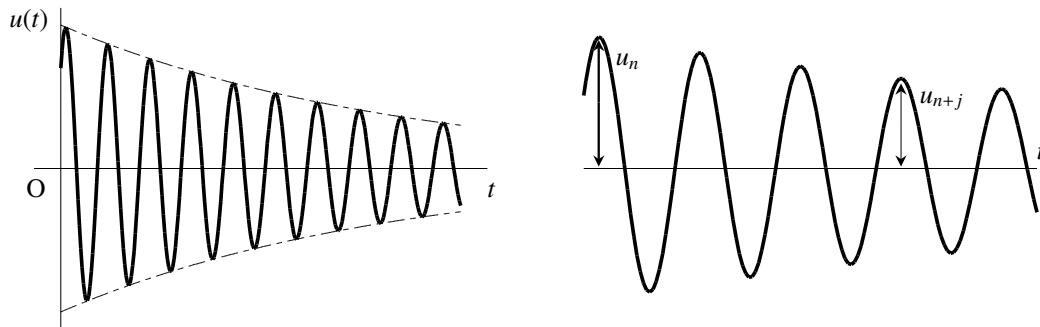


図9.7 減衰振動

1. まず $\beta > 1$ の場合の解は指数関数あるいは双曲線関数であり、振動応答はせず、図9.6の左図のような挙動を示す。この現象を過減衰と呼ぶ。機械部品にとっては必要な特性かもしれないが、社会基盤構造の振動ではこういう応答はほとんど期待できない。
2. 次に $\beta = 1$ の場合には特性根が重根となるので、解は $u = (A + Bt) \exp(-\omega t)$ となり、図9.6の右図のような挙動を示す。指数関数の方が線形項より速く零に収束するため発散はしない。この現象を臨界減衰と呼ぶ。式(9.16b)の定義から $\beta = 1$ のときの減衰係数 $c_{cr} \equiv 2m\omega = 2\sqrt{mk}$ を臨界減衰係数と呼ぶ。
3. 最後に、一般的な社会基盤構造の場合には $\beta < 1$ と捉える⁷ことができる。実際にはさらに $\beta \ll 1$ と考えていくくらい小さく、具体的にはせいぜい $\beta = 0.02$ とか 0.05 程度である。したがって特性根は

$$\mu = -\beta\omega \pm i\omega_d, \quad \omega_d \equiv \omega\sqrt{1-\beta^2} \quad (9.19a, b)$$

となるので、その実数解は

$$u(t) = \exp(-\beta\omega t) (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) = [C e^{-\beta\omega t}] \sin(\omega_d t - \zeta) \quad (9.20)$$

と表される。つまり、振幅 C が指数関数的に小さくなりながら（上式の鉤括弧部分）振動することになる。図9.7の左側の図にその例を示した。振幅のピークを結んだ一点鎖線が指数関数的に小さくなる様子を示しており、振幅はその比率で小さくなっていくが、周期は一定のままの振動である。

以下、この最後の $\beta \ll 1$ の場合に限定して説明を続ける。このような減衰振動の場合の振動数は式(9.19b)の ω_d だから、周期 T も

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{1-\beta^2}} \quad (9.21)$$

⁷ 曖昧な表現をしたのは、実際の社会基盤構造の減衰が純粋に粘性減衰だけとは限らないからだ。現象の見かけ上の減衰が $\beta < 1$ のように捉えることができるということだ。否むしろ粘性は実際の減衰の原因ではないだろうとも想像できるのだが。

となる。しかし一般には前述のように社会基盤構造の減衰定数 β は非常に小さく、例えば鋼構造では0.02~0.03、コンクリート構造では0.03~0.05と考えていいため、 ω_d と ω の差は無視できるくらい小さく

$$\text{社会基盤構造の場合は } \omega \simeq \omega_d, \quad T \simeq \frac{2\pi}{\omega} \quad (9.22)$$

と近似しても構わないのが普通である。なお実際の社会基盤構造の減衰が粘性減衰だとは限らないが、それでほぼ近似でき、また近似できると便利なので、粘性減衰モデルを用いているのだろうと考えればいい。では、実測した応答から粘性減衰定数を求める方法を考えてみよう。実測データが図9.7の右側の図のようだったとしよう。 n 番目の振幅と $(n+j)$ 番目の振幅(図では $j=3$)をそれぞれ u_n, u_{n+j} とすると、その振幅比(多くの教科書では $j=1$)を減衰比⁸と呼び、それは理論的には

$$\frac{u_n}{u_{n+j}} = \frac{C \exp(-\beta\omega t)}{C \exp\{-\beta\omega(t+jT)\}} = \exp(j\beta\omega T) = \exp\left(\frac{2\pi j\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\right) \quad (9.23)$$

となるので、定数になる。したがって、この関係式を用いて構造物の振動試験の実測値を整理すれば、見かけ上の減衰定数 β を逆算することができる。また、この減衰比の対数を対数減衰率と呼ぶ(これも $j=1$ として定義されるのが普通)が、それは

$$\delta \equiv \ln \frac{u_n}{u_{n+j}} = \frac{2\pi j\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad (9.24)$$

となり、これも定数なので、この関係式から

$$\beta = \frac{\delta}{\sqrt{\delta^2 + 4\pi^2 j^2}} \quad (9.25)$$

と、減衰定数を求めることができる。あるいは、 $\beta \ll 1$ が成立するなら、この関係はもっと近似できて

$$\beta \simeq \frac{\delta}{2\pi j} \quad (9.26)$$

としてもいい。

図9.8には、東北大学の学部の学生実験で得た1自由度系の加速度記録を×印で示した。実験では、鋼の薄片で板バネを作りその先端に重りを取り付け、板バネを少し曲げた状態で手を離し、そのあとの自由振動の重りの加速度を記録した。手を放すときの乱れがノイズとして運動に影響を及ぼすので、初期状態から数周期経たあとの記録を自由振動していると判断して図示した。 β は十分小さいと仮定した上で、この記録の横軸をまたぐ15周期分の時間から周期を $T = 0.485\text{ s}$ と読み取り、近似式(9.22)から固有振動数を $\omega = 12.95\text{ rad/s}$ と同定した。さらに、この図の範囲の正方向の振幅データを用いて、いろいろな n や j で式(9.24)と近似式(9.26)を用いて算定したものを平均して $\beta = 0.00385$ と同定できた。同定したパラメータを用いて求めた応答が実線で、ほとんど重なっている。

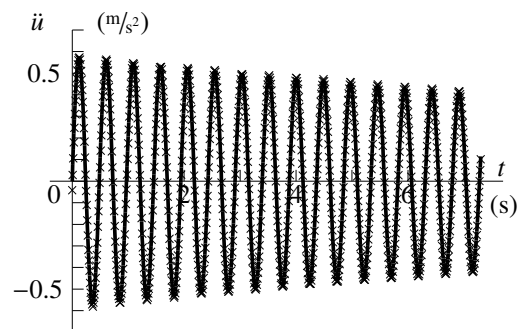


図9.8 実測データからのパラメータ同定

ところで唐突だが図9.9は電気回路の代表例である。抵抗器の電気抵抗を R とし、コンデンサの電気容量を C 、コイルの自己インダクタンスを L とする。起電力が $E(t)$ のとき、この回路内の電荷 $Q(t)$ と電流 $I(t)$ は

$$L\ddot{Q}(t) + R\dot{Q}(t) + \frac{1}{C}Q(t) = E(t), \quad I(t) = \dot{Q}(t) \quad (9.27a, b)$$

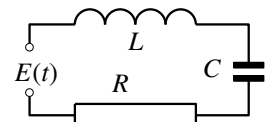


図9.9 単ループ回路

を満足するような変動をする。これはまさに粘性減衰振動の運動方程式と同じである。面白いですねえ。

⁸ 教科書によってはこれを減衰率と呼び、また別の教科書には β を減衰比とするものがあるので、注意すること。

(3) 固体摩擦減衰

もう一つの減衰モデルの代表である固体摩擦を考える前に、式(9.7)の運動方程式を変位と速度の平面上で表すことを考えよう。このような平面を位相平面と呼び、第9.5節の安定問題等でもよく用いられる。まず運動方程式の加速度項は

$$\ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{dt} = \frac{d\dot{u}}{du} \frac{du}{dt} = \dot{u} \frac{d\dot{u}}{du}$$

と書き直してもいいだろうから、運動方程式は

$$\dot{u} \frac{d\dot{u}}{du} + \omega^2 u = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{u} d\dot{u} + \omega^2 u du = 0$$

となるので、これを項別に積分すれば

$$(\dot{u})^2 + \omega^2 u^2 = \text{const.} \quad \text{あるいは} \quad \left(\frac{\dot{u}}{\omega}\right)^2 + u^2 = \text{const.} \tag{9.28}$$

と表すことができる。右辺の定数は初期条件で決まる値である。誘導過程と結果からも推測できるように、これは第9.1.1(3)節で誘導したエネルギー保存則そのものだ。そしてこの式は、 u と \dot{u} を2軸とする位相平面上で楕円状の軌跡を描くことを意味している。あるいは、特にこの場合には u と $\frac{\dot{u}}{\omega}$ を2軸にした円軌道になる。

さて図9.10に示したように、質点との間に一定の動摩擦力 $F = \mu' mg$ (μ' は動摩擦係数)が発生する床の上の振動⁹を考えてみよう。速度と逆の向きに摩擦が発生するので、 $\dot{u} > 0$ のときの運動方程式は

$$-k u(t) - F = m \ddot{u}(t) \quad \rightarrow \quad m \ddot{u}(t) + k u(t) + F = 0$$

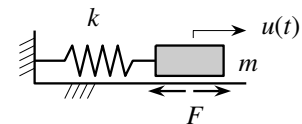


図9.10 固体摩擦減衰

となるのに対し、 $\dot{u} < 0$ の場合には

$$-k u(t) + F = m \ddot{u}(t) \quad \rightarrow \quad m \ddot{u}(t) + k u(t) - F = 0$$

となる。したがって、これをまとめると

$$m \ddot{u}(t) + k u + \text{Sgn}(\dot{u}) F = 0 \tag{9.29}$$

と書く¹⁰ことができる。ここに Sgn は引数の符号を表す記号で

$$\text{Sgn}(\dot{u}) = \begin{cases} +1 & \text{もし } \dot{u} \geq 0 \\ -1 & \text{もし } \dot{u} < 0 \end{cases} \tag{9.30}$$

と定義した。初期条件は式(9.5)で与えられる。この微分方程式を速度の符号で場合分けをして時々刻々解いていけば解を求めることができる(図9.11の右側の図は実際そうやって求めた)が、ここでは上述の位相平面を使ってみよう。なお、運動方程式(9.29)の第3項には F があって斉次の微分方程式ではないので、次節で対象とする強制振動として捉えないといけませんが、次節以降では固体摩擦減衰を対象とはしないので、この節の最後に扱ってしまうことにした。

この運動方程式(9.29)に相当する位相平面上の軌道を求めようとする、まず

$$\dot{u} d\dot{u} + \omega^2 \left\{ u + \text{Sgn}(\dot{u}) \frac{F}{k} \right\} du = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\omega^2} \dot{u} d\dot{u} + \left\{ u + \text{Sgn}(\dot{u}) \frac{F}{k} \right\} d \left\{ u + \text{Sgn}(\dot{u}) \frac{F}{k} \right\} = 0$$

⁹ 実際には、バネが伸び切って振動が止まる瞬間の摩擦力は最大摩擦程度以下の静止摩擦抵抗でいいわけだが、ここでは簡単のために動摩擦力のみで近似する。

¹⁰ あるいは、後述の式(9.46)で定義する Heaviside 関数を用いて

$$m \ddot{u}(t) + k u + H(\dot{u}) F - H(-\dot{u}) F = 0$$

と書いてもいい。

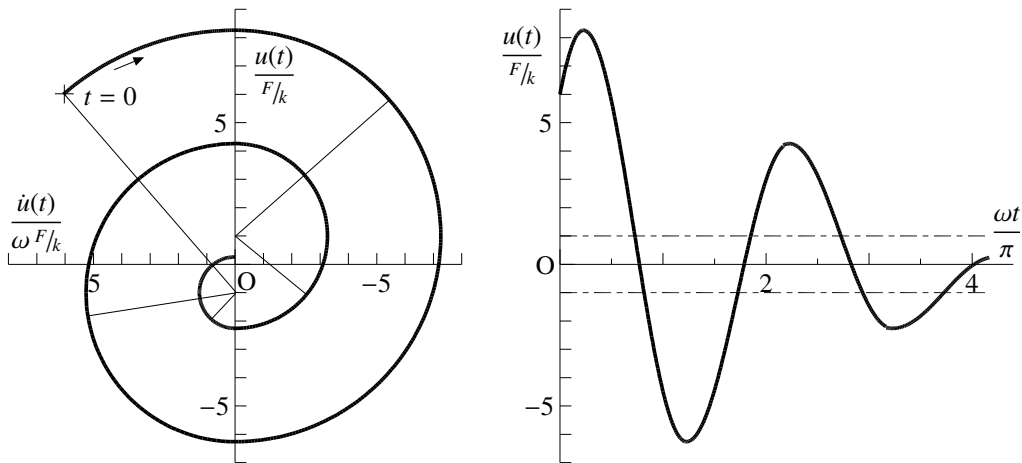


図 9.11 固体摩擦減衰応答

としてもいいから、位相平面は

$$\left(\frac{\dot{u}}{\omega}\right)^2 + \left\{u + \text{Sgn}(\dot{u}) \frac{F}{k}\right\}^2 = \text{const.} \quad (9.31)$$

と表すことができる。つまり図 9.11 の左側に示したように、速度の向きが変わる度に 2 箇所の円の中心位置 ($\pm F/k, 0$) が突然移動する。位相平面は速度軸を上向きに変位軸を右向きに描くのが普通だが、時刻歴応答を描き易いように反時計回りに 90 度回転して描いた。初期条件の状態から時計回りに回転しながら、変位軸をまたぐ半周毎に軌道の中心が突然移動し、それに伴い振幅も小さくなっていき、最後は $k|u| < F = \mu' mg$ の状態¹¹に入ったあとの速度が零になる時点（この位相平面の図の縦軸上）で止まることになる。

ちなみに式 (9.12) の誘導と同じようにして、固体摩擦がある場合のエネルギー保存則を誘導しておこう。式 (9.29) の運動方程式に $\dot{u}(t)$ を乗じて積分すると、最初の 2 項は式 (9.12) と同じ結論になる。第 3 項は

$$\int \text{Sgn}(\dot{u}) F \dot{u} dt = F \int |\dot{u}| dt = F \int |du| = F \times (\text{質点がたどった道のりの累積})$$

になる。これも高校で習って覚えた公式であろう。したがって、エネルギー保存則は、外力項も含めると

$$\frac{1}{2} m (\dot{u})^2 + \frac{1}{2} k u^2 + \mu' mg \int |\dot{u}| dt = \int f(t) \dot{u} dt + \text{const.}$$

となる。

9.1.3 強制振動

(1) 正弦波外力による強制振動と共振曲線

前節までには振動の最も基本的なパラメータである固有振動数と減衰定数を導入したが、それがどうした? と思っている読者も少なくないだろう。実は我々にとって m と k と c は与えられるのではなく、何らかの設計を通して設定する量なのだ。そのとき実際には、地震や風や活荷重等の外力が作用した状況における振動が問題になり、その外力に対して安全な社会基盤構造になるように固有振動数（や減衰定数）を設計する必要があるのだ。まず代表的かつ単純な外力が作用する場合の振動を対象として、この基本的な二つのパラメータと外力特性の関係について考察する。外力 $f(t)$ が作用した振動を強制振動と呼ぶ。一般的な問題として式 (9.15) を解くが、それを m で除して式 (9.17) の形にすると

$$\ddot{u}(t) + 2\beta\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{1}{m} f(t) \quad (9.32)$$

¹¹ 正確には、静止摩擦係数を $\mu_s (> \mu')$ とした場合、速度が零になった瞬間には最大摩擦力程度以下の静止摩擦抵抗 $k|u| \approx \mu_s mg$ のときに止まるので、 $|u| \leq \frac{\mu_s mg}{k}$ で止まることになる。

と表現できる。

最も基本的な外力として正弦波状の外力を扱う。というのも、任意のほとんどの関数は Fourier 級数で表されると考えていいので、その基本的な外力として $f(t) = f_0 \sin pt$ について考えておけば、ほとんどすべての外力に対する応答を求める基礎になると考えられるからだ。つまり、式 (9.32) は

$$\ddot{u}(t) + 2\beta\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = g_0 \sin pt, \quad g_0 \equiv \frac{f_0}{m}, \quad f(t) = f_0 \sin pt \quad (9.33a, b, c)$$

となる。一般解は、自由振動で求めた斉次解と外力に対する特解 $u_p(t)$ の和で

$$u(t) = \exp(-\beta\omega t) (A \sin \omega_d t + B \cos \omega_d t) + u_p(t) \quad (*)$$

と表される。減衰が存在する場合には自由振動解は減衰解であり、時間と共に減少していくような過渡応答なので、工学的に一番興味があるのは多分特解の方¹²だろう。そこでここでは特解 $u_p(t)$ だけを求めよう。

数学で習った特解の求め方を用いるのが望ましいが、多分 $\sin pt, \cos pt$ が解の候補になると予想されるので

$$u_p(t) = C \sin pt + D \cos pt$$

と置いて、これを式 (9.33a) に代入して sine, cosine 毎に整理すると

$$\begin{aligned} \sin pt (-p^2 C - 2\beta\omega p D + \omega^2 C - g_0) \\ + \cos pt (-p^2 D + 2\beta\omega p C + \omega^2 D) = 0 \end{aligned}$$

となるので

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - p^2 & -2\beta\omega p \\ 2\beta\omega p & \omega^2 - p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばいい。つまり

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} &= \frac{1}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 p^2} \begin{pmatrix} \omega^2 - p^2 & 2\beta\omega p \\ -2\beta\omega p & \omega^2 - p^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{g_0}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4\beta^2 \omega^2 p^2} \begin{pmatrix} \omega^2 - p^2 \\ -2\beta\omega p \end{pmatrix} \\ &= \frac{\frac{g_0}{\omega^2}}{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 + 4\beta^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2 \\ -2\beta \frac{p}{\omega} \end{pmatrix} = \frac{\frac{f_0}{k}}{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 + 4\beta^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \begin{pmatrix} 1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2 \\ -2\beta \frac{p}{\omega} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。したがって特解は

$$u_p(t) = \frac{\frac{f_0}{k}}{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 + 4\beta^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \left[\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\} \sin pt - 2\beta \frac{p}{\omega} \cos pt \right] \quad (9.34)$$

と求められる。あるいは $u_{st} \equiv \frac{f_0}{k}$ と定義すると

$$u_p(t) = u_{st} M_D \sin(pt - \alpha), \quad M_D \equiv \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 + 4\beta^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}}, \quad \tan \alpha \equiv \frac{2\beta \frac{p}{\omega}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \quad (9.35a, b, c)$$

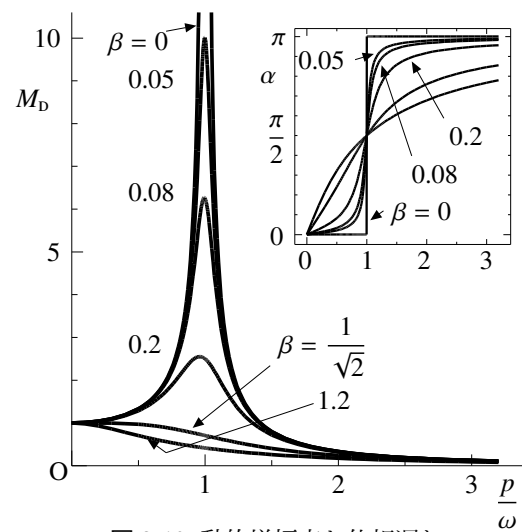


図 9.12 動的増幅率と位相遅れ

¹² 演習問題を解けばわかるはずだが、実際には、過渡応答を含めた振幅が動的増幅率を超えることがあることには注意するべきである。

と書くこともできる。 u_{st} は外力の最大値 f_0 が静的に作用したときの静的な変位である。したがって M_D は、その静的な変位に対する動的な変位の割合を表しているのが動的増幅率と呼ばれる。 α は減衰による位相の遅れを表している。図 9.13 の $t = 0$ 付近の実線を拡大すれば、この位相の遅れを実感できる。 M_D と α を図 9.12 に示した。非減衰の $\beta = 0$ の場合には $p = \omega$ で $M_D \rightarrow \infty$ となり発振してしまう。この現象を共振と呼び、 M_D のこの図の曲線を共振曲線と呼ぶことがある。そして $p = \omega$ の外力周波数の作用状態を共振点と呼ぶ。前述のように社会基盤構造の β は非常に小さいため、かなり大きい動的増幅率を持つ共振が生じる可能性がある。

では一例として、過渡応答も含めて、零初期条件つまり $u_0 = 0, v_0 = 0$ の場合の強制振動応答を求めておこう。式 (*) に式 (9.34) を代入し、それを零初期条件に代入すると、二つの積分定数を

$$\frac{A}{u_{st}} = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \frac{B}{u_{st}} - \frac{\frac{p}{\omega_d}}{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 + 4\beta^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2} \left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\},$$

$$\frac{B}{u_{st}} = \frac{2\beta \frac{p}{\omega}}{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 + 4\beta^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}$$

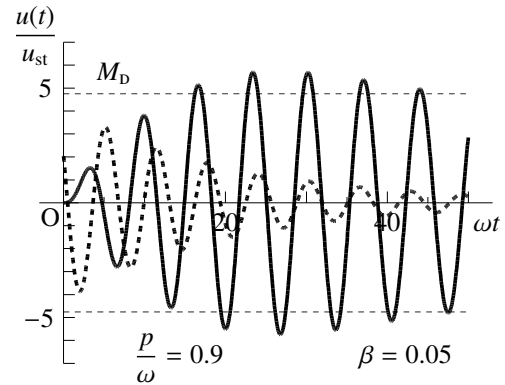


図 9.13 減衰系の正弦波強制振動

と求めることができる。式が長くなるので、上式の A の右辺には B を残してあるので注意して欲しい。例として $\frac{p}{\omega} = 0.9$ で $\beta = 0.05$ のときの解を描いたのが図 9.13 である。実線がその応答で、零初期条件で始まっていることがわかる。破線は応答の中の ω_d で振動する成分、つまり過渡応答（自由振動解）の成分を分離して取り出したものである。減衰定数が大きめなので過渡応答の振幅はすぐに小さくなっていく。この成分が無くなってしまえば、実線の振幅は式 (9.35b) の M_D になり、周波数が p の振動成分のみ、つまり特解のみが残る。図中の水平の 2 本の破線が M_D のレベルである。共振点の 90% 程度の外力周波数では静的変位の 5 倍もの大きな動的な変位が生じていることが、この応答図からも明らかだ。また過渡応答も含めた場合の全振幅は、動的増幅率よりときどき大きくなることに十分注意しておく必要がある。

さて、社会基盤構造を設計したとしよう。それは構造の質量 m と剛性 k を設計した¹³ことに相当するから、動的に重要なパラメータの一つの固有振動数 ω を設計したことになる。もし、その構造に作用する外力の周波数 p がその固有振動数に近い場合には、共振して応答の振幅は非常に大きくなり、構造は破壊するかもしれない。動的な設計というのは、簡単に言うと、共振曲線や強制振動の時刻歴応答を確認しながら m と k を設計するということである。

演習問題 9-2

- 自分が使い慣れたソフトウェアを用いて減衰振動の応答曲線図 9.7 を描いてみよ。最近ソフトウェアが非常に高性能になったため、スプライン関数等で滑らかな曲線を描くことが容易にできるが、実はそこには大きな落とし穴がある。スプライン関数の性質を知らずに安易に使うと、とんでもない結果になってしまうので注意して欲しい。こういう周期的な曲線を描く場合、一番安全で確実なのは 1 周期当たり 20 個以上のデータ点を直線で結ぶことである。
- 自分が使い慣れたソフトウェアを用いて共振曲線図 9.12 を描いてみよ。これも試しにスプライン関数で描いてみよ。データ数が少ない場合には、とても変な曲線になることがある。

¹³ 動的制御の設計を減衰特性を用いて行う場合を除き、一般に社会基盤構造では減衰のパラメータ c を設計することはできない。

5. 零初期条件 $u_0 = 0, v_0 = 0$ の質点に正弦波外力 $f(t) = f_0 \sin pt$ が作用したときの応答を求め、図 9.13 を描け。その図では初速（線の傾き）が零になってますか？傾きが零になるように工夫できますか？ソフトウェアの結果を鵜呑みにするのは危険だ。例えば $\beta = 0.02$ として、 $\frac{p}{\omega}$ が 0.2, 0.5, 0.97, 1.1, 1.5 等の場合の応答を求め、 $\pm M_D$ の線も描いた上で $|u| > u_{st} M_D$ がどのような状況で発生するか比較してみよ。
6. 非減衰 $\beta \equiv 0$ で外力が $f(t) = f_0 \sin \omega t$ のとき、つまり $p = \omega$ の共振点では、式 (9.35b) の動的増幅率は $M_D \rightarrow \infty$ になることから、特解が $u_p(t) \sim \sin pt = \sin \omega t$ ではないことが明らかである。では零初期条件下の解を求めよ。数学が不得意でも、共振で発散することを念頭に置けば解は容易に推測できると思うが、例えば定数変化法を思い出そう。結果を図示してその発散の様子も確認せよ。
7. 固体摩擦による減衰の場合の運動方程式 (9.29) は速度が零になる毎に時々刻々特解の符号が変わるだけなので、連続条件をその都度満足させれば容易に解くことができる。その解が以下のようなことを確かめよ。例えば初期条件を $u(0) = u_0 > 0, \dot{u}(0) = v_0 > 0$ とし、 $\tau \equiv \omega t$ とした上で

$$x \equiv \frac{u_0}{F/k} + 1, \quad y \equiv \frac{v_0}{\omega F/k}, \quad \tau_0 \equiv 0, \quad 0 < \tau_1 \equiv \tan^{-1} \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}, \quad \tau_n = \tau_{n-1} + \pi \quad (n \geq 2)$$

とすると、 $\tau_n \leq \tau < \tau_{n+1} \quad (n \geq 0)$ の解は次式になる。

$$\frac{u(\tau)}{F/k} = \left(1 - \frac{2n}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) (x \cos \tau + y \sin \tau) + (-1)^{n+1}$$

(2) 支点の正弦波状強制変位による応答

次に地震に対する応答を思い描くと、構造自体に外力が作用している前節のような状況ではなく、バネの支点が強制的に変位させられた状況における振動のように見える。そこで図 9.14 に示したように、支点が水平方向に強制的に $w(t)$ だけ変位させられた場合の質点の水平運動 $u(t)$ を考察しよう。バネとダッシュポットは、支点の運動との相対変位と相対速度に比例した抵抗力しか生まないから、運動方程式は

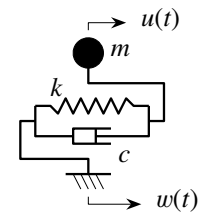


図 9.14 支点変位に対する応答

$$m \ddot{u}(t) + c \{\dot{u}(t) - \dot{w}(t)\} + k \{u(t) - w(t)\} = 0 \tag{9.36}$$

となる。Newton の法則の慣性項は絶対加速度 $\ddot{u}(t)$ で表されているので、第 1 項はこれまでと同じである。さてここで、支点の変位に対する相対的な質点の変位

$$v(t) \equiv u(t) - w(t) \tag{9.37}$$

を用いて、上の運動方程式 (9.36) を書き直すと

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = -m \ddot{w}(t) \tag{9.38}$$

と書くことができる。この式と式 (9.15) を比較すれば明らかなように、支点の強制変位に対する相対的な応答 $v(t)$ は、見かけ上

$$f(t) = -m \ddot{w}(t) = -(\text{設計しようとしている構造の質量}) \times (\text{地盤の地震入力加速度}) \tag{9.39}$$

という外力が直接質点に作用したときの強制外力応答と同じであることがわかる。この式 (9.39) は非常に重要な概念であり、耐震設計において用いられている震度法の根拠になっている。つまり、過去に観測された大地震の地震加速度を参考にして設定された設計入力地震加速度に、設計されようとしている社会基盤構造の質量を乗じることによってその構造に作用させるべき地震外力が算定でき、それを作用させたときの構造の抵抗を照査することによって耐震設計ができることを示している。

基本的な例として、支点変位が正弦波状¹⁴の

$$w(t) = w_0 \sin pt \tag{9.40}$$

で与えられる場合を上式(9.38)に代入すると、運動方程式は

$$m \ddot{v}(t) + c \dot{v}(t) + k v(t) = m p^2 w_0 \sin pt$$

と書ける。したがって前節の外力の振幅を $f_0 = m p^2 w_0$ と置き換えれば、そのまま前節の解を流用できるので、特解は式(9.35)とほぼ同様になり

$$v_p(t) = w_0 M_w \sin(pt - \alpha), \quad M_w = \left(\frac{p}{\omega}\right)^2 M_D \tag{9.41a, b}$$

となる。位相の遅れ α は式(9.35c)と同じである。式(9.41b)の動的増幅率 M_w を図9.15に示した。つまり

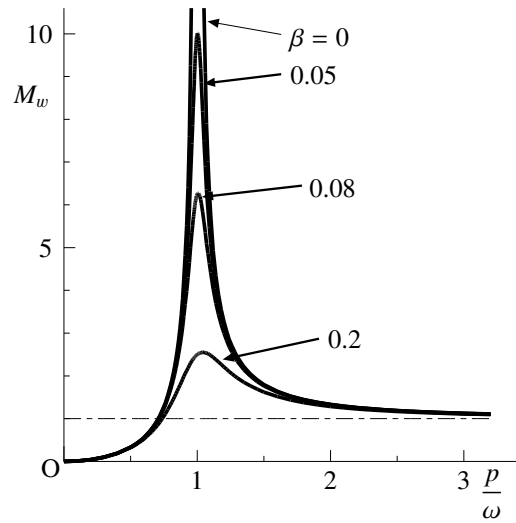


図 9.15 支点変位応答の動的増幅率

$\frac{p}{\omega} \gg 1$ の場合には $|v_p| \approx |w|$ となるが、位相差 α は π になる。これは長大橋のような柔構造の応答に相当している。

$\frac{p}{\omega} \ll 1$ の場合には相対変位はほぼ零になるが、 $M_D \approx 1, \alpha \approx 0$ なので $v_p \approx w_0 (p/\omega)^2 \sin(pt)$ となり $|v_p| \approx 1/\omega^2 |\ddot{w}|$ である。したがってバネの抵抗は $k|v_p| = m|\ddot{w}|$ となり、直接地震加速度に対応する力で抵抗しなければならない。これが剛な構造の応答に相当している。

と¹⁵ということがわかる。

ところで地震計というのは一体どうなっているんだろう。地盤と一緒に動いている地震計が、自分自身の運動を記録できるのは不思議ではないだろうか。この疑問に答えてくれるのが、ここで求められた解である。つまり地震計はここで定義した相対変位 $v(t)$ を記録紙に書き込んでいるのだから、相対変位 $v(t)$ の挙動を考察すれば地震計の原理が理解できるはずだ。地震計の m と k を適切に設計して、観測したい地震動の振動数 p に対して $\frac{p}{\omega} \gg 1$ になるように製作すると上述のように 180 度の位相差で $|v_p(t)| \approx |w(t)|$ となるので、地盤の変位応答を記録できる。これと対照的に、地震計の m と k を調整して $\frac{p}{\omega} \ll 1$ になるように製作すると、この場合は上述のように $|v_p(t)| \approx 1/\omega^2 |\ddot{w}(t)|$ となるので地盤の加速度応答が記録できるのである。

(3) 単位衝撃応答

ここまでは時間変化が滑らかな周期外力を考察してきたが、それとは全く異なる特性を持つと想像される衝撃外力が作用したときの振動について考察する。まず、衝撃そのものをどのようにモデル化するかが問題になるだろう。いま質点 m に、時刻 $t = \tau$ にある衝撃外力 $f(t)$ を作用させたとする。衝撃なので、非常に短い時間 ϵ だけ作用していることにしよう。そのときの質点の運動方程式を $t = \tau - \epsilon/2$ から $t = \tau + \epsilon/2$ まで積分すると、まず慣性項は

$$\int_{\tau - \epsilon/2}^{\tau + \epsilon/2} m \ddot{u} dt = \int_{\tau - \epsilon/2}^{\tau + \epsilon/2} m \dot{u} d\tau = m \dot{u} \left(\tau + \frac{\epsilon}{2} \right) - m \dot{u} \left(\tau - \frac{\epsilon}{2} \right)$$

¹⁴ 残念なことに、地震波のような不規則波は Fourier 級数では表せないのだが、ま、共振曲線の特性を知るためという意味で。

¹⁵ 読者の多くは祭の屋台等で売っているヨーヨー風船を知っていると思う。これを極めてゆっくり ($p \ll \omega$) 突いた場合の風船は手の平には当たらず風船の変位と手の変位は同じ向きにほぼ同じ大きさ、つまり相対変位はほぼ零 ($M_w \approx 0$) で位相差 α は零である。逆に極めて速く ($p \gg \omega$) 突くと風船はほとんど動かず手だけが上下運動する。つまり相対変位はほぼ手の変位に等しく ($M_w \approx 1$) 位相差が $\alpha \approx \pi$ になる。そして共振点付近で手を動かすと風船の変位が増幅されてようやく手の平に到達して風船を突くことができるようになる。

となる。一方、バネの抵抗の項は位置エネルギーの短時間の変化分であり、粘性抵抗も短時間の速度変化になるので、次の式のように $\epsilon \rightarrow 0$ の極限では零になる。つまり

$$\int_{\tau-\epsilon/2}^{\tau+\epsilon/2} k u dt \rightarrow 0, \quad \int_{\tau-\epsilon/2}^{\tau+\epsilon/2} c \dot{u} dt = \int_{\tau-\epsilon/2}^{\tau+\epsilon/2} c du = c \{u(\tau + \epsilon/2) - u(\tau - \epsilon/2)\} \rightarrow 0$$

である。したがって、運動方程式を積分したものは結局

$$m \dot{u} \left(\tau + \frac{\epsilon}{2} \right) - m \dot{u} \left(\tau - \frac{\epsilon}{2} \right) = \int_{\tau-\epsilon/2}^{\tau+\epsilon/2} f(t) dt \tag{9.42}$$

となる。この式は実は運動量保存則であり、左辺は $t = \tau$ における運動量の変化量であり、右辺は衝撃外力 $f(t)$ による力積である。つまり、ある瞬間 $t = \tau$ に衝撃力を与えるということは、その時点で短時間の力積を与えることを意味する。このことは高校の物理学の教科書にバットでボールを打つ絵等で説明されていたと思う。

この力積が単位量、つまり1のときの外力 $f(t)$ を単位衝撃外力と呼ぶことにしよう。例として挙げたのが図 9.16 である。このような関数 $f(t)$ は、集中せん断外力をモデル化したときの式 (4.57) の Dirac のデルタ関数 $\delta(x - a)$ と同じであり、それは

$$\int_b^c \psi(x) \delta(x - a) dx = \begin{cases} \psi(a) & \text{もし } b < a < c \\ 0 & \text{もし } a < b \text{ あるいは } c < a \end{cases} \tag{9.43}$$

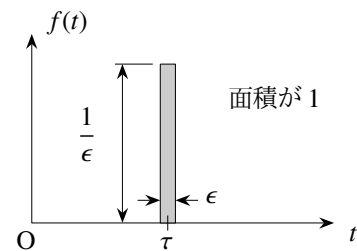


図 9.16 単位衝撃外力

で定義される。図はちょっとだけ嘘だ。つまり

$$f(t) = \delta(t - \tau) \rightarrow \text{式 (9.42) 右辺の力積} = \int_{\tau-\epsilon/2}^{\tau+\epsilon/2} f(t) dt = \int_{\tau-\epsilon/2}^{\tau+\epsilon/2} \delta(t - \tau) dt = 1$$

となる。この質点が時刻 $t = \tau$ まで静止していたとすると、 $\epsilon \rightarrow 0$ の極限において式 (9.42) の左辺第2項は零になるので

$$m \dot{u}(\tau) - 0 = \int_{\tau-\epsilon/2}^{\tau+\epsilon/2} f(t) dt = \int_{\tau-\epsilon/2}^{\tau+\epsilon/2} \delta(t - \tau) dt = 1 \rightarrow \dot{u}(\tau) = \frac{1}{m}$$

を得る。つまり単位衝撃の作用は、その時点で強制的な速度 $1/m$ を与えた条件と等価なのである。したがって、1質点系に対して時刻 $t = \tau$ に単位衝撃外力を作用させたときの初期値問題は $t \geq \tau$ において

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = 0, \quad u(\tau) = 0, \quad \dot{u}(\tau) = \frac{1}{m} \tag{9.44a, b, c}$$

で与えればいいことになる。もちろん $t < \tau$ における状態は $u(t) \equiv 0$ である。なお「単位」衝撃の「単位」は無次元なので、振動問題のデルタ関数 $\delta(t - \tau)$ の次元は [時間]⁻¹ と考えればいい。

式 (9.44a) の一般解は

$$u(t) = \exp(-\beta \omega t) (A \cos \omega_d t + B \sin \omega_d t)$$

なので、これを初期条件式 (9.44b) (9.44c) に代入すると

$$\begin{aligned} 0 &= \exp(-\beta \omega \tau) (A \cos \omega_d \tau + B \sin \omega_d \tau), \\ \frac{1}{m} &= \exp(-\beta \omega \tau) \omega_d (-A \sin \omega_d \tau + B \cos \omega_d \tau) - \beta \omega \exp(-\beta \omega \tau) (A \cos \omega_d \tau + B \sin \omega_d \tau) \end{aligned}$$

を満足しなければならない。これを整理すると

$$\begin{pmatrix} \cos \omega_d \tau & \sin \omega_d \tau \\ -\sin \omega_d \tau & \cos \omega_d \tau \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} = \exp(\beta \omega \tau) \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{m \omega_d} \end{pmatrix}$$

となるので、これを解くと

$$\begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \exp(\beta \omega \tau) \begin{pmatrix} \cos \omega_d \tau & -\sin \omega_d \tau \\ \sin \omega_d \tau & \cos \omega_d \tau \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m \omega_d} \end{Bmatrix} = \frac{\exp(\beta \omega \tau)}{m \omega_d} \begin{Bmatrix} -\sin \omega_d \tau \\ \cos \omega_d \tau \end{Bmatrix}$$

のように積分定数が求められる。したがって解は

$$u(t) = u_1(t; \tau) = u_1(t - \tau) \equiv \begin{cases} 0 & t < \tau \\ \frac{1}{m \omega_d} \exp\{-\beta \omega (t - \tau)\} \sin\{\omega_d (t - \tau)\} & t > \tau \end{cases} \quad (9.45)$$

と求められる。これを単位衝撃応答と呼んでいる。衝撃が与えられた時刻 τ も関数の引数に明示するのが普通であり、また式の形から明らかなように $(t - \tau)$ のみの関数なので、左から三つ目の表現がよく用いられる。なお $u_1(t - \tau)$ の次元は [時間][質量]⁻¹ あるいは [長さ][力]⁻¹[時間]⁻¹ である。

さて、式(9.45)に示したように、時刻 t を τ の前後に場合分けして二つの定義をするのはとても面倒だし、使い難いので、これを一つの式にまとめてみたい。そのために

$$H(t - \tau) = \begin{cases} 0, & t < \tau \\ 1, & t > \tau \end{cases} \quad (9.46)$$

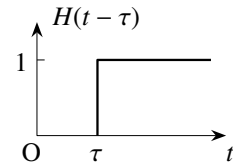


図 9.17 Heaviside 関数

$$\text{少し難しく、やや正しく書くと } \delta(t - \tau) \stackrel{d}{=} \frac{dH(t - \tau)}{dt}$$

と定義される **Heaviside 関数** (階段関数) を導入する。なお上式の $\delta(t - \tau)$ は式(9.43)で定義した Dirac のデルタ関数で、いずれも正しくは関数ではなく超関数なので、最後の式の等号 $\stackrel{d}{=}$ は超関数のための特殊な等号である。超関数的な等号の意味については式(10.10)下の説明を参照のこと。さて、この Heaviside 関数の性質を利用すれば、任意時刻 $t > 0$ の単位衝撃応答は

$$u_1(t - \tau) = \frac{1}{m \omega_d} \exp\{-\beta \omega (t - \tau)\} H(t - \tau) \sin\{\omega_d (t - \tau)\} \quad (9.47)$$

と書くことができる。非減衰の場合は $\beta \equiv 0$ なので

$$u_1(t - \tau) = \frac{1}{m \omega} H(t - \tau) \sin\{\omega (t - \tau)\} \quad (9.48)$$

と表される。この表現がとても便利だということは次節以降でわかる。なお初期値問題の初期条件式(9.44b)(9.44c)から明らかなように、単位衝撃応答は時刻 $t = \tau$ における零初期条件の解ではないことには十分注意する必要がある。

(4) 任意外力に対する応答

では大きさが単位量ではなく、図 9.18 の左上の図のように力積 (面積) が F の衝撃外力に対する応答が

$$u(t) = F u_1(t - \tau)$$

になることは、誰も疑問には思わないだろう。それならば、その右側の図のように異なる時刻に三つの異なる大きさ (面積) の衝撃外力 (力積) が作用したときの応答が

$$u(t) = \sum_{n=1}^3 F_n u_1(t - \tau_n)$$

になるのも納得してもらえと思う。否、任意時刻 t の応答は場合分けをしないとイケないから、三つ全部を足してしまっはイケないのではないかと思う人もいるかもしれないが、例えば上式の総和の第2項は

$$\frac{F_2}{m\omega_d} \exp\{-\beta\omega(t-\tau_2)\} H(t-\tau_2) \sin\{\omega_d(t-\tau_2)\}$$

のように Heaviside 関数が含まれているから、 $t < \tau_2$ の間は無いのと同じになるのだ。したがって、任意の時刻 t に対する解には三つを足し算しておいても大丈夫なのだ。Heaviside 関数は便利でしょ。

それでは図 9.18 の下の図のような任意の（図では連続関数だが不連続でも構わない）関数 $f(t)$ で表された外力に対する応答も、同様に、単位衝撃応答を用いて表現できないだろうか。考え易くするために、図のように十分小さい $\Delta\tau$ ずつの短冊に切って（そもそも Riemann 積分をそのように定義したから）考えると、例えば網掛けした部分は、面積 $\Delta\tau f(\tau)$ の衝撃として近似的に取り扱えばいいことがわかる。したがって、この網掛け部分の外力によって生じる応答は

$$\Delta\tau f(\tau) u_1(t-\tau)$$

でいいから、時刻 $t = 0$ 以降にしか外力が作用しなかったとすれば

$$u(t) = \sum_{\tau=0}^{\infty} \Delta\tau f(\tau) u_1(t-\tau)$$

がその応答になることは理解できると思う。Heaviside 関数のおかげで未来は過去に影響しないから ∞ まで加算しても構わない。このあと $\Delta\tau \rightarrow 0$ の極限をとる¹⁶ことによって $\sum \Delta\tau \rightarrow \int d\tau$ になるので、任意外力 $f(t)$ に対する応答は

$$u(t) \rightarrow \int_0^{\infty} d\tau f(\tau) u_1(t-\tau) \Rightarrow u(t) = \int_0^{\infty} u_1(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{9.49}$$

と表現できる。この表現を **Duhamel 積分**と呼んでいる。この解は $t = 0$ における零初期条件の解になっている。このように単位衝撃応答 $u_1(t-\tau)$ は、 $t = \tau$ の瞬間の外力 $f(\tau)$ が全体応答に及ぼす影響を示していることから、静的な構造力学の影響線と数学的には同じものである。数学の、いわゆる **Green 関数**である。

例として、図 9.13 で示した $f_0 \sin p\tau$ に対する零初期条件の応答を求めてみよう。減衰解は面倒なので非減衰の場合を例にすると、同図の横にある解から、正解は

$$\frac{u(t)}{u_{st}} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} \sin p\tau - \frac{p}{\omega} \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} \sin \omega t, \quad u_{st} \equiv \frac{f_0}{k}$$

である。式 (9.49) に $f(\tau) = f_0 \sin p\tau$ であることと式 (9.48) の単位衝撃応答とを代入すると

$$u(t) = \frac{f_0}{m\omega} \int_0^{\infty} \sin p\tau H(t-\tau) \sin \omega(t-\tau) d\tau = \frac{f_0}{m\omega} \int_0^t \sin p\tau \sin \omega(t-\tau) d\tau$$

となる。Heaviside 関数から $t > \tau$ なので、 τ の積分範囲は t までになる。さらに演算すると

$$u(t) = \frac{f_0}{m\omega} \left(\sin \omega t \int_0^t \sin p\tau \cos \omega\tau d\tau - \cos \omega t \int_0^t \sin p\tau \sin \omega\tau d\tau \right)$$

を得るので、この積分を実行すれば解が求められる。これも面倒なので割愛するが、最終的な結果は上の正解と一致する。計算では t と τ の区別を決して間違わないように！

¹⁶ それを Riemann 積分つまり普通の積分の考え方に相当するだろうから。

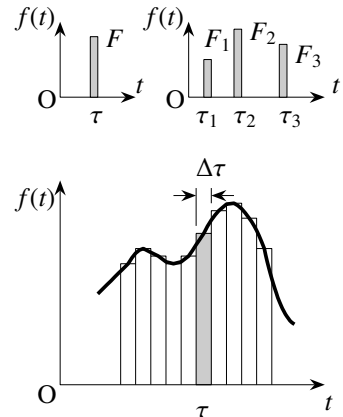


図 9.18 任意外力

(5) Duhamel 積分は正しいか

前節で外力の関数 $f(t)$ を短冊に切ったことを怪しいと思った読者のために証明しておこう。なおこの節は Northwestern 大学の Olmstead 先生 (1980 年頃当時) の ‘Differential Equations of Mathematical Physics’ の講義ノートを参考にした。解きたい問題は

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = f(t), \quad u(0) = 0, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (a)$$

である。一方、 $t = \tau$ に単位衝撃外力が作用した場合の単位衝撃応答 $u_1(t - \tau)$ は次式を満足する。

$$m\ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 + ku_1 = \delta(t - \tau), \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0 \quad (b)$$

ここに $\delta(t - \tau)$ は式 (9.43) で定義した Dirac のデルタ関数である。

さて目的は $u(t)$ を $u_1(t - \tau)$ で表すことだが、その補助のために、単位衝撃問題式 (b) に対する随伴問題と呼ばれる問題を定義する。振動問題は実は自己随伴系ではなく、随伴問題は時刻 $t = \tau_1$ に単位衝撃外力が作用した時の応答 $u_1^*(t - \tau_1)$ に関する終局値問題になり、次式で与えられる。

$$m\ddot{u}_1^* - c\dot{u}_1^* + ku_1^* = \delta(t - \tau_1), \quad u_1^*(\infty) = 0, \quad \dot{u}_1^*(\infty) = 0 \quad (c)$$

ここで、運動方程式の減衰項の符号が負になっていることと、 $t = \infty$ で終局条件が与えられていることに注意して欲しい。この随伴問題と元の問題の「関わりあい (仮想仕事)」を考えるために、式 (a)₁ の両辺に u_1^* を乗じて時間に関して 0 から ∞ まで積分しよう。物理的には仮想仕事を求めていることになり

$$\int_0^\infty u_1^*(t - \tau_1) (m\ddot{u} + c\dot{u} + ku) dt = \int_0^\infty u_1^*(t - \tau_1) f(t) dt \quad (d)$$

という関係が成立する。左辺を部分積分すると

$$\text{左辺} = (u_1^* m \dot{u} - \dot{u}_1^* m u + u_1^* c u) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty u (m \ddot{u}_1^* - c \dot{u}_1^* + k u_1^*) dt$$

となる。この第 1 項に初期条件式 (a)₂ (a)₃ と終局条件式 (c)₂ (c)₃ を代入し、第 2 項の被積分関数の中の括弧部分に式 (c)₁ の運動方程式を代入すれば

$$\text{左辺} = \int_0^\infty u (m \ddot{u}_1^* - c \dot{u}_1^* + k u_1^*) dt = \int_0^\infty u \delta(t - \tau_1) dt = u(\tau_1)$$

となる。最後の等号では、式 (9.43) のデルタ関数の定義を用いた。結局上式 (d) からは

$$\text{上式 (d) の左辺} = u(\tau_1) = \text{上式 (d) の右辺} = \int_0^\infty u_1^*(t - \tau_1) f(t) dt$$

という関係を得る。あるいは t と τ_1 とを入れ替えると

$$u(t) = \int_0^\infty u_1^*(\tau_1 - t) f(\tau_1) d\tau_1 \quad (e)$$

と表される。一見目的に達したようだが、まだ “Close but no cigar!” である。

次に、同様の「関わりあい (仮想仕事)」を単位衝撃の問題と随伴問題の間で考えると

$$\int_0^\infty u_1^*(t - \tau_1) (m\ddot{u}_1 + c\dot{u}_1 + ku_1) dt = \int_0^\infty u_1^*(t - \tau_1) \delta(t - \tau) dt \quad (f)$$

であるから、上の演算と同様にして左辺を部分積分して、初期条件式 (a)₂ (a)₃ と終局条件式 (c)₂ (c)₃ と微分方程式 (c)₁ を代入した上で、デルタ関数の定義を用いれば

$$\text{左辺} = (u_1^* m \dot{u}_1 - \dot{u}_1^* m u_1 + u_1^* c u_1) \Big|_0^\infty + \int_0^\infty u_1 (m \ddot{u}_1^* - c \dot{u}_1^* + k u_1^*) dt = \int_0^\infty u_1(t - \tau) \delta(t - \tau_1) dt = u_1(\tau_1 - \tau)$$

となる。一方、上式 (f) の右辺もデルタ関数の定義を用いれば $u_1^*(\tau - \tau_1)$ となるから、結局、式 (f) からは

$$u_1(\tau_1 - \tau) = u_1^*(\tau - \tau_1) \tag{g}$$

という関係を得る。つまり随判問題は、元の衝撃問題の観測時刻と载荷時刻を入れ替えた問題であることがわかる。静力学の相反定理の式 (3.144) や式 (4.65) と同じである。

最終的にこの式 (g) を式 (e) に代入すれば

$$u(t) = \int_0^\infty u_1(t - \tau_1) f(\tau_1) d\tau_1$$

を得るが、 τ_1 はどんな記号を用いてもいい積分変数に過ぎないから添え字を省略して

$$u(t) = \int_0^\infty u_1(t - \tau) f(\tau) d\tau \tag{9.50}$$

となるので、Duhamel 積分が成立することを証明することができた。

(6) 数値的な解法

社会基盤構造設計の実務上は、後述のように有限要素法を用いてコンピュータによって動的解析をする場合がある。そのとき微分方程式を時間軸方向に積分する際の一つの数値的解析法に、微分を差分と呼ばれる方法で近似して直接解く手法がある。ここでは中央差分 [8] の考え方を簡単に述べておく。十分小さな時間ステップ Δt を設定して時刻 t 前後で

$$u^- \equiv u(t - \Delta t), \quad u \equiv u(t), \quad u^+ \equiv u(t + \Delta t)$$

と定義したとき、その時刻 t における速度と加速度を

$$\dot{u}(t) = \frac{1}{2\Delta t} (u^+ - u^-), \quad \ddot{u}(t) = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{u^+ - u}{\Delta t} - \frac{u - u^-}{\Delta t} \right\} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (u^- - 2u + u^+) \tag{9.51a, b}$$

と近似するのだ。時刻 t の速度は、いわゆる中間値の定理を信じて $t \pm \Delta t$ 間の変位の線形勾配で定義してある。また加速度は、時刻 t の直前直後の変位の線形勾配で定義した速度の変化率で定義してある。これを運動方程式 (9.15) に代入すると

$$\frac{m}{(\Delta t)^2} (u^- - 2u + u^+) + \frac{c}{2\Delta t} (-u^- + u^+) + ku = f(t)$$

となるので、 u^+ を求める式として整理すると

$$u^+ = \frac{1}{\left(\frac{1}{\Delta\tau^2} + \frac{\beta}{\Delta\tau}\right)} \left[\frac{f(t)}{k} - \left(1 - \frac{2}{\Delta\tau^2}\right) u - \left(\frac{1}{\Delta\tau^2} - \frac{\beta}{\Delta\tau}\right) u^- \right], \quad \tau \equiv \omega t, \quad \omega \equiv \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9.52a, b, c}$$

という関係が求められる。つまり、時刻 $t - \Delta t$ と t の変位 u^- と u がわかっているれば、この式から時刻 t の解 u^+ を時々刻々と求めることができる。

ただし、一番最初のステップの $u(-\Delta t)$ が定義されていない上に、初期条件のうちの初速が入力できていない。そこで例えば時刻 $t = 0$ だけ後退差分で

$$\dot{u}(0) = \frac{u(0) - u^-}{\Delta t} = \frac{\text{初期位置} - u^-}{\Delta t} = \text{初速}$$

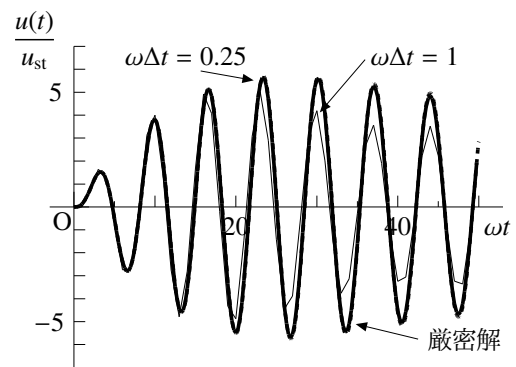


図 9.19 差分法で強制振動を解く

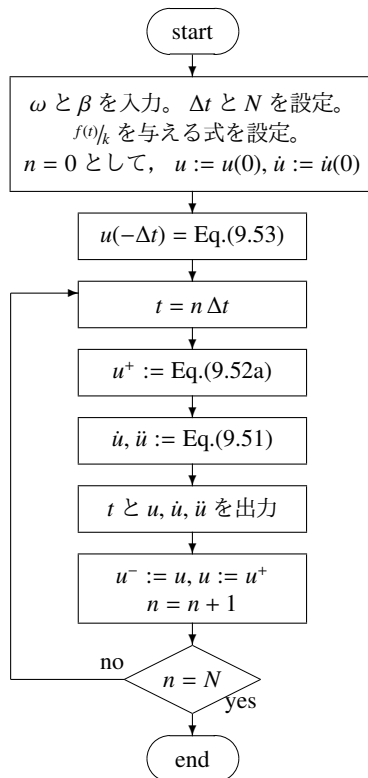


図 9.20 中央差分のフローチャート

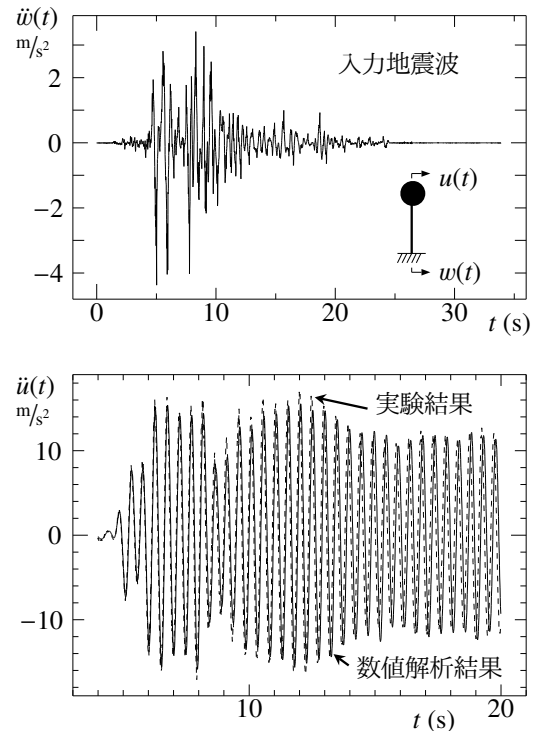


図 9.21 地震応答の例

から u^- を概算することも可能だが、差分のとり方に整合性が無くなる。そこでこれについては、式 (9.51) の二つの式から u^+ を消去して得られる関係

$$u^- = u - \Delta t \dot{u} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \ddot{u}$$

を時刻 $t = 0$ で表現した式の右辺第 3 項に、時刻 $t = 0$ の瞬間の運動方程式から得られる

$$\ddot{u}(0) = \frac{1}{m} \{f(0) - c \dot{u}(0) - k u(0)\}$$

という関係を代入すれば

$$u(-\Delta t) = \left\{1 - \frac{\Delta \tau^2}{2}\right\} u(0) - \Delta \tau (1 + \beta \Delta \tau) \frac{\dot{u}(0)}{\omega} + \frac{1}{2} \Delta \tau^2 \frac{f(0)}{k} \tag{9.53}$$

を得る。これを用いれば時刻 $t = 0$ の u^- を算定でき、初速も入力できる。一例として、図 9.13 と同じ問題を解いた結果を図 9.19 に示した。破線が厳密解なのでほとんど重なって区別できないが、 $\Delta \tau = \omega \Delta t = 0.25$ にした場合の太い実線は十分な精度を持っていることがわかる。これに対し、 $\omega \Delta t = 1$ とした結果の細い実線は厳密解からのずれが時間と共に次第に大きくなる。

図 9.20 には計算のフローチャートを示した。また図 9.21 には、図 9.8 で同定した板バネの基部を地震加速度で揺らしたときの応答に対する数値解析結果（実線）と実験結果（破線）のうち、強制外力が大きい $t \sim 20$ s までの部分だけを示した。入力地震波は、兵庫県南部地震の神戸海洋気象台で観測された加速度の半分であるが、この程度の精度で数値解析ができる。このような積分方法を陽解法と呼んでいる。一般に中央差分による数値積分の「安定性」のためには、時間ステップは系の固有周期の $1/\pi$ より小さくないといけない [8] とされる。図 9.19 の最初の例では無次元化した時間 τ で固有周期は 7 程度なので、 $\omega \Delta t = 1$ は安定性のためには十分に解

析は継続できているが、「正確性」についてはもっと小さい時間ステップが必要だということを示している。そもそも微分 dt は $\Delta t \rightarrow 0$ の極限だから当たり前だ。

演習問題 9-3

8. 減衰系に正弦波外力 $f_0 \sin pt$ が作用したときの応答を Duhamel 積分を用いて求め、図 9.13 の結果と一致することを示せ。
9. 同じ応答を差分法でも求めてみよう。
10. 図 9.22 のような、ある時間だけ作用する一定外力が減衰系に作用したときの応答を Duhamel 積分を用いて求め、縦軸に $u_{st} \equiv \frac{f_0}{k}$ としたときの $\frac{u(t)}{u_{st}}$ をとり、横軸に ωt をとったときの図を描け。ただし、 $\beta = 0.02$, $\omega t_1 = 10$, $\omega t_2 = 30$ として、 $0 \leq \omega t \leq 100$ 程度までを図示せよ。この外力は Heaviside 関数を用いれば

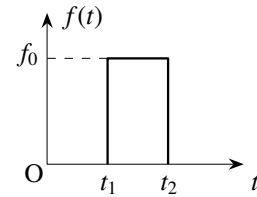


図 9.22 一時的な一定外力

$$f(t) = f_0 \{H(t - t_1) - H(t - t_2)\}$$

と表すことができることを用い、また Duhamel 積分も式 (9.47) のように Heaviside 関数を含んだままの単位衝撃応答を用いて計算すると、場合分けをせずに楽に間違い無く答を得ることができる。

11. 図 9.22 の外力に対する応答を差分法で求め、Duhamel 積分の答と比較せよ。
12. 時刻 $t = \tau$ に単位衝撃加速度が支点に与えられたときの相対変位の条件が $\dot{v}(\tau) = -1$ であることを示せ。

(7) 衝撃外力の近似

数値解析で落石のような衝撃外力を扱うことがあるだろう。また部材の破断による動的応答を対象とする場合に、破断を衝撃外力でモデル化するかもしれない。そこで上の演習問題の 10 番で得た解析解（この節では数値解析はしていない）を使って、図 9.16 のような有限な時間幅 $\epsilon \rightarrow \delta t$ を持つ一定外力で衝撃応答をどのくらい近似できるか検討しておこう。上の問題の図 9.22 で $t_1 = 0$, $t_2 = \delta t$ として $f_0 = \frac{F}{\delta t}$ とすれば、時刻 $t = 0$ における力積 F の衝撃力を近似したことになる。この $\delta t \rightarrow 0$ の極限が真の衝撃外力であるが、種々の大きさを持つ有限な δt に対する応答解を図 9.23 に示した。まず左側の図に一点鎖線で描いたのが真の衝撃応答なので、それと比べることによって、もし時間方向の誤差（ずれ）に対しても十分な精度を確保するためには、この減衰定数 $\beta = 0.02$ の場合には $\omega \delta t = 0.01$ 程度より短い時間の近似衝撃外力を用いる必要があることがわかる。あるいは少し精度を緩めて、応力等の応答の最大値（振幅）だけを精度よく求めたい場合には、右側の図からわかるように $\omega \delta t = 0.2$ 程度以下であればよさそうだ。例えば $m = 1,000 \text{ kg}$ の岩塊が $h = 5 \text{ m}$ の高さから落ちて突然止まるくらいの衝撃力だとすると、その力積は $F = m \sqrt{2hg} = 9.9 \text{ kN} \cdot \text{s}$ 程度になる。したがって、もし $\omega \delta t = 0.01$ 程度の力の作用時間で、例えば周期が 0.5 s の構造への衝撃力を近似するのであれば、結局 $f_0 = 12 \text{ MN}$ の力を $\delta t = 0.00080 \text{ s}$ 間与えなければならないことを意味する。なお多自由度系の衝撃応答を検討する場合には高周波（大きな ω ）側の応答も重要になる場合もあり、それも精度よく求めるためにはさらに大きな力のさらに短時間の作用にする必要があるので注意が必要になる。

(8) 複素応答 — 不規則外力応答のための準備

次節の不規則応答を取り扱うために必要なのだが、 $\exp(ipt)$ という外力に対する応答を考える。これを複素応答と呼ぶ。つまり

$$f(t) = f_0 \exp(ipt) = f_0 (\cos pt + i \sin pt) \tag{9.54}$$

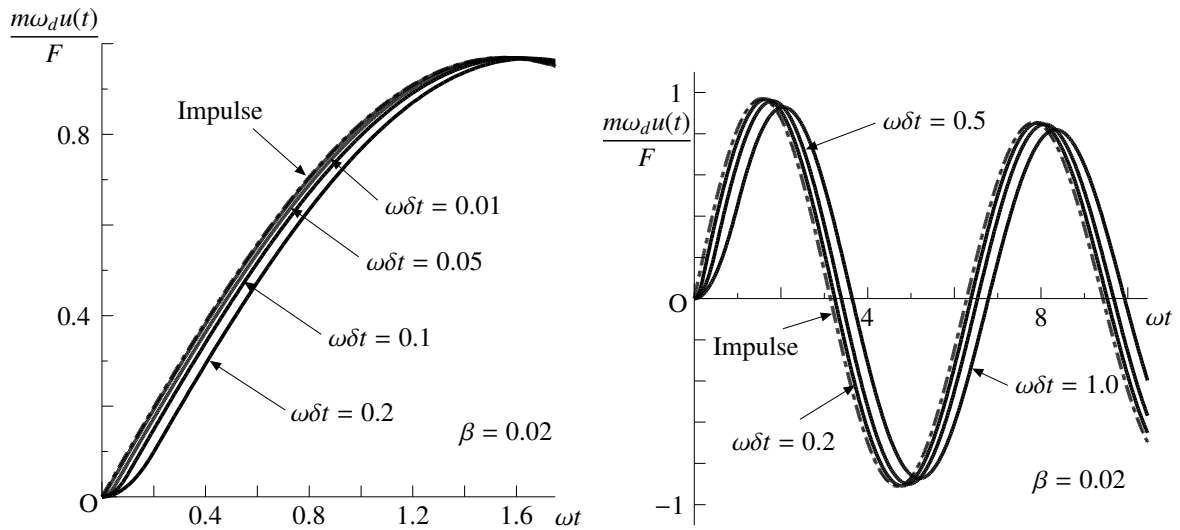


図 9.23 衝撃外力を短時間の载荷で近似すること

なので、正弦波応答と余弦波応答を同時に求めようとしていると考えてもいい。これに対する応答も同様に $u(t) = \phi \exp(ipt)$ と置くことができそうだ。 ϕ は複素数である。これを運動方程式 (9.15) に代入すると

$$(-p^2 + 2i\beta\omega p + \omega^2) \phi \exp(ipt) = \frac{f_0}{m} \exp(ipt)$$

となるので、 $m\omega^2 = k$ を用いると

$$\phi = f_0 \mathcal{H}(ip), \quad \mathcal{H}(ip) \equiv \frac{1}{m} \frac{1}{(\omega^2 - p^2) + 2i\beta\omega p} = \frac{1}{k} \frac{1}{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\} + 2i\beta\left(\frac{p}{\omega}\right)} \quad (9.55a, b)$$

と求められ、複素応答は

$$u(t) = f_0 \mathcal{H}(ip) \exp(ipt) = \mathcal{H}(ip) \times f(t) \quad (9.56)$$

と表すことができる。したがって $\mathcal{H}(ip)$ は単位の周期外力に対する応答の振幅に相当するので、周波数（振動数）応答関数と呼ばれる。この関数の虚部が第 9.1.3 (1) 節で求めた正弦波応答になっている。 $\mathcal{H}(ip)$ の負の偏角を α とすると

$$\mathcal{H}(ip) = |\mathcal{H}(ip)| \exp(-i\alpha), \quad \alpha \equiv -\arg(\mathcal{H}(ip)) \quad (9.57a, b)$$

とも書くことができ

$$|\mathcal{H}(ip)| = \frac{1}{k} \frac{1}{\sqrt{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\}^2 + 4\beta^2 \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}}, \quad \tan \alpha = \frac{2\beta \frac{p}{\omega}}{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2}$$

となるから、式 (9.35b) と比較すれば明らかなように、動的増幅率 M_D と $|\mathcal{H}(ip)|$ の関係は

$$|\mathcal{H}(ip)| = \frac{M_D}{k} \rightarrow u(t) = u_{st} M_D \exp\{i(pt - \alpha)\} \quad (9.58)$$

であり、 α は式 (9.35c) で定義された位相の遅れである。

また第 9.1.3 (2) 節で説明したような支点を強制的に変位させた場合も同様に

$$w(t) = w_0 \exp(ipt)$$

と置けば

$$\phi = w_0 \frac{p^2}{(\omega^2 - p^2) + 2i\beta\omega p}$$

と求められるので、支点との相対変位が

$$v(t) = w_0 \mathcal{H}_w(ip) \exp(ipt), \quad \mathcal{H}_w(ip) \equiv \frac{\left(\frac{p}{\omega}\right)^2}{\left\{1 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2\right\} + 2i\beta \frac{p}{\omega}} \quad (9.59a, b)$$

と表され、 $|\mathcal{H}_w(ip)| = M_w$ で、 $\alpha = -\arg(\mathcal{H}_w(ip)) = -\arg(\mathcal{H}(ip))$ である。

さて、 $f_0 = 1$ の単位の周期外力に対する応答は式 (9.56) から

$$u(t) = \mathcal{H}(ip) \exp(ipt) \quad (*)$$

となる。これと同じ解は Duhamel 積分でも求めることができる。ここでは $t = -\infty$ に初期条件が与えられて、それ以降継続して振動し続けているものとする。よって $f(\tau) = \exp(ipt)$ を代入した Duhamel 積分は

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t - \tau) \exp(ipt) d\tau$$

と書くことができる。ここで $s = t - \tau$ という変数変換をすると、 $ds = -d\tau$, $s: \infty \rightarrow -\infty$ なので上式は

$$= - \int_{\infty}^{-\infty} u_1(s) \exp\{ip(t - s)\} ds = \exp(ipt) \int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) \exp(-ips) ds$$

と書き直すことができる。この最後の表現と上の式 (*) を比較すれば

$$\mathcal{H}(ip) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t) \exp(-ipt) dt \iff \mathcal{H}(ip) = \mathcal{F}\{u_1(t)\} \quad (9.60)$$

という関係にある。すなわち、周波数応答関数 $\mathcal{H}(ip)$ は単位衝撃応答 u_1 の Fourier 変換 (式 (9.64b) の \mathcal{F}) になっている。Fourier 変換については第 9.1.4 (1) 節で説明する。周期外力応答と単位衝撃応答は特性が全く異なる別々の応答だと思っていたが、実は本質的には同じものであるという式 (9.60) の関係、あるいは

$$M_D = k |\mathcal{F}(u_1)|$$

という関係が存在することが明らかになった。これはちょっと面白くありませんか。というのも、衝撃応答には周期運動の要素は含まれていないように感じるからだ。しかし逆に、上の関係式およびその誘導からも明らかかなように、衝撃応答はすべての周波数の応答を含んでいると考えられるのである。

9.1.4 不規則応答

(1) 準備その 1 — Fourier 変換

前の節までの外力や応答のほとんどの図の横軸には時刻 t をとっていた。しかし、例えば異なる日時に同じ活断層で発生した二つの地震波が同じ地盤を経て到達したとしても、その時間軸上の加速度波形等の「時刻歴」が同じにはならないのは当然だろう。それは断層上の破壊の広さや向きが少々異なるからだだろう。しかし、同じ活断層から同じ地盤を経た二つの波が持つ特性の一つの「周波数成分の分布」には、あまり違いは無いのではないだろうか、と期待している。そこで横軸に周波数をとった図で設計することを考えよう。実はそういうアプローチは既に一度やっている。そう共振曲線だ。共振曲線の横軸は外力の周波数だ。その外力周波数が系の固有周波数に近づくと振幅が大きくなる。この図を用いて系の設計、つまり m と k の設計ができることも既に述べた。これをここではもう少し一般化する。

そのような、横軸に周波数をとったもので読者が既に知っているもう一つの代表は Fourier 係数だろう。ただその Fourier 係数は、最大周期 T が定義できる周期的な信号の処理を前提とした離散的な周波数特性のパラメータだった。これに対し地震波の記録を見れば明らかなように、二度と繰り返されない不規則信号には最大周期 T を定義できない。あるいは、それは $T = \infty$ と考えなければならないということになる。そこで Fourier 級数から議論を始め、その最大周期を無限大にとったときの扱いを紹介し、それをういた設計法について簡単に述べよう。さて、外力がほぼ周期的な関数 $f(t)$ だった場合、それを最大周期 T の Fourier 級数で

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos npt + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin npt, \quad a_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cos npt \, dt, \quad b_n = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \sin npt \, dt \tag{9.61a, b, c}$$

と表してもいいことはわかっている。ここに p は最小振動数 $p = \frac{2\pi}{T}$ である。これを式 (9.56) (9.57) に代入して応答を求め、簡単のために a_0 には目をつぶると大雑把には

$$u(t) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n |\mathcal{H}(inp)| \cos(npt - \alpha) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n |\mathcal{H}(inp)| \sin(npt - \alpha)$$

となることから

$$|\text{応答の Fourier 係数}(np)| \sim |\mathcal{H}(inp)| \times |\text{外力の Fourier 係数}(np)|$$

という関係が成り立つ。

例えば外力の Fourier 係数の絶対値は、外力の中の np ($n = 1, 2, \dots, \infty$) の周波数成分の「強さ」を表している。社会基盤構造を設計して \mathcal{H} (共振曲線) を設定し、上式のように外力の Fourier 係数をそれに乗ずると応答の Fourier 係数の絶対値つまり np の周波数成分

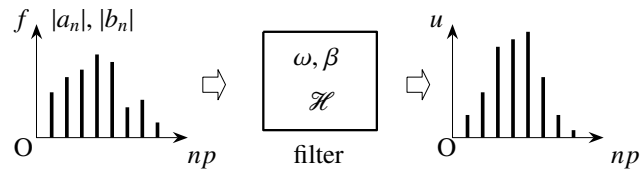


図 9.24 不規則応答の考え方

の「強さ」が求められる。もし、この応答の「強さ」が材料や構造が抵抗できる「強さ」よりも大きくなってしまえば、その構造は破壊してしまう。つまり例えば地震の外力を念頭に置いたとき、図 9.24 に示したように、構造や地盤は外力信号を処理する「フィルター」の役目をしていて、それを動的に設計する際には、この応答の Fourier 係数 (一番右の図) が所定の大きさを超えないように、材料や構造つまり ω と β つまり \mathcal{H} を適切に設計すればいいことになる。以下、もう少し丁寧に、しかし天下りの説明しておこう。

式 (9.61a) に Euler の公式¹⁷

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}, \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \tag{9.62a, b}$$

を代入して整理すると

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2} (e^{inpt} + e^{-inpt}) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{2i} (e^{inpt} - e^{-inpt}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} + \frac{b_n}{2i} \right) e^{inpt} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{2} - \frac{b_n}{2i} \right) e^{-inpt}$$

と表すことができる。そこで式 (9.61b) (9.61c) からは $n = 0$ も含めて

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{2} \pm \frac{b_n}{2i} &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \left(\cos npt \pm \frac{1}{i} \sin npt \right) d\tau = \frac{1}{2T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \left\{ e^{inpt} + e^{-inpt} \mp (e^{inpt} - e^{-inpt}) \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{\mp inpt} d\tau \end{aligned}$$

¹⁷ 文献 [118] で使われて一般の人達にも知られることになったが、五つの基本量間の関係式 ' $e^{i\pi} + 1 = 0$ ' は確かに驚くべき関係ではないだろうか。ちなみに $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ と METAFONT が完成すると Version はそれぞれ π と e になる。

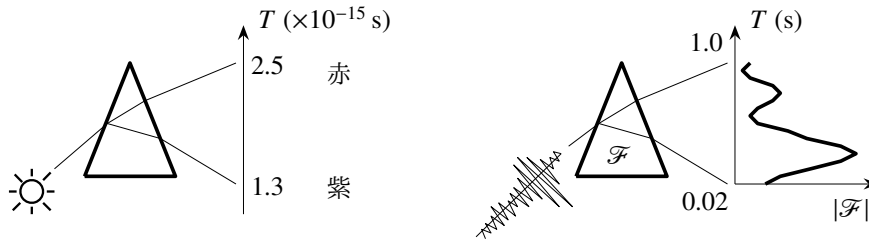


図 9.25 Fourier 変換はちょうど光学プリズムのようなもの

となるので、上式に代入し直すと

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{inpt} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-inp\tau} d\tau + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-inpt} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{inp\tau} d\tau \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{inpt} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-inp\tau} d\tau + \sum_{n=-1}^{-\infty} e^{inpt} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-inp\tau} d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{inpt} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) e^{-inp\tau} d\tau
 \end{aligned}$$

という関係を得る。これは複素 Fourier 級数と呼ばれ、結局

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(p) \exp(inpt), \quad c_n(p) = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \exp(-inp\tau) d\tau \quad (9.63a, b)$$

と表すことができる。この c_n は複素 Fourier 係数と呼ばれる。

これ以降は少し乱暴な演算をするが、 $\Delta p = \frac{2\pi}{T}$, $p_n = n\Delta p$ と置くと上式 (9.63) のすぐ上の関係式の表現は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(ip_n t) \Delta p \int_{-T/2}^{T/2} f(\tau) \exp(-ip_n \tau) d\tau$$

と書くことができる。ここで $T \rightarrow \infty$ とすることによって、 $\Delta p \rightarrow 0$, $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \Delta p \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} dp$ と置き換えられると同時に、離散量の p_n も連続量になるから $p_n \rightarrow p$ と置き直せば、上式は

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ip t) dp \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-ip\tau) d\tau$$

となるので、結局

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(ip) \exp(ip t) dp \Rightarrow \mathcal{F}^{-1}(F), \quad F(ip) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) \exp(-ip\tau) d\tau \Rightarrow \mathcal{F}(f) \quad (9.64a, b)$$

という関係を得る。式 (9.64b) が関数 $f(t)$ の Fourier 変換であり、式 (9.64a) が Fourier 逆変換である。なお、指数関数の符号が逆に定義されている場合や、逆変換の積分の前だけに $1/2\pi$ とする代わりに、両方の積分の前に $1/\sqrt{2\pi}$ と定義する場合があるので注意して欲しい。いずれにしても物理的な意味は変わらない。

突然複素数が出てきて Fourier 変換と聞いただけでわけがわからなくなったかもしれないが、ちょうど図 9.24 の左側の f の Fourier 係数の分布のように、この Fourier 変換の「値」は、ある信号 $f(t)$ に含まれる成分の大きさを「連続的な」周波数毎に表していると考えればいい。そして Fourier 変換という「アクション・操作」は、ちょうど分光プリズムの役割と同じだと考えればいい。プリズムに白色光を当てると、波長が 700 nm くらいの赤（周波数の逆数の周期に換算すると 2.5×10^{-15} s くらい）から、波長が 300 nm くらいの紫¹⁸（周期が 1.3×10^{-15} s くらい）までに分解された別々の可視光として目で見ることができる。地震加速度や構造の不規則応答も、ちょうど図 9.25 の右側に示したように、Fourier 変換というプリズムを通して、例えば社会基盤構造にとって重要な 1 s くらいまでの周期成分毎に分解して取り扱おうとしているわけだ。つまりこの節の最初に記したように、外力や応答の時間の関数 $f(t)$ そのものではなく、その関数を持っている周波数毎の「強さ」の分布 $F(ip)$ を用いて振動挙動を考察しようとしているのだ。

¹⁸ Northwestern 大学の school color は紫である。我が国の Northeastern 大学のロゴも紫（宮城県と仙台市の花である萩の色）と黒だ。

(2) 準備その2 — 波のスペクトル解析

不規則応答の代表例は地震応答である。それに対する外力としての入力地震波（加速度）も不規則信号だ。いずれも統計量としての平均値はほぼ零なので¹⁹関心は無い。興味があるのは力や応答の「強さ」だから振幅の2乗、あるいは分散が最重要な統計量の一つであろう。そこで文献を見ると信号 $f(t)$ の分散は

$$\sigma_f^2 \equiv \{f(t) \text{ の 2 乗平均} \} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(ip)|^2}{T} \right\} dp \quad (9.65)$$

と定義してもいいらしい。ここに $F(ip)$ は $f(t)$ の Fourier 変換である。この被積分関数を

$$S_f(p) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(ip)|^2}{T} \quad (9.66)$$

と記し、 $f(t)$ のパワースペクトル密度関数と呼ぶ。例えば

1. もし、ある信号 $f(t)$ にすべての周波数成分が均等に含まれている場合には、 $S_f(p)$ は一定になる。このような信号はホワイトノイズと呼ばれる。
2. また $f(t) = \sin qt$ のように、1種類の周波数 q しか含まれていない場合には $S_f(p) = \delta(p - q)$ になる。この式の δ は式 (9.43) の Dirac のデルタ関数である。

の二つが一番わかり易い例である。ちなみに $|F(ip)|$ を **Fourier** スペクトルと呼んでいる。

これに対し、ある外力 $f(t)$ の、時間 τ だけずれた同じ信号との積の期待値

$$R_f(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t + \tau) dt \quad (9.67)$$

を自己相関関数と²⁰呼ぶ。 $f(t)$ が周期関数なら、 τ が周期の倍数のときに最も相関が高くなることから、この自己相関関数も何らかの周期特性を表現していることが予想される。ちなみに

$$R_f(0) = \sigma_f^2$$

である。この自己相関関数を Fourier 変換すると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\tau) \exp(-ip\tau) d\tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t + \tau) \exp(-ip\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f(t + \tau) \exp(ip\tau) \exp(-ip(t + \tau)) d\tau \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(ip\tau) dt \int_{-\infty}^{\infty} f(t + \tau) \exp(-ip(t + \tau)) d(t + \tau) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} F(-ip) F(ip) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|F(ip)|^2}{T} = S_f(p) \end{aligned}$$

のように、パワースペクトル密度関数になる。つまり

$$S_f(p) = \mathcal{F} \{ R_f(\tau) \}, \quad R_f(\tau) = \mathcal{F}^{-1} \{ S_f(p) \} \quad (9.68a, b)$$

という関係が成立し、これを **Wiener-Khintchine** の関係²¹と呼んでいる。

¹⁹ 応答には最終的な残留変形が生じる場合もあるから平均値は零とは限らないが、動的効果としては興味が無いのである。

²⁰ $(f * g)(\tau) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(t) g(\tau - t) dt$ のような積分をたたみ込み積分と呼ぶ。

²¹ 文献によっては、KhinchinあるいはKhinchineという表記もある。

(3) 不規則外力に対する変位応答

いよいよ不規則な外力に対する変位応答を求めよう。時間軸における時刻歴応答を求めたいなら Duhamel 積分や数値手法を用いればいい。しかし前述したように不規則外力に対する応答も不規則であり、やはり周波数の関数として取り扱った方が物理的には意味がありそうだ。ここでは、その把握の方法を示しておく。1自由度系の応答 $u(t)$ の自己相関関数を、外力の場合と同様

$$R_u(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} u(t) u(t + \tau) dt \quad (9.69)$$

と定義する。これに Duhamel 積分の $u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t - \xi) f(\xi) d\xi$ を代入すると

$$R_u(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t - \xi) f(\xi) d\xi \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_1(t + \tau - \eta) f(\eta) d\eta \right\} dt$$

と書くことができる。ここで $s = t - \xi$, $\zeta = t + \tau - \eta$ という変数変換をすると

$$\begin{aligned} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) f(t - s) ds \right\} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\zeta) f(t + \tau - \zeta) d\zeta \right\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) ds \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\zeta) d\zeta \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t - s) f(t + \tau - \zeta) dt \right\} \end{aligned}$$

を得、さらに $\xi = t - s$ の変数変換をすると f の自己相関関数が現れ

$$= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) ds \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\zeta) d\zeta \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2-s}^{T/2-s} f(\xi) f(\xi + \tau + s - \zeta) d\xi \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) u_1(\zeta) R_f(\tau + s - \zeta) ds d\zeta$$

となる。

最終的に応答のパワースペクトル密度関数は、上式の自己相関関数を Fourier 変換して

$$S_u(p) = \int_{-\infty}^{\infty} R_u(\tau) \exp(-ip\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) u_1(\zeta) R_f(\tau + s - \zeta) \exp(-ip\tau) ds d\zeta d\tau$$

という表現になる。ここで変数変換を $\eta = \tau + s - \zeta$ とすると

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) u_1(\zeta) R_f(\eta) \exp\{-ip(\eta + \zeta - s)\} ds d\zeta d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u_1(s) \exp(ip s) ds \int_{-\infty}^{\infty} u_1(\zeta) \exp(-ip\zeta) d\zeta \int_{-\infty}^{\infty} R_f(\eta) \exp(-ip\eta) d\eta \\ &= \mathcal{H}(ip) \mathcal{H}(-ip) S_f(p) \end{aligned}$$

となるので、結局

$$S_u(p) = |\mathcal{H}(ip)|^2 S_f(p) \quad (9.70)$$

という関係が求められる。あるいは式 (9.58) を用いると

$$S_u(p) = \left(\frac{M_b}{k} \right)^2 S_f(p)$$

という関係でもある。このことから、もし現場の実構造に $S_f(p)$ が一定のホワイトノイズを作用させれば、測定される応答の $S_u(p)$ がそのまま共振曲線 (の2乗) に相当する。例えば自動車等が載っていない橋梁で真夜中に観測される微弱な振動 (常時微動と呼ぶ) を測定すれば、それはほとんどホワイトノイズのような幅の広い周波数帯でほぼ同じパワーを持った外力 (周辺環境から伝わってくる種々雑多な動的作用) に対する応答だと近似できるので、そのデータがその橋梁の共振曲線つまり周波数応答関数の絶対値に相当する。

では設計の段階で式(9.70)を用いる場合は、示方書等に規定された外力のパワースペクトル密度関数を代入して得られる応答のパワースペクトル密度関数が所定の条件を満足するように（構造が破壊しないように）、構造や材料を選択してフィルタ $\mathcal{H}(ip)$ を設計

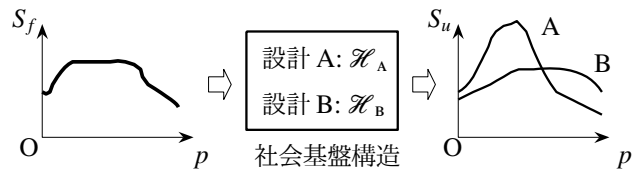


図 9.26 連続スペクトルと設計

すればいいことになる。図 9.24 では Fourier 級数を用いていたのでスペクトルが p 刻みに表現された離散的なものだったのに対し、外力そのものに最大周期というものが定義できない地震外力のような不規則外力とその応答を考察する場合には、図 9.26 のように連続的な周波数で関数表示された $S_f(p)$ や $S_u(p)$ といった連続スペクトルを用いるのである。この図のような場合には、設計 B の方が動的安全性の観点からは望ましいと考えていだろう。

(4) 加速度応答と入力地震

耐震設計のことを最後に考えておく。式(9.38)のように、設計しつつある構造の質量に地盤の地震加速度を乗じたものが見かけの外力だ。つまり前節の $f(t)$ には、標準的な地震加速度 \ddot{w} を $-m\ddot{w}$ として入力すればいいように思われるが、実際にはそうっていない。文献[177]を斜めに読むと、ある固有振動数（周期）を持つ 1 質点系に標準的な地震加速度を入力して得ることができる絶対加速度「応答 \ddot{u} 」の最大値を、基部に与える入力地震加速度にしている。なんとなく逐次代入法の（否、屋上屋を架す、あるいは無闇に安全を確保しようとする）ようで第 1 著者には理解できないが、構造の過渡応答等も含めて適切な入力加速度を求めるためにそのようにして設計するとされている。これが、我が国の社会基盤構造が耐震設計規定の範囲で長年にわたって安全であり続けている理由・工夫なのだろう。

まず Duhamel 積分表現に式(9.47)の単位衝撃応答を代入すると

$$u(t) = \int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{m\omega_d} \exp\{-\beta\omega(t-\tau)\} H(t-\tau) \sin\{\omega_d(t-\tau)\} d\tau$$

と変位が表される。これを t で微分すると

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{m\omega_d} e^{-\beta\omega(t-\tau)} [-\beta\omega H(t-\tau) \sin\{\omega_d(t-\tau)\} + \delta(t-\tau) \sin\{\omega_d(t-\tau)\} + \omega_d H(t-\tau) \cos\{\omega_d(t-\tau)\}] d\tau \\ &= \int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{m\omega_d} e^{-\beta\omega(t-\tau)} H(t-\tau) [-\beta\omega \sin\{\omega_d(t-\tau)\} + \omega_d \cos\{\omega_d(t-\tau)\}] d\tau \end{aligned}$$

と表される。被積分関数の第 2 項は、デルタ関数の定義から零になる。これを運動方程式に代入すれば加速度が求められるが、ここでは再度 t で微分すると

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= -\beta\omega \left(\int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{m\omega_d} e^{-\beta\omega(t-\tau)} [-\beta\omega H(t-\tau) \sin\{\omega_d(t-\tau)\} + \delta(t-\tau) \sin\{\omega_d(t-\tau)\} + \omega_d H(t-\tau) \cos\{\omega_d(t-\tau)\}] d\tau \right) \\ &\quad + \omega_d \left(\int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{m\omega_d} e^{-\beta\omega(t-\tau)} [-\beta\omega H(t-\tau) \cos\{\omega_d(t-\tau)\} + \delta(t-\tau) \cos\{\omega_d(t-\tau)\} - \omega_d H(t-\tau) \sin\{\omega_d(t-\tau)\}] d\tau \right) \\ &= -\beta\omega \left(\int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{m\omega_d} e^{-\beta\omega(t-\tau)} H(t-\tau) [-\beta\omega \sin\{\omega_d(t-\tau)\} + \omega_d \cos\{\omega_d(t-\tau)\}] d\tau \right) \\ &\quad + \omega_d \left(\int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{m\omega_d} e^{-\beta\omega(t-\tau)} H(t-\tau) [-\beta\omega \cos\{\omega_d(t-\tau)\} - \omega_d \sin\{\omega_d(t-\tau)\}] d\tau \right) + \frac{f(t)}{m} \\ &= (\beta^2\omega^2 - \omega_d^2) \int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{m\omega_d} e^{-\beta\omega(t-\tau)} H(t-\tau) \sin\{\omega_d(t-\tau)\} d\tau \\ &\quad - 2\beta\omega\omega_d \int_0^{\infty} \frac{f(\tau)}{m\omega_d} e^{-\beta\omega(t-\tau)} H(t-\tau) \cos\{\omega_d(t-\tau)\} d\tau + \frac{f(t)}{m} \end{aligned}$$

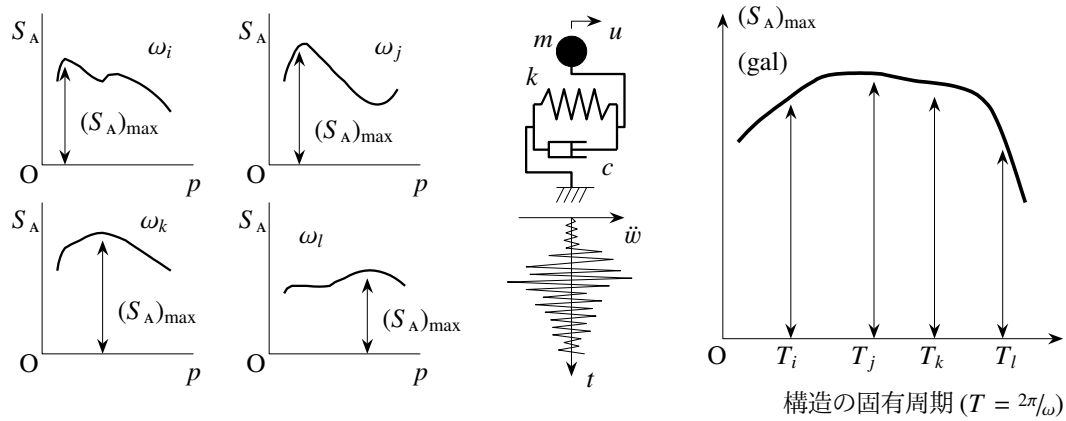


図 9.27 加速度応答と入力地震

となる。これを用いて式 (9.37) から相対変位 v を表し、式 (9.38) から $f(t) = -m\ddot{w}$ を代入すると

$$\ddot{v} = \frac{(\omega_d^2 - \beta^2\omega^2)}{\omega_d} \int_0^\infty \ddot{w}e^{-\beta\omega(t-\tau)}H(t-\tau) \sin\{\omega_d(t-\tau)\} d\tau + 2\beta\omega \int_0^\infty \ddot{w}e^{-\beta\omega(t-\tau)}H(t-\tau) \cos\{\omega_d(t-\tau)\} d\tau - \ddot{w}$$

を得る。再度式 (9.37) を用いれば、絶対変位の加速度を

$$\ddot{u}(t) = \ddot{v} + \ddot{w} = \omega_d \int_0^\infty \tilde{u}_1(t-\tau) \ddot{w}(\tau) d\tau \tag{9.71}$$

と表すことができる。ここに

$$\tilde{u}_1(t-\tau) \equiv \exp\{-\beta\omega(t-\tau)\} H(t-\tau) \left\{ \frac{1-2\beta^2}{1-\beta^2} \sin\{\omega_d(t-\tau)\} + \frac{2\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \cos\{\omega_d(t-\tau)\} \right\} \tag{9.72}$$

と定義した。したがって、加速度応答のスペクトル密度関数は地盤加速との間で

$$S_A(p) = \omega_d^2 \left| \tilde{\mathcal{H}}(ip) \right|^2 S_E(p), \quad \tilde{\mathcal{H}}(ip) \equiv \mathcal{F}\{\tilde{u}_1(t)\} \tag{9.73a, b}$$

という関係になる。ここで S_A は 1 質点系の加速度応答 \ddot{u} のスペクトル密度関数で、 S_E はその 1 質点系に与えた入力地震加速度 \ddot{w} のスペクトル密度関数である。

そこで現耐震設計法では、標準的な設計用の入力地震加速度 \ddot{w} をある固有振動数（周期） ω_i を持つ 1 自由度系に入力して式 (9.73) を用いて加速度応答を求め、そしてその最大値 $(S_A)_{\max}$ を、固有振動数（周期） ω_i を持つ構造に対する入力地震としてその構造の基部に与えることになっている。考え方を簡単に図 9.27 に示した。文献 [177] には加速度の単位でこの最大値 $(S_A)_{\max}$ が与えられている。例えば 1 自由度系を設計する場合には、設計して得た ω で固有周期 T を求め、この右の図からその T の値に対応した最大加速度応答 $(S_A)_{\max}$ を求める。そして、設計して得た質量 m をそれに乗じた $m \times (S_A)_{\max}$ をその質点に外力として作用させたときのバネの抵抗力を算定し、それが破壊しないレベルにあるかどうかを確かめるのである。

9.2 多自由度系の振動

9.2.1 2 自由度系の振動

(1) 運動方程式

1 自由度系の節では振動問題の最も重要な「固有振動数」という概念を誘導し、設計に少しでも関連付けながらその意味を示した。もちろん、社会基盤構造を 1 質点系で近似するのはかなり乱暴な行為であることは容

易に想像できるが、読者の多くは既に有限要素法を知っていて、任意の初期値境界値問題が多自由度系の問題で近似できることも知っているだろう。ここではその基礎として、複数の質点から成る多自由度系を対象として「固有振動モード」というもう一つの重要な概念について説明する。そのためには、まず運動方程式を誘導する必要があるが、この方程式を求めるといふ訓練をする場は教育現場にはほとんど無いのが現実ではないだろうか。文献[187]では、義務教育以来国語という科目があって多くの文章を書かされて採点されるにもかかわらず、その書き方技術の教育の場が一切存在しないことを問題視している。運動方程式や支配方程式を誘導する技術教育も、我が国ではこの国語における文書作成技術教育とほぼ同じ状況にある。運動方程式の誘導はNewtonの法則の非常に簡単な応用に他ならない²²ので、できるだけ答を見ないで各自努力して欲しい。これは、東北大学の北原道弘先生が振動の授業で学生に期待した修得目標の一つである。

二組のバネとダッシュポットを挟ん

で二つの質点が直列に並んでいる図9.28

の系は、二つの質点が連成（連立）しながら、しかし自由に動くことができるので2自由度系と呼ばれる。同じ図の右側に描いた力のダイアグラムから、

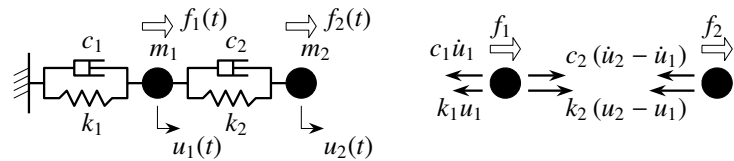


図 9.28 2 自由度系の振動

ら、質点1に作用している右方向（変位 u_1 方向）の力の総和は

$$f_1 - k_1 u_1 - c_1 \dot{u}_1 + k_2 (u_2 - u_1) + c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

である。一方、質点2の場合は

$$f_2 - k_2 (u_2 - u_1) - c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1)$$

である。したがって、2質点のNewtonの法則はそれぞれ

$$f_1 - k_1 u_1 - c_1 \dot{u}_1 + k_2 (u_2 - u_1) + c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = m_1 \ddot{u}_1, \quad f_2 - k_2 (u_2 - u_1) - c_2 (\dot{u}_2 - \dot{u}_1) = m_2 \ddot{u}_2$$

となる。1自由度系の運動方程式と同じ順番になるように整理すると

$$m_1 \ddot{u}_1(t) + (c_1 + c_2) \dot{u}_1(t) - c_2 \dot{u}_2(t) + (k_1 + k_2) u_1(t) - k_2 u_2(t) = f_1(t),$$

$$m_2 \ddot{u}_2(t) - c_2 \dot{u}_1(t) + c_2 \dot{u}_2(t) - k_2 u_1(t) + k_2 u_2(t) = f_2(t)$$

が2自由度系の連立した運動方程式である。これを行列表示すると

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (9.74)$$

となる。ここに \mathbf{u} を変位ベクトル、 \mathbf{f} を外力ベクトル、 \mathbf{M} を質量行列、 \mathbf{C} を減衰行列、 \mathbf{K} を剛性行列と呼び

$$\mathbf{u}(t) \equiv [u_1(t) \ u_2(t)]^T, \quad \mathbf{f}(t) \equiv [f_1(t) \ f_2(t)]^T, \quad (9.75a, b)$$

$$\mathbf{M} \equiv \begin{pmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} \equiv \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{K} \equiv \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{pmatrix} \quad (9.75c, d, e)$$

のように定義した。式(9.74)は時間に関する二つの未知関数 $u_1(t)$, $u_2(t)$ の2階の連立微分方程式なので、初期条件が四つ必要になる。それは二つの質点の、それぞれの初期位置と初速の合計四つでいいから

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0 \quad (9.76a, b)$$

と表すことができる。 \mathbf{u}_0 , \mathbf{v}_0 は式(9.75a)の変位ベクトルに対応した初期位置ベクトルと初速ベクトルである。

²² とは言いながら、著者も微分方程式の誘導は苦手だ。毎年の定期試験でも3自由度系までの運動方程式の誘導で数名の学生が間違っ。力の向きのミスから現れる剛性行列等の対角項の負の成分を気にしないし、次元の違いも確認しないのだ。

(2) 非減衰自由振動

最も基本的な振動特性を調べるために、最初是非減衰の自由振動を考え、 \mathbf{C} と \mathbf{f} を無視した運動方程式

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (9.77)$$

を対象にしよう。1 自由度系の振動解と同じように（ただしベクトルなので）

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{A} \exp(i\omega t), \quad \mathbf{A} \equiv [A_1 \ A_2]^T \quad (9.78a, b)$$

と置こう。 A_1, A_2 がそれぞれの質点の振動振幅で、 \mathbf{A} を振幅ベクトル（この式では一時的には複素数と考えておく）と呼ぶことにする。式 (9.78a) を式 (9.77) に代入すると

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{A} \exp(i\omega t) = \mathbf{0}$$

が任意の時刻 t に成立するためには

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (9.79)$$

でなければならない。これは A_1, A_2 （これ以降は実数）に対する連立方程式（数学の言葉では固有値問題）だが、右辺が零なので、もし係数の行列が正則であれば振幅ベクトルは零である。それは単なる静止状態を意味し、もちろんそれも答の一つだが、自由振動問題の欲しい答ではない。したがってこの 2 式は 1 次従属の関係になければならないことから

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (9.80)$$

を満足しなければならない。これが固有振動数 ω （数学の言葉では固有値）を決定する振動数方程式（特性方程式）である。つまり

$$\det \begin{pmatrix} (k_1 + k_2) - m_1 \omega^2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 - m_2 \omega^2 \end{pmatrix} = 0$$

から

$$\{(k_1 + k_2) - m_1 \omega^2\} \{k_2 - m_2 \omega^2\} - k_2^2 = 0 \quad \rightarrow \quad m_1 m_2 \omega^4 - \{m_1 k_2 + m_2 (k_1 + k_2)\} \omega^2 + k_1 k_2 = 0$$

あるいは

$$\omega^4 - \left\{ \left(\frac{k_2}{m_2} \right) + \left(\frac{k_1}{m_1} \right) + \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \left(\frac{k_2}{m_2} \right) \right\} \omega^2 + \left(\frac{k_1}{m_1} \right) \left(\frac{k_2}{m_2} \right) = 0 \quad (9.81)$$

が固有振動数 ω を決定する。そしてその解は

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[\left\{ \left(\frac{k_2}{m_2} \right) + \left(\frac{k_1}{m_1} \right) + \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \left(\frac{k_2}{m_2} \right) \right\} \pm \sqrt{\left\{ \left(\frac{k_2}{m_2} \right) + \left(\frac{k_1}{m_1} \right) + \left(\frac{m_2}{m_1} \right) \left(\frac{k_2}{m_2} \right) \right\}^2 - 4 \left(\frac{k_1}{m_1} \right) \left(\frac{k_2}{m_2} \right)} \right] > 0$$

あるいは

$$\omega^2 = \frac{1}{2} \left[\left\{ \omega_{02}^2 + \omega_{01}^2 + m_0 \omega_{02}^2 \right\} \pm \sqrt{\left\{ \omega_{02}^2 + \omega_{01}^2 + m_0 \omega_{02}^2 \right\}^2 - 4 \omega_{01}^2 \omega_{02}^2} \right] > 0 \quad (9.82)$$

と得られる。ここに

$$m_0 \equiv \frac{m_2}{m_1}, \quad \omega_{01} \equiv \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_{02} \equiv \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} \quad (9.83a, b, c)$$

と定義した。 ω^2 の二つの解 ω_1^2, ω_2^2 共に正の実数なので、その平方根 $\pm\omega_1, \pm\omega_2$ も実数だ。自由度が 2 になったので 2 種類の固有振動数が存在することを意味する。振動数は小さい方から順に ω_1, ω_2 ($0 < \omega_1 < \omega_2$) と記す。よく $\omega_1 = \omega_{01}, \omega_2 = \omega_{02}$ と勘違いする人がいるが、そうではないので注意すること。

式(9.79)は1次従属な連立方程式だったので \mathbf{A} は唯一には決定できず、それぞれの固有振動数に対して A_1 と A_2 の比を求めることができるだけだ。例えば第2行の式を用いて $A_1 = 0$ ではないことを期待(いつもそうなるとは限らないので注意。特に意地悪な教員の定期試験では。呵呵。)すると、その比が

$$d \equiv \frac{A_2}{A_1} = \frac{k_2}{k_2 - m_2 \omega^2} \quad (9.84)$$

となるので、それぞれの固有振動数に対して二つの比は

$$d_1 = \frac{k_2}{k_2 - m_2 \omega_1^2}, \quad d_2 = \frac{k_2}{k_2 - m_2 \omega_2^2}$$

と表すことができる。したがって、二つの質点の変位の一般解は

$$\begin{aligned} u_1(t) &= D_1 \sin \omega_1 t + D_2 \cos \omega_1 t + D_3 \sin \omega_2 t + D_4 \cos \omega_2 t, \\ u_2(t) &= d_1 (D_1 \sin \omega_1 t + D_2 \cos \omega_1 t) + d_2 (D_3 \sin \omega_2 t + D_4 \cos \omega_2 t) \end{aligned}$$

と求められる。あるいは

$$\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{\phi}_1 (D_1 \sin \omega_1 t + D_2 \cos \omega_1 t) + \boldsymbol{\phi}_2 (D_3 \sin \omega_2 t + D_4 \cos \omega_2 t) \quad \text{あるいは} \quad (9.85a)$$

$$\mathbf{u}(t) = a_1 \boldsymbol{\phi}_1 \sin(\omega_1 t - \alpha_1) + a_2 \boldsymbol{\phi}_2 \sin(\omega_2 t - \alpha_2), \quad \text{ここに } \boldsymbol{\phi}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ d_1 \end{Bmatrix}, \quad \boldsymbol{\phi}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (9.85b, c, d)$$

等と表すこともできる。 $D_1 \sim D_4$ あるいは $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ が積分定数で、初期条件式(9.76)で決めることができる。この $\boldsymbol{\phi}_n$ ($n = 1, 2$) は、二つの質点の各固有振動数毎の成分の任意時刻の相対的な位置関係を表しているのが固有振動モード(数学の言葉では固有ベクトル)と呼ばれている。小さい方の振動数に対応したモードを1次モードと呼び、大きい方が2次モードと呼ばれる。

では一例として $k = k_1 = k_2, m = m_1 = m_2$ の場合を解いてみよう。ただし、初期条件式(9.76)は

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0 = [u_0 \ 0]^T, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0 = [0 \ 0]^T \quad (*)$$

と簡単にしておこう。式(9.80)の振動数方程式は具体的に

$$\omega^4 - 3\omega_0^2 \omega^2 + \omega_0^4 = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

であるから、固有振動数はそれぞれ

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \omega_0 = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \omega_0 \approx 0.6180 \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \omega_0 = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} \omega_0 \approx 1.618 \omega_0$$

と求められる。それぞれのモード比 d_n は式(9.84)より

$$d_1 = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} \approx 1.618, \quad d_2 = \frac{-2}{\sqrt{5} + 1} \approx -0.6180$$

と²³求められる。 d_1 が正なのに対し、 d_2 が負であることには注意しよう。図9.29の左上に、その二つの質点の相対的な位置関係、つまり振動モードを簡略に表示した。 ω_1 に対応したモードは、二つの質点が常に同じ方向に運動していることから同位相モードと呼ばれる。一方 ω_2 に対応したモードはお互いに逆に向いて運動して

²³ 毎年何人かの学生さんが宿題で、一つ前の式の2重の平方根の段階で小数にする。電卓による弊害の一つだ。さらに電卓持込禁止の期末試験でも平方根を小数にする(p.1027)人がいる。不思議だ。

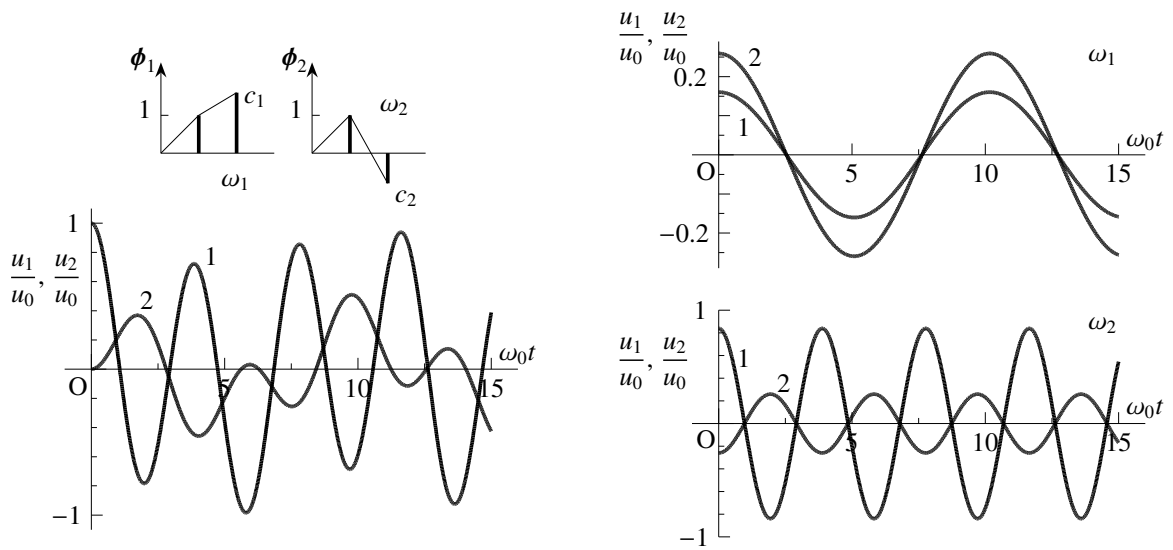


図 9.29 2 自由度系の振動例

いるので逆位相モードと呼ばれる。簡単のために $D_1 \sim D_4$ を用いた解の表現を用い、それを初期条件式(*)に代入すると

$$D_2 + D_4 = u_0, \quad d_1 D_2 + d_2 D_4 = 0, \quad \omega_1 D_1 + \omega_2 D_3 = 0, \quad d_1 \omega_1 D_1 + d_2 \omega_2 D_3 = 0$$

となるから

$$D_1 = 0, \quad D_2 = \frac{d_2 u_0}{d_2 - d_1}, \quad D_3 = 0, \quad D_4 = \frac{-d_1 u_0}{d_2 - d_1}$$

と求められる。したがって解を

$$\frac{u_1(t)}{u_0} = \frac{d_2}{d_2 - d_1} \cos \omega_1 t - \frac{d_1}{d_2 - d_1} \cos \omega_2 t, \quad \frac{u_2(t)}{u_0} = \frac{d_1 d_2}{d_2 - d_1} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t)$$

と得る。図 9.29 の左下の図が 2 質点の変位の様子である。2 種類の振動数で揺れているので、1 自由度系より複雑な動きに見えるかもしれない。そこで、それぞれの質点の変位を二つの振動数毎に分けて描いたのが右側の二つの図である。まず小さい振動数の ω_1 の図(右上)を見ると、二つの質点が同じ符号で $1/d_1$ の比で運動しているのが明らかである。これが同位相モードである。一方大きい振動数の ω_2 の図(右下)を見ると、お互いがそっぽを向いて $1/d_2$ の比で運動している。これを逆位相モードと呼ぶのである。この例では、左側の図からあるいは右 2 図の縦軸を比較すれば明らかのように、逆位相の 2 次モードが卓越しているが、それは初期条件の影響(質点 2 を止めたまま質点 1 のみを右に u_0 移動した状態で手を離れたから)を強く受けたためである。といった物理的な考察ができないと現場では役に立たないよ。

(3) 減衰自由振動

次に、減衰を含む自由振動の場合を考えてみよう。式(9.74)で外力を無視すれば、運動方程式は

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \tag{9.86}$$

になる。非減衰の場合と同じように

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{A} \exp(i\omega t), \quad \mathbf{A} \equiv [A_1 \ A_2]^T \tag{9.87a, b}$$

と置く。この場合は振幅ベクトル \mathbf{A} は複素数である。というのも、式(9.87a)を式(9.86)に代入すると

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C}) \mathbf{A} \exp(i\omega t) = \mathbf{0}$$

となるからだ。これが任意の時刻 t に成立するためには

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C}) \mathbf{A} = \mathbf{0} \quad (9.88)$$

でなければならない。よって振動数方程式は

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{C}) = 0 \quad (9.89)$$

となる。1自由度系の結果からも当然のように、この方程式の解は複素数である。ただこの方程式は線形代数で習う標準的な固有値問題にはなっていないことから、自由度が大きくなると固有振動数を求めることは困難になる。つまり2自由度系の式(9.89)は ω の複素係数4次方程式であることから、それが、電卓と手計算で解を求めることができる限界だろう。したがって、このような減衰振動については別の工学的アプローチを用いることにするが、それについては多自由度系の第9.2.2(6)節で説明する。

(4) 非減衰強制振動 — 多自由度系の共振曲線

減衰系については多自由度系の第9.2.2(6)節で取り扱うことにし、ここではもう一つの基本的な状況として、正弦波状の外力が作用したときの強制振動を解いて、2自由度系の共振曲線を求めておく。図9.28の系では外力を直接質点に作用させていたが、ここでは支点が正弦波で強制変位させられる図9.30の問題の方を解いておこう。図に示した力のダイアグラムから、二つの質点に作用する右向き力はそれぞれ

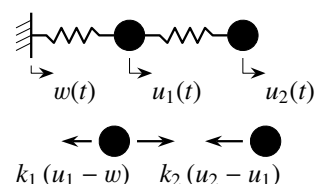


図9.30 非減衰強制振動

$$k_2 (u_2 - u_1) - k_1 (u_1 - w), \quad -k_2 (u_2 - u_1)$$

なので、運動方程式はそれぞれ

$$m_1 \ddot{u}_1 + k_1 (u_1 - w) - k_2 (u_2 - u_1) = 0, \quad m_2 \ddot{u}_2 + k_2 (u_2 - u_1) = 0$$

となる。1自由度系の場合と同様に、相対変位を

$$v_1(t) \equiv u_1(t) - w(t), \quad v_2(t) \equiv u_2(t) - w(t) \quad (9.90a, b)$$

と定義して、上の運動方程式を書き直すと

$$m_1 \ddot{v}_1 + (k_1 + k_2) v_1 - k_2 v_2 = -m_1 \ddot{w}, \quad m_2 \ddot{v}_2 - k_2 v_1 + k_2 v_2 = -m_2 \ddot{w}$$

を得るので、行列表示すると

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{v}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{v}(t) = \mathbf{f}_w(t), \quad \mathbf{v}(t) \equiv [v_1(t) \ v_2(t)]^T, \quad \mathbf{f}_w(t) \equiv -\ddot{w}(t) [m_1 \ m_2]^T \quad (9.91a, b, c)$$

となる。 \mathbf{M} と \mathbf{K} は前述の定義式(9.75c)(9.75e)と同じである。

ここでは支点の変位が sine 関数で与えられ

$$w(t) = w_0 \sin pt \quad (9.92)$$

で動くものとする、強制振動解も $\sin pt$ で振動するだろうから

$$\mathbf{v} = \mathbf{A} \sin pt \quad (9.93)$$

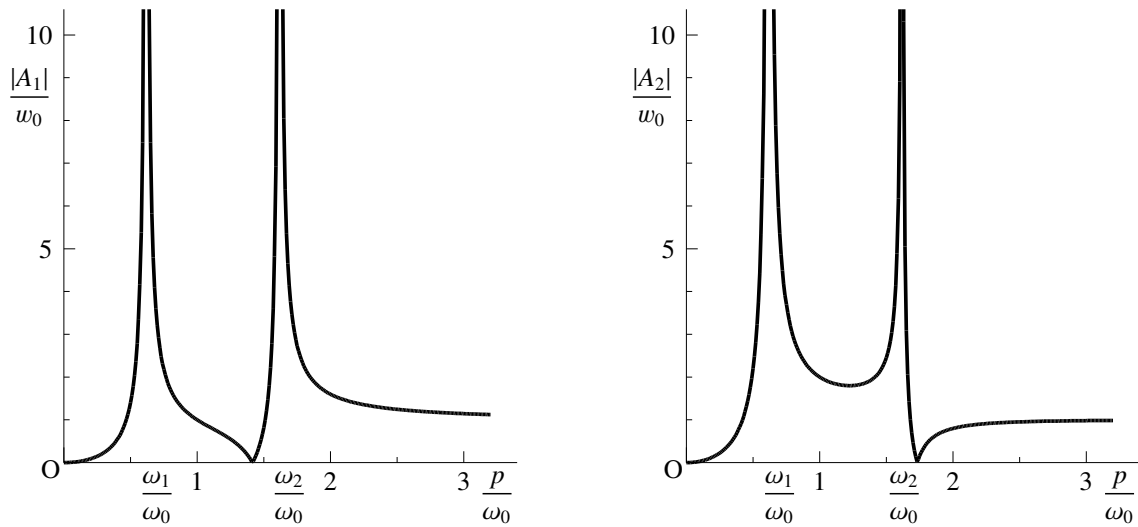


図 9.31 2 自由度系の共振曲線

と置く。式 (9.92) (9.93) を式 (9.91a) (9.91c) に代入すると

$$(\mathbf{K} - p^2 \mathbf{M}) \mathbf{A} = p^2 w_0 \begin{Bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{Bmatrix}$$

を得る。具体的に書くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{k_1 + k_2}{m_1} - p^2 & -\frac{k_2}{m_1} \\ -\frac{k_2}{m_2} & \frac{k_2}{m_2} - p^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} &= p^2 w_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \\ \rightarrow \begin{pmatrix} \omega_{01}^2 + m_0 \omega_{02}^2 - p^2 & -m_0 \omega_{02}^2 \\ -\omega_{02}^2 & \omega_{02}^2 - p^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} &= p^2 w_0 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

である。ここでは式 (9.83) の記号を用いた。これを解くと

$$\begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{Bmatrix} = \frac{p^2 w_0}{\Delta(p^2)} \begin{pmatrix} \omega_{02}^2 - p^2 & m_0 \omega_{02}^2 \\ \omega_{02}^2 & \omega_{01}^2 + m_0 \omega_{02}^2 - p^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{p^2 w_0}{\Delta(p^2)} \begin{Bmatrix} \omega_{02}^2 + m_0 \omega_{02}^2 - p^2 \\ \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + m_0 \omega_{02}^2 - p^2 \end{Bmatrix}$$

と求められる。この分母は

$$\Delta(p^2) \equiv p^4 - (\omega_{02}^2 + \omega_{01}^2 + m_0 \omega_{02}^2) p^2 + \omega_{01}^2 \omega_{02}^2$$

と置いたが、この式は、式 (9.81) の振動数方程式 (特性方程式) の左辺の ω を p に置き換えた式と全く同じなので、固有振動数を ω_1, ω_2 とすると、これは

$$\Delta(p^2) = (p^2 - \omega_1^2) (p^2 - \omega_2^2)$$

のように因数分解できる。したがって、振幅は

$$\begin{Bmatrix} \frac{A_1}{w_0} \\ \frac{A_2}{w_0} \end{Bmatrix} = \frac{p^2}{(p^2 - \omega_1^2) (p^2 - \omega_2^2)} \begin{Bmatrix} \omega_{02}^2 + m_0 \omega_{02}^2 - p^2 \\ \omega_{01}^2 + \omega_{02}^2 + m_0 \omega_{02}^2 - p^2 \end{Bmatrix} \quad (9.94)$$

と求められる。分母から明らかなように、外力の振動数 p が二つの固有振動数のいずれかに一致したときに振幅が無限大になる。つまり共振点が二つ存在することになる。

前の例と同じように $m = m_1 = m_2, k = k_1 = k_2$ の場合の共振曲線を求めておこう。 $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ と定義すると、固有振動数は

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}} \omega_0 \approx 0.6180 \omega_0, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}} \omega_0 \approx 1.618 \omega_0$$

であった。それを用いて、式(9.94)は

$$\begin{Bmatrix} \frac{A_1}{\omega_0} \\ \frac{A_2}{\omega_0} \end{Bmatrix} = \frac{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2}{\left\{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2\right\} \left\{\left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 - \left(\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2\right\}} \begin{Bmatrix} 2 - \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 \\ 3 - \left(\frac{p}{\omega_0}\right)^2 \end{Bmatrix}$$

となる。この絶対値を図9.31に示した。 p が二つの固有振動数に一致したときに振幅は無限大になる。また上式右辺を見ればわかるように、質点1は $p/\omega_0 = \sqrt{2} \approx 1.41$ で、質点2は $p/\omega_0 = \sqrt{3} \approx 1.73$ で動かなくなる(相対変位なので支点と一緒に動く)ことも面白い。ヨーヨー風船を二つ買って実験すると面白いかもしれないが、著者はやっていない。

演習問題 9-4

13. 例えば図9.28の質点2に正弦波外力 $f_2(t) = f_0 \sin pt$ が作用したときの共振曲線を求めてみよ。

14. 図9.32に示したのは、四角い剛体の重心Gの水平運動 $u(t)$ と回転運動 $\theta(t)$ の2自由度系と考えていい。こういう運動をロッキング運動と呼んでいる。剛体の質量を M とし、重心G回りの慣性モーメントを J とする。剛体の下端中央には、回転角に比例してモーメント抵抗を発生させる回転バネが付いており、その比例係数を k_R とする。また、剛体下端右端には、バネ定数 k_H の水平の線形バネが付いている。これが自由振動をしているものとし、 $u = U \exp(i\omega t)$, $\theta = \Theta \exp(i\omega t)$ と置いたとき、見かけ上の回転の中心Oまでの距離 x は $x = U/\Theta$ であり、これがモードに相当する。重力 g は無視し

$$\omega_H \equiv \sqrt{\frac{k_H}{M}}, \quad \omega_R \equiv \sqrt{\frac{k_R}{J}}, \quad r \equiv \sqrt{\frac{J}{M}}$$

と定義し、その比が

$$\left(\frac{\omega_R}{\omega_H}\right)^2 = 4, \quad \left(\frac{h}{r}\right)^2 = 3$$

という値をもつときの、固有振動数と固有モードを求めよ(伊藤学先生オリジナル)。

15. 例えば m_1 と k_1 の1自由度系を設計して、それができあがってしまったとする。しかし、使い始めてみると、その場所では固有振動数 $\omega_0 = \sqrt{k_1/m_1}$ 付近の共振に近い振動が頻繁に発生することが判明した。こういう設計をしてはいけない。そこで費用のことを考え、作り直す代わりに小さい質点と弱いバネをつけて共振点を少しずつすることを考えた。例えば $m_2/m_1 = 0.1, k_2/k_1 = 0.1$ の系を直列につないで2自由度系にした。この2自由度系の固有振動数と、支点を式(9.92)で揺らしたときの質点1の共振曲線を求め、その改善の程度を観察せよ。これはパッシブダンパーによる振動制御の簡単な例だ。

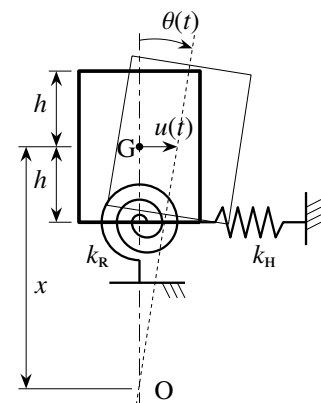


図9.32 ロッキング運動

9.2.2 多自由度系の振動

(1) 運動方程式

ではいよいよ図 9.33 に示したような、もっと一般的に自由度が $N (\geq 2)$ の系を考えてみよう。質点 1 と質点 N の力のダイアグラムは 2 自由度系の二つの質点のそれと同じなので、それ以外の途中の $n (N > n > 1)$ 番目の質点の力のダイアグラムだけを取り出して同じ図の下に示した。これから n 番目の質点の運動方程式が

$$m_n \ddot{u}_n - c_n \dot{u}_{n-1} + (c_n + c_{n+1}) \dot{u}_n - c_{n+1} \dot{u}_{n+1} - k_n u_{n-1} + (k_n + k_{n+1}) u_n - k_{n+1} u_{n+1} = f_n$$

になることは容易に確かめられると思う。したがって、行列表示すると

$$M \ddot{\mathbf{u}}(t) + C \dot{\mathbf{u}}(t) + K \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \tag{9.95}$$

となる。ここに、変位ベクトルや外力ベクトル・質量行列・減衰行列・剛性行列は、 $N = 2$ の場合も含めて

$$\mathbf{u}(t) \equiv \begin{Bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_N(t) \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) \equiv \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_N(t) \end{Bmatrix}, \quad M \equiv \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & m_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & m_{N-1} & 0 \\ \text{Symm.} & & & & m_N \end{pmatrix}, \tag{9.96a, b, c}$$

$$C \equiv \begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & c_2 + c_3 & -c_3 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & c_{N-1} + c_N & -c_N \\ \text{Symm.} & & & & c_N \end{pmatrix}, \quad K \equiv \begin{pmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ & k_2 + k_3 & -k_3 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & k_{N-1} + k_N & -k_N \\ \text{Symm.} & & & & k_N \end{pmatrix} \tag{9.96d, e}$$

のように定義すればいい。質量行列は対角行列になっていて、このような質量行列を集中質量行列と呼ぶことがある。減衰行列と剛性行列は対称行列で、かつバンド幅 3 のバンド行列（帯行列）でもあることは覚えておいて欲しい。初期条件については、これも 2 自由度系と同様

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \dot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{v}_0 \tag{9.97a, b}$$

で与えればいい。もちろん \mathbf{u}_0 も \mathbf{v}_0 も N 行の列ベクトルである。

(2) 非減衰自由振動

最初は C と \mathbf{f} を無視した非減衰の自由振動を考える。ここでも変位ベクトルを

$$\mathbf{u} = \boldsymbol{\phi} \exp(i\omega t) \tag{9.98}$$

と置いて運動方程式に代入すると、任意時刻に

$$(K - \omega^2 M) \boldsymbol{\phi} = \mathbf{0} \tag{9.99}$$

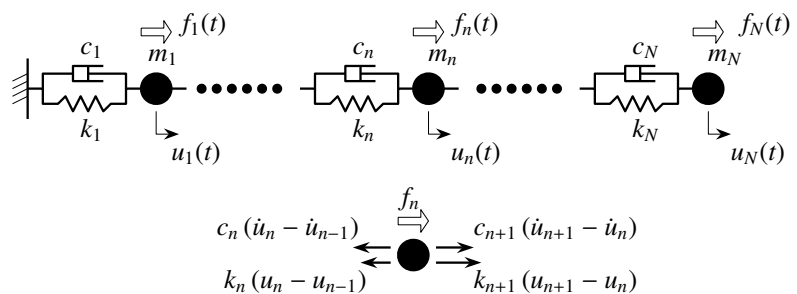


図 9.33 $N (\geq 3)$ 自由度系の振動

でなければならない。これが非零の ϕ を持つための条件、つまり有意な解を持つための条件が

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (9.100)$$

であり、これが振動数方程式（特性方程式）になる。安定な系において固有振動数が $\omega_n^2 > 0$ の実数であることの証明は文献 [142] 等にある。この式から求められる固有振動数 $\omega_n > 0$ を小さい順に並べて ω_n ($n = 1, 2, \dots, N$) とする。そしてそれぞれの固有振動数に対応した固有振動モードを ϕ_n とすると、それは

$$(\mathbf{K} - \omega_n^2 \mathbf{M}) \phi_n = \mathbf{0} \quad (9.101)$$

を満足する。式 (9.100) が成立することから、この式 (9.101) の左辺の係数行列は特異行列である。したがって、この連立方程式は 1 次従属な関係式なので ϕ_n はその成分を唯一には定めることはできず、各成分の比だけが求められる。したがって、任意の初期値問題の自由振動解は式 (9.98) の代わりに

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N \{ \bar{A}_n \exp(i\omega_n t) + \bar{B}_n \exp(-i\omega_n t) \} \phi_n = \sum_{n=1}^N \{ A_n \sin(\omega_n t) + B_n \cos(\omega_n t) \} \phi_n \quad (9.102)$$

のような、2 種類の未定定数を含む級数表示の形になる。複素数の \bar{A}_n と \bar{B}_n あるいは実数の A_n と B_n を初期条件式 (9.97) で決定すれば、唯一の自由振動解が求められる。しかしそれはそれぞれ N 個の未知数に対する連立方程式になるので、 N が大きくなると解くのが面倒になりそうだ。具体的な実際の解法はあとで述べる。

ところで、固有振動数（固有周期）の大小関係に関しては

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N, \quad T_1 > T_2 > \dots > T_N \quad (9.103a, b)$$

を仮定して定義したが、この不等号には等号が無いことを覚えておいて欲しい。というのも、もしここに等号が成り立ち二つのモードの振動数が同じになる場合には、それは系の「動的不安定」を意味するからである。例えば第 6.4.2 (3) 節で説明した非保存力による座屈現象がそうであった。振動数方程式は微分方程式の特性方程式であり、その二つの特性根が一致する状況は特性根が重根であることを意味する。その重根に対応した一般解は、 $\exp(\cdot)$ の形ではなく $(c_1 + c_2 t) \exp(\cdot)$ の形になることを意味し、それは時間と共に振幅が無限大になる解すなわち発散解になる。動的に不安定な社会基盤構造があってはならないので、正しく設計された構造系の上式 (9.103) の不等号には等号があってはならないのである。

(3) モードの直交性

さて自由振動解の式 (9.102) の未定係数を初期条件で決定する方法はまだ一般論しか説明していない。さらに式 (9.95) は連立常微分方程式なので、外力が存在する場合にそのまま解くのが困難なことはすぐに推測できる。これを比較的容易に解決する手法に必要な、固有振動モードの重要な特性をここではまず明らかにしておく。例えば i 次と j 次の固有振動モード ($i \neq j$) はそれぞれ対応した式 (9.101) を満足するから

$$\mathbf{K} \phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \phi_i, \quad \mathbf{K} \phi_j = \omega_j^2 \mathbf{M} \phi_j$$

が成立する。この第 1 式に ϕ_j^T を左から乗じ、第 2 式に ϕ_i^T を左から乗じると

$$\phi_j^T \mathbf{K} \phi_i = \omega_i^2 \phi_j^T \mathbf{M} \phi_i, \quad \phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = \omega_j^2 \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j \quad (*)$$

となる。左の式は第 i 次の振動モードの運動方程式が第 j 次モードとする仮想仕事と考えればいい。質量行列は対角行列であり、剛性行列は対称行列であることから、左の式の両辺のスカラー項はそれぞれ

$$\phi_j^T \mathbf{M} \phi_i = (\phi_j^T \mathbf{M} \phi_i)^T = \phi_i^T \mathbf{M}^T \phi_j = \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j, \quad \phi_j^T \mathbf{K} \phi_i = (\phi_j^T \mathbf{K} \phi_i)^T = \phi_i^T \mathbf{K}^T \phi_j = \phi_i^T \mathbf{K} \phi_j$$

と書き換えることができる。これを上式(*)の左側の式だけに代入して2式を書き直すと

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = \omega_i^2 \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j, \quad \phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = \omega_j^2 \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j \quad (*) \text{の別表現}$$

となる。この二つの式を辺々引き算すると、左辺は同じなので

$$0 = (\omega_i^2 - \omega_j^2) \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j$$

を得る。式(9.103)について解説したように、安定な構造系であれば二つの異なる固有振動数は異なる値を持つことから、 $i \neq j$ のときには $\omega_i \neq \omega_j$ であり、上式からは ϕ_n は

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = 0, \quad j \neq i \quad (9.104)$$

を満足することを示している。もし質量行列 \mathbf{M} が単位行列 \mathbf{I} であれば、この式は二つのベクトル ϕ_i と ϕ_j の内積であり、それが零になるということは二つのベクトルが直交していることを意味する。ここでは、内積を拡張して定義し、質量行列 \mathbf{M} という重みを含んだ内積を用いて、二つの固有振動モードは「直交している」と呼ぶことになっている。

ただし、 $j = i$ の時は零にはならないことから

$$\phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ \bar{m}_i, & j = i \end{cases} \quad (9.105)$$

のように、新しい量 \bar{m}_i を定義する。この \bar{m}_i は*i*次の固有質量のようなものであるが、歴史的には一般化された質量と呼ばれる。また式(9.101)を式(9.105)に代入すると

$$\phi_i^T \mathbf{K} \phi_j = \omega_j^2 \phi_i^T \mathbf{M} \phi_j = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ \bar{m}_i \omega_i^2, & j = i \end{cases} \quad (9.106)$$

という関係も成立するため、剛性行列 \mathbf{K} という重みを含んだ内積に対しても直交性が成立する。 \mathbf{K} は対角行列ではないので、この内積はかなり一般化されたものである。

重みつき内積について: 突然²⁴出てきた「ベクトルの重みつき内積」という言葉に戸惑っているかもしれない。例えば線形代数で*N*次元の二つのベクトル \mathbf{v} と \mathbf{w} の内積 $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \equiv \mathbf{v}^T \mathbf{w}$ は、*N*次元の単位行列を \mathbf{I} 用いて

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^T \mathbf{I} \mathbf{w}$$

と書いてもいい。そしてこの内積が零のとき二つのベクトルが「直交」していると呼ぶのは、Euclid幾何の拡張である。これを一般化して、対角項が1ではない任意の数値を持つ対角行列 \mathbf{A} を用いたり、あるいは任意²⁵の対称行列 \mathbf{B} を用いて

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w})_A \equiv \mathbf{v}^T \mathbf{A} \mathbf{w}, \quad \mathbf{A} \equiv \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ & a_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{Symm.} & & & a_N \end{bmatrix}, \quad (\mathbf{v}, \mathbf{w})_B \equiv \mathbf{v}^T \mathbf{B} \mathbf{w}, \quad \mathbf{B} \equiv \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1N} \\ & b_{22} & \cdots & b_{2N} \\ & & \ddots & \vdots \\ \text{Symm.} & & & b_{NN} \end{bmatrix}$$

のように拡張定義したものが重みつき内積である。そして、この一般化された内積を零にするベクトル同士も直交していると称する。*N*次元の幾何を思い描くのは諦めて慣れてしまおう。

²⁴ 既に式(5.66)で定義した「関数の内積」と同じ概念である。

²⁵ 「任意の」とは書いたが、基本的な安定系の力学の範囲であれば \mathbf{A} も \mathbf{B} も正定値であることが一般的である。

(4) 自由振動の級数解 — モード解析法

前節の固有振動モードの直交特性を利用して、任意の初期条件式 (9.97) に対する自由振動解を求める具体的な方法を考えよう。どうやら解は、2 自由度系の振動の図 9.29 から予想されるように N 個の振動モードで揺られて、それが重ね合わされた式 (9.102) のような級数解で表すことができそうだ。そこで解が、時間の未知関数 $q_n(t)$ を係数として

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{n=1}^N q_n(t) \boldsymbol{\phi}_n \quad (9.107)$$

のように表現できると仮定する。未知関数 $q_n(t)$ が満足すべき微分方程式は運動方程式から求められるだろうから、これを運動方程式 (9.95) で $\mathbf{C} \equiv 0$, $\mathbf{f}(t) \equiv 0$ とした式に代入すると

$$\sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n + \sum_{n=1}^N q_n(t) \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{0}$$

となる。これに左から $\boldsymbol{\phi}_j^T$ を乗じ (つまり j 次モードとの仮想仕事を算定し), 式 (9.105) (9.106) の直交条件を利用すると、総和のうち $j \neq n$ の項はすべて零になるので

$$\sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n + \sum_{n=1}^N q_n(t) \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{m}_j \ddot{q}_j(t) + \bar{m}_j \omega_j^2 q_j(t) = 0$$

となり、結局 $q_j(t)$ は

$$\ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = 0 \quad (9.108)$$

を満足しないといけないことがわかる。これは固有振動数が ω_j の 1 自由度系の非減衰自由振動の運動方程式 (9.7) そのものである。すなわち N 自由度系の問題は、固有振動数とモードさえ算定できていれば (しかも N 個全部が求められている必要が無いのもミソ²⁶⁾, N 個の独立した 1 自由度系の振動問題に分解できることを意味する。したがって解は

$$q_j(t) = A_j \sin \omega_j t + B_j \cos \omega_j t \quad (9.109)$$

になる。この積分定数 A_j, B_j を初期条件で決定すればいい。

式 (9.97) の初期条件式は、級数解を代入すると

$$\sum_{n=1}^N q_n(0) \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{u}_0, \quad \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(0) \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{v}_0$$

となる。 $\boldsymbol{\phi}_n$ は求められているから、これは $q_n(0)$ と $\dot{q}_n(0)$ あるいは式 (9.109) の $\omega_n A_n$ と B_n に対する連立方程式になる。それを解くには $\boldsymbol{\phi}_n$ がすべて求められていないといけないので、前述のように N が大きい場合は面倒だ。そこでここではもう少し工学的に合理的な、つまり重要と思われる M 個の $\boldsymbol{\phi}_j$ ($1 \leq j \leq M \leq N$) だけが求められている場合の方法を考えておこう。そのために、上式に左から $\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M}$ を乗じると

$$\sum_{n=1}^N q_n(0) \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0, \quad \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(0) \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_0$$

となり、再び直交性の式 (9.105) (9.106) を利用すると、結局

$$q_j(0) = \frac{\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0}{\bar{m}_j}, \quad \dot{q}_j(0) = \frac{\boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_0}{\bar{m}_j} \quad (9.110a, b)$$

²⁶ 数値解析用パッケージでも必要な個数の固有値と固有ベクトルを求めることができるようになっていることが多い。

が、それぞれの $q_j(t)$ に対する初期条件になる。この式に式 (9.109) の一般解を代入して

$$B_j = \frac{\phi_j^T M u_0}{m_j}, \quad A_j = \frac{\phi_j^T M v_0}{m_j \omega_j}$$

から積分定数の A_j, B_j を決定すれば、唯一の解が求められる。再度 j 次の $q_j(t)$ に対する初期値問題を整理して書いておくと

$$\ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = 0, \tag{9.108} \text{再掲}$$

$$\text{ただし、初期条件が } q_j(0) = \frac{\phi_j^T M u_0}{m_j}, \quad \dot{q}_j(0) = \frac{\phi_j^T M v_0}{m_j} \tag{9.110} \text{再掲}$$

を解けばいいことになる。これはまさに 1 自由度系の振動問題である。このように、非減衰自由振動モードを用いて式 (9.107) のような級数解を仮定して初期値問題を解く方法をモード解析法と呼んでいる。この表現の $q_j(t)$ は単に第 j 次モードの振幅であるが、歴史的には一般化された座標（物理学上の名称）と呼ばれている。連続体の力学に限定すれば、著者としては一般化された変位と呼びたいところではある。 N が非常に大きい場合には、最終的には M 個の $q_j(t)$ ($j = 1, 2, \dots, M \leq N$) が求められるに過ぎないので、解は

$$u(t) \simeq \sum_{n=1}^{M \leq N} q_n(t) \phi_n \tag{モード解析法による近似解}$$

で近似される。この解の精度は選択する個数 M に依存する。

一例として 3 質点の自由振動を解いておこう。ただし簡単のために $m = m_1 = m_2 = m_3, k = k_1 = k_2 = k_3$ とする。また初期条件も簡単のために

$$u_0 = [u_0 \ 0 \ 0]^T, \quad v_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$$

としておこう。すると $\phi \equiv [\phi_1 \ \phi_2 \ \phi_3]^T$ とした式 (9.99) は

$$\begin{pmatrix} 2k - m\omega^2 & -k & 0 \\ -k & 2k - m\omega^2 & -k \\ 0 & -k & k - m\omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0} \quad (*)$$

となるから、振動数方程式はこの係数行列の行列式から

$$\omega^6 - 5\omega_0^2\omega^4 + 6\omega_0^4\omega^2 - \omega_0^6 = 0, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}$$

となり、固有振動数を $\omega_i = \xi_i \omega_0$ と置くと、それは

$$\xi_1 \equiv \frac{\omega_1}{\omega_0} \simeq 0.4450, \quad \xi_2 \equiv \frac{\omega_2}{\omega_0} \simeq 1.247, \quad \xi_3 \equiv \frac{\omega_3}{\omega_0} \simeq 1.802$$

と求められる。3 次方程式なので公式を用いるか、例えば 2 分法²⁷等で数値的に解ける。再度上式 (*) にこれを代入すると、モードが例えば

$$\phi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1.802 \\ 2.247 \end{pmatrix}, \quad \phi_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.4450 \\ -0.8019 \end{pmatrix}, \quad \phi_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1.247 \\ 0.5550 \end{pmatrix}$$

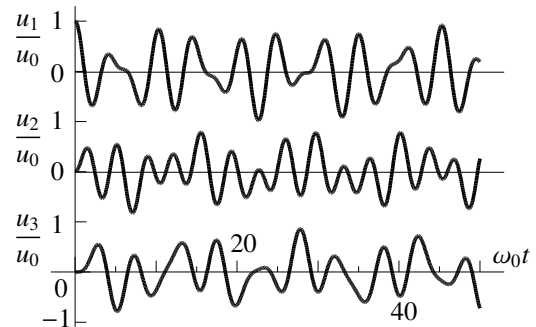


図 9.34 3 自由度系の非減衰自由振動

²⁷ 第 O.3.2 節参照。あるいは Scilab の関数 roots を使えば瞬時に解けるが、それじゃ頭は柔らかくならないかもよ。

と表現²⁸できる。第1次モードはすべてが同じ符号（向き）の成分を持っているので同位相のモードであることがわかる。これに対し第2次と第3次のモードは、質点の一つが他の二つにそっぽを向いていることから逆位相のモードになっている。具体的に式(9.105)に代入すれば直交性も確かめることができる。

さて、この各モードを用い、それぞれの一般化された質量を式(9.105)から求めて $\bar{m}_i = \mu_i m$ と置くと

$$\mu_1 \equiv \frac{\bar{m}_1}{m} = 1^2 + 1.802^2 + 2.247^2 = 9.296, \quad \mu_2 \equiv \frac{\bar{m}_2}{m} = 1.841, \quad \mu_3 \equiv \frac{\bar{m}_3}{m} = 2.863$$

となる。これを用いて式(9.110)に代入すると、たまたま ϕ_i の第1成分をすべて1にしておいたため、各モードの一般化された座標に対する初期条件が

$$q_1(0) = \frac{u_0}{\mu_1}, \quad \dot{q}_1(0) = 0, \quad q_2(0) = \frac{u_0}{\mu_2}, \quad \dot{q}_2(0) = 0, \quad q_3(0) = \frac{u_0}{\mu_3}, \quad \dot{q}_3(0) = 0$$

と表される。各モードの一般解は式(9.109)だったから、この一般解を上期の初期条件式に代入すると

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \frac{u_0}{\mu_1}, \quad A_2 = 0, \quad B_2 = \frac{u_0}{\mu_2}, \quad A_3 = 0, \quad B_3 = \frac{u_0}{\mu_3}$$

と積分定数が求められる。したがって、解は

$$\mathbf{u}(t) = u_0 \left\{ \frac{1}{\mu_1} \boldsymbol{\phi}_1 \cos(\xi_1 \omega_0 t) + \frac{1}{\mu_2} \boldsymbol{\phi}_2 \cos(\xi_2 \omega_0 t) + \frac{1}{\mu_3} \boldsymbol{\phi}_3 \cos(\xi_3 \omega_0 t) \right\}$$

になる。図9.34に3質点の変位履歴を示した。3種類の振動数の周期運動の重ね合わせなので、ちょっと見ただけでは周期運動には見えないのも面白い。

(5) 非減衰強制振動

次に外力が存在する強制振動を解こう。運動方程式は式(9.95)の減衰項を無視したものなので

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (9.111)$$

である。ここでもモード解析法を用いてみよう。つまり、自由振動の固有振動モードを用いた級数式(9.107)で解を表現できると仮定するのだ。この仮定を上期の運動方程式に代入すると

$$\sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n + \sum_{n=1}^N q_n(t) \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n = \mathbf{f}(t)$$

を得る。これに左から $\boldsymbol{\phi}_j^T$ を乗じ（つまり j 次モードとの仮想仕事を算定し）、式(9.105)(9.106)の直交条件を利用すると、自由振動問題と同様に総和のうちの $j \neq n$ の項はすべて零になるので、 $j = n$ の項だけが

$$\sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n + \sum_{n=1}^N q_n(t) \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n = \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{f}(t) \quad \rightarrow \quad \bar{m}_j \ddot{q}_j(t) + \bar{m}_j \omega_j^2 q_j(t) = \bar{f}_j(t)$$

のように抽出される。ここに

$$\bar{f}_j(t) \equiv \boldsymbol{\phi}_j^T \mathbf{f}(t) \quad (9.112)$$

と定義したものは外力の第 j 次モード成分と捉えることができ、一般化された外力と呼ばれている。外力ベクトル $\mathbf{f}(t)$ のパターンと固有振動モード $\boldsymbol{\phi}_n$ のパターンとは独立しているから、自由振動と同じ式(9.107)の級数解の仮定に不安を感じた読者もいたかもしれないが、外力特性を固有振動モードを基底ベクトルとする成分に分解して一般化された外力として考慮し、それぞれのモードへの外力の影響を定量化しているのである。結局

$$\ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = \frac{1}{\bar{m}_j} \bar{f}_j(t) \quad (9.113)$$

²⁸ 常に ϕ_i の第1成分が非零とは限らないので注意すること。第1著者はときどきそういう問題を定期試験に出すことを再び書いておく。

を解けば $q_j(t)$ が求められる。これは 1 自由度系の非減衰強制振動の運動方程式そのものである。右辺に対する特解を $r_j(t)$ と記すと、この運動方程式の一般解は

$$q_j(t) = A_j \sin \omega_j t + B_j \cos \omega_j t + r_j(t) \tag{9.114}$$

となるので、これを各モードの初期条件式 (9.110) に代入して

$$\begin{aligned} q_j(0) = B_j + r_j(0) &= \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0}{\bar{m}_j}, & \dot{q}_j(0) = \omega_j A_j + \dot{r}_j(0) &= \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_0}{\bar{m}_j} \\ \rightarrow A_j &= \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_0}{\bar{m}_j \omega_j} - \frac{\dot{r}_j(0)}{\omega_j}, & B_j &= \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0}{\bar{m}_j} - r_j(0) \end{aligned}$$

によって、積分定数 A_j, B_j を決定すればいい。あるいは 1 自由度系の式 (9.49) の Duhamel 積分を用いて強制振動解を求めると、一般解は

$$q_j(t) = \bar{A}_j \sin \omega_j t + \bar{B}_j \cos \omega_j t + \int_0^\infty \frac{\bar{f}_j(\tau)}{\bar{m}_j \omega_j} H(t - \tau) \sin \{ \omega_j (t - \tau) \} d\tau$$

と表すこともできる。Duhamel 積分は零初期条件の解なので、 $\bar{A}_j = \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{v}_0}{\bar{m}_j \omega_j}, \bar{B}_j = \frac{\phi_j^T \mathbf{M} \mathbf{u}_0}{\bar{m}_j}$ となる。

3 自由度系の計算は面倒なので演習問題に譲ることにして、ここでは図 9.29 の $m = m_1 = m_2, k = k_1 = k_2$ の 2 自由度系の強制振動を、モード解析法で解いておこう。簡単のために初期条件と外力条件は

$$\mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f_0 \sin pt \end{Bmatrix}$$

としておく。まず $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ として固有振動数を $\omega_i = \xi_i \omega_0$ と置くと第 9.2.1 (2) 節の自由振動の答から

$$\xi_1 \equiv \frac{\omega_1}{\omega_0} \approx 0.6180, \quad \xi_2 \equiv \frac{\omega_2}{\omega_0} \approx 1.618$$

であり、対応する固有振動モードは

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ d_1 \end{Bmatrix}, \quad d_1 = 1.618, \quad \phi_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ d_2 \end{Bmatrix}, \quad d_2 = -0.6180$$

であった。次に一般化された質量と m の比を求めるために $\bar{m}_i = \mu_i m$ としたとき

$$\mu_1 = \frac{\bar{m}_1}{m} = 1^2 + 1.618^2 = 3.618, \quad \mu_2 = \frac{\bar{m}_2}{m} = 1.382$$

となる。初期条件式 (9.110) に以上の情報を代入すると

$$q_1(0) = \frac{u_0}{\mu_1}, \quad \dot{q}_1(0) = \frac{v_0 d_1}{\mu_1}, \quad q_2(0) = \frac{u_0}{\mu_2}, \quad \dot{q}_2(0) = \frac{v_0 d_2}{\mu_2}$$

であり、一般化された外力は式 (9.112) から

$$\bar{f}_1 = d_1 f_0 \sin pt, \quad \bar{f}_2 = d_2 f_0 \sin pt$$

となる。よって一般解は、Duhamel 積分を用いない場合には

$$q_j(t) = A_j \sin \omega_j t + B_j \cos \omega_j t + \frac{d_j f_0}{\bar{m}_j (\omega_j^2 - p^2)} \sin pt$$

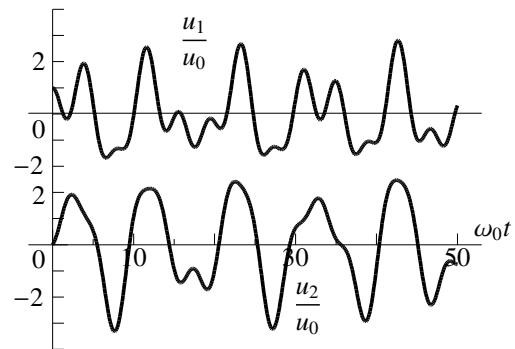


図 9.35 2 自由度系の非減衰強制振動

と求められる。これを上の初期条件式に代入すると

$$A_j = \frac{d_j}{\mu_j \xi_j} \left(\frac{v_0}{\omega_0} \right) - \frac{d_j}{\mu_j \xi_j} \frac{f_0}{k} \frac{p/\omega_0}{\xi_j^2 - (p/\omega_0)^2}, \quad B_j = \frac{u_0}{\mu_j}$$

のように A_j, B_j が求められる。例として

$$\frac{v_0}{\omega_0} = 0.5 u_0, \quad \frac{f_0}{k} = 0.8 u_0, \quad \frac{p}{\omega_0} = 1$$

の場合の結果を図 9.35 に示した。

演習問題 9-5

16. $m = m_1 = m_2 = m_3, k = k_1 = k_2 = k_3$ の 3 自由度系で

$$\mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_0 \sin pt \end{Bmatrix}, \quad \frac{f_0}{k} = 0.8 u_0, \quad \frac{p}{\omega_0} = 1$$

の場合の強制振動解を求めて図示せよ。

(6) 粘性減衰自由振動

第 9.2.1 (3) 節で述べたように、多自由度系の減衰振動問題の場合は振動数方程式から複素数の特性根を求めることが面倒なので、1 自由度系と同じような素直な方法で解くことは諦めていた。ここでは粘性減衰も含めた式 (9.95) をモード解析法で解くことを考えよう。では式 (9.107) の形で解を仮定したモード解析法が、減衰行列を含めた運動方程式にも使えるだろうか。使ってもいいが、残念ながら一般的にはそれで面倒を避けることはできない。というのも、モード解析法に使うモードは非減衰のモードだからだ。つまりそこには減衰の特性は含まれていないから、そんなものを使って正しい答が出るはずはないと考えるのが素直であり、正しい。それを知りながら、敢えて非減衰自由振動モードを用いようとしたとしても、減衰行列に対しては式 (9.105) (9.106) のような直交性は必ずしも成立しないはずだ。したがって、 N 個の連立運動方程式を独立した N 個の 1 自由度系の運動方程式に分解することはできないのである。しかし機械部品の設計とは異なり、特に社会基盤構造を対象とする場合には幸いなことに、実は具体的に現場の減衰係数 c_i がわかっているわけではない上にその大きさは非常に小さく、またそれを設計しようともしていない。さらに減衰を無視することが動的増幅率の観点からは安全側の判断にも通じる。したがって、ここではモード解析法が使えるのではないかと期待 (近似) してその解法の使い方を説明しよう。すなわち

$$\phi_i^T \mathbf{C} \phi_j = \begin{cases} \text{本当は零じゃないが積極的に無視して} \rightarrow 0, & j \neq i \\ 2 \bar{m}_i \bar{\beta}_i \omega_i, & j = i \end{cases} \quad (9.115)$$

が成立することを前提にして定式化を試みよう。ここに $\bar{\beta}_i$ はこの式で定義されて求められる定数で、第 i 次の見かけ上の減衰定数あるいは一般化された減衰定数と呼ばれる。

最初は外力 $\mathbf{f}(t)$ が無い自由振動を対象とし、 $\mathbf{f}(t) \equiv 0$ とした運動方程式 (9.95) に式 (9.107) を代入すると

$$\sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \mathbf{M} \phi_n + \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(t) \mathbf{C} \phi_n + \sum_{n=1}^N q_n(t) \mathbf{K} \phi_n = \mathbf{0}$$

となる。これに左から ϕ_j^T を乗じ（つまり j 次モードとの仮想仕事を算定し），式 (9.105) (9.106) (9.115) の直交条件を適用すると，総和のうち $j \neq n$ の項はすべて零になって

$$\sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \phi_j^T M \phi_n + \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(t) \phi_j^T C \phi_n + \sum_{n=1}^N q_n(t) \phi_j^T K \phi_n = 0 \quad \rightarrow \quad \bar{m}_j \ddot{q}_j(t) + 2\bar{m}_j \bar{\beta}_j \omega_j \dot{q}_j(t) + \bar{m}_j \omega_j^2 q_j(t) = 0$$

を得るので，結局

$$\ddot{q}_j(t) + 2\bar{\beta}_j \omega_j \dot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = 0 \tag{9.116}$$

を解けばいいことになる。これは 1 自由度系の減衰自由振動の運動方程式である。したがって一般解は

$$q_j(t) = \exp(-\bar{\beta}_j \omega_j t) [A_j \sin\{(\omega_d)_j t\} + B_j \cos\{(\omega_d)_j t\}], \quad (\omega_d)_j \equiv \omega_j \sqrt{1 - \bar{\beta}_j^2} \tag{9.117a, b}$$

となる。初期条件式 (9.110) を用いて積分定数 A_j, B_j を決定すれば解が決定される。

図 9.37 の細い破線が，2 自由度系で $m_1 = m_2 = m, c_1 = c_2 = c, k_1 = k_2 = k$ とした上で

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad c = 2\beta_0 \omega_0$$

によって ω_0 と β_0 を定義し，初期条件等を

$$\mathbf{u}_0 = \begin{Bmatrix} u_0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{v}_0 = \begin{Bmatrix} 0 \\ v_0 \end{Bmatrix}, \quad \frac{v_0}{\omega_0} = 0.5 u_0, \quad \beta_0 = 0.02$$

と与えた場合の結果である。前節の例の記号を用いれば，二つの一般化された減衰定数は

$$\bar{\beta}_i = \frac{\beta_0 (2 - 2d_i + d_i^2)}{\xi_i \mu_i}$$

と表現することができる。

(7) Rayleigh 減衰

しかし式 (9.115) の「積極的に無視」というのは，いかに土木屋といえども，あまり好ましい状況とは思えない。また上述のように社会基盤構造の場合には，具体的な減衰係数 c_i については経験や実測から何らかの値を設定しなければならないのも事実である。そのため，減衰係数が質量と剛性に比例したものとしてモデル化する考え方 [16] がある。これを比例減衰あるいは **Rayleigh 減衰** と呼ぶ。それは

$$\mathbf{C} = \zeta^M \mathbf{M} + \zeta^K \mathbf{K} \tag{9.118}$$

のようなモデル化である。こうすれば，式 (9.105) (9.106)

で表される質量行列と剛性行列に対するモードの直交性から，減衰行列についても自動的にモードの直交性が成立する。さて，粘性が弾性や質量に関係があるって本当だろうか。後述のある種の梁モデルで剛性比例にはなることを示すことはできる。

式 (9.118) に左右から ϕ_i を乗じると

$$\phi_i^T \mathbf{C} \phi_i = \zeta^M \phi_i^T \mathbf{M} \phi_i + \zeta^K \phi_i^T \mathbf{K} \phi_i = \bar{m}_i \zeta^M + \bar{m}_i \omega_i^2 \zeta^K$$

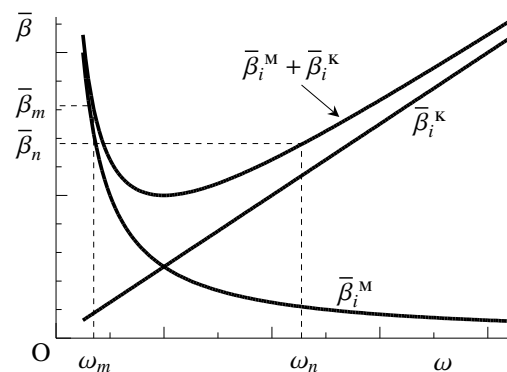


図 9.36 比例減衰

という関係になる。ここでは式(9.105) (9.106) の関係を用いた。これが形式的に式(9.17) の1自由度系の減衰項の係数の質量倍の $2\bar{m}_i\bar{\beta}_i\omega_i$ という表現になって欲しいことから、一般化された比例減衰定数を

$$\bar{\beta}_i \equiv \bar{\beta}_i^M + \bar{\beta}_i^K, \quad \bar{\beta}_i^M \equiv \frac{\zeta^M}{2\omega_i}, \quad \bar{\beta}_i^K \equiv \frac{\zeta^K\omega_i}{2} \quad (9.119)$$

のように定義すればいいことになる。したがって、減衰定数についても直交性が成立して

$$\phi_i^T C \phi_j = \begin{cases} 0, & j \neq i \\ 2\bar{m}_i\bar{\beta}_i\omega_i, & j = i \end{cases} \quad (9.120)$$

という関係が成り立つ。この不思議な係数 ζ^M, ζ^K を実測から決定するためには、まず第 m 次モードで振動させたときの減衰定数 $\bar{\beta}_m$ と第 n 次モードの $\bar{\beta}_n$ とを測定しておいて、これを式(9.119) に代入して連立させ

$$\begin{Bmatrix} \zeta^M \\ \zeta^K \end{Bmatrix} = \frac{2\omega_m\omega_n}{\omega_m^2 - \omega_n^2} \begin{Bmatrix} \omega_m\bar{\beta}_n - \omega_n\bar{\beta}_m \\ \bar{\beta}_m - \bar{\beta}_n \\ \omega_n \\ \omega_m \end{Bmatrix} \quad (9.121)$$

という関係から求めればいい (図 9.36 参照)。実際には、三つ以上の振動数に対する減衰定数を用いて最小 2 乗法でも使うのではないだろうか。

(8) 粘性減衰強制振動

最後に、外力も含めた運動方程式をモード解析法で解こう。運動方程式(9.95) に式(9.107) を代入すると

$$\sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \mathbf{M} \phi_n + \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(t) \mathbf{C} \phi_n + \sum_{n=1}^N q_n(t) \mathbf{K} \phi_n = \mathbf{f}(t)$$

となる。これに左から ϕ_j^T を乗じ (つまり j 次モードとの仮想仕事を算定し), 式(9.105) (9.106) (9.120) の直交条件を利用すると、総和のうち $j \neq n$ の項はすべて零になって

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N \ddot{q}_n(t) \phi_j^T \mathbf{M} \phi_n + \sum_{n=1}^N \dot{q}_n(t) \phi_j^T \mathbf{C} \phi_n + \sum_{n=1}^N q_n(t) \phi_j^T \mathbf{K} \phi_n = \phi_j^T \mathbf{f}(t) \quad \rightarrow \\ \bar{m}_j \ddot{q}_j(t) + 2\bar{m}_j\bar{\beta}_j\omega_j \dot{q}_j(t) + \bar{m}_j\omega_j^2 q_j(t) = \bar{f}_j(t) \end{aligned}$$

を得る。ここに右辺の $\bar{f}_j(t)$ は、式(9.112) で定義した一般化された外力である。つまり

$$\ddot{q}_j(t) + 2\bar{\beta}_j\omega_j \dot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = \frac{1}{\bar{m}_j} \bar{f}_j(t) \quad (9.122)$$

を解けばいいことになる。これは1自由度系の減衰強制振動の運動方程式なので、あとは省略する。

結局モード解析法を用いさえすれば、本質的には1自由度系の運動方程式を解くことができればいいことが明らかになった。実際の振動過程を見ると、振動に含まれるすべての成分のうち低次の固有振動モードの成分の振幅が比較的大きい。これは、高周波運動をさせるには大きなエネルギーが必要となり、その逆の現象として、低周波の振動の方が発生し易いからである。したがって社会基盤構造の設計を念頭に置くと、例えば N 自由度系の固有振動数とモードのすべてを知る必要があるわけではないことがわかる。工学的に重要と判断される低次の $M (\leq N)$ 個の固有振動数と固有振動モードを求め、その一般化された問題が解けてしまえば、期待した精度で近似解を得ることができる。ただこの M がどのくらいなら適切かという判断は、現場の技術者の技量によるのだろう。モードをじっくり考えながら、どのくらいまでのモードを対象にすればいいのかを判断すべきである。特に梁や柱・骨組のような構造振動の場合には、振動の仕方について担当技術者の力学的な予測・判断が非常に重要である。そういう意味で力学的センスを身に付けることはとても大事だ。

9.2.3 数値解析手法

ここでは一つの例として、第9.1.3(6)節で紹介した1自由度系の数値解析法の一つの中央差分法を多自由度系に適用する。表示を簡単にするために

$$\mathbf{u}^- \equiv \mathbf{u}(t - \Delta t), \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(t), \quad \mathbf{u}^+ \equiv \mathbf{u}(t + \Delta t)$$

と定義したとき、速度と加速度は

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \frac{1}{2\Delta t} (\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-), \quad \ddot{\mathbf{u}}(t) = \frac{1}{\Delta t} \left\{ \frac{\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{u} - \mathbf{u}^-}{\Delta t} \right\} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (\mathbf{u}^- - 2\mathbf{u} + \mathbf{u}^+) \quad (9.123a, b)$$

と近似できる。これを運動方程式(9.95)に代入すると

$$\frac{\mathbf{M}}{(\Delta t)^2} (\mathbf{u}^- - 2\mathbf{u} + \mathbf{u}^+) + \frac{\mathbf{C}}{2\Delta t} (-\mathbf{u}^- + \mathbf{u}^+) + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}(t)$$

となるので、整理すると

$$\mathbf{u}^+ = \mathbf{D} \left[\mathbf{f}(t) - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2} \mathbf{M} \right) \mathbf{u} - \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right) \mathbf{u}^- \right], \quad \mathbf{D} \equiv \left(\frac{1}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t} \mathbf{C} \right)^{-1} \quad (9.124a, b)$$

という関係を得、時々刻々の解を求めることができる。また、一番最初のステップの \mathbf{u}^- については、式(9.123)の関係から \mathbf{u}^+ を消去して得る

$$\mathbf{u}^- = \mathbf{u} - \Delta t \dot{\mathbf{u}} + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{u}}$$

を時刻 $t = 0$ で表現し、さらに $t = 0$ の瞬間の運動方程式から得る

$$\ddot{\mathbf{u}}(0) = \mathbf{M}^{-1} \{ \mathbf{f}(0) - \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(0) - \mathbf{K} \mathbf{u}(0) \}$$

という関係を上式右辺第3項に代入すれば

$$\mathbf{u}(-\Delta t) = \left(\mathbf{I} - \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} \right) \mathbf{u}(0) - \Delta t \left(\mathbf{I} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \right) \dot{\mathbf{u}}(0) + \frac{\Delta t^2}{2} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{f}(0) \quad (9.125)$$

となるから、時刻 $t = 0$ の \mathbf{u}^- を算定できる。 \mathbf{I} は $N \times N$ の単位行列である。フローチャートは第9.4.7節で説明する有限要素解析の場合の図9.55を参照のこと。

第9.2.2(6)節で例とした2自由度系をモード解析法で解いた厳密解(破線)との比較を図9.37に示した。この例は $\omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$ としたときの時間ステップを $\omega_0 \Delta t = 0.4$ とした結果だが $\omega_0 \Delta t = 0.3$ にすると数値解は厳密解とほとんど重なってしまう。数値解の安定性のためには、時間ステップは

$$\Delta t \leq \frac{T_N}{\pi} \quad (9.126)$$

を満たす必要[8]がある。ここに T_N は最小固有周期である。この例の場合の条件は $\omega_0 \Delta t \leq \omega_0 T_2 \approx 1.24$ 程度であった。

つまり自由度 N が大きくなると、時間ステップを非現実的なくらい小さくしなければならないことを意味する。もっと良好な安定性や正確性を持つ他の手法にはNewmark法やWilsonの θ 法等があるが、それについては文献[8]等を参照のこと。

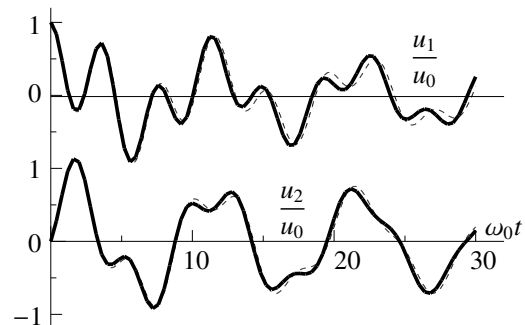


図9.37 2自由度系の減衰自由振動

9.3 連続体の振動 — 曲げ剛性の無い構造要素の振動

9.3.1 まっすぐな弦の振動

(1) 運動方程式

ここまでは質点が離散的に分布する系を対象としてきたが、身の回りの社会基盤構造等にはそういった系はほとんど見当たらない。実際の構造は連続的に質量が分布したいわゆる分布質量系だ。その分布質量系でも振動モードは非常に重要な概念である。ここではまず曲げ剛性の無い系の振動を対象とするが、その基本的な代表として吊橋や斜張橋のケーブルの基礎的なモデルの弦について考察しよう。弦は予め大きな張力で引張られて初めて安定する構造である。ここでも重力の影響は無視して支配方程式を誘導するが、弦はまっすぐで、1) 弦の変位は非常に小さく、2) 上下方向にしか変位せず、3) 弦の長さも変化しない²⁹ものとする。ある瞬間の弦を示した図9.38で上下方向の運動方程式は

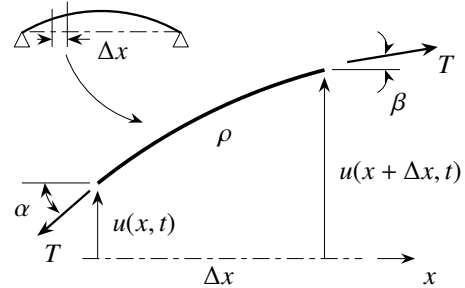


図9.38 まっすぐな弦の振動

$$T \sin \beta - T \sin \alpha = \rho \Delta x A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}$$

となる。 ρ は弦の密度で A は弦の断面積である。弦の変位は非常に小さいので、幾何学的な関係から

$$\sin \alpha \approx \alpha = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \quad \sin \beta \approx \beta = \frac{\partial u(x + \Delta x, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \Delta x$$

と近似でき、これを上式に代入して整理すると

$$T \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \rho A \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (9.127)$$

を得る。ここで波の速度（位相速度） c を

$$c \equiv \sqrt{\frac{T}{\rho A}} \quad (9.128)$$

で定義すると、上で誘導した弦の運動方程式(9.127)は

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (9.129)$$

となる。これは式(6.94)に一致し、式(3.155)の波動方程式と同じである。

ここでは両端を固定された長さ ℓ の弦の振動だけを対象にすると、境界条件は両端で

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0 \quad (9.130a, b)$$

で与えられる。初期条件は初期形状と初速で

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = v_0(x) \quad (9.131a, b)$$

のように与えればいい。

²⁹ そんなことはあり得ない・・・と考えると怪我をします。線形理論とはそういったものだ信じよう。

(2) 変数分離法による解法 — 固有関数

まず偏微分方程式の解法の一つである変数分離法を使ってみよう。つまり

$$u(x, t) = q(t) \phi(x)$$

と置き、運動方程式 (9.129) に代入して整理すると

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\ddot{q}(t)}{c^2 q(t)}, \quad t > 0, \quad \ell > x > 0$$

となる。この節のプライムは x に関する微分を表す。さて左辺は x のみの関数で右辺は t のみの関数なので、両辺共に独立して自由に変動できるように見える。しかし、この式の等号は任意の時刻 t に任意の場所 x で常に成立しなければならない。ということは、この両辺共に変動せず定数でしかあり得ないことを意味する。つまり

$$\frac{\phi''(x)}{\phi(x)} = \frac{\ddot{q}(t)}{c^2 q(t)} = \Lambda (\text{const.})$$

でなければならないので

$$\ddot{q}(t) - \Lambda c^2 q(t) = 0, \quad \phi''(x) - \Lambda \phi(x) = 0 \quad (9.132a, b)$$

が独立して成立しなければならない。境界条件式 (9.130) も変数分離すると、任意の時刻でそれが成立しなければならないことから

$$\phi(0)q(t) = 0, \quad \phi(\ell)q(t) = 0 \quad \rightarrow \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(\ell) = 0 \quad (9.133a, b, c, d)$$

と解釈できる。初期条件は分離できないのでしばらく放置しておこう。

運動方程式と境界条件だけが分離できたので式 (9.132b) の方が先に解けそう。まず $\Lambda > 0$ の場合は $\Lambda = \mu^2$ と置くと、一般解は $\phi(x) = A \sinh(\mu x) + B \cosh(\mu x)$ と求められるので、境界条件式 (9.133c) (9.133d) に代入すると $B = 0$, $A \sinh(\mu \ell) = 0$ から積分定数を決めることになる。しかし $\mu \ell > 0$ なので $A = 0, B = 0$ のみが解となり、意味のある $\phi(x)$ は存在しないことになる。では次に $\Lambda = 0$ の場合の一般解は $\phi(x) = Ax + B$ なので、境界条件が $B = 0, A\ell = 0$ を要求し、これも意味のある解にはならない。したがって Λ は負でなければならないことがわかる。

そこで $\Lambda = -\mu^2 < 0$ と置くと、一般解は

$$\phi(x) = A \sin \mu x + B \cos \mu x$$

であり、境界条件に代入すると

$$B = 0, \quad A \sin \mu \ell = 0$$

を得る。これが意味のある $\phi(x)$ になるためには A が零であってはならないので

$$\sin \mu \ell = 0 \quad \rightarrow \quad \mu \ell = n\pi, \quad \Lambda = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.134a, b, c)$$

でなければならない。したがって A は不定になり、解は

$$\phi(x) \sim \sin \mu x = \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (9.135)$$

と求められる。最終的に微分方程式 (9.132a) に式 (9.134c) の Λ を代入して解くと $q(t)$ の方が

$$q(t) = \mathcal{L}(\sin c\mu t, \cos c\mu t) = \mathcal{L}\left\{\sin\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right), \cos\left(\frac{n\pi c t}{\ell}\right)\right\}$$

と求められる。この形が固有振動数が ω の周期 (三角) 関数であることから、弦の振動の固有振動数 ω_n は

$$\omega_n = c\mu = \frac{n\pi c}{\ell} = \frac{n\pi}{\ell} \sqrt{\frac{T}{\rho A}} \quad (9.136)$$

となる。つまり、長い弦や重く太い弦は振動数が小さくなるので音は低くなる。一方、その逆に張力を大きくすると音は高くなる。グランドピアノの蓋を開けてみて欲しい。低い音のピアノ線は太く長くなっているし、高い音のピアノ線は細く短くなっている。調律 (チューニング) では弦の張力 T を調整³⁰する。また管楽器は (一部は口で音程をとると同時に ; おと管楽器は両端固定条件ではないが) 孔の開閉とバルブによって ℓ を変更して音程をとっている。

以上の過程から無限個の μ とそれに対応した無限個の $\phi(x)$ が求められ、そのすべてが解の候補であることからそれを重ね合わせることによって、変数分離法による解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin c\mu_n t + B_n \cos c\mu_n t) \sin \mu_n x, \quad \mu_n \equiv \frac{n\pi}{\ell} \quad (9.137a, b)$$

のような級数解として求められる。 μ には添え字を付けて定義し直した。上式を初期条件式 (9.131) に代入して得られる

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \mu_n x = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c\mu_n A_n \sin \mu_n x = v_0(x)$$

の2式が積分定数の A_n, B_n を決定する。と書いたが大丈夫か、本当にそんなことができるか。つまり、この2式は $0 < x < \ell$ の任意の点で成立しなければならない上に、求めるべき積分定数は無限個ある。どうやって求めますか。数学が好きな読者なら、例えば上の第1式の左辺と右辺を入れ替えた

$$u_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \mu_n x$$

を眺めることによって、あっそうか、 B_n は関数 $u_0(x)$ を sine-Fourier 級数展開したときの Fourier 係数だと気付くかもしれない。したがって Fourier 解析の教科書を勉強し直せば A_n, B_n を求めることができるのだが、そのためには sine 関数つまり $\phi(x)$ が持つ重要な特性を知っておく必要がある。

(3) 固有関数の直交性

ではもう一度 $\phi(x)$ が満たすべき微分方程式等について考察しておこう。まず波動方程式 (9.129) では x と t の微分作用素が両辺に分かれているので、これと変数分離法で得た x についての式 (9.132b) を比べてみると

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad \rightarrow \quad \frac{d^2 \phi(x)}{dx^2} = \Lambda \phi(x), \quad \Lambda = -\mu^2 \quad (9.138a, b, c)$$

という対応がある。また境界条件式 (9.130) も

$$u(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0, \quad \rightarrow \quad \phi(0) = 0, \quad \phi(\ell) = 0, \quad (9.139a, b, c, d)$$

³⁰ 芥川也寸志氏の著作 (文献は失念) だったと思うが、三味線の弦は両端単純支持ではなく片側はちょっと離れた位置に支持点が二つある (「さわり」と呼ぶらしい) ので割れた音がすると書いてあった。もう一つ、オーケストラのハーピストの地位はその演奏位置で判断できるそうで、指揮者よりも向かって右側にいる場合の方が地位が高いらしい。冗談だろうが、芥川氏が考える理由は何だと思えますか。そのハーブだが、半音階をどうやって変更するかご存知だろうか。実は足元には3段階 (♯, ♭, b) のペダルがCからHまでの七つに対して配置されていて、上式の T か ℓ (調査していない) を変更しているのだ。臨時記号があると、演奏中のロングスカートの中はたいへんなことになるわけだ。ところでオーケストラの音合わせでオーボエのA音を基準にするのはなぜかご存知だろうか。しかもオーボエ奏者にハゲが多い理由も面白い (これも芥川氏の主張だが)。あのマウスピースの径は小さいのに高価なんですよええ。

表 9.1 多自由度系と弦の固有値問題間の対照

	N 自由度系の運動	両端固定の弦の振動
支配方程式	$\mathbf{K} \mathbf{u}(t) = -\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t)$	$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \quad u(0,t) = 0, \quad u(\ell,t) = 0$
固有値問題	$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n$	$\phi_n''(x) = -\mu_n^2 \phi_n(x), \quad \phi_n(0) = 0, \quad \phi_n(\ell) = 0$
直交性 ($i \neq j$)	$\boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_j = 0, \quad \boldsymbol{\phi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_j = 0$	$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0$
固有関数列の級数解	$\mathbf{u}(t) = \sum_n^N q_n(t) \boldsymbol{\phi}_n$	$u(x,t) = \sum_n^{\infty} q_n(t) \phi_n(x)$
第 j 次の運動方程式	$\ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = 0$	$\ddot{q}_j(t) + (c\mu_j)^2 q_j(t) = 0$

という対応がある。そして Λ の値や正負によらず $\phi(x) \equiv 0$ が解の一つであるが、非零の解が存在するための条件から Λ が求められるのだ。このような $\phi(x)$ の問題を一般的には微分方程式の微分作用素 d^2/dx^2 に関する固有値問題と呼ぶ。ちょうど多自由度系の固有振動モード $\boldsymbol{\phi}_n$ が満たすべき式が式 (9.101) つまり

$$\mathbf{K} \boldsymbol{\phi}_n = \omega_n^2 \mathbf{M} \boldsymbol{\phi}_n$$

で、 ω_n の値や正負によらず $\boldsymbol{\phi} \equiv \mathbf{0}$ が解の一つだったことに対応している。この多自由度系の問題の方は行列 \mathbf{K} や \mathbf{M} に関する固有値問題と呼ばれる。この線形代数における用語に対比させて $\phi(x)$ を固有関数と呼び、 Λ および μ を固有値と呼ぶ。物理的な言葉を使うなら $\phi(x)$ が固有振動モードであり、式 (9.136) から $c\sqrt{-\Lambda} = c\mu$ が固有振動数である。以上の対比を表 9.1 の第 2, 3 行に示した。そして同じ表 9.1 の第 4 行 2 列に示したように、多自由度系の固有振動モード $\boldsymbol{\phi}$ が持つ重要な特性が直交性だった。このことから、弦の場合の固有関数 $\phi(x)$ もある種の直交性を持っていることが期待できる。

そこで式 (9.137b) の μ_n に対応した $\phi(x)$ と Λ を添え字付きで $\phi_n(x)$, Λ_n と記して、それを第 n 次の固有関数 (固有振動モード) と固有値と呼ぶことにする。すると式 (9.138b) から、この n 次の固有関数 $\phi_n(x)$ は

$$\phi_n''(x) - \Lambda_n \phi_n(x) = 0 \quad (9.140)$$

を満足している。この運動方程式に $\phi_i(x)$ を乗じて全領域積分すれば、それは弦全体の仮想仕事になり

$$\int_0^\ell \phi_i(x) \{ \phi_n''(x) - \Lambda_n \phi_n(x) \} dx = 0$$

となる。第 1 項を部分積分すると

$$\int_0^\ell \phi_i \phi_n'' dx = \phi_i \phi_n' \Big|_0^\ell - \int_0^\ell \phi_i' \phi_n' dx$$

となるから、両端の境界条件式 (9.139c) (9.139d) から第 1 項が消え、結局上式は

$$- \int_0^\ell \phi_i' \phi_n' dx - \Lambda_n \int_0^\ell \phi_i \phi_n dx = 0$$

と書き直される。同じように、第 i 次モードの方程式に固有関数 ϕ_n を乗じて仮想仕事式を求めると

$$- \int_0^\ell \phi_n' \phi_i' dx - \Lambda_i \int_0^\ell \phi_n \phi_i dx = 0$$

となる。この 2 式を辺々差し引くと、第 1 項は同じなので消えてしまい

$$(\Lambda_i - \Lambda_n) \int_0^\ell \phi_n \phi_i dx = 0, \quad i \neq n$$

を得る。式(9.134c)からも明らかなように異なる固有値同士は異なる値だったので、この問題の固有関数は

$$\langle \phi_n, \phi_i \rangle \equiv \int_0^\ell \phi_n(x) \phi_i(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq n \\ \frac{\ell}{2}, & i = n \end{cases} \quad (9.141)$$

という性質を持っている。この左辺は二つの関数の内積と呼ばれる。そして、二つの異なる固有関数の内積が零になることから、その固有関数同士は直交していると称するのだ。なお式(9.141)の内積は式(5.66)の一般的な重みつき内積の定義で $m = 0, \omega = 1$ とした特別な場合である。

(4) 固有関数による解法 — モード解析法

もう一度最初からやり直そう。ただし固有値問題の微分方程式(9.138b)と境界条件式(9.139c)(9.139d)から $\phi_n(x)$ と Λ_n および μ_n が求められているものとする。そして運動方程式(9.129)の解を固有関数列による無限級数で

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x), \quad \phi_n \equiv \sin \mu_n x, \quad \Lambda_n = -\mu_n^2 = -\left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 \quad (9.142a, b, c)$$

のように表すことができると仮定して問題を解こう。式(9.142a)の級数解を運動方程式(9.129)に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n''(x) = \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \phi_n(x)$$

となるので、式(9.140)を左辺に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda_n q_n(t) \phi_n(x) = \frac{1}{c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \ddot{q}_n(t) \phi_n(x)$$

が成立する。この式と第 i 次の固有関数と内積（仮想仕事）をとると、結局直交性の式(9.141)によって級数中の第 i 次成分以外はすべて零になり、総和記号が無くなるので

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle \times (\ddot{q}_i(t) - \Lambda_i c^2 q_i(t)) = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{q}_i(t) + (c\mu_i)^2 q_i(t) = 0$$

が係数 $q_i(t)$ を決定する微分方程式になり、式(9.132a)に一致する。この一般解は前述のように

$$q_i(t) = A_i \sin c\mu_i t + B_i \cos c\mu_i t$$

と求められるから、元の問題の一般解も

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin c\mu_n t + B_n \cos c\mu_n t) \sin \mu_n x \quad (a)$$

となる。

最後に、この一般解の式(a)を初期条件式(9.131)に代入すると、これも前述のように

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \mu_n x = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c\mu_n A_n \sin \mu_n x = v_0(x)$$

となるが、固有関数の直交性を知った今なら、この2式から積分定数を求めることができるようになっている。再度第 i 次の固有関数との内積をとると、固有関数の直交性によって $n = i$ の項だけが抽出されて

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle B_i = \langle \phi_i, u_0(x) \rangle, \quad \langle \phi_i, \phi_i \rangle c\mu_i A_i = \langle \phi_i, v_0(x) \rangle$$

を得るので、積分定数が

$$B_i = \frac{\langle \phi_i, u_0(x) \rangle}{\langle \phi_i, \phi_i \rangle} = \frac{2}{\ell} \int_0^\ell u_0(x) \sin \mu_i x dx, \quad A_i = \frac{\langle \phi_i, v_0(x) \rangle}{c\mu_i \langle \phi_i, \phi_i \rangle} = \frac{2}{c\mu_i \ell} \int_0^\ell v_0(x) \sin \mu_i x dx \quad (b)$$

と求められる。これがFourier-sine係数の求め方である。ここまでの過程を多自由度系のモード解析法と対比させたのが表9.1である。

具体例として文献 [77] にある例を転記する。弦の中央を u_0 だけつまみ上げ、そっと手を離れたときの初期条件は

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0 \frac{2x}{\ell}, & 0 < x < \frac{\ell}{2} \\ u_0 \left(2 - \frac{2x}{\ell}\right), & \frac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases}, \quad v_0(x) \equiv 0$$

のように書くことができる。これを式 (b) に代入すれば積分定数を求めることができ、結局

$$A_n = 0, \quad B_n = \frac{8u_0}{(n\pi)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

となる。これを図 9.39 に示した。破線は級数の 40 項を用いた解で、実線は 5 項のみで描いた解である。少ない項数でも比較的良好な解が求められている。厳密解は次の節の図 9.40 に示されるように、三角形や台形のような区分的な直線である。

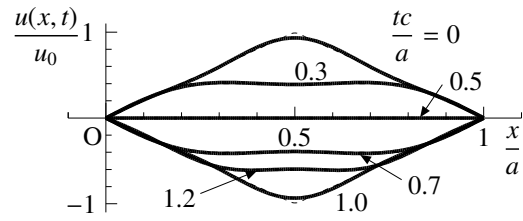


図 9.39 弦の振動の例

(5) 振動と波動

もう一度、一般解の式 (a) を眺めてみよう。これを少し書き直すと

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin c\mu_n t + B_n \cos c\mu_n t) \sin \mu_n x \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{2} [\cos \{\mu_n (x - ct)\} - \cos \{\mu_n (x + ct)\}] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{2} [\sin \{\mu_n (x - ct)\} + \sin \{\mu_n (x + ct)\}] \end{aligned}$$

となることから、解は $f(x - ct)$ という関数と $g(x + ct)$ という関数で

$$u(x,t) = f(x - ct) + g(x + ct) \tag{c}$$

のように表されていることがわかる。では $f(x - ct)$ という関数はこういった現象を表しているだろうか。例えばある時刻 $t = t_0$ にある場所 $x = x_0$ で、この関数が $f_0 \equiv f(x_0 - ct_0)$ という値を持っていたとする。それから Δt だけ時間が経った $t_1 = t_0 + \Delta t$ のときの、 $x_1 = x_0 + c \Delta t$ という場所（ここがミソ）のこの関数の値は

$$f(x_1 - ct_1) = f(x_0 + c \Delta t - c(t_0 + \Delta t)) = f(x_0 - ct_0) = f_0$$

となる。つまり、 $t = t_0, x = x_0$ における「物理現象」が移動して時刻 $t = t_1$ になると $x = x_1$ で観察されることを意味する。したがって、 $f(x - ct)$ という関数は「 x の正の方向に c で伝播する物理現象」を表している。ということは逆に、 $g(x + ct)$ は「 x の負の方向に c で伝播する物理現象」を表す。したがって弦の振動解は、正の方向に c で伝播する波と、負の方向に c で伝播する波の重ね合わせと解釈してもいいことになる。

図 9.40 は、前節で扱った中央をつまみ上げて離れた弦の波動の解の式 (c) の模式図である。右に速度 c で伝播する実線と左に伝播する破線の重ね合わせが下にある図の解であり、初期の三角形が台形になり、その高さが徐々に変化していくのが正解である。このように波動と振動は同じ現象であり、その観察の仕方が違うだけであることがわかる。したがって、式 (9.129) は波動方程式とも呼ばれているのだ。

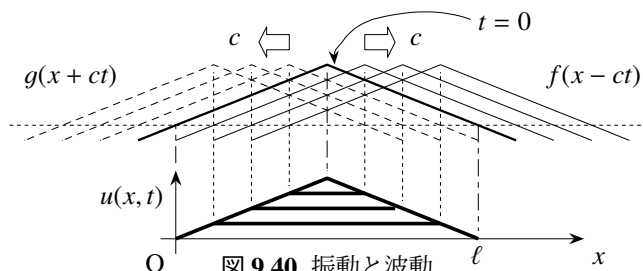


図 9.40 振動と波動

9.3.2 円形膜の振動

(1) 運動方程式

社会基盤構造には使わないと思うが、ドームの天井等のモデルとして周囲を固定された円形膜の振動を考察しておこう。膜は弦が2次元的に拡がったもので、ここではすべての方向に一樣な引張張力が与えられているものとし、その単位面積当たりの張力を σ_0 とする。つまり、膜厚が t の膜の Δx の辺を眺めたのが図 9.38 だと捉えると、この図の

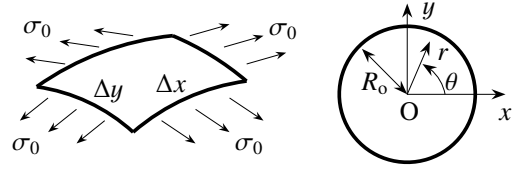


図 9.41 円形膜

張力 T は $T = \sigma_0 t \Delta y$ と考えればいい。そしてこれと同様の図が y 軸方向にも描けるので、ちょうど図 9.41 の左側の図のような状況にある。したがって、この Δx の辺に作用する上向きの力の成分が式 (9.127) の左辺であることを踏まえると、 Δy の辺に作用する上向きの力の成分は $T \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ になるので、その二つの力を重ね合わせることによって体積 ($\Delta x \Delta y t$) の上下方向の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}, \quad c \equiv \sqrt{\frac{\sigma_0}{\rho}} \quad (9.143a, b)$$

となる。左辺はラプラシアン³¹の記号を用いて $\nabla^2 u(x, y, t)$ と表すこともできる。ただここでは円形膜を対象とするので、図 9.41 の右側に示した極座標系 (r, θ) で考えた方が便利だ。その極座標系のラプラシアンが

$$\nabla^2 \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (9.144)$$

になることは、数学の本を見れば（第 D.4 節を勉強すれば）わかるので、半径 R_0 の膜の運動方程式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u(r, \theta, t)}{\partial t^2}, \quad 0 \leq r < R_0, \quad -\pi \leq \theta < \pi, \quad 0 < t \quad (9.145)$$

と表される。周囲は固定されているので

$$u(R_0, \theta, t) = 0 \quad (9.146)$$

が境界条件である。ただし運動方程式 (9.145) が $r = 0$ で特異になる（分母が零になる）ため、そこで「おかしいこと」が起きることが予想される。そこで、その「おかしいこと」が円形膜の中央で起きないように

$$|u(0, \theta, t)| < \infty \quad (\text{有界性}) \quad (9.147)$$

を付帯的な条件としておく。ただし、内径が $R_i > 0$ のドーナツ状の膜を対象とする場合には、式 (9.147) の付帯条件の代わりに内径側の境界条件が $u(R_i, \theta, t) = 0$ になることには注意しておいて欲しい。さらに、膜は周方向にも折れ曲がったり破れたりせず滑らかに連続したままだから、例えば $\theta = \pm\pi$ において

$$u(r, -\pi, t) = u(r, \pi, t), \quad \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, -\pi, t) = \frac{\partial u}{\partial \theta}(r, \pi, t) \quad (9.148a, b)$$

という連続条件³¹も課すことにする。言い換えると、 θ 方向には 2π 周期の周期性を持たなければならないことを意味する。初期条件は時刻 $t = 0$ における初期形状と初速を

$$u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(r, \theta, 0) = v_0(r, \theta) \quad (9.149a, b)$$

のように与えられるものとする。

³¹ 演習問題に出したが、扇形の場合はきちんとした境界条件になる。

(2) 固有関数

表 9.1 に示した弦の場合の第 2, 3 行の対比を踏まえると, 円形膜の固有値問題は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi(r, \theta)}{\partial \theta^2} = \Lambda \phi(r, \theta) \quad (9.150)$$

となる。 $\phi(r, \theta)$ が固有振動モードで, Λ が固有値である。疑問を持った読者は変数分離法を実行して欲しい。ここでさらに変数分離をした

$$\phi(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) \quad (9.151)$$

を上式に代入して整理すると

$$\frac{r(rR')'}{R} - \Lambda r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \zeta \text{ (const.)}$$

が成立しなければならないことがわかる。 ζ はもう一つの固有値だ。以下プライムはそれぞれの引数についての微分を表し, $R'(r) = dR/dr$ で $\Theta'(\theta) = d\Theta/d\theta$ である。ちなみに前節では $\phi'(x) = d\phi/dx$ だった。これから, それぞれの微分方程式が

$$r(rR')' - (\zeta + \Lambda r^2)R = 0, \quad \Theta'' + \zeta\Theta = 0 \quad (9.152a, b)$$

と求められる。一方, R についての境界条件式 (9.146) (9.147) は

$$R(R_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty \quad (9.153a, b)$$

であり, Θ についての連続条件式 (9.148) は

$$\Theta(-\pi) = \Theta(\pi), \quad \Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi) \quad (9.154a, b)$$

と表される。

まず $\Theta(\theta)$ の連続条件式 (9.154) が周期解であることを要求するので, 微分方程式 (9.152b) の固有値 ζ は非負でなければならない。また, その解は 2π 周期でない限り連続条件式 (9.154) を満足しないので ζ は整数でないといけない。したがって ζ は非負の整数

$$\zeta = n^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.155)$$

でなければならない, 対応する固有関数は

$$\Theta(\theta) = \Theta_n(\theta) = A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (9.156)$$

と求められる。この n は $n = 0$ も含むことには注意して欲しい。

得られた ζ を R の微分方程式 (9.152a) に代入すると

$$r(rR')' - (\Lambda r^2 + n^2)R = 0 \quad \text{あるいは} \quad r^2 R'' + rR' - (\Lambda r^2 + n^2)R = 0 \quad (9.157a, b)$$

が $R(r)$ を決める微分方程式である。まず Λ の符号を考察するために, それが非負 ($\Lambda \geq 0$) だと仮定してみる。そこで式 (9.157a) を r で割ったものに $R(r)$ を乗じて, $r = 0$ から R_0 まで積分すると

$$\int_0^{R_0} R(rR')' dr = \int_0^{R_0} \left(\frac{\Lambda r^2 + n^2}{r} \right) R^2 dr \geq 0 \quad (a)$$

が成り立つ。右辺の被積分関数は非負なので積分値も非負になっている。一方左辺は部分積分をして境界条件を代入すると

$$\int_0^{R_0} R(rR')' dr = R(rR') \Big|_0^{R_0} - \int_0^{R_0} r(R')^2 dr = - \int_0^{R_0} r(R')^2 dr < 0$$

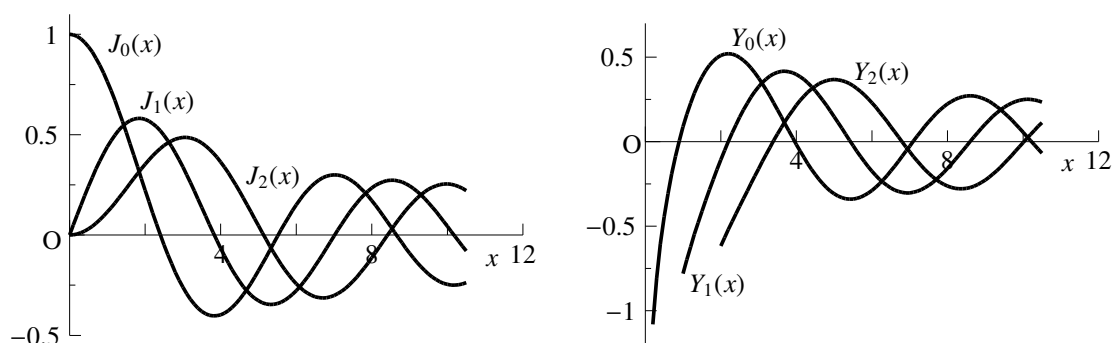


図 9.42 Bessel 関数

のように負になる。結局式 (a) の左辺が負なのに右辺は非負なので、仮定の $(\Lambda \geq 0)$ が成立しないことがわかる。よって $\Lambda = -\mu^2, \mu \neq 0$ と置こう。こうすると、 R についての微分方程式は式 (9.157b) から

$$r^2 R'' + r R' - (n^2 - \mu^2 r^2) R = 0 \quad (9.158)$$

となる。この式は n 次の **Bessel 方程式** と呼ばれ、解は **Bessel 関数** で

$$R(r) = \mathcal{L} \{J_n(\mu r), Y_n(\mu r)\} \quad (9.159)$$

と求められる。ここに、 J_n は n 次の第 1 種 Bessel 関数、 Y_n は n 次の第 2 種 Bessel 関数と呼ばれる。それぞれの例をいくつか図 9.42 に示した。

しかし、境界条件式 (9.153b) は $r = 0$ における有界性を要求していることから、図からも明らかなように第 2 種の Bessel 関数は解の候補にはならない。もちろんドーナツ状の膜の場合は $r = 0$ を含まないので、第 2 種 Bessel 関数も候補になる。したがって円形膜の場合の $R(r)$ は

$$R = R_n(r) = J_n(\mu_n r), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

が解の候補である。さらに、周上の境界条件式 (9.153a) から

$$J_n(\mu_n R_0) = 0 \quad (b)$$

が成立しなければならない。この条件が固有値 μ_n を決定する。図 9.42 から容易に推測できるように、Bessel 関数は一定周期ではないものの周期的に零をまたぐ関数で、零点は無限個存在する。したがって、上式 (b) を満足する μ_n はそれぞれの n に対して無限個存在する。そこで、それを 1 個目から $m = 1, 2, \dots$ と記すことにして添え字を加えると、 μ_{nm} という固有値が

$$J_n(\mu_{nm} R_0) = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (9.160)$$

を満足するように求められる。表 9.2 に具体的な零点を列挙したが、これを用いると例えば

$$\mu_{01} = \frac{2.40}{R_0}, \quad \dots, \quad \mu_{22} = \frac{8.42}{R_0}, \quad \dots$$

のような値を μ_{nm} は持つことになる。したがって、固有関数 $R(r)$ の解は最終的に

$$R(r) = R_{nm}(r) = J_n(\mu_{nm} r), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (9.161)$$

となる。Bessel 関数が一定周期ではないことから、 μ も例えば π の整数倍のような表現にはならない³²ことに注意して欲しい。

³² うーむ。ということは C に調律したティンパニーからは C ではない高周波音が聞こえているのだろうか。

(3) 固有関数の直交性

固有関数列で級数解を求める際に固有関数を持つべき最も重要な特性は直交性だった。まず式 (9.156) の固有関数 $\Theta_n(\theta)$ の方は、前節の弦の場合と同様の直交性

$$\langle \Theta_n, \Theta_m \rangle_\theta \equiv \int_0^{2\pi} \Theta_n(\theta) \Theta_m(\theta) d\theta = 0, \quad n \neq m \quad (9.162)$$

を持っている。では Bessel 関数の方はどうなっているだろう。直交性の証明には、ある一つの固有関数を仮想変位と想定してつり合い式（微分方程式）に乗じた仮想仕事式を用いてきた。ここでも同じアプローチを試みる。ある Bessel 関数 R_{nm} は式 (9.152a) あるいは式 (9.158) から

$$\frac{1}{r} (r R'_{nm})' + \left(\mu_{nm}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R_{nm} = 0$$

を満足している。これに R_{nk} を仮想変位として乗じて、極座標の微分面積が $r dr d\theta$ であることに注意しながら円形膜内で積分すると

$$0 = \int_0^{R_0} \left\{ \frac{1}{r} (r R'_{nm})' + \left(\mu_{nm}^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R_{nm} \right\} R_{nk} r dr$$

が成立する。被積分関数の第 1 項は、部分積分して境界条件を考慮すると

$$\int_0^{R_0} (r R'_{nm})' R_{nk} dr = r R'_{nm} R_{nk} \Big|_0^{R_0} - \int_0^{R_0} r R'_{nm} R'_{nk} dr = - \int_0^{R_0} r R'_{nm} R'_{nk} dr$$

となるので、上の仮想仕事式は

$$0 = - \int_0^{R_0} r R'_{nm} R'_{nk} dr - n^2 \int_0^{R_0} \frac{1}{r} R_{nm} R_{nk} dr + \mu_{nm}^2 \int_0^{R_0} R_{nm} R_{nk} r dr$$

となる。同じように、 R_{nk} が満足する微分方程式に R_{nm} を乗じて仮想仕事式を誘導すると

$$0 = - \int_0^{R_0} r R'_{nk} R'_{nm} dr - n^2 \int_0^{R_0} \frac{1}{r} R_{nk} R_{nm} dr + \mu_{nk}^2 \int_0^{R_0} R_{nk} R_{nm} r dr$$

となる。この 2 式を辺々差し引くと、結局第 1, 2 項は同じなので消えてしまい、第 3 項同士の差から

$$0 = (\mu_{nm}^2 - \mu_{nk}^2) \int_0^{R_0} R_{nk} R_{nm} r dr$$

となる。最終的に $m \neq k$ の異なる固有値同士は値が異なるので、次式で定義した内積で

$$\langle R_{nm}, R_{nk} \rangle_r \equiv \int_0^{R_0} R_{nm}(r) R_{nk}(r) r dr = 0, \quad m \neq k \quad (9.163)$$

という直交性を Bessel 関数を持っていることになる。この式 (9.163) も式 (5.66) の一般的な重みつき内積の定義で $m = 0$, $w = r$ とした特別な場合である。

(4) 固有関数による解法

最初の固有値問題に戻ると、式 (9.151) の固有関数が最終的に

$$\phi_{nm}^s(r, \theta) = J_{nm}(\mu_{nm} r) \sin n\theta, \quad \phi_{nm}^c(r, \theta) = J_{nm}(\mu_{nm} r) \cos n\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (9.164a, b)$$

と求められた。そして式 (9.162) と式 (9.163) からこの固有関数は

$$\langle \phi_{nm}^a, \phi_{jk}^b \rangle_{r\theta} \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^{R_0} \phi_{nm}^a(r, \theta) \phi_{jk}^b(r, \theta) r dr d\theta = 0, \quad n \neq j \text{ あるいは } m \neq k \text{ あるいは } a \neq b \text{ の場合} \quad (9.165)$$

で定義される内積で直交性を持っている。この固有関数 $\phi_{nm}^a(r, \theta)$ は、式 (9.150) から

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_{nm}^a(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_{nm}^a(r, \theta)}{\partial \theta^2} = -\mu_{nm}^2 \phi_{nm}^a(r, \theta) \quad (9.166)$$

を満足する。

いよいよ元の問題に戻ろう。求められた固有関数を用いて、解を

$$u(r, \theta, t) = \sum_{a=s,c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^a(t) \phi_{nm}^a(r, \theta) \quad (9.167)$$

と仮定する。これを膜の運動方程式 (9.145) に代入すると

$$\sum_{a=s,c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} q_{nm}^a(t) \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi_{nm}^a(r, \theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_{nm}^a(r, \theta)}{\partial \theta^2} \right\} = \frac{1}{c^2} \sum_{a=s,c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \ddot{q}_{nm}^a(t) \phi_{nm}^a(r, \theta)$$

となるが、この左辺の被積分関数の中括弧に式 (9.166) を代入して右辺を左辺に移せば

$$\sum_{a=s,c} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \phi_{nm}^a \left\{ \ddot{q}_{nm}^a(t) + (c \mu_{nm})^2 q_{nm}^a(t) \right\} = 0$$

と書き直される。この両辺に ϕ_{jk}^b を乗じて内積（仮想仕事式）を求めて式 (9.165) の直交条件を考慮すると、結局無限級数の中での $a = b, n = j, m = k$ の項のみが非零になり

$$\ddot{q}_{jk}^b(t) + (c \mu_{jk})^2 q_{jk}^b(t) = 0 \quad (9.168)$$

が $q_{jk}^b(t)$ を支配する微分方程式であり、解は

$$q_{jk}^b(t) = \mathcal{L} \left\{ \sin(\mu_{jk} ct), \cos(\mu_{jk} ct) \right\} \quad (9.169)$$

である。したがって、元の問題の一般解は

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} [J_{nm}(\mu_{nm} r) \sin n\theta \{A_{mn}^s \sin(\mu_{mn} ct) + B_{mn}^s \cos(\mu_{mn} ct)\} \\ + J_{nm}(\mu_{nm} r) \cos n\theta \{A_{mn}^c \sin(\mu_{mn} ct) + B_{mn}^c \cos(\mu_{mn} ct)\}] \quad (9.170)$$

と求められる。

最終的に未定係数は初期条件で決定できる。つまり式 (9.149) に式 (9.170) を代入すると

$$u(r, \theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{B_{mn}^s \phi_{nm}^s(r, \theta) + B_{mn}^c \phi_{nm}^c(r, \theta)\} = u_0(r, \theta), \\ \dot{u}(r, \theta, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} (\mu_{mn} ct) \{A_{mn}^s \phi_{nm}^s(r, \theta) + A_{mn}^c \phi_{nm}^c(r, \theta)\} = v_0(r, \theta)$$

となるので、 ϕ_{jk}^s あるいは ϕ_{jk}^c との内積をとり、式 (9.165) の直交条件を使えば

$$A_{jk}^s = \frac{\langle v_0(r, \theta), \phi_{jk}^s \rangle_{r\theta}}{(\mu_{mn} ct) \langle \phi_{jk}^s, \phi_{jk}^s \rangle_{r\theta}}, \quad A_{jk}^c = \frac{\langle v_0(r, \theta), \phi_{jk}^c \rangle_{r\theta}}{(\mu_{mn} ct) \langle \phi_{jk}^c, \phi_{jk}^c \rangle_{r\theta}}, \quad B_{jk}^s = \frac{\langle u_0(r, \theta), \phi_{jk}^s \rangle_{r\theta}}{\langle \phi_{jk}^s, \phi_{jk}^s \rangle_{r\theta}}, \quad B_{jk}^c = \frac{\langle u_0(r, \theta), \phi_{jk}^c \rangle_{r\theta}}{\langle \phi_{jk}^c, \phi_{jk}^c \rangle_{r\theta}}$$

と求められる。図 9.43 には各振動モードを描いた。それぞれの図で上半分の半円の曲線が θ 方向の $\cos n\theta$ のモードで、一点鎖線より外側にある部分のたわみが正なら、内側にある箇所では負になる。つまり、この図の並びの第 2 行では、 $0 < \theta < \pi/2$ の部分が下にたわむときに $\pi/2 < \theta < \pi$ の箇所は上に変位する。また、半円の下

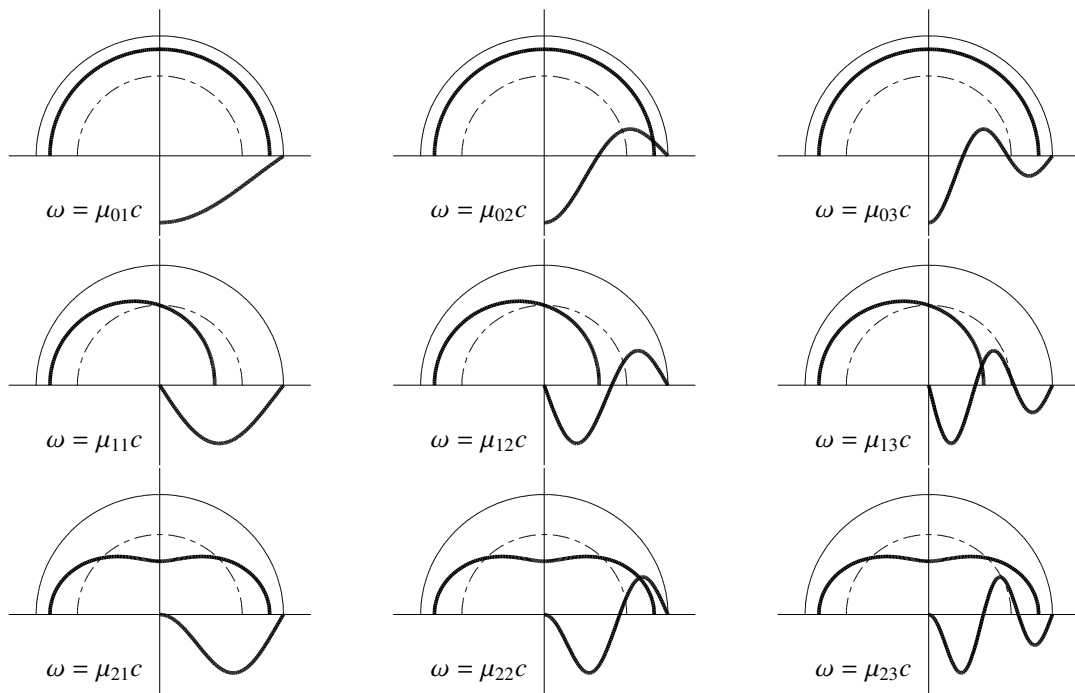


図 9.43 円形膜の振動モード

の右軸方向に描いた曲線が r 方向の Bessel 関数で表されたたわみのモードである。縦軸が対称軸で、横軸の上下で変位の符号が異なることを意味する。

さて最後に一言。Fourier 級数というとき sine, cosine 関数の級数だけを思い浮かべる読者は少なくないと想像するのだが、この節の例で明らかのように Fourier 級数は結局固有関数列で表した級数のことであることもわかる。そして対象とする問題を支配する微分作用素に固有関数は依存し、それがラプラシアンである場合には、直角座標系の固有関数が三角関数なのに対し極座標系の固有関数は Bessel 関数であることもわかった。さらに 3 次元の球座標系では Legendre 多項式が固有関数である。文献 [77] を参照のこと。

演習問題 9-6

- 17. 弦ではなく管楽器のように片方 ($x = 0$) が開いていて、もう片方 ($x = \ell$) が閉じている管の中の疎密波動を解いてみよ。この場合は、 $u(x, t)$ を管の中のある位置の空気の x 方向の変位としたとき、弦と同じ運動方程式と初期条件に支配される。ただし、境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(\ell, t) = 0$$

になる。

- 18. 試しに、内径と外径がそれぞれ R_i, R_o ($0 < R_i < R_o$) のようなドーナツ状の膜の振動を解いてみよ。方程式と初期条件は円形膜と同じであり、境界条件が

$$u(R_o, t) = 0, \quad u(R_i, t) = 0$$

になる。さらにドーナツの一部をかじったあとの扇形 (蹄鉄形) ($0 < \theta < \beta < 2\pi$) の膜も解いてみよう。この場合は式 (9.155) が成立しないが、そのときの Bessel 関数って?

9.4 連続体の振動 — 梁の振動

9.4.1 梁の運動方程式

梁理論そのものは第4章で勉強して欲しい。図9.44には、分布外力 $p(x, t)$ が作用して合応力の曲げモーメント M とせん断力 V が発生して運動している梁の微分要素 dx を示した。この微分要素の z 方向の運動方程式は、Newton の法則から

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + p(x, t) = m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (9.171)$$

となる。ここに $w(x, t)$ は z 方向のたわみであり、 m は梁の単位長さ当たりの質量で、密度を ρ として断面積を A とすると $m = \rho A$ である。次に点 A の反時計回りのモーメントのつり合いから

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - V(x, t) = 0 \quad (9.172)$$

と³³なる。式(9.172)を式(9.171)に代入することによって、曲げモーメントで表した梁の運動方程式は

$$\frac{\partial^2 M(x, t)}{\partial x^2} + p(x, t) = m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} \quad (9.173)$$

で表される。さらに x 軸が断面の図心を通るように定義されて減衰が無ければ、式(4.13b)から

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (9.174)$$

という関係にあるので、これを式(9.173)に代入して最終的な梁の運動方程式が

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \right) + p(x) = m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2}$$

あるいは、以下、一様材料の等断面の梁だけを対象とすることにすれば

$$m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = p(x, t) \quad (9.175)$$

と求められる。場所 x についての微係数が4階になっているが、そのことと符号に目をつぶれば、形式的には式(9.129)の波動方程式によく似ている。

境界条件は静的な場合の式(4.28)の境界で与えられる外力と変位を時間の関数とするだけでよく、両端 x_i ($i = 1, 2$), $x_1 = 0, x_2 = \ell$ において適切な組み合わせで

$$w(x_i, t) = w_i(t) \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(-EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x_i, t) \right) = S_i(t), \quad (9.176a)$$

$$\theta(x_i, t) \equiv -\frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t) = \theta_i(t) \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t) \right) = C_i(t) \quad (9.176b)$$

と与えられる必要がある。ここに θ は反時計回りを正として定義したたわみ角であり、 n_i は式(4.26)で定義した断面の向きを表す符号である。また、初期条件は次式のように梁の初期形状と初速で与えればよい。

$$w(x, 0) = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) \quad (9.177a, b)$$

³³ この式は厳密ではないが、社会基盤構造のモデルとして用いられる細長い梁に対する精度はそれほど悪くない。そのため敢えて「つり合い」と書いた。回転運動の運動方程式を正しく定式化した理論については第9.4.8(1)節を参照のこと。

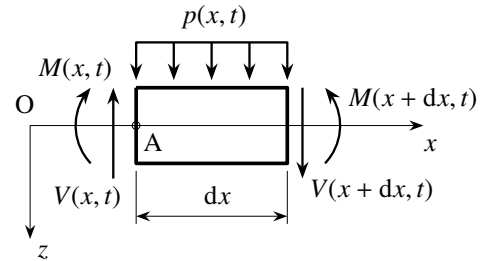


図9.44 梁の局所的な微分要素の運動

9.4.2 非減衰自由振動 — 正攻法

振動問題では非減衰の自由振動問題が重要な出発点だった。つまり固有値問題を設定して固有振動数と固有振動モードを求めることから解析を始めていた。表 9.1 の弦の場合を踏まえると、梁の固有値問題が零境界条件と $\frac{d^4\phi(x)}{dx^4} = \Lambda\phi(x)$ であることは容易に推測できるが、ここでは正攻法の変数分離法を用いてきちんと固有値問題を定式化しておこう。ただし簡単のため両端単純支持梁を対象とする。まず、たわみを変数分離して

$$w(x, t) = \phi(x)q(t)$$

と置いて、 $p(x, t) \equiv 0$ の運動方程式 (9.175) に代入して、変数を見ながら整理すると

$$-\frac{\ddot{q}(t)}{q(t)} = \frac{EI}{m} \frac{\phi''''(x)}{\phi(x)} = \Lambda (\text{const.}) \quad (9.178)$$

のように定数で等号が成立しなければならないことがわかる。境界条件は式 (9.176) から両端でたわみ w とたわみの 2 階の微係数 $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ が零であればいいので、これも変数分離すると

$$\phi(0) = 0, \quad \phi''(0) = 0, \quad \phi(\ell) = 0, \quad \phi''(\ell) = 0$$

となる。初期条件は分離できないので、まず解けるのは $\phi(x)$ の方であり、その微分方程式は上式から

$$\phi''''(x) = \Lambda \frac{m}{EI} \phi(x)$$

である。実は、上の変数分離した微分方程式のうち $q(t)$ の方を見ると Λ が正でない限り周期運動をしないことは明らかであるが、それはあとでやることにして、ここでは固有関数を求める標準的なアプローチを続ける。

まず $\Lambda \frac{m}{EI} = -4\mu^4 < 0$ の場合の一般解は

$$\phi(x) = \exp(\mu x) (a \sin \mu x + b \cos \mu x) + \exp(-\mu x) (c \sin \mu x + d \cos \mu x)$$

となる。これを境界条件に代入すると

$$\begin{pmatrix} \sin \mu \ell \cosh \mu \ell & \cos \mu \ell \sinh \mu \ell \\ \cos \mu \ell \sinh \mu \ell & -\sin \mu \ell \cosh \mu \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるが、この係数行列は正則なので a, c は零解しか存在しない。もちろん $\Lambda = 0$ の場合も零解しか存在しないことはすぐわかる。

したがって $\Lambda \frac{m}{EI} = \mu^4 > 0$ とおくと、一般解は

$$\phi(x) = a \sin \mu x + b \cos \mu x + c \sinh \mu x + d \cosh \mu x \quad (9.179)$$

になる。これを境界条件に代入すると

$$\begin{pmatrix} \sin \mu \ell & \sinh \mu \ell \\ -\sin \mu \ell & \sinh \mu \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る。この場合には、 a または c が零にならない条件から係数行列は特異にならないといけないので、その行列式の零解を求めようとする

$$\sin \mu \ell \sinh \mu \ell = 0$$

となるので、任意の正の整数 $n = 1, 2, \dots$ に対して

$$\sin \mu \ell = 0 \quad \rightarrow \quad \mu \ell = n\pi \quad \rightarrow \quad \mu_n = \frac{n\pi}{\ell}$$

でありさえすれば、 a が不定にはなるものの $\phi(x)$ は非零となり

$$\phi(x) = \phi_n(x) = \sin \mu_n x = \sin \left(\frac{n\pi x}{\ell} \right) \quad (9.180)$$

と求められる。この μ_n が固有値で、 $\phi_n(x)$ が固有関数（固有振動モード）である。

したがって

$$\Lambda_n = \frac{EI}{m} \mu_n^4 = \frac{EI}{m} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^4$$

であるから、各 n に対する $q(t)$ についての微分方程式は式 (9.178) の最左辺と最右辺の等式から

$$\ddot{q}_n(t) + \frac{EI}{m} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^4 q_n(t) = 0$$

となる。これは1自由度系の非減衰自由振動の運動方程式だ。ここで固有振動数 ω_n を

$$\omega_n^2 \equiv \frac{EI}{m} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^4 \quad \rightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{EI}{m}} \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 \quad (9.181)$$

で定義すれば、結局上式の解を

$$q_n(t) = A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t$$

と求めることができ、自由振動解は

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \phi_n(x) \quad (9.182)$$

と表すことができる。式 (9.181) の梁の固有振動数は1自由度系の $\sqrt{k/m}$ と同様、曲げ剛性を質量で除したものの平方根 $\sqrt{EI/m}$ に比例している。 A_n, B_n を初期条件から決めるには固有関数の直交性が必要なことも読者の多くは前節までにわかっていると思うが、その内積の具体的な定義等は第9.4.4節で述べる。

9.4.3 非減衰自由振動

(1) 調和振動解

ここからはもう少し天下一の工学的な方法で固有振動数と固有振動モードを求めることに特化して説明しよう。非減衰の自由振動問題なので、時間についてはある振動数 ω で振動する解になるのは明らかだ。したがって、解を調和振動解で

$$w(x, t) = \phi(x) \exp(i\omega t) \quad (9.183)$$

と仮定しよう。つまり変数分離した式 (9.178) で $q(t)$ の方を先に振動解になるように求めたと考えればよい。式 (9.183) で $p(x, t) \equiv 0$ とした運動方程式 (9.175) に代入すると

$$\{EI \phi''''(x) - m\omega^2 \phi(x)\} \exp(i\omega t) = 0$$

となる。これが任意の時刻 t で成立しなければならないので、 $\phi(x)$ は

$$\phi''''(x) - \frac{m\omega^2}{EI} \phi(x) = 0 \quad (9.184)$$

を満足しなければならない。そこで

$$\mu^4 \equiv \frac{m\omega^2}{EI} \quad (9.185)$$

と定義すると、上式 (9.184) の一般解は

$$\phi(x) = c_1 \sin \mu x + c_2 \cos \mu x + c_3 \sinh \mu x + c_4 \cosh \mu x \quad (9.186)$$

となる。これは当然、前節で求めた式 (9.179) と同じものである。

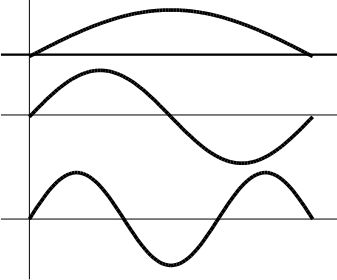
$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{EI}{m}} \left(\frac{\pi}{\ell}\right)^2, \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right) \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{EI}{m}} \left(\frac{2\pi}{\ell}\right)^2, \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right) \\ \omega_3 &= \sqrt{\frac{EI}{m}} \left(\frac{3\pi}{\ell}\right)^2, \sin\left(\frac{3\pi x}{\ell}\right) \end{aligned}$$


図 9.45 単純支持梁の振動数と振動モード

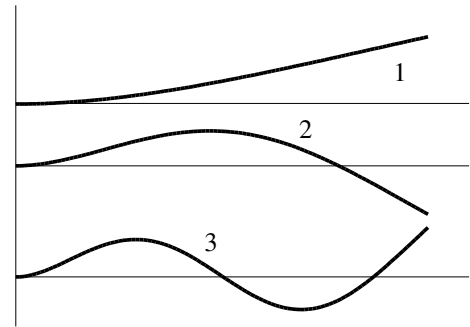


図 9.46 片持ち梁の振動モード

(2) 両端単純支持梁

まず両端単純支持梁を対象としよう。境界条件は前述のように

$$\phi(0) = 0, \quad \phi''(0) = 0, \quad \phi(\ell) = 0, \quad \phi''(\ell) = 0$$

でなければならない。この条件に式 (9.186) の一般解を代入すると

$$\begin{aligned} c_2 + c_4 &= 0, \quad \mu^2 (-c_2 + c_4) = 0, \quad c_1 \sin \mu\ell + c_2 \cos \mu\ell + c_3 \sinh \mu\ell + c_4 \cosh \mu\ell = 0, \\ \mu^2 (-c_1 \sin \mu\ell - c_2 \cos \mu\ell + c_3 \sinh \mu\ell + c_4 \cosh \mu\ell) &= 0 \end{aligned}$$

となるので、行列表示すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ \cosh \mu\ell & \sinh \mu\ell & \cos \mu\ell & \sin \mu\ell \\ \cosh \mu\ell & \sinh \mu\ell & -\cos \mu\ell & -\sin \mu\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (a)$$

を得る。有意な積分定数が存在するためにはこの係数行列が特異であればいいので

$$\det(\text{係数行列}) = 1 \times \det \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ \sinh \mu\ell & \cos \mu\ell - \cosh \mu\ell & \sin \mu\ell \\ \sinh \mu\ell & -\cos \mu\ell - \cosh \mu\ell & -\sin \mu\ell \end{pmatrix} = -4 \sin \mu\ell \sinh \mu\ell = 0$$

が成立すればいい。したがって

$$\sin \mu\ell = 0 \quad \rightarrow \quad \mu\ell = n\pi \quad \rightarrow \quad \mu_n = \frac{n\pi}{\ell} \quad (b)$$

となる。この結果を上式 (a) に代入すると c_1 のみが不定になるので固有関数は式 (9.180) になる。また式 (b) の固有値を式 (9.185) に代入すれば、固有振動数は式 (9.181) になる。図 9.45 に第 1~3 次モードと振動数を列挙した。

(3) 片持ち梁

左端が固定された片持ち梁の場合には、境界条件は式 (9.176) から $x = 0$ で w と $\frac{\partial w}{\partial x}$ が零で、 $x = \ell$ では $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ と $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}$ が零なので、式 (9.183) を代入すると $\phi(x)$ の境界条件は

$$\phi(0) = 0, \quad \phi'(0) = 0, \quad \phi''(\ell) = 0, \quad \phi'''(\ell) = 0$$

になる。この条件に式(9.186)の一般解を代入すると

$$\begin{aligned} c_2 + c_4 = 0, \quad \mu(c_1 + c_3) = 0, \quad \mu^2(-c_1 \sin \mu \ell - c_2 \cos \mu \ell + c_3 \sinh \mu \ell + c_4 \cosh \mu \ell) = 0, \\ \mu^3(-c_1 \cos \mu \ell + c_2 \sin \mu \ell + c_3 \cosh \mu \ell + c_4 \sinh \mu \ell) = 0 \end{aligned}$$

となるので、行列表示すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ \cosh \mu \ell & \sinh \mu \ell & -\cos \mu \ell & -\sin \mu \ell \\ \sinh \mu \ell & \cosh \mu \ell & \sin \mu \ell & -\cos \mu \ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (c)$$

を得る。有意な積分定数が存在するためにはこの係数行列が特異であればいいので

$$\det(\text{係数行列}) = 1 \times \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ \sinh \mu \ell & -\cos \mu \ell - \cosh \mu \ell & -\sin \mu \ell \\ \cosh \mu \ell & \sin \mu \ell - \sinh \mu \ell & -\cos \mu \ell \end{pmatrix} = 2 \cos \mu \ell \cosh \mu \ell + 2 = 0$$

が成立すればいい。したがって

$$\cos \mu_n \ell \cosh \mu_n \ell = -1 \quad (9.187)$$

を満足する μ_n ($n = 1, 2, \dots$) が固有値になる。この結果を上式(c)に代入すると

$$c_2 = \Xi_n c_1, \quad c_3 = -c_1, \quad c_4 = -\Xi_n c_1, \quad \text{ただし} \quad \Xi_n \equiv \frac{\cos \mu_n \ell + \cosh \mu_n \ell}{\sin \mu_n \ell - \sinh \mu_n \ell} \quad (9.188a, b, c, d)$$

と求められる。結局、振動モードは

$$\phi_n(x) = (\sin \mu_n x - \sinh \mu_n x) + \Xi_n (\cos \mu_n x - \cosh \mu_n x) \quad (9.189)$$

になる。式(9.187)は陽に解くことはできないので、例えば2分法³⁴等で数値的に解くしか無い。最初の三つを列挙しておく

$$\mu_1 \ell = 1.875, \quad \omega_1 = \frac{3.516}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad \mu_2 \ell = 4.694, \quad \omega_2 = \frac{22.03}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (9.190a, b, c, d)$$

$$\mu_3 \ell = 7.855, \quad \omega_3 = \frac{61.70}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (9.190e, f)$$

等である。図9.46に対応する振動モードを描いた。

9.4.4 振動モードの直交性と自由振動解 — モード解析法

(1) 振動モードの直交性

さて、いよいよ式(9.182)を初期条件式(9.177)に代入して積分定数を決定する方法を具体的に示そう。そのためにまず最も重要なのは振動モードが持つ直交性である。式(9.184)から第 n 次モードは

$$EI \phi_n''''(x) - m \omega_n^2 \phi_n(x) = 0 \quad (9.191)$$

を満足している。そこで、第 i 次モードを仮想変位とするような仮想仕事を全スパンで計算すると

$$\int_0^\ell \phi_i(x) \{EI \phi_n''''(x) - m \omega_n^2 \phi_n(x)\} dx = 0$$

³⁴ 第O.3.2節参照。あるいは Scilab を使うといい。p.292の脚注'16'を参照のこと。

が成立する。第1項を取り出し、それを部分積分して境界条件を考慮すると

$$\int_0^{\ell} EI \phi_i(x) \phi_n''''(x) dx = (EI \phi_i \phi_n'' - EI \phi_i' \phi_n') \Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} EI \phi_i''(x) \phi_n''(x) dx = \int_0^{\ell} EI \phi_i''(x) \phi_n''(x) dx$$

となる。単純支持梁と片持ち梁ではこの境界項が零になるが、それ以外の場合も所詮零境界条件なので同じようになることは明らかだ。したがって、上の仮想仕事式は

$$\int_0^{\ell} EI \phi_i''(x) \phi_n''(x) dx - \omega_n^2 \int_0^{\ell} m \phi_i(x) \phi_n(x) dx = 0$$

と表すことができる。同じように、第*i*次モードの運動方程式に第*n*次モードを乗じて仮想仕事を算定すると

$$\int_0^{\ell} EI \phi_n''(x) \phi_i''(x) dx - \omega_i^2 \int_0^{\ell} m \phi_n(x) \phi_i(x) dx = 0$$

を得る。この二つの式を辺々差し引きすると第1項は同じなので消えてしまい

$$(\omega_i^2 - \omega_n^2) \int_0^{\ell} m \phi_n(x) \phi_i(x) dx = 0$$

が成立する。多自由度系の振動でも説明したように、安定した構造であれば異なる二つの固有振動数は異なる値を持つので、この式は

$$\langle \phi_n, \phi_i \rangle_m \equiv \int_0^{\ell} m \phi_n(x) \phi_i(x) dx = 0, \quad i \neq n \quad (9.192)$$

であることを示している。この式は重み m つきの内積を定義しており、その内積が零になることから、固有振動モードはお互いに直交していると呼ぶ。一方、同じモード同士の内積は線形代数からの類推から固有振動モードの「ノルム」(の2乗)と考えてもよく、それを

$$|\phi_n|_m^2 \equiv \langle \phi_n, \phi_n \rangle_m = \int_0^{\ell} m \phi_n^2(x) dx = \bar{m}_n \quad (9.193)$$

と記すことにする。 \bar{m}_n は多自由度系のそれと同様一般化された質量と呼ばれる。したがって、式(9.192)と一緒にすれば

$$\langle \phi_n, \phi_i \rangle_m = \int_0^{\ell} m \phi_n(x) \phi_i(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq n \\ \bar{m}_n, & i = n \end{cases} \quad (9.194)$$

と書くことができる。式(9.192)の内積は式(5.66)の一般的な重みつき内積の定義で $m = 0$, $w = m$ とした特別な場合である。

さらに式(9.191)を用いて、この式(9.194)の ϕ_n を ϕ_n'''' で置き換えると

$$\int_0^{\ell} m \phi_n(x) \phi_i(x) dx = \int_0^{\ell} \frac{EI}{\omega_n^2} \phi_n''''(x) \phi_i(x) dx$$

となることから、もう一つの内積を次式で定義して

$$\langle \phi_n, \phi_i \rangle_{EI} \equiv \int_0^{\ell} EI \phi_n''''(x) \phi_i(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq n \\ \bar{m}_n \omega_n^2, & i = n \end{cases} \quad (9.195)$$

のような直交性も成立する。あるいは、もう少しカッコよくするために2回部分積分した上で境界条件を考慮すると、二つの関数の微係数の階数が同じになるようにできるので、さらにもう一つ別の「対称な」重み付き内積が定義でき

$$\langle \phi_n, \phi_i \rangle_{EI}^{(\text{symm})} \equiv \int_0^{\ell} EI \phi_n''(x) \phi_i''(x) dx = \begin{cases} 0, & i \neq n \\ \bar{m}_n \omega_n^2, & i = n \end{cases} \quad (9.196)$$

と書いてもいい。仮想仕事の的にはカッコいい³⁵が、以下では使わない。なお、式(9.196)の内積は式(5.66)の一般的な重み付き内積の定義で $m = 2$, $w = EI$ とした特別な場合である。

³⁵ 内積でノルムを定義することを考えると、式(9.195)よりも式(9.196)の内積の方が数学的である。

(2) 自由振動のモード解析

では再度、モード解析法の標準的なステップに沿って自由振動解を求めよう。式(9.191)と零境界条件で設定される固有値問題を前節の単純支持梁と片持ち梁の二つの例のようにして解き、まずは固有振動数 ω_n と固有振動モード $\phi_n(x)$ を求める。その結果を用いて解を

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \phi_n(x) \quad (9.197)$$

のような級数で仮定する。 $q_n(t)$ は梁の一般化された座標(変位)である。これを $p(x, t) \equiv 0$ とした運動方程式(9.202)に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{m \ddot{q}_n \phi_n + EI q_n \phi_n''''\} = 0$$

を得る。これと第 i 次モードとの内積をとるために $\int_0^{\ell} \phi_i dx \times$ という作用を両辺にしたあと、式(9.194)(9.195)の直交条件を用いて総和の第 i 項を抽出すると

$$\ddot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0$$

という1自由度系の非減衰自由振動の運動方程式を得るので、一般解が

$$q_n(t) = A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t$$

と求められる。したがってたわみの解が

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \phi_n(x) \quad (9.198)$$

と求められる。これは当然だが式(9.182)に一致する。

最後にいよいよこの未定係数を決定しよう。初期条件式(9.177)に式(9.198)を代入すると

$$w(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \phi_n(x) = w_0(x), \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \phi_n(x) = v_0(x)$$

となる。両式とある振動モード $\phi_i(x)$ との、例えば式(9.194)で定義した内積をとると

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \langle \phi_n, \phi_i \rangle_m = \langle w_0, \phi_i \rangle_m, \quad \sum_{n=1}^{\infty} A_n \omega_n \langle \phi_n, \phi_i \rangle_m = \langle v_0, \phi_i \rangle_m$$

となるが、モードの直交性から総和の左辺は第 i 項以外はすべて零になり

$$B_i \langle \phi_i, \phi_i \rangle_m = \langle w_0, \phi_i \rangle_m, \quad A_i \omega_i \langle \phi_i, \phi_i \rangle_m = \langle v_0, \phi_i \rangle_m$$

だけが残る。したがって、未定係数が

$$A_i = \frac{1}{m_i \omega_i} \int_0^{\ell} m v_0(x) \phi_i(x) dx, \quad B_i = \frac{1}{m_i} \int_0^{\ell} m w_0(x) \phi_i(x) dx \quad (9.199a, b)$$

と求められ、唯一の解を得ることができる。

演習問題 9-7

19. 両端単純支持梁のモード(9.180)が内積(9.192)で直交していることは容易にわかるだろう。では、片持ち梁のモード(9.189)が直交することを確かめよ。
20. 両端固定梁と片端固定・片端単純支持梁の固有振動数、あるいはそれを求める式を求めよ。
21. 左端固定・右端バネ支持梁の振動数方程式を求めよ。バネは線形で抵抗係数は定数 k とする。

9.4.5 粘性減衰自由振動

もし材料そのものに粘性抵抗がある場合には、梁の応力ひずみ関係式 (4.7) の曲げの部分を取り出して、曲げひずみに相当する曲率 κ の速度に比例した抵抗を加えた

$$\sigma_{xx}(x, z, t) = E z \kappa(x, t) + \eta z \frac{\partial \kappa(x, t)}{\partial t}, \quad \kappa(x, t) \equiv -\frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} \quad (9.200a, b)$$

のようなモデルは物理的には容認できそうだ。ここに η は材料の粘性係数である。したがって、これを曲げモーメントの定義に代入すれば、式 (9.174) の代わりに

$$M(x, t) = -EI \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} - \eta I \frac{\partial^3 w(x, t)}{\partial t \partial x^2} \quad (9.201)$$

となる。したがって、運動方程式は、式 (9.175) の代わりに

$$m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + \eta I \frac{\partial^5 w(x, t)}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} = p(x, t) \quad (9.202)$$

と表される。また境界条件も、式 (9.176) の代わりに次のようになる。

$$w(x_i, t) = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(-EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x_i, t) - \eta I \frac{\partial^4 w}{\partial t \partial x^3}(x_i, t) \right) = S_i(t), \quad (9.203a)$$

$$-\frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t) = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(-EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t) - \eta I \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2}(x_i, t) \right) = C_i(t) \quad (9.203b)$$

では自由振動の場合 ($p(x, t) \equiv 0$) の運動方程式に級数解式 (9.197) を代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{m \ddot{q}_n \phi_n + \eta I \dot{q}_n \phi_n'''' + EI q_n \phi_n''''\} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ m \ddot{q}_n \phi_n + \left(\frac{\eta}{E} \dot{q}_n + q_n \right) EI \phi_n'''' \right\} = 0$$

となる。これと第 i 次モードとの内積をとるために $\int_0^l \phi_i dx$ とする作用を両辺にしたあと、式 (9.194) (9.195) の直交条件を用いて総和の第 i 項を抽出すると

$$\bar{m}_i \ddot{q}_i + \bar{m}_i \omega_i^2 \left(\frac{\eta}{E} \dot{q}_i + q_i \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{q}_i(t) + \frac{\eta}{E} \omega_i^2 \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0$$

という 1 自由度系の粘性減衰自由振動の形をした運動方程式を得る。この第 2 項の係数を形式的に式 (9.17) の 1 自由度系の減衰項の係数 $2\bar{\beta}_i^{\text{BE}} \omega_i$ の表現と等置すれば、Bernoulli-Euler 梁の一般化された減衰定数を

$$\bar{\beta}_i^{\text{BE}} = \frac{\eta \omega_i}{2E} \quad (9.204)$$

と定義できる。ちょうどこれは、式 (9.119) で定義した Rayleigh 減衰のうちの剛性比例の減衰定数 $\bar{\beta}_i^{\text{K}}$ と同じ特性を持つことになる。したがって一般化された座標 (変位) で表した運動方程式は

$$\ddot{q}_i(t) + 2\bar{\beta}_i^{\text{BE}} \omega_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = 0 \quad (9.205)$$

となる。形式的には 1 自由度系の減衰自由振動の運動方程式に一致するので、解 $q_i(t)$ も式 (9.20) の形になる。

9.4.6 強制振動

(1) モード解析法

粘性減衰も考慮できることは前節で示したが、簡単のためにしばらく無視して非減衰の強制振動を考察する。ここでも自由振動モードで級数表示した式 (9.197) と同じ級数解を仮定して強制振動問題を解こう。級数解を運動方程式 (9.175) に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \{m \ddot{q}_n \phi_n + EI q_n \phi_n''''\} = p(x, t)$$

となる。これと第 i 次モードとの内積をとるために $\int_0^\ell \phi_i dx$ という作用を両辺にして、式 (9.194) (9.195) の直交条件を用いて総和の第 i 項を抽出すると

$$\bar{m}_i \ddot{q}_i(t) + \bar{m}_i \omega_i^2 q_i(t) = \bar{p}_i(t) \quad (9.206)$$

を得る。ここに $\bar{p}_i(t)$ は

$$\bar{p}_i(t) \equiv \int_0^\ell p(x, t) \phi_i(x) dx \quad (9.207)$$

で定義した一般化された外力である。式 (9.206) は 1 自由度系の非減衰強制振動の運動方程式と同じだ。

例えば 1 自由度系の Duhamel 積分式 (9.49) を用いて強制振動解を求めると、式 (9.206) の解は

$$q_i(t) = A_i \sin \omega_i t + B_i \cos \omega_i t + \int_0^\infty \frac{\bar{p}_i(\tau)}{\bar{m}_i \omega_i} H(t - \tau) \sin \{\omega_i (t - \tau)\} d\tau$$

と求められるので、最終的にたわみは

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{\bar{p}_n(\tau)}{\bar{m}_n \omega_n} \phi_n(x) H(t - \tau) \sin \{\omega_n (t - \tau)\} d\tau$$

となる。これに、一般化された外力の式 (9.207) をさらに代入し戻すと

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \phi_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\ell \int_0^\infty \frac{1}{\bar{m}_n \omega_n} \phi_n(x) \phi_n(\xi) H(t - \tau) \sin \{\omega_n (t - \tau)\} p(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (9.208)$$

とも表現できる。Duhamel 積分解は零初期条件の解だから、 A_n, B_n は式 (9.199) から求めることができる。

図 9.47 には、単純梁の左から $1/4$ の位置に時刻 $t = 0$ に一定の集中外力 $P(t) = P_0$ を載せ、そのままにしたときのスパン中央の応答と、いくつか代表的な時刻のたわみ形状を示した。外力は

$$p(x, t) = P_0 \delta(x - \ell/4)$$

と書けるので、式 (9.208) の Duhamel 積分の ξ についての積分部分については

$$\int_0^\ell \phi_n(\xi) p(\xi, \tau) d\xi = P_0 \phi_n(\ell/4)$$

となる。あとの計算は簡単なので省略する。なお図中の τ と縦軸の w_0 は

$$\tau \equiv \frac{1}{\ell^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} t, \quad w_0 \equiv \frac{11P_0 \ell^3}{768EI} \quad (9.209a, b)$$

と定義した。 w_0 は P_0 を静的に載せたときの中央のたわみである。この図の応答の 1 周期はほぼ 0.65 程度に見える。一方、無次元時刻 τ で算定したときの 1 次 ($n = 1$) の固有振動数は π^2 なので、それに対応する 1 次の固有周期は $2/\pi \approx 0.637$ である。このことから、静的な変位を中心にしてほとんど 1 次振動数で振動しているだけだが、外力の位置が偏っているためにたわみ形状は 1 次モードだけでは限らないことを示している。

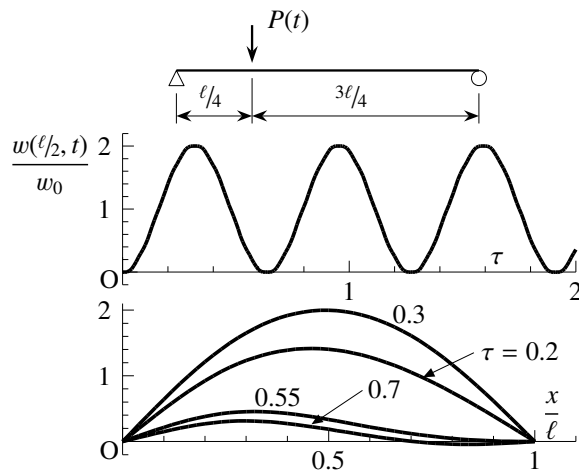


図 9.47 偏った位置の集中外力に対する応答

(2) 単位衝撃応答

さて、式(9.208)の第2項の被積分関数の $p(\xi, \tau)$ 以外を

$$w_1(x; \xi, t - \tau) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n \omega_n} \phi_n(x) \phi_n(\xi) H(t - \tau) \sin \{ \omega_n (t - \tau) \} \quad (9.210)$$

と定義すると、たわみは

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \sin \omega_n t + B_n \cos \omega_n t) \phi_n(x) + \int_0^{\ell} \int_0^{\infty} w_1(x; \xi, t - \tau) p(\xi, \tau) d\tau d\xi \quad (9.211)$$

という形で表現できる。この右辺の最後の項は「場所 ξ に時刻 τ に作用した外力 $p(\xi, \tau)$ の影響を w_1 倍して足し算すれば、それが外力すべての貢献になる」という風に読める。つまり式(9.210)で定義した w_1 はその影響の度合いを表す影響因子であり、場所 ξ に時刻 τ に作用した単位衝撃に対する応答と読めるので、 $w_1(x; \xi, t - \tau)$ は梁の「単位衝撃応答」だろう。すると式(9.211)の外力に関する項は、外力の貢献分を積分表現した梁の **Duhamel 積分** である。ここでは、式(9.210)が本当に単位衝撃応答かどうかを確認するが、簡単のために両端単純支持梁を対象とし、 $w_1(x; \xi, t - \tau)$ の引数も $w_1(x, t)$ と略すことにする。

梁のある位置 $x = \xi$ に時刻 $t = \tau$ に単位衝撃外力が作用したとすると、それは図 9.48 のような状況になる。ここでは、1 自由度系の単位衝撃応答を考えた際に説明した Dirac のデルタ関数で外力が表すことができることを利用している。また第 4.4.1 節で説明したように、集中外力も同じく Dirac のデルタ関数で表すことができるので、この図のような単位衝撃外力は

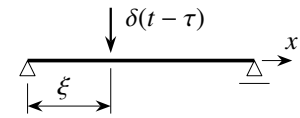


図 9.48 梁の単位衝撃応答

$$p(x, t) = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau)$$

という分布外力として表現できる。この外力に対する単位衝撃応答 $w_1(x, t)$ で表した運動方程式は

$$m \frac{\partial^2 w_1(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w_1(x, t)}{\partial x^4} = \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \quad (a)$$

である。また境界条件は

$$w_1(0, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(0, t) = 0, \quad w_1(\ell, t) = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(\ell, t) = 0 \quad (b)$$

であり、初期条件は零初期条件とする。ただし以下の誘導では Fourier 変換を使うので、初期条件を拡張して時刻 $t = -\infty$ に静止していたものとして与えられるものとする。

まず、単位衝撃応答 $w_1(x, t)$ の Fourier 変換を

$$W_1(x; \alpha) \equiv \mathcal{F}(w_1) = \int_{-\infty}^{\infty} w_1(x, t) \exp(-i\alpha t) dt \quad (c)$$

と記す。次に運動方程式 (a) を Fourier 変換しよう。まず慣性項の Fourier 変換を 2 回部分積分すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \exp(-i\alpha t) dt = \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + i\alpha w_1 \right) \exp(-i\alpha t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \alpha^2 \int_{-\infty}^{\infty} w_1 \exp(-i\alpha t) dt$$

になるので、初期条件と式 (c) を代入すると

$$= \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} + i\alpha w_1 \right) \exp(-i\alpha t) \Big|_{t \rightarrow \infty} - \alpha^2 W_1$$

を得る。最終的に Fourier 逆変換の積分をする際には複素積分を使う必要があるので、この α も複素数に拡張して $\alpha = a + ib$, $|b| \ll 1$ とすると $\exp(-i\alpha t) = \exp(bt) \exp(-iat)$ だから、上式第 1 項の $t \rightarrow \infty$ の項を零にするために

$$b < 0 \quad \rightarrow \quad \Im(\alpha) < 0 \quad (d)$$

という条件を付けておく。つまり α の虚部 $\Im(\alpha)$ はちょっとだけ負だと都合がいいというわけだ。この条件下なら上式第1項は無くなるので、慣性項の Fourier 変換は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} \exp(-i\alpha t) dt = -\alpha^2 W_1$$

になる。次に式 (a) の第2項の Fourier 変換は微分と Fourier 変換の順番を入れ替えて式 (c) を代入すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} \exp(-i\alpha t) dt = \frac{d^4 W_1}{dx^4}$$

となる。最後に式 (a) の右辺の外力項の Fourier 変換は、Dirac のデルタ関数の定義式 (4.57) から

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi) \delta(t - \tau) \exp(-i\alpha t) dt = \delta(x - \xi) \exp(-i\alpha \tau)$$

である。以上から運動方程式 (a) の Fourier 変換は

$$\frac{d^4 W_1}{dx^4} - \frac{m}{EI} \alpha^2 W_1 = \frac{1}{EI} \delta(x - \xi) \exp(-i\alpha \tau) \quad (e)$$

と表される。境界条件式 (b) も Fourier 変換すると

$$W_1(0; \alpha) = 0, \quad \frac{d^2 W_1}{dx^2}(0; \alpha) = 0, \quad W_1(\ell; \alpha) = 0, \quad \frac{d^2 W_1}{dx^2}(\ell; \alpha) = 0$$

で与えられる。

これをモード解析法で解くことにして、 W_1 を式 (9.180) の固有振動モードの級数解で

$$W_1(x; \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (f)$$

と仮定する。これを式 (e) に代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n \phi_n'''' - c_n \frac{m}{EI} \alpha^2 \phi_n \right\} = \frac{1}{EI} \delta(x - \xi) \exp(-i\alpha \tau)$$

となる。この左辺中括弧内の第1項に式 (9.191) を代入すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n m (\omega_n^2 - \alpha^2) \phi_n(x) = \delta(x - \xi) \exp(-i\alpha \tau)$$

を得る。これと $\phi_i(x)$ との内積をとるために、両辺に $\int_0^\ell \phi_i dx$ という作用をして、式 (9.194) の直交条件を用いて総和の第 i 項を抽出すると

$$c_i \bar{m}_i (\omega_i^2 - \alpha^2) = \int_0^\ell \phi_i(x) \delta(x - \xi) \exp(-i\alpha \tau) dx = \phi_i(\xi) \exp(-i\alpha \tau)$$

となる。右辺の演算では Dirac のデルタ関数の定義式 (4.57) を使った。したがって

$$c_i = \frac{1}{\bar{m}_i (\omega_i^2 - \alpha^2)} \phi_i(\xi) \exp(-i\alpha \tau)$$

と求められる。これを式 (f) に戻すことによって $w_1(x, t)$ の Fourier 変換が

$$W_1(x; \alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x) \phi_n(\xi)}{\bar{m}_n (\omega_n^2 - \alpha^2)} \exp(-i\alpha \tau)$$

のように求められる。1自由度系の式 (9.55) の周波数応答関数の形や、式 (9.60) に示した単位衝撃応答と周波数応答関数の関係から、この W_1 は梁の周波数応答関数に「相当」することがわかる。

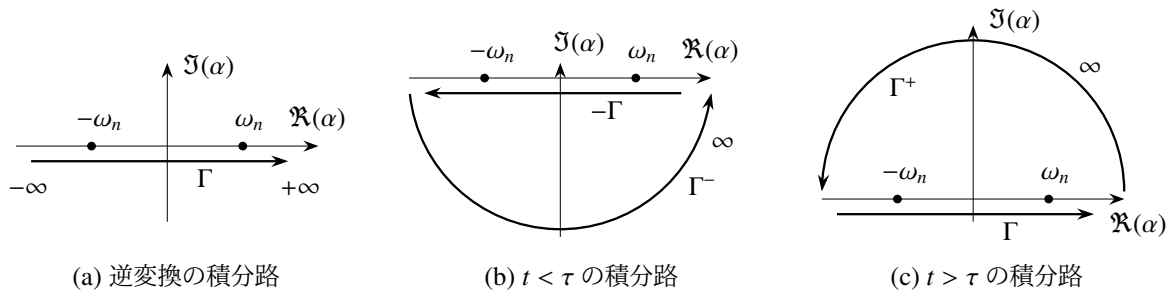


図 9.49 単位衝撃応答の Fourier 逆変換で用いる積分路

これを逆変換すれば単位衝撃応答 $w_1(x, t)$ を求めることができる。つまり

$$w_1(x, t) = \mathcal{F}^{-1}(W_1) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W_1(x; \alpha) \exp(i\alpha t) d\alpha$$

であるから、これに上式を代入すると

$$w_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\alpha t) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(x)\phi_n(\xi)}{m_n(\omega_n^2 - \alpha^2)} \exp(-i\alpha\tau) d\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-1}{2\pi m_n} \phi_n(x)\phi_n(\xi) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{i\alpha(t - \tau)\}}{\alpha^2 - \omega_n^2} d\alpha \quad (g)$$

となる。この右辺の最後の積分

$$\mathcal{I} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha, \quad f(\alpha) \equiv \frac{\exp\{i\alpha(t - \tau)\}}{\alpha^2 - \omega_n^2}$$

が求められれば単位衝撃応答を求めることができる。この α を複素数と捉えて複素積分で \mathcal{I} を求める。分母が $\alpha = \pm\omega_n$ で零になるので、複素平面上のそこは 1 位の極である。また式 (d) の条件から、積分経路は実軸の若干下 (α の虚部が負でなければならないから) を通らなければならない。つまり図 9.49 (a) に示した Γ の経路を $-\infty$ から ∞ まで線積分した $\int_{\Gamma} f(\alpha) d\alpha$ が \mathcal{I} の値である。 α を $\alpha = a + ib$ と置くと、 $\exp\{i\alpha(t - \tau)\} = \exp\{i(a + ib)(t - \tau)\} = \exp\{ia(t - \tau)\} \exp\{-b(t - \tau)\}$ となる。これを踏まえて $b \rightarrow \pm\infty$ における $f(\alpha)$ の挙動を以下のように場合分けをして、複素平面上の 1 周積分を実行しよう。

もし $t < \tau$ の場合は $f(\alpha) \rightarrow 0$ になるのは $b \rightarrow -\infty$ のときなので、図 9.49 (b) のように負の虚数領域で 1 周積分することを考える。すると

$$\int_{\Gamma^-} f(\alpha) d\alpha \rightarrow 0 \quad (h)$$

となる。このとき周積分 ($-\Gamma \rightarrow \Gamma^-$) の領域内には極が存在しないので $f(\alpha)$ はその領域内では正則関数なので、Cauchy の積分定理より

$$\oint_{-\Gamma+\Gamma^-} f(\alpha) d\alpha = \int_{-\Gamma} f(\alpha) d\alpha + \int_{\Gamma^-} f(\alpha) d\alpha = -\mathcal{I} + \int_{\Gamma^-} f(\alpha) d\alpha = 0$$

を満足する。したがって、これに式 (h) を適用すると結局

$$\mathcal{I} = \int_{-\Gamma} f(\alpha) d\alpha \rightarrow 0$$

と求められる。つまり $w_1 = 0$ であり、式 (9.210) に一致する。

逆に $t > \tau$ の場合は $f(\alpha) \rightarrow 0$ になるのは $b \rightarrow +\infty$ のときなので、図 9.49 (c) のように正の虚数領域で 1 周積分しよう。すると

$$\int_{\Gamma^+} f(\alpha) d\alpha \rightarrow 0 \quad (i)$$

となる。このときは周積分 ($\Gamma \rightarrow \Gamma^+$) の領域内に極が 2 箇所あることから、1 周積分は留数の定理で

$$\oint_{\Gamma+\Gamma^+} f(\alpha) d\alpha = \mathcal{I} + \int_{\Gamma^+} f(\alpha) d\alpha = 2\pi i \operatorname{Res}[f; \omega_n] + 2\pi i \operatorname{Res}[f; -\omega_n]$$

のように求めることができる。ここに $\text{Res}[f; \beta]$ は $\alpha = \beta$ における関数 $f(\alpha)$ の留数を表している。したがって上式 (i) を代入すれば

$$\mathcal{F} = 2\pi i \text{Res}[f; \omega_n] + 2\pi i \text{Res}[f; -\omega_n]$$

となる。1位の極の留数は

$$\text{Res}[f; \pm\omega_n] = \lim_{\alpha \rightarrow \pm\omega_n} \{(\alpha \mp \omega_n) f(\alpha)\} = \pm \frac{\exp\{\pm i\omega_n(t - \tau)\}}{2\omega_n}$$

と求められるので、 $\zeta_n \equiv \omega_n(t - \tau)$ と置いて Euler の公式 (9.62) を用いれば

$$\mathcal{F} = \frac{2\pi i}{\omega_n} \frac{\exp\{i\zeta_n\} - \exp\{-i\zeta_n\}}{2} = \frac{-2\pi}{\omega_n} \frac{\exp\{i\zeta_n\} - \exp\{-i\zeta_n\}}{2i} = \frac{-2\pi}{\omega_n} \sin \zeta_n = \frac{-2\pi}{\omega_n} \sin\{\omega_n(t - \tau)\}$$

になる。これを式 (g) に代入すると、 $t > \tau$ の単位衝撃応答は

$$w_1(x; \xi, t - \tau) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{m_n \omega_n} \phi_n(x) \phi_n(\xi) \sin\{\omega_n(t - \tau)\}$$

のように式 (9.210) に一致する。

(3) 減衰を含んだ Duhamel 積分

ここでは粘性も考慮した Duhamel 積分を誘導しておく。運動方程式は式 (9.202) で境界条件は式 (9.203) で与えられる。ここでも簡単のために両端単純支持梁を対象とし、初期条件は零初期条件である。まず単位衝撃応答 $w_1(x; x_0, t - t_0)$ は同じ境界条件・初期条件と

$$m \frac{\partial^2 w_1(x; x_0, t - t_0)}{\partial t^2} + \eta I \frac{\partial^5 w_1(x; x_0, t - t_0)}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 w_1(x; x_0, t - t_0)}{\partial x^4} = \delta(t - t_0) \delta(x - x_0) \quad (a)$$

で表される運動方程式を満足する。これに対し、第 9.1.3 (5) 節で用いた随伴問題も考える必要があり、そのたわみ $w_1^*(x; x_1, t - t_1)$ は

$$m \frac{\partial^2 w_1^*(x; x_1, t - t_1)}{\partial t^2} - \eta I \frac{\partial^5 w_1^*(x; x_1, t - t_1)}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 w_1^*(x; x_1, t - t_1)}{\partial x^4} = \delta(t - t_1) \delta(x - x_1) \quad (b)$$

で表される運動方程式を満足する。自己随伴系ではないことから、随伴問題は元の問題の運動方程式および境界条件にある減衰項の符号が逆になることに加えて、初期条件ではなく終末条件が零条件として

$$w_1^*(x, \infty) = 0, \quad \frac{\partial w_1^*}{\partial t}(x, \infty) = 0 \quad (c)$$

で与えられる終局値問題として定義される。

最初に元の問題の運動方程式 (9.202) と随伴問題の単位衝撃応答 w_1^* との内積をとると

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\ell} w_1^* \left\{ m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \eta I \frac{\partial^5 w}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right\} dx dt = \int_0^{\infty} \int_0^{\ell} w_1^* p(x, t) dx dt \quad (d)$$

と置くことができるが、まず左辺の慣性項は

$$\int_0^{\infty} w_1^* m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} dt = \left(m w_1^* \frac{\partial w}{\partial t} - m \frac{\partial w_1^*}{\partial t} w \right) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} m \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^2} w dt = \int_0^{\infty} m \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^2} w dt$$

となる。ここでは、 w の零初期条件と式 (c) の零終末条件を用いた。運動方程式の粘性項と剛性項はまず x で 2 回部分積分して、両端の境界条件を考慮すると

$$\begin{aligned} & \int_0^{\ell} w_1^* \left(\eta I \frac{\partial^5 w}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) dx \\ &= \left\{ w_1^* \left(\eta \frac{\partial^4 w}{\partial t \partial x^3} + EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - \frac{\partial w_1^*}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right\} \Big|_0^{\ell} + \int_0^{\ell} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^2} \left(\eta I \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \\ &= \int_0^{\ell} \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^2} \left(\eta I \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx \end{aligned}$$

と表すことができるので、一旦は

$$\int_0^\infty \int_0^\ell \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^2} \left(\eta I \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) dx dt$$

となる。この第1項を時間方向に1回部分積分すると

$$(\text{第1項}) = \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^2} \eta I \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \eta I \frac{\partial^3 w_1^*}{\partial t \partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dt = - \int_0^\infty \eta I \frac{\partial^3 w_1^*}{\partial t \partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dt$$

と書き直せる。ここでは w の零初期条件から $\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x, 0) = 0$ とし、 w_1^* の零終末条件から $\frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^2} = 0$ も成立するとした。したがって、粘性と剛性の項は

$$\int_0^\infty \int_0^\ell \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(-\eta I \frac{\partial^3 w_1^*}{\partial t \partial x^2} + EI \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^2} \right) dx dt$$

となる。再度 x について2回部分積分して境界条件を考慮すると

$$\begin{aligned} & \int_0^\ell \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(-\eta I \frac{\partial^3 w_1^*}{\partial t \partial x^2} + EI \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^2} \right) dx \\ &= \frac{\partial w}{\partial x} \left(-\eta I \frac{\partial^3 w_1^*}{\partial t \partial x^2} + EI \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial x^2} \right) - w \left(-\eta I \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial t \partial x^3} + EI \frac{\partial^3 w_1^*}{\partial x^3} \right) \Big|_0^\ell + \int_0^\ell w \left(-\eta I \frac{\partial^5 w_1^*}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^4} \right) dx \\ &= \int_0^\ell w \left(-\eta I \frac{\partial^5 w_1^*}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^4} \right) dx \end{aligned}$$

を得る。以上から式 (d) は

$$\int_0^\infty \int_0^\ell w(x, t) \left\{ m \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^2} - \eta I \frac{\partial^5 w_1^*}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^4} \right\} dx dt = \int_0^\infty \int_0^\ell w_1^* p(x, t) dx dt$$

と表現できるので、式 (c) を左辺の中括弧に代入すると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\ell w(x, t) \delta(x - x_1) \delta(t - t_1) dx dt &= \int_0^\infty \int_0^\ell w_1^*(x; x_1, t - t_1) p(x, t) dx dt \\ &\rightarrow w(x_1, t_1) = \int_0^\infty \int_0^\ell w_1^*(x; x_1, t - t_1) p(x, t) dx dt \end{aligned} \quad (e)$$

という関係が成り立つ。

全く同じプロセスを、単位衝撃問題の式 (a) と随伴問題の単位衝撃応答 w_1^* との内積に対して実行すると

$$\int_0^\infty \int_0^\ell w_1 \left\{ m \frac{\partial^2 w_1^*}{\partial t^2} - \eta I \frac{\partial^5 w_1^*}{\partial t \partial x^4} + EI \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^4} \right\} dx dt = \int_0^\infty \int_0^\ell w_1^* \delta(x - x_0) \delta(t - t_0) dx dt$$

となるので、左辺の中括弧に式 (b) を代入すると

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\ell w_1(x; x_0, t - t_0) \delta(x - x_1) \delta(t - t_1) dx dt &= \int_0^\infty \int_0^\ell w_1^*(x; x_1, t - t_1) \delta(x - x_0) \delta(t - t_0) dx dt \\ &\rightarrow w_1(x_1; x_0, t_1 - t_0) = w_1^*(x_0; x_1, t_0 - t_1) \end{aligned} \quad (f)$$

という関係を得る。つまり相反定理だ。この式 (f) を式 (e) に代入することによって

$$w(x_1, t_1) = \int_0^\infty \int_0^\ell w_1(x_1; x, t_1 - t) p(x, t) dx dt \rightarrow w(x, t) = \int_0^\infty \int_0^\ell w_1(x; \xi, t - \tau) p(\xi, \tau) d\xi d\tau \quad (9.212)$$

という Duhamel 積分の表現を得る。これは式 (9.211) の右辺第2項に一致する。1自由度系の単位衝撃応答の解の式 (9.47) を参考にして式 (9.204) の粘性減衰定数の定義を用いると、減衰を含んだ梁の単位衝撃応答は

$$w_1(x; \xi, t - \tau) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{m}_n \omega_n^d} \phi_n(x) \phi_n(\xi) \exp\{-\bar{\beta}_n^{\text{BE}} \omega_n(t - \tau)\} H(t - \tau) \sin\{\omega_n^d(t - \tau)\} \quad (9.213)$$

と書くことができる。ここに

$$\omega_n^d \equiv \omega_n \sqrt{1 - (\bar{\beta}_n^{\text{BE}})^2} \quad (9.214)$$

と定義した。

(4) 楽しい例 — 走行荷重

例として、一定の速度 V_0 で x の正方向に走る1輪車（集中外力） P_0 による単純支持梁の非減衰振動を解析してみよう。1輪車が梁の左端に載った瞬間を時刻 $t = 0$ とすると、図 9.50 に示したように t_s 後には1輪車は $x = V_0 t$ の位置にあるので、この外力は Dirac のデルタ関数を使って

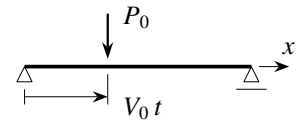


図 9.50 走行荷重

$$p(x, t) = P_0 \delta(x - V_0 t)$$

と表すことができる。 P_0 は単位長さ当たりの分布外力として表した集中外力（力積のようなもの）なので、力の単位を持つことに注意すること。もちろん $t > \ell/V_0$ では $p(x, t) \equiv 0$ になるはずだが、そのことは以下の誘導で自動的に考慮されるから数学は面白い。

これを Duhamel 積分の式 (9.212) に代入すると

$$w(x, t) = \int_0^\infty \int_0^\ell w_1(x; \xi, t - \tau) P_0 \delta(\xi - V_0 \tau) d\xi d\tau$$

になる。外力の変数が ξ と τ に変更されていることに注意すること。これに式 (9.210) の単位衝撃応答を代入し、単純支持梁の固有振動モードの式 (9.180) も代入すると、 $\bar{m}_n = \frac{m\ell}{2}$ なので

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_0}{m\ell\omega_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \int_0^\ell \sin\left(\frac{n\pi\xi}{\ell}\right) \delta(\xi - V_0 \tau) d\xi \int_0^\infty H(t - \tau) \sin \omega_n(t - \tau) d\tau$$

となる。 ξ についての積分項を取り出すと、Dirac のデルタ関数の定義式 (4.57) から明らかなように、この項は積分範囲内に $V_0 \tau$ があるとき、つまり $0 < V_0 \tau < \ell$ のときにしか値を持たず、それ以外では零になる。つまり、 $0 < \tau < \ell/V_0$ のときだけ値を持つことができるので $H(\ell/V_0 - \tau)$ を追加して

$$\int_0^\ell \sin\left(\frac{n\pi\xi}{\ell}\right) \delta(\xi - V_0 \tau) d\xi = H\left(\frac{\ell}{V_0} - \tau\right) \int_0^\ell \sin\left(\frac{n\pi\xi}{\ell}\right) \delta(\xi - V_0 \tau) d\xi = H\left(\frac{\ell}{V_0} - \tau\right) \sin\left(\frac{n\pi V_0 \tau}{\ell}\right)$$

と表すことができる。これは当たり前だろう。というのも ℓ/V_0 は1輪車が梁の外に出る時刻だからだ。数学は嘘をつかないのである。ここで

$$k_n \equiv \frac{n\pi V_0}{\ell}, \quad t_0 \equiv \frac{\ell}{V_0} \quad (9.215a, b)$$

と置くと、ここまでの段階で上の解は

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_0}{m\ell\omega_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \int_0^\infty H(t - \tau) H(t_0 - \tau) \sin k_n \tau \sin \omega_n(t - \tau) d\tau$$

と書くことができる。二つの Heaviside 関数からは $t > \tau$ と $t_0 > \tau$ を同時に要求されるので、結局 t と t_0 の小さい方の $\min(t, t_0) > \tau$ まで積分すればいい。したがって上式は

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_0}{m\ell\omega_n} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \int_0^{\min(t, t_0)} \sin k_n \tau \sin \omega_n(t - \tau) d\tau$$

を計算すればいいことになる。 s を t と t_0 の小さい方として $\int_0^s \sin k_n \tau \sin \omega_n(t - \tau) d\tau$ の積分ができればいいのだが、冗長なのでそれは省略して結果だけを示すと

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_0 k_n}{m\ell\omega_n(k_n^2 - \omega_n^2)} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left\{ \sin \omega_n t - \left(\frac{\omega_n}{k_n}\right) \sin k_n t \right\}, \quad t \leq \frac{\ell}{V_0}, \quad (9.216a)$$

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2P_0 k_n}{m\ell\omega_n(k_n^2 - \omega_n^2)} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \left\{ \sin \omega_n t - (-1)^n \sin \omega_n \left(t - \frac{\ell}{V_0}\right) \right\}, \quad t > \frac{\ell}{V_0} \quad (9.216b)$$

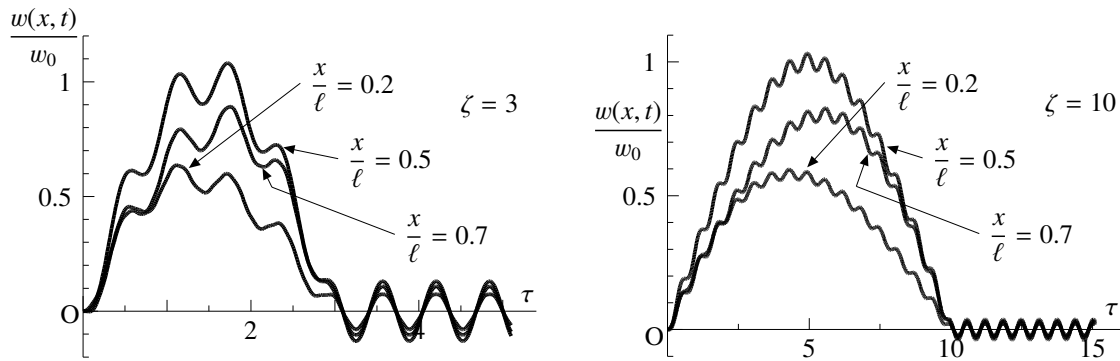


図 9.51 走行荷重による応答

と求められる。つまり、1 輪車が載っている間は固有振動数 ω_n と外力の運動に起因する振動数 k_n との両方の特性で動いているが、通過したあとは固有振動数だけで自由振動する。これまた当たり前の結果である。図 9.51 には梁の代表的な 3 点の応答を示した。この図は級数 10 項を用いた結果であるが、100 項でも区別はつかない。また図では式 (9.209a) で定義した τ の他に

$$\zeta \equiv \frac{1}{\ell V_0} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad w_0 \equiv \frac{P_0 \ell^3}{48EI}$$

と定義した記号を用いた。この w_0 はスパン中央に集中外力 P_0 が作用したときの中央のたわみである。また、 $\tau = \zeta$ の時刻に 1 輪車は梁から外に出る。ここでは T_1 を梁の 1 次の固有周期として、かなり速く通過する場合を $\zeta = 3, \ell/V_0 = \pi/2 T_1 \approx 4.71 T_1$ とし、ゆっくり通過する通常の橋梁等の場合を $\zeta = 10, \ell/V_0 \approx 15.7 T_1$ とした。どちらも $\tau = \zeta$ 以降は自由振動する。

実はこの式 (9.216) の解はとても面白い現象を示唆している。それは、走行速度によっては分母を零にする可能性があるからである。つまり $k_n = \omega_n$ のとき、この解の振幅は無限大になる。例えば、 $n = 1$ のとき式 (9.215a) で $k_1 = \omega_1$ と置くと

$$\frac{\pi V_0}{\ell} = \omega_1 \rightarrow \frac{\ell}{V_0} = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{1}{2} T_1, \quad \left(\zeta = \frac{1}{\pi} \right)$$

となるから、1 輪車が梁を通過するのに必要な時間が梁の 1 次の固有周期の半分するとき解は発散解になることを示している。これを **Zimmermann 効果** と呼ぶ。

ただし現実的な問題の設定を考えると、これは非現実的なくらい速い速度で 1 輪車が移動する場合に相当する。例えば狭い溝に渡した鉄板の上を新幹線くらい的高速車両が通過する場合に相当する。一例として $\zeta = 1.001/\pi$ の解を図 9.52 に示した。あっという間に渡り終わった（縦の一点鎖線の $\tau = \zeta$ の時刻の）すぐあとには自由振動になる。文献 [119] にも、振動が無限大になる前に 1 輪車が通過してしまうので、実際には振動が無限大になることは無いと説明されているが、面白い。実際 $k_1 = \omega_1$ の場合は式 (9.216) は成立せず、級数の $n = 1$ の項に $0 < t < t_0$ の間だけに発散解の $t \cos \omega_1 t$ が含まれるだけになる。だから突然たわみが無限大になるわけではないのだ。ただしゆっくりの場合よりもたわみは比較的大きく、渡り終わった瞬間にスパン中央は静的たわみの 1.5 倍以上にまで達している。

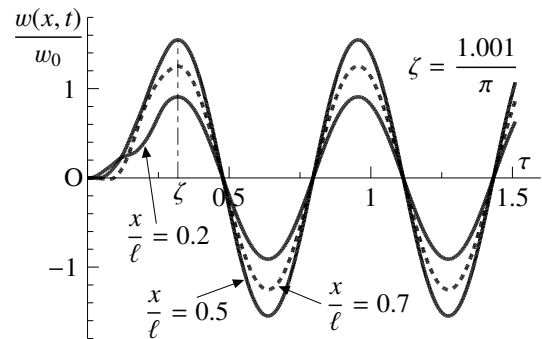


図 9.52 高速走行荷重に対する応答

演習問題 9-8

22. 図 9.47 の問題を自ら解いて図の結果が求められることを確認せよ。

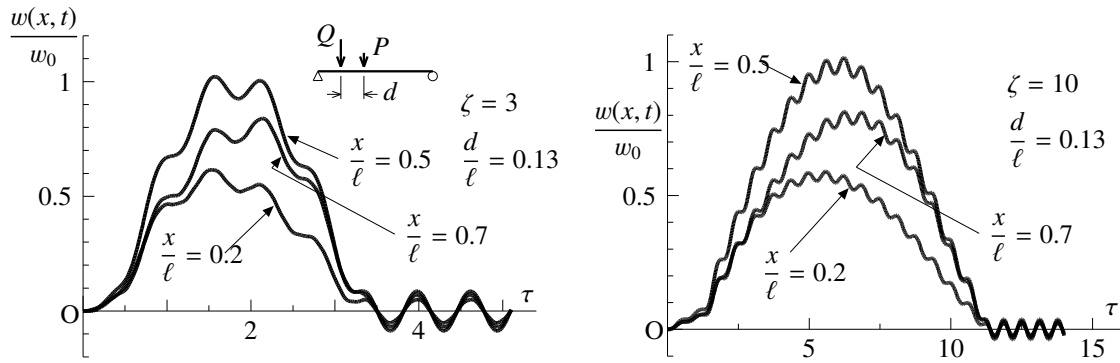


図 9.53 2 輪の走行荷重による応答

23. 図 9.47 と同じ状況で、外力を $P(t) = P_0 \sin pt$ としたときの応答を求めよ。
 24. 図 9.53 に示したのは速度 V_0 で走行する 2 輪車による応答である。ただし、スパン 30 m の橋梁に、いわゆる T 荷重が載った状況を念頭に置いて

$$\frac{d}{l} = 0.13, \quad \frac{Q}{P} = 4, \quad w_0 \equiv \frac{(P + Q) l^3}{48EI}$$

とした。Heaviside 関数と Dirac のデルタ関数の使い方の演習問題として解いてみよ。結果はあまり面白いものではなく、1 輪車の結果を d だけ移動させたぐらいのものである。

9.4.7 有限要素と振動解析

(1) 仮想仕事式と質量行列および減衰行列

実際の複雑な社会基盤構造の設計時の振動解析で、偏微分方程式を直接解くことはモデル化の点からもそれを解く観点からも無理がある。幸いなことに、設計上の動的解析は構造緒元がほぼ決まってから行われると考えられるので、現実的な方法は数値的に近似的に解く方法であろう。そのためには、式 (9.202) の運動方程式と式 (9.203) の境界条件を離散化しておく必要がある。代表的で有力な手法は有限要素法の適用だ。ここでは梁と骨組を対象として、その要素の定式化と解析例を示す。

まず長さ l の 1 梁要素を対象とし、式 (9.202) に対応する仮想仕事式を求めると

$$\int_0^l \delta w \left\{ m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\eta I \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - p \right\} dx = 0$$

となる。被積分関数の第 2, 3 項を 2 回部分積分すると、上式は

$$\int_0^l \left\{ \delta w m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\eta I \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) + \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \delta w p \right\} dx - \delta w \left(-\eta I \frac{\partial^4 w}{\partial t \partial x^3} - EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \Big|_0^l - \delta \left(-\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(-\eta I \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} + EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \Big|_0^l = 0$$

となる。この式に式 (9.203) の境界条件を代入すると、最終的に仮想仕事式は

$$\int_0^l \left\{ \delta w m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(\eta I \frac{\partial^3 w}{\partial t \partial x^2} \right) + \delta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - \delta w p \right\} dx - \delta w_1 S_1 - \delta \theta_1 C_1 - \delta w_2 S_2 - \delta \theta_2 C_2 = 0 \quad (9.217)$$

と表される。ここに w_1, θ_1 は左端 $x = 0$ のたわみとたわみ角であり、 w_2, θ_2 は右端 $x = l$ の各量である。また、 S_i, C_i も両端の集中せん断外力と集中モーメントである。

非減衰振動の一般解は三角関数と双曲線関数だが、有限要素法の特徴の一つは変位を区分的多項式で近似することだったので、ここでも静的な問題で用いた変位関数の多項式 (5.22) を使って

$$w(x, t) = w_1(t)\psi_1(x) + \theta_1(t)\psi_2(x) + w_2(t)\psi_3(x) + \theta_2(t)\psi_4(x) \quad (9.218)$$

と置くことにする。この式 (9.218) を上の仮想仕事式 (9.217) に代入して、下で定義する行列を用いると

$$\delta \mathbf{w}_b(t)^T \{ \mathbf{m}_b \ddot{\mathbf{w}}_b(t) + \mathbf{c}_b \dot{\mathbf{w}}_b(t) + \mathbf{k}_b \mathbf{w}_b(t) - \mathbf{f}_b(t) - \mathbf{g}_b(t) \} = 0$$

になる。これが任意の仮想変位 $\delta \mathbf{w}_b(t)$ に対して成立しなければならない条件から、離散化された運動方程式が

$$\mathbf{m}_b \ddot{\mathbf{w}}_b(t) + \mathbf{c}_b \dot{\mathbf{w}}_b(t) + \mathbf{k}_b \mathbf{w}_b(t) = \mathbf{f}_b(t) + \mathbf{g}_b(t) \quad (9.219)$$

と求められる。ここに節点の変位ベクトルと二つの外力ベクトルを

$$\mathbf{w}_b(t) \equiv [w_1(t) \theta_1(t) w_2(t) \theta_2(t)]^T, \quad \mathbf{f}_b(t) \equiv [S_1(t) C_1(t) S_2(t) C_2(t)]^T, \quad \mathbf{g}_b(t) \equiv [q_1(t) q_2(t) q_3(t) q_4(t)]^T \quad (9.220a, b, c)$$

と定義した。最後の等価節点外力成分 $q_i(t)$ は、式 (5.23b) の $q(x)$ を $p(x, t)$ に置き換えて q_i を時間の関数にした $q_i(t) \equiv \int_0^\ell p(x, t) \psi_i(x) dx$ である。また、この定式化で得ることができる質量行列 \mathbf{m}_b は

$$\mathbf{m}_b \equiv \left(\int_0^\ell m \psi_i(x) \psi_j(x) dx \right) = m \begin{pmatrix} 13\ell/35 & -11\ell^2/210 & 9\ell/70 & 13\ell^2/420 \\ & \ell^3/105 & -13\ell^2/420 & -\ell^3/140 \\ & & 13\ell/35 & 11\ell^2/210 \\ \text{Symm.} & & & \ell^3/105 \end{pmatrix} \quad (9.221)$$

と定義できる。多自由度系の対角な集中質量行列とは異なりすべての成分が非零なので整合質量行列と呼ばれる。また剛性行列と減衰行列は

$$\mathbf{k}_b \equiv \left(\int_0^\ell EI \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \right), \quad \mathbf{c}_b \equiv \left(\int_0^\ell \eta I \psi_i''(x) \psi_j''(x) dx \right) = \frac{\eta}{E} \mathbf{k}_b \quad (9.222a, b)$$

と定義されるので、剛性行列は式 (5.25) と同じである。またここで用いた粘性減衰モデルの場合の減衰行列は、式 (9.118) で定義した Rayleigh 減衰のうちの剛性比例減衰 $\zeta^M = 0$, $\zeta^K = \eta/E$ になっている。

式 (9.219) は要素の運動方程式なので、あとは要素間の連続条件を用いて、第 5.3.2 (1) 節の直接剛性法で全体構造の運動方程式を組み立てればよい。最終的には多自由度系の運動方程式 (9.95) と全く同じ

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{u}(t) = \mathbf{f}(t) \quad (9.223)$$

の形の運動方程式になる。外力ベクトル $\mathbf{f}(t)$ には、集中外力 $\mathbf{f}_b(t)$ と分布外力による等価節点外力 $\mathbf{g}_b(t)$ の両方をまとめた。多自由度系と異なるのは、このようにして全体構造の運動方程式を組み立てたあと幾何学的な境界条件（自由度が規定されている条件）をこの運動方程式に設定しないとイケないことである。例えば、上式 (9.223) の第 n 自由度が拘束されている場合には、それに対応する外力は反力つまり未知数なので、その行の方程式を第 n 自由度の加速度を零にする条件式

$$\ddot{u}_n(t) = 0$$

と置き換えることにする。つまり N 行の行列と外力ベクトルの成分のうち、 $i = 1, 2, \dots, N$ に対して

$$M_{ni} = 0, \quad M_{in} = 0, \quad C_{ni} = 0, \quad C_{in} = 0, \quad K_{ni} = 0, \quad K_{in} = 0, \quad f_i = 0 \quad \text{ただし} \quad M_{nn} = 1 \quad (9.224)$$

といった操作をすれば、対応する第 n 自由度を拘束したことになる。ここに、例えば M_{ni} は行列 \mathbf{M} の第 n 行第 i 列成分を表している。

(2) 非減衰自由振動解析

振動解析では非減衰の固有振動数と振動モードを知ることが最も重要だったから、まず自由振動解析をする。外力を零にしておいて周期解を探せばいいだけなので

$$\mathbf{u}(t) = \mathbf{U} \exp(i\omega t)$$

と置けばいい。ここに \mathbf{U} は振幅列行列である。これを非減衰で外力の無い式 (9.223) に代入すると

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{U} = \mathbf{0}$$

を満足していればいいことになる。したがって、有意な \mathbf{U} が存在するための条件から

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (9.225)$$

でなければならず、この式が固有振動数 ω を決定する振動数方程式になる。つまり、多自由度系の固有値問題と形式的には同じ形をしている。

例えば両端単純支持梁に 1 要素を用いた場合には、上式 (9.225) に境界条件を考慮すると、式 (9.219) の第 2, 4 行だけの式の

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \left(EI \begin{pmatrix} 4/\ell & 2/\ell \\ 2/\ell & 4/\ell \end{pmatrix} - m\omega^2 \begin{pmatrix} \ell^3/105 & -\ell^3/140 \\ -\ell^3/140 & \ell^3/105 \end{pmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U_2 \\ U_4 \end{Bmatrix}$$

になるので、振動数方程式 (9.225) は

$$\det \left(\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} - \frac{m\omega^2 \ell^4}{EI} \begin{pmatrix} 1/105 & -1/140 \\ -1/140 & 1/105 \end{pmatrix} \right) = 0$$

となる。 U_2, U_4 はそれぞれ $\theta_1(t), \theta_2(t)$ の振幅である。これを解くと

$$\omega \ell^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} = 2\sqrt{30}, \quad 6\sqrt{70}$$

と求めることができる。これが単純支持梁の第 1, 2 次の固有振動数に相当するので、式 (9.181) の厳密解と比較すると

$$\omega_1 \ell^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} = 2\sqrt{30} \approx 1.10992 (\pi)^2, \quad \omega_2 \ell^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} = 6\sqrt{70} \approx 1.27157 (2\pi)^2$$

程度になる。つまり 1 次の振動数が 11% の誤差、2 次の振動数が 27% の誤差で求められたことを意味する。

表 9.3 には、用いる要素数を増やしながらか有限要素法で求めた両端単純支持梁の固有振動数を示した。ただし ζ_k は第 k 次振動数の厳密解と有限要素解の比で

$$\zeta_k \equiv \frac{\text{有限要素解}}{\text{厳密解}} = \frac{\omega_k}{(k\pi/\ell)^2 \sqrt{EI/m}}$$

と定義した。要素数が増えるにつれて解の精度が上がっていくことが明らか

である。工学的に最も重要な最低次の固有振動数が 2 要素 (4 自由度) で 1% 未満になっていることは興味深い。振動数の近似解が厳密解より大きくなるのは、近似することによってモデルの変形が真の変形より拘束されたものになって、その見かけ上の剛性が大きくなってしまふからである。

表 9.3 固有振動数の近似度の改善

要素数	ζ_1	ζ_2	ζ_3	ζ_4	ζ_5
1	1.10992	1.27157	—	—	—
2	1.00395	1.10992	1.23994	1.27157	—
4	1.00026	1.00395	1.01827	1.10992	1.12909
8	1.00002	1.00026	1.00129	1.00395	1.00927
16	1.00000	1.00002	1.00008	1.00026	1.00063

もちろん、各固有振動数に対応する固有ベクトルは固有振動モードである。また当たり前であるが、この定式化では $u(t)$ あるいは U にはたわみとたわみ角が交互に並んでいるので注意が必要だ。つまり節点のたわみとたわみ角を変位関数の式 (9.218) に代入して求める必要がある。ただここでは近似的に、得られた固有ベクトルの奇数行のたわみだけを直線で結んで固有振動モードを描いたのが図 9.54 である。この例は梁を 40 要素分割したときの最初の三つの振動モードである。

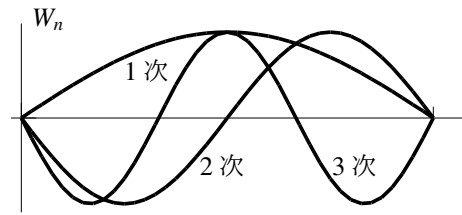


図 9.54 両端単純支持梁の近似振動モード

図 9.45 と比べるまでもなく、正しく振動モードが得られている。次節で説明する数値シミュレーションの場合はモード解析法とは異なり、予め固有振動数やモードを求めておく必要は無いが、後述のように設計では固有値解析もとても重要なことは覚えておいて欲しい。

(3) 時刻歴応答解析

地震応答解析のような時刻歴応答解析をする場合には、離散化された運動方程式 (9.223) を多自由度系の場合と同じ手法で解けばいい。例えば第 9.2.3 節で説明した中央差分を用いる場合のフローチャートを図 9.55 に示した。いくつか例を解いておこう。まず非減衰の例として、単純支持梁上の走行荷重による図 9.51 の応答のうち、2 要素と 4 要素で解析したスパン中央のたわみの結果を図 9.56 に示した。走行荷重はある時刻 t に $V_0 t$ の位置にいるが、それが n 番目の要素上にあると判定できた場合、その要素左端の x 座標が x_n であるとする、その要素内の 1 輪車の左端からの位置 a は $a = V_0 t - x_n$ となる。したがって、式 (9.220c) の等価節点外力の定義から、1 要素長を l としたときの走行荷重は Dirac のデルタ関数を用いて

$$q_i = \int_0^l P_0 \delta(x - a) \psi_i(x) dx = P_0 \psi_i(a)$$

によって算定できる。モード解析法による厳密解の一点鎖線と 4 要素による実線の結果はほとんど重なっていて、2 要素による破線の結果も拡大図に示した程度の差しか無い。さらに、モード解析が面倒な不静定梁の例として、2 径間連続梁を一輪車が走行する場合の左のスパン中央のたわみを図 9.57 には示した。 $\tau = \zeta$ で右のスパンに移動するのでたわみが負（上向き）に移行し、 $\tau = 1.5\zeta$ で走行荷重は梁の外に出て、そのあとは自由振動をしている。

図 9.58 (a) には、偏った固定集中外力に対する応答を示した図 9.47 の結果との比較を、4 要素で解析した数値解を用いて示した。モード解析結果が破線で描いてあるが、スパン中央の時刻歴応答も、代表的な時刻のたわみ形状も、ほとんど重なっていて十分な精度で求められていることがわかる。なおたわみ形状は、変位関数の式 (9.218) に節点のたわみとたわみ角の両方を用いて正確に描いたものである。また図 9.58 (b) には、同じ構造と外力条件に減衰を含めた場合の応答を示した。減衰定数は

$$\beta^{BE} \equiv \frac{1}{2} \frac{\eta}{E} \frac{1}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{m}} \rightarrow \frac{\eta}{E} = 2\beta^{BE} l^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} \quad (9.226)$$

と定義し、この例では $\beta^{BE} = 0.02$ とした。この定義は式 (9.204) の $\bar{\beta}_i^{BE}$ の定義とは若干異なるので注意すること。破線がモード解析による非減衰解であるが、減衰を含めた数値解は静的なたわみ w_0 （縦軸の 1）に徐々に近づいていくことを示している。時刻 $t = 0$ に P_0 の荷物を $x = l/4$ に置いままの問題なので、最終的にはその静的たわみに収束していくという当たり前の結果だ。

このように数値解析によって任意の外力に対する応答も計算できるわけだが、少し注意して欲しいのは、前述のようにそれが必ずしも直接設計に有用な情報を与えてくれるとは限らないことである。むしろ、必要に応

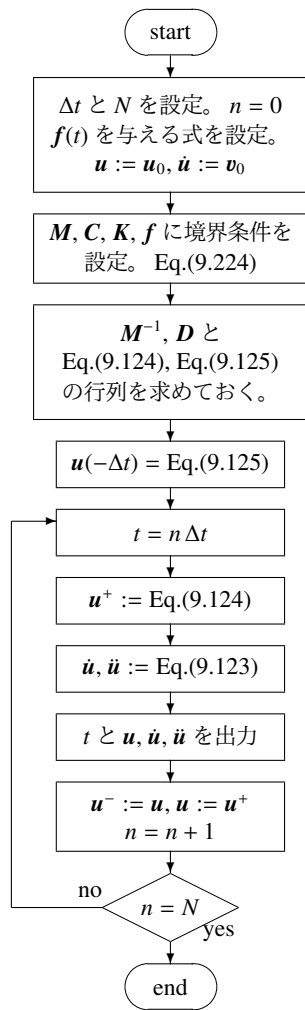


図 9.55 中央差分のフローチャート

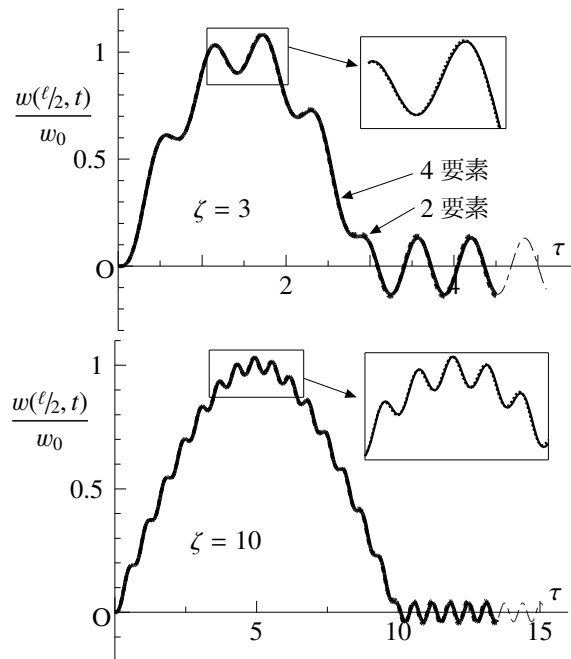


図 9.56 走行荷重による応答の有限要素解

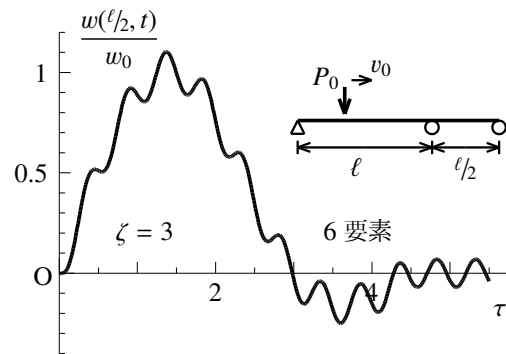
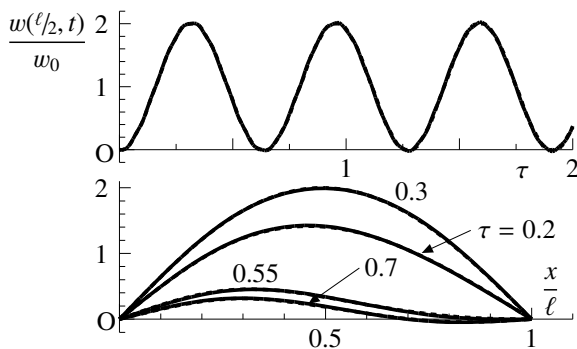
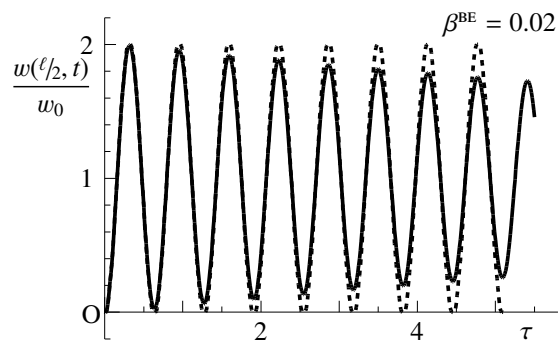


図 9.57 連続梁上の走行荷重による応答



(a) スパン中央の時刻歴応答とたわみ形状の変化



(b) 減衰がある場合

図 9.58 偏った位置の集中外力に対する応答

じて卓越するモードを探し、その成分の応答を個々に比較する方が設計には役立つのだ。つまり固有値解析の結果もじっくり考察する必要がある。特に3次元構造のように曲げだけではなくねじれ等も含む複雑な振動をする場合には、異なるモードの振動数同士の差がとても小さい場合もあり、過大な応力がなぜ生じているのかを全体構造の数値結果だけで判断するのが困難な場合がある。つまり、着目している設計断面の応力を増大させる振動モードをきちんと探し出し、そのモードを制御するような設計変更をする必要があるのだ。

演習問題 9-9

25. 図 9.47 と同じ状況で, 外力を $P(t) = P_0$ としたときの応答を有限要素を用いて求めよ。
 26. 図 9.47 と同じ状況で, 外力を $P(t) = P_0 \sin pt$ としたときの応答を有限要素を用いて求めよ。
 27. 表 9.3 を求めよ。

(4) 平面骨組の振動解析

軸方向変形についての運動: 平面骨組の有限要素を求めるために, まずトラス部材のような軸力で抵抗する棒部材の離散化された運動方程式を求めておこう。そのためには仮想仕事式に慣性項を加えればいだけなので, 長さ ℓ の 1 柱要素の式 (5.14) を

$$\int_0^\ell EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \delta \frac{\partial u}{\partial x} dx + \int_0^\ell m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \delta u dx - \int_0^\ell p_a(x,t) \delta u dx - F_1(t) \delta u_1 - F_2(t) \delta u_2 = 0 \quad (9.227)$$

とすればいい。ここに $p_a(x,t)$ は軸方向の単位長さ当たりの分布外力, $F_i(t)$, ($i = 1, 2$) は端部の軸外力である。この場合も静的な問題の式 (5.16) と同じ変位関数を用いて

$$u(x,t) \sim u_1(t) \phi_1(x) + u_2(t) \phi_2(x) \quad (9.228)$$

とすればいい。これを上の仮想仕事式 (9.227) に代入して整理すると, 下で定義する行列を用いて離散化された運動方程式を

$$\mathbf{m}_a \ddot{\mathbf{u}}_a(t) + \mathbf{k}_a \mathbf{u}_a(t) = \mathbf{f}_a(t) + \mathbf{g}_a(t) \quad (9.229)$$

と表すことができる。ここに, 要素の変位ベクトルと二つの外力ベクトルを

$$\mathbf{u}_a(t) \equiv [u_1(t) \ u_2(t)]^T, \quad \mathbf{f}_a(t) \equiv [F_1(t) \ F_2(t)]^T, \quad \mathbf{g}_a(t) \equiv [p_1(t) \ p_2(t)]^T \quad (9.230a, b, c)$$

と定義した。また最後の等価節点外力成分 $p_i(t)$ は式 (5.17a) の $p(x)$ を $p_a(x,t)$ に置き換えて p_i を時間の関数にした $p_i(t) \equiv \int_0^\ell p_a(x,t) \phi_i(x) dx$ である。この定式化で得ることができる質量行列 \mathbf{m}_a は

$$\mathbf{m}_a \equiv \left(\int_0^\ell m \phi_i(x) \phi_j(x) dx \right) = m\ell \begin{pmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{pmatrix} \quad (9.231)$$

と定義でき, 梁の場合と同様整合質量行列になっている。また剛性行列は $\mathbf{k}_a \equiv \left(\int_0^\ell EA \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx \right)$ で定義されるので式 (5.19b) と同じである。上式 (9.229) は, 第 10.1 節の 1 次元の波動, つまり棒や筒の中の疎密波動の有限要素解析にも使える。また, EA を張力 T で置き換えれば第 9.3.1 節の弦の振動の有限要素運動方程式でもある。

粘性減衰については, 例えばその材料モデルを式 (9.200a) と同じように考えてもいいので

$$N(x,t) = EA \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + \eta A \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t \partial x} \quad (9.232)$$

とすればいい。ここに η は材料の粘性係数である。このモデルの場合には, その減衰行列は

$$\mathbf{c}_a \equiv \left(\int_0^\ell \eta A \phi_i'(x) \phi_j'(x) dx \right) = \frac{\eta A}{\ell} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{\eta}{E} \mathbf{k}_a \quad (9.233)$$

と定義でき, 梁と同様の剛性比例減衰になっている。

平面骨組の運動: 平面骨組要素の運動方程式は曲げの式 (9.219) と軸方向の式 (9.229) を合体するだけでいい。ただ骨組の場合は各部材がそれぞれ異なる方向を向いて配置されているので、図 5.25 のように要素の局所 ξ - ζ 座標系と全体 z - x 座標系との向きの違いを角度 α で定義しておくが、この図中の節点変位と節点外力は時間の関数だと捉えること。以下の定式化では簡単のために減衰と分布外力は無視する。静的な剛性方程式 (5.34) と同じ成分の並びを持った変位と外力のベクトルを用いることにすると、まず局所座標系の剛性行列は式 (5.39) と同じである。これに対応した質量行列は式 (9.221) と式 (9.231) を合体させて

$$\mathbf{m}_f \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} m\ell/3 & 0 & 0 & m\ell/6 & 0 & 0 \\ & 13m\ell/35 & -11m\ell^2/210 & 0 & 9m\ell/70 & 13m\ell^2/420 \\ & & m\ell^3/105 & 0 & -13m\ell^2/420 & -m\ell^3/140 \\ \hline & & & m\ell/3 & 0 & 0 \\ & & & & 13m\ell/35 & 11m\ell^2/210 \\ & & & & & m\ell^3/105 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{m}_f^A & \mathbf{m}_f^B \\ (\mathbf{m}_f^B)^T & \mathbf{m}_f^C \end{array} \right) \quad (9.234)$$

と定義できる。全体座標系の節点変位と節点外力ベクトルも同じ並びで

$$\bar{\mathbf{u}}_f(t) \equiv [\bar{u}_1(t) \bar{w}_1(t) \bar{\theta}_1(t) \bar{u}_2(t) \bar{w}_2(t) \bar{\theta}_2(t)]^T, \quad \bar{\mathbf{f}}_f(t) \equiv [\bar{F}_1(t) \bar{S}_1(t) \bar{C}_1(t) \bar{F}_2(t) \bar{S}_2(t) \bar{C}_2(t)]^T \quad (9.235a, b)$$

と定義すると、全体座標系と局所座標系との座標変換行列は式 (5.35) がそのまま使えるので、全体座標系の質量行列 $\bar{\mathbf{m}}_f$ と剛性行列 $\bar{\mathbf{k}}_f$ は、局所座標系の式 (9.234) と式 (5.39) の小行列を用いて

$$\bar{\mathbf{m}}_f = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{T}^T \mathbf{m}_f^A \mathbf{T} & \mathbf{T}^T \mathbf{m}_f^B \mathbf{T} \\ \text{Symm.} & \mathbf{T}^T \mathbf{m}_f^C \mathbf{T} \end{array} \right), \quad \bar{\mathbf{k}}_f = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{T}^T \mathbf{k}_f^A \mathbf{T} & \mathbf{T}^T \mathbf{k}_f^B \mathbf{T} \\ \text{Symm.} & \mathbf{T}^T \mathbf{k}_f^C \mathbf{T} \end{array} \right) \quad (9.236a, b)$$

と定義できる。これを用いて全体 z - x 座標系における骨組有限要素の運動方程式は

$$\bar{\mathbf{m}}_f \ddot{\bar{\mathbf{u}}}_f(t) + \bar{\mathbf{k}}_f \bar{\mathbf{u}}_f(t) = \bar{\mathbf{f}}_f(t) \quad (9.237)$$

と表すことができる。

門型骨組の解析例: 時刻歴応答解析で何か特徴のある例を思い付かないし面倒なので、ここではいくつか自由振動解析しておこう。というのも、単純梁の結果だけでは誤解が生じるかもしれないからだ。単純梁の n 次の固有振動数は n^2 に比例するので固有振動数同士の差が非常に大きかったが、実構造ではそういう場合はとても稀なのだ。ここでは図 9.59 に示した左右対称・非対称の基部固定の門型骨組を対象とする。図に示した長さ L で定義した細長比を 100 とした。この長さ L を 40 要素分割して 6 自由度が固定されているので、対称の場合で 117 自由度になっている。

まず対称の場合の振動モードを図 9.59(a) に示した。図には得られた固有ベクトルの変位成分だけを直線で結んだ近似モードを示してあり、振幅も正規化等はせず適当に誇張してある。例えば 1 次モードは梁部にほとんど変化が無いまま柱部だけが曲がっているのに対し、2 次モードは柱も梁も曲がっている等、特徴がお互いに異なる。対応する固有振動数を表 9.4 の第 2 列に示したが、単純梁程ではないが 1 次と 2 次の振動数も比較的離れている。それに対し 3 次の振動数は 2 次のそれとあまり離れていないし、3 次と 4 次の振動数はかなり近い。構造の固有振動数同士の例のように比較的近づいている場合が多く、ねじりモードも生じる 3 次元振動の場合にはさらにその傾向が強まる可能性があるため、動的設計の段階では十分に注意する必要がある。このような固有振動数の差の大小については、単純梁のモードを念頭に置きながら柱部や梁部のモード同士の特徴の差異を比較すると少しは推測できるかもしれない。そういう意味で固有値解析は重要だし、モードを予想する訓練を積むことも大事だ。

これに対し非対称な門型骨組の結果を示したのが図 9.59(b) である。固有振動数は表 9.4 の第 3 列に示した。この場合は 3 次と 4 次の振動数の差が大きくなっているが、これは構造の非対称性によって左の柱の 4 次の振

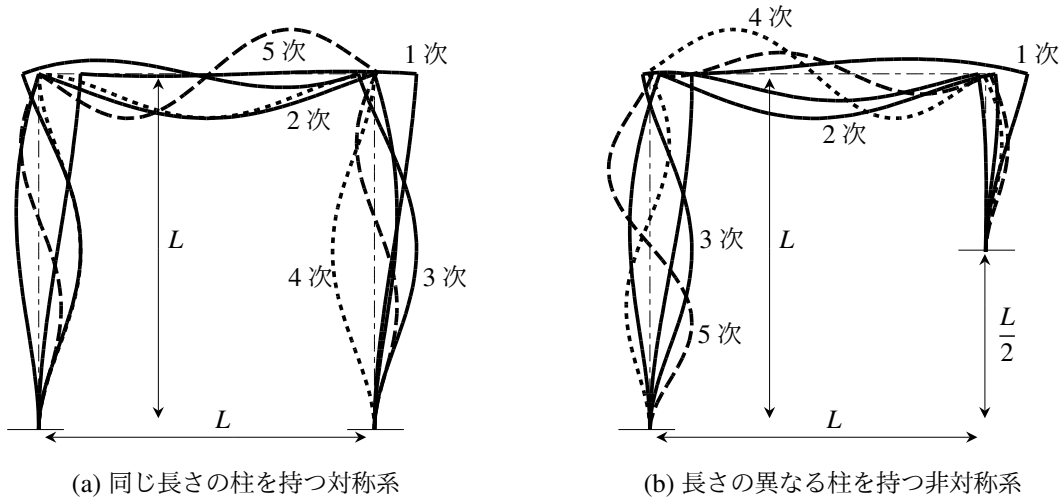


図 9.59 門型骨組の固有振動モード

表 9.4 固有振動数 $\omega L^2 \sqrt{m/EI}$

次数	門型骨組		2 ヒンジアーチ状		固定アーチ状	
	対称	非対称	$\theta_0 = 30$ 度	$\theta_0 = 22.5$ 度	$\theta_0 = 45$ 度	$\theta_0 = 36$ 度
1	3.204	6.181	38.79	36.29	60.06	55.47
2	12.62	14.78	47.05	39.09	66.14	60.63
3	20.62	21.58	90.28	89.49	124.6	122.9
4	22.28	45.24	157.1	157.5	197.4	198.3
5	44.79	58.11	246.4	246.6	298.0	298.2

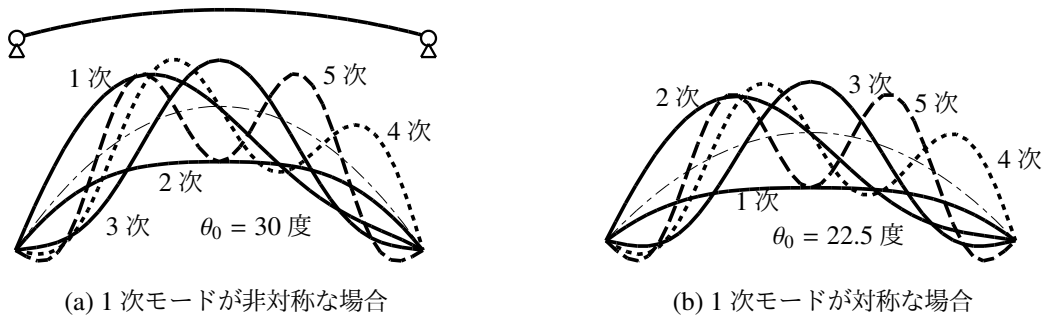


図 9.60 浅い 2 ヒンジ・アーチ状の棒の固有振動モード

動モードに節が生じていることが原因である。ただ 5 次モードは 4 次と同じようなモードになっているので、4 次と 5 次の振動数同士が近づいている。

アーチ状の棒の解析例: もう一つの類似した例として、円弧アーチ状の棒を 40 要素の弦（直線梁）で近似した構造を対象とする。直線の要素長合計を L として、それを用いた細長比を $L/r = 100$ と設定した。両端は水平方向には固定してあるが、最初は両端共ヒンジ拘束とした。図 9.60 の左上に示した浅いアーチはほぼキャンバーが付いただけの単純梁のように見えるが、円弧内角が $\theta_0 = 30$ 度である。振動モードを図 9.60(a) に示した。とても興味深いことに、構造系が対称であるにもかかわらず最低次の第 1 次の振動モードは反対称であ

る。これは構造系そのものの形状が直線梁の第1次対称振動モードと同じであることが原因なのである。つまり初期形状の影響で、対称な2次モードの方が非対称な1次モードよりも振動し難いのだ。そこで内角を22.5度にしてもっと浅いアーチにすると図9.60(b)のように第1次振動モードが対称になる。これはとても浅いために単純梁と同じようなモードを持ったと考えられるが、表9.4の第5列を見ると1次と2次の振動数がかなり近づいているのがわかる。実は $\theta_0 \approx 24.385$ 度で小さい方の二つの固有振動数が一致($\omega L^2 \sqrt{m/EI} \approx 39.024$)する³⁶のだ。だから、その角度に近い22.5度の場合の固有振動数の小さい方の二つが近接していたのだ。

次に固定アーチの場合の内角と小さい方の二つの固有振動数との関係を図9.61に示した。横軸がアーチの内角で、約40.092度を境に最低次の振動モードが対称と反対称で入れ替わる。そこで θ_0 が45度の場合と36度の場合の固有振動モードを図9.62に、固有振動数を表9.4の第6,7列に示した。内角が45度の場合には第2,3,5次がほぼ対称で第1,4次が反対称になる。これに対し36度の場合には第2,4次が反対称である。いずれにしても表9.4を横向きに比べれば明らかなように、門型骨組や両端単純支持梁に比べてアーチ状の棒の振動数同士はお互いに近接している。以上の結果から、実際の構造の振動数同士はそれほど離れていないこと、対称モードが常に最低次モードとは限らないことを是非覚えておいて欲しい。

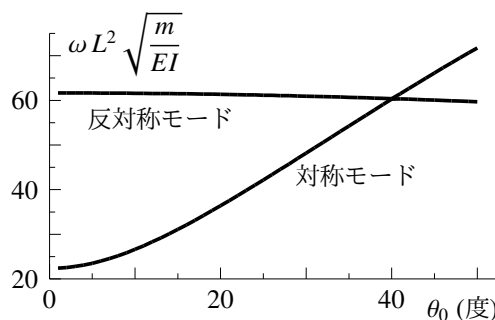


図9.61 固定アーチの内角と固有振動数

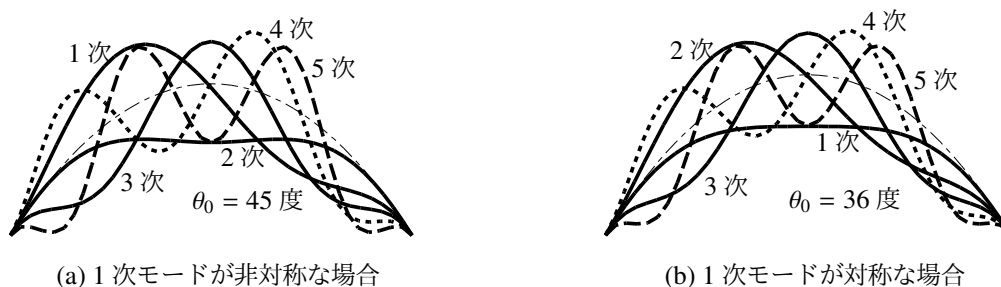


図9.62 固定アーチ状の棒の固有振動モード

9.4.8 回転慣性とせん断変形

(1) 回転慣性の影響

式(9.172)ではモーメントの「つり合い」を考えただけで、回転の運動方程式(2.3)にあるべき回転慣性を無視していた。梁の場合はたわみ角が断面の回転角と同じなので式(9.172)の右辺に回転慣性が加わり

$$\frac{\partial M(x,t)}{\partial x} - V(x,t) = J \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2}, \quad \theta(x,t) = -\frac{dw}{dx}$$

になる。この慣性モーメント J は式(2.4)の定義を梁の断面に適用すれば、長さ dx 当たりに

$$J = \int_A \rho z^2 dA = \rho I$$

³⁶ あれっ。安定構造の異なる次数の振動数同士は異なると言っていたが、この二つが一致することは不安定になるのかな? というわけでもない。第6.4.2(3)節で説明した非保存力による座屈現象の場合は最低次の振動数が一致した瞬間に振動数が複素数になるが、このアーチの場合は実数として両立するのだ。

でいい。したがって、モーメントの運動方程式は

$$\frac{\partial M(x, t)}{\partial x} - V(x, t) = \rho I \frac{\partial^3 \theta(x, t)}{\partial t^2 \partial x} \quad (9.238)$$

としなければならない。これを式 (9.171) のせん断力についての運動方程式に代入すれば、回転慣性を考慮した梁の運動方程式は、一様断面・一様材料の場合には

$$m \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} - \rho I \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial t^2 \partial x^2} = p(x, t) \quad (9.239)$$

となる。また境界条件式 (9.203) も、せん断力の式を

$$n_i \left(-EI \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(x_i, t) - \eta I \frac{\partial^4 w}{\partial t \partial x^3}(x_i, t) + \rho I \frac{\partial^3 w}{\partial t^2 \partial x}(x_i, t) \right) = S_i(t) \quad (9.240)$$

で置き換えなければならない。

この回転慣性の定量的な影響は次の節で示す。ここではその特性を明らかにするために、たわみと場所の独立変数を梁の長さ ℓ で無次元化しておく。つまり

$$\xi \equiv \frac{x}{\ell}, \quad v(\xi, t) \equiv \frac{w(x, t)}{\ell} \quad (9.241a, b)$$

と定義して、上の運動方程式 (9.239) を書き直すと

$$\left[\frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} + \frac{EI}{m \ell^4} \frac{\partial^4 v(\xi, t)}{\partial \xi^4} - \frac{p(\xi, t)}{m \ell} \right] - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 v(\xi, t)}{\partial t^2 \partial \xi^2} = 0 \quad (9.242)$$

となる。ここに λ は式 (6.40) で定義した細長比である。左辺の大括弧内の 3 項が前節までの梁理論の運動方程式の項であることを念頭に置くと、第 4 項の回転慣性項は細長比 λ が大きくなると比較的小さくなって無視できることがわかる。つまり、回転慣性の影響は細長い梁では無視していいことを、この式 (9.242) は示唆している。つまり梁の長さに比べて断面寸法がとて小さいので、回転慣性が効いてこないのである。

(2) せん断変形の影響

前節のように細長比が小さい梁で回転慣性の影響が大きくなるのなら、短い梁で考慮しなければならないせん断変形の影響も無視できなくなるのではないか。せん断変形を考慮した梁理論の代表は Timoshenko 梁理論である。以下必要最小限の情報だけを並べるので、定式化等の詳細は付録 B を勉強して欲しい。Timoshenko 梁の運動場は図 B.1 のようになるので、断面内任意点の x, z 方向変位成分は

$$u_x = u + z \vartheta, \quad u_z = w \quad (9.243a, b)$$

になる。ここに $\vartheta(x)$ は軸のたわみ角ではなく断面の回転角を表していて、このたわみ角と断面の回転角の差

$$\gamma = \vartheta - (-w') \neq 0 \quad (9.244)$$

が Bernoulli-Euler 梁では無視していたせん断変形である。図 B.1 のうち曲げについての成分のみを考えることにすると、回転慣性も含めた運動方程式は

$$\frac{\partial V}{\partial x} + p = m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial M}{\partial x} - V = \rho I \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2} \quad (9.245a, b)$$

となる。またせん断力と曲げモーメントは

$$V = Gk_r A \gamma, \quad M = EI \left(\frac{\partial \gamma}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = EI \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \quad (9.246a, b)$$

という構成関係を満たす。 G はせん断弾性係数であり, k_T はせん断変形の分布についての補正係数で, 式 (B.7) のように断面形状と Poisson 比 ν に依存する定数 [17] である。境界条件は

$$\{w = w_i \text{ あるいは } n_i V = S_i, \} \quad \text{および} \quad \{\vartheta = \vartheta_i \text{ あるいは } n_i M = C_i\} \quad (9.247a, b)$$

で与えられる。ここに w_i 等は端部で与える変位量である。回転角についての境界条件については, γ そのものや $-w'$ を与えるようなことはできないし, この2者が中間荷点や中間支点で連続になる必要も無いことに注意すること。連続するのは断面の回転角 ϑ だ。

式 (9.245) (9.246) から ϑ, γ を消去すると, w を無次元化した式 (9.241b) の v で表した運動方程式が

$$\left[-\frac{EI}{m\ell^4} \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \frac{p}{m\ell} \right] + \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial \xi^2} + \alpha_T \left[\frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial \xi^2} - \frac{m\ell^4}{EI} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^4 v}{\partial t^4} - \frac{1}{m\ell} \left\{ \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} - \frac{m\ell^4}{EI} \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} \right\} \right] = 0 \quad (9.248)$$

となる。ここでは式 (9.241a) の無次元化された独立変数 ξ を用いた。最初の大括弧が Bernoulli-Euler 梁の部分, 最後の大括弧が Timoshenko 梁で加わる部分である。また二つの大括弧に挟まれた1項が前節で考慮した回転慣性の項である。また α_T は式 (B.15) で定義されているので, 細長い梁では α_T も比較的小さくなりせん断変形の影響も無視できる。

固有振動数を求めるために分布外力を無視して, たわみを

$$v(\xi, t) = V(\xi) \exp(i\omega t)$$

と置いて運動方程式 (9.248) に代入して整理すると

$$V'''' + \frac{\omega^2 \mu^4 (1 + \Xi)}{\lambda^2} V'' + \frac{\Xi \mu^8 \omega^4 - \mu^4 \lambda^4 \omega^2}{\lambda^4} V = 0$$

となる。このプライムは ξ に関する微分を表し

$$\Xi \equiv \frac{E}{k_T G}, \quad \mu^2 \equiv \ell^2 \sqrt{\frac{m}{EI}} \quad \rightarrow \quad \alpha_T = \frac{\Xi}{\lambda^2} \quad (9.249a, b, c)$$

と定義した。さらに $V = \exp(p\xi)$ と置くことによって, 特性方程式を

$$p^4 + \frac{\omega^2 \mu^4 (1 + \Xi)}{\lambda^2} p^2 + \frac{\Xi \mu^8 \omega^4 - \mu^4 \lambda^4 \omega^2}{\lambda^4} V = 0$$

のように得るので, 特性根が

$$p^2 = \frac{1}{2} \left[-\frac{\omega^2 \mu^4 (1 + \Xi)}{\lambda^2} \pm \frac{\mu^2}{\lambda^2} \sqrt{\omega^4 \mu^4 (1 - \Xi)^2 + 4\omega^2 \lambda^4} \right]$$

と求められる。この根は $\omega^2 < \frac{\lambda^4}{\Xi \mu^4}$ のとき一つは実根 $\pm p_2$ でもう一つが虚根 $\pm i p_1$ になる。虚根は上式の平方根の前の符号が負の方の

$$p_1^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\omega^2 \mu^4 (1 + \Xi)}{\lambda^2} + \frac{\mu^2}{\lambda^2} \sqrt{\omega^4 \mu^4 (1 - \Xi)^2 + 4\omega^2 \lambda^4} \right] \quad (a)$$

である。したがって, 一般解が

$$V(\xi) = c_1 \sin p_1 \xi + c_2 \cos p_1 \xi + c_3 \sinh p_2 \xi + c_4 \cosh p_2 \xi \quad (b)$$

と求められる。

具体的に単純支持梁の振動数を求めておこう。境界条件は式 (9.247) から両端で

$$w = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0 = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{m}{Gk_T A} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

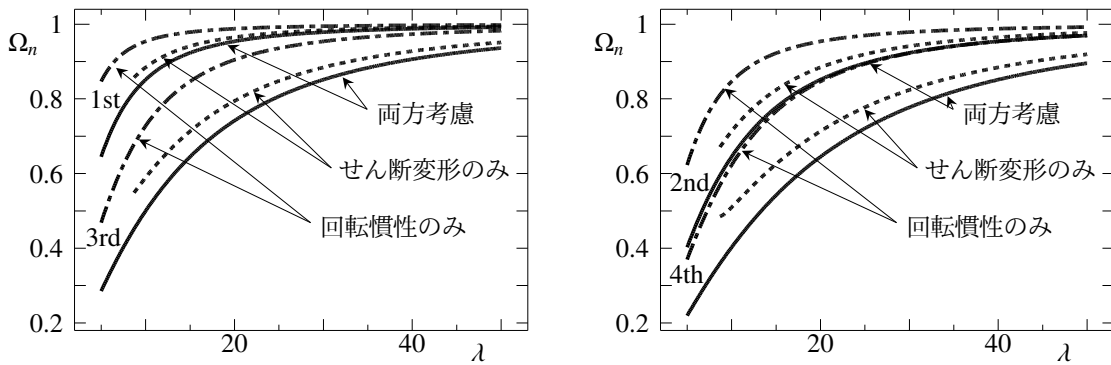


図 9.63 固有振動数に対する回転慣性とせん断変形の影響

となるので、式 (b) の一般解を代入して整理すると

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ p_2^2 & 0 & -p_1^2 & 0 \\ \cosh p_2 & \sinh p_2 & \cos p_1 & \sin p_1 \\ p_2^2 \cosh p_2 & p_2^2 \sinh p_2 & -p_1^2 \cos p_1 & -p_1^2 \sin p_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_4 \\ c_3 \\ c_2 \\ c_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得る。意味のある解になるためには係数行列の行列式が零にならなければならないので

$$-(p_1^2 + p_2^2)^2 \sin p_1 \sinh p_2 = 0$$

が振動数方程式である。したがって固有振動数は

$$p_1 = n\pi$$

を満足する解であり、 c_1 だけが不定になるので固有振動モードは $\sin p_1 \xi$ である。この式を式 (a) に代入して整理すると

$$\Xi \Omega_n^4 - \beta_n (\beta_n + \underline{1} + \Xi) \Omega_n^2 + \beta_n^2 = 0$$

を得る。ここに

$$\Omega_n \equiv \frac{\mu^2 \omega}{(n\pi)^2}, \quad \beta_n \equiv \left(\frac{\lambda}{n\pi}\right)^2 \tag{9.250a, b}$$

と定義した。下線を引いた 1 項が回転慣性の影響の項であり、 Ξ の付いた項がせん断変形の影響の項である。つまり、 $\Xi = 0$ として下線の項を無視することによって回転慣性を無視した Bernoulli-Euler 梁の振動数方程式が $\Omega_n^2 = 1$ になり、式 (9.181) の固有振動数を得る。具体例として矩形断面の梁を対象としてポアソン比を $\nu = 0.3$ としたときの、1 次から 4 次の固有振動数を図 9.63 に示した。縦軸の $\Omega_n = 1$ が Bernoulli-Euler 梁の振動数だ。それぞれ、回転慣性のみを考慮した場合と、せん断変形のみを考慮した場合と、両方共考慮した場合の結果を示してある。細長比が小さくなって短い梁になればなるほど回転慣性やせん断変形の特徴が Bernoulli-Euler 梁の固有振動数を下げる影響が強くなっている。回転慣性よりもせん断変形の方の影響が強く、高次振動に対する影響の方が比較的強い。つまり細長い梁であっても高次振動のモードの節と節の距離は短くなるので、実質的には短い梁の振動に相当するというわけだ。したがって高周波振動を対象とする場合には、回転慣性やせん断変形の影響を無視できなくなる可能性がある。ただ実際の橋梁の個々の部材の細長比は小さくても 30 くらいだろうから、2 次の固有振動数までなら 10% くらいの差しか生じないが、太いコンクリート柱のような場合にはこのような影響を考えないとまずいのではないかと思うが、どうだろう。

9.5 1 自由度系の非線形振動

9.5.1 振り子の運動

(1) 非線形の運動方程式

実際の現象は多かれ少なかれ非線形性を持つが、構造力学や材料力学では幾何学的非線形性と材料学的非線形性に分類される。前者は第6章の座屈の勉強で説明した。後者の一例は第11章の塑性だ。第12章ではその両方を扱うが、動的問題でこのような非線形性を考慮するのは非常に難しい。ここでは非線形性が示す振動特性の例として電気回路等の古典的な問題を対象とし、その解析的な解法としての摂動法を紹介したい。なおこの節は、Northwestern 大学の Davis 先生 (1980 年頃当時) の 'Asymptotic and Perturbation Methods in Applied Mathematics' の講義ノート³⁷を参考にした。

まず振り子の運動方程式を式 (9.4) のようには近似しないで解こう。その厳密な運動方程式は

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0 \quad (9.251)$$

であった。初期条件は例えば

$$\theta(0) = a, \quad \dot{\theta}(0) = b \quad (9.252a, b)$$

で与えられる。この初期位置 a や初速 b が大きいと運動方程式の sine 関数は近似できなくなる。一番わかり易いのは $a = 0$ のまま初速の b をとても大きくしたような、振り子をバットで叩いたような状況だ。そのとき振り子は振動せず一方にクルクル回るだけだろう。これは式 (9.4) では解けない。

(2) 定性的な検討

式 (9.11) で定義した ω を用いた上で、上の運動方程式に $\dot{\theta}$ を乗じると

$$\dot{\theta} \ddot{\theta} + \omega^2 \dot{\theta} \sin \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2} \left\{ (\dot{\theta})^2 \right\} + \omega^2 (-\cos \theta) = 0$$

となるので、1回は容易に積分できて第9.1.2(3)節で用いた位相平面上的の運動を表す

$$\frac{1}{2} (\dot{\theta})^2 - \omega^2 \cos \theta = C (\text{const.}) \quad (9.253)$$

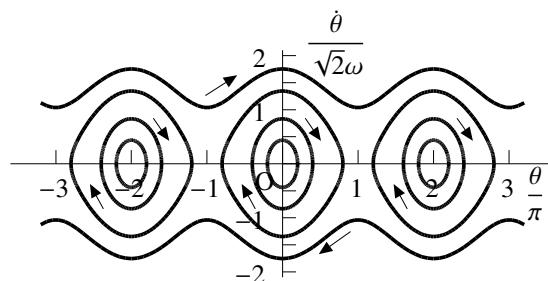


図 9.64 位相平面上的の振り子の運動

を得る。初期条件を代入すれば $C = \frac{b^2}{2} - \omega^2 \cos a$ となる。この式 (9.253) を $m\ell^2$ 倍すれば、第1項は $\frac{1}{2} m v^2(t)$, ($v(t) \equiv \ell \dot{\theta}(t) =$ 回転方向の速度) の運動エネルギーであり、第2項は $mg\ell \cos \theta$ という回転中心レベルを基準にした位置エネルギーであるから、この式はエネルギー保存則である。種々の初期条件で描いたのが図 9.64 である。例えば初速が零で初期位置が π より小さい場合には原点を中心とした時計回りの軌跡を描く。初期位置が十分小さい場合には、線形理論の軌跡の式 (9.28) で示したようにほぼ楕円状の軌跡を描く。初期値が大きくなるにつれて楕円がいびつになって非線形性が大きくなる。もちろん θ が 2π の倍数の位置を中心とする楕円軌跡も存在するのは当たり前だ。いずれも左右に振れる振り子運動である。さらに初期位置を大きくして、後述の図 9.65 に示したような初期位置 π から始まる振動の軌跡は、その図 9.65 の横軸上で戻ろうとする軌跡と同じ方向に回り続けようとする軌跡とが交わる。もっと初期値を大きくすると、楕円状の軌跡群の上あるいは下に描いたように、一方にクルクル回転し続けるだけで振り子運動にはならない。

³⁷ よく理解できなかったので単位は取得していない。そもそも履修届けを出さない 'sit-in' というやつだったか。

(3) 摂動法の考え方 — 代数方程式を例にして

基本的な摂動法: 振り子運動の定量的な把握のために次の節では摂動法を用いるが、まず摂動法そのものの基本を説明しておく。その特性をわかり易く理解できるように、ここでは代数方程式に摂動法を適用する。以下 $0 \leq \epsilon \ll 1$ とする。最初の例では

$$x^2 - 2\epsilon x + 1 = 0$$

を解こう。正解はもちろん $x = \epsilon \pm i\sqrt{1 - \epsilon^2}$ である。そこでまず解を ϵ で漸近展開で近似し

$$x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + O(\epsilon^3)$$

と置くことにする。記号 O は p.294 の脚注 '19' で定義した Landau の記号である。これを上の代数方程式に代入して ϵ のべき順に整理すると

$$(x_0^2 + 1) + \epsilon(2x_0 x_1 - 2x_0) + \epsilon^2(x_1^2 + 2x_0 x_2 - 2x_1) + O(\epsilon^3) = 0$$

となる。したがって、各 ϵ の係数を零にすることによって

$$x_0 = \pm i, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = \mp \frac{1}{2}i$$

のように $O(1)$ の成分から順に求められて、解は

$$x = \pm i + \epsilon \mp \frac{1}{2}\epsilon^2 + O(\epsilon^3)$$

となる。上の正解の平方根を Taylor 展開すれば明らかのように、ここまでは正解と一致している。このように、ある鍵となるパラメータ（この例では ϵ ）で漸近展開して解を求める方法が摂動法である。

べき乗選択の難しさ: 次の例として、次の代数方程式

$$(x - 1)^2 + \epsilon = 0$$

を対象としてみよう。上の例と同様の漸近展開すると

$$O(1): (x_0 - 1)^2 = 0 \quad \rightarrow \quad x_0 = 1$$

となるが、次のべき乗は

$$O(\epsilon): 2(x_0 - 1)x_1 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \text{不能}$$

となり失敗する。しかし、これは当然だろう。というのも正解は $1 \pm i\sqrt{\epsilon}$ だからだ。正解を知っていれば漸近展開は $\sqrt{\epsilon}$ のべき乗で与えなければならないことは明らかである。つまり

$$x = x_0 + \sqrt{\epsilon}x_1 + \epsilon x_2 + O(\epsilon^{3/2})$$

と置いて、上の方程式に代入すると、 $O(1)$ は上と同じなので $x_0 = 1$ であり、それ以外が

$$O(\sqrt{\epsilon}): 2(x_0 - 1)x_1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 \text{ は不定,}$$

$$O(\epsilon): x_1^2 + 2(x_0 - 1)x_2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = \pm i, \quad x_2 \text{ は不定}$$

となった上で、高次の項をさらに演算すると $x_k = 0$, ($k \geq 2$) を得る。これは正解だ。このように、どのような漸近展開をするか等の工夫が必要ではあるものの、べき乗の係数を求めることによって正解を得る可能性があることがわかる。

スケールの調整 — 特異摂動法: 最後に, 高次項の係数に微小パラメータ ϵ がある場合

$$\epsilon x^2 - 2x + 1 = 0$$

を解いてみよう。この問題(方程式)が持つ特性を支配する最も重要な項は最高次の項だが, ϵ の無視はその重要な項を消してしまうので, 摂動法のプロセスにある種の困難をもたらすのだ。正解を Taylor 展開すると

$$x = \frac{1}{\epsilon} \left(1 \pm \sqrt{1 - \epsilon} \right) = \frac{1}{\epsilon} \left[1 \pm \left\{ 1 - \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{8}\epsilon^2 + \dots \right\} \right]$$

なので, 二つの解は

$$x_+ = \frac{2}{\epsilon} - \frac{1}{2} - \frac{1}{8}\epsilon + \dots, \quad x_- = \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\epsilon + \dots$$

である。したがって, 最初の例と同じように $x = x_0 + \epsilon x_1 + \epsilon^2 x_2 + O(\epsilon^3)$ と置いてしまうと x_+ を求めることができないのは当然である。一応演算してみると

$$(-2x_0 + 1) + \epsilon (x_0^2 - 2x_1) + \dots = 0$$

となるので, $x_0 = \frac{1}{2}, x_1 = \frac{1}{8}$ と求められる。これは x_- に他ならないが, x_+ は求められない。 ϵx^2 が最も重要な項であるにもかかわらず, このような単純な摂動では, それ, つまり最も重要な項が他の項に比べて無視できるくらい小さいと考えてしまったことになり, 失敗したのだろうと考えられる。

そこでスケールの変更が必要になる。例えば, 方程式の第1項 ' ϵx^2 ' と第3項 ' 1 ' が同じくらいの重要なスケールであって, 第2項 ' x ' は無視できるようになると仮定すると, $\epsilon \rightarrow 0$ のとき

$$\epsilon x^2 \sim 1 \quad \rightarrow \quad |x| \sim \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \gg 1$$

となってしまう, x が他の2項に比べて無視できるとした仮定と矛盾する。そこで, 方程式の第1項 ' ϵx^2 ' と第2項 ' x ' が同じくらいの重要なスケールになると仮定すると

$$\epsilon x^2 \sim x \quad \rightarrow \quad |x| \sim \frac{1}{\epsilon} \gg 1$$

となるので, 第3項の ' 1 ' は他の2項に比べて無視できることが確認でき, スケールの仮定と矛盾しないことがわかる。したがって $\epsilon x^2 \sim x$ つまり $x \sim 1/\epsilon$ 程度と考えればよいことになる。結局新しい座標³⁸を

$$X \equiv \epsilon x \tag{9.254}$$

と定義し直(スケールの変更を)して, 元の方程式を書き直すと

$$X^2 - 2X + \epsilon = 0$$

となる。この解を通常の漸近展開で

$$X = X_0 + \epsilon X_1 + \dots$$

とした上で方程式に代入して整理すると, まず $O(1)$ から

$$X_0^2 - 2X_0 = 0 \quad \rightarrow \quad X_0 = 0, 2$$

を得, $O(\epsilon)$ から

$$2X_0 X_1 - 2X_1 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad X_1 = \begin{cases} +1/2 & X_0 = 0 \text{ の場合} \\ -1/2 & X_0 = 2 \text{ の場合} \end{cases}$$

³⁸ これを見て, いわゆる均質化法 [155] を思い浮かべた人は勘がいい。

を得る。これは

$$X = 2 - \frac{\epsilon}{2} + \dots \rightarrow x = \frac{2}{\epsilon} - \frac{1}{2} + \dots \Rightarrow x_+, \quad \text{および} \quad X = 0 + \frac{\epsilon}{2} + \dots \rightarrow x = \frac{1}{2} + \dots \Rightarrow x_-$$

となり、それぞれが二つの正解 x_+ , x_- と一致する。このようなスケールの変更が必要になる摂動法を特異摂動法と呼んでいる。

(4) 摂動法による振り子の運動の検討

振り子運動の非線形微分方程式に戻って、その解を摂動法によって定量評価をするための一例として、初期位置の a が非線形性に直結する重要なパラメータであると考えよう。そこで

$$\tau \equiv \omega t, \quad \Theta(\tau) \equiv \frac{\theta}{a} \quad (9.255a, b)$$

という無次元化をしておく。こうすると、運動方程式と初期条件は

$$\ddot{\Theta} + \frac{1}{a} \sin(a\Theta) = 0, \quad \Theta(0) = 1, \quad \dot{\Theta}(0) = B \equiv \frac{b}{a\omega} \quad (9.256a, b, c)$$

と表すことができる。ただしこの節の上付きドットは τ による微分を表す。摂動法を用い易くするために sine 関数を Taylor 展開し、また簡単のために初速は $B = 0$ とし、解くべき式を

$$\ddot{\Theta} + \Theta = \frac{a^2}{6} \Theta^3 + O(a^4), \quad \Theta(0) = 1, \quad \dot{\Theta}(0) = 0 \quad (9.257a, b, c)$$

としておく。

素朴なアプローチ: まず a の漸近展開で解を表しておこう。ここには a の偶数乗しか存在しないから

$$\Theta(\tau) = \Theta_0 + a^2 \Theta_1 + a^4 \Theta_2 + O(a^6)$$

と置いてもいいだろう。これを微分方程式に代入して a のべき乗で整理すると

$$(\ddot{\Theta}_0 + \Theta_0) + a^2 \left(\ddot{\Theta}_1 + \Theta_1 - \frac{1}{6} \Theta_0^3 \right) + O(a^4) = 0$$

となり、初期条件は

$$\Theta_0 + a^2 \Theta_1 + O(a^4) = 1, \quad \dot{\Theta}_0 + a^2 \dot{\Theta}_1 + O(a^4) = 0$$

である。順にべき乗毎に支配方程式を求めると、 $O(1)$ は

$$\ddot{\Theta}_0 + \Theta_0 = 0, \quad \Theta_0(0) = 1, \quad \dot{\Theta}_0(0) = 0$$

となるので、一般解は $\Theta_0 = A \sin \tau + B \cos \tau$ で、初期条件から $A = 0$, $B = 1$ のように求められるので、 $\Theta_0 = \cos \tau$ が解である。

次のべき乗の $O(a^2)$ の支配方程式を求めると

$$\ddot{\Theta}_1 + \Theta_1 = \frac{1}{6} \Theta_0^3, \quad \Theta_1(0) = 0, \quad \dot{\Theta}_1(0) = 0$$

となる。微分方程式の右辺に、上で求められた Θ_0 を代入すると

$$\frac{1}{6} \Theta_0^3 = \frac{1}{6} \cos^3 \tau = \frac{1}{24} (3 \cos \tau + \cos 3\tau)$$

となるので、一般解は

$$\Theta_1 = A_1 \sin \tau + B_1 \cos \tau - \frac{1}{192} \cos 3\tau + \frac{1}{16} \tau \sin \tau$$

と求められる。これを初期条件に代入すると $A_1 = 0, B_1 = \frac{1}{192}$ になり

$$\Theta_1 = \frac{1}{192} (\cos \tau - \cos 3\tau) + \frac{1}{16} \tau \sin \tau$$

を得る。結局、ここまでのべき乗項で、解は

$$\Theta = \cos \tau + a^2 \left[\frac{1}{192} (\cos \tau - \cos 3\tau) + \frac{1}{16} \tau \sin \tau \right] + O(a^4)$$

と求められたことになる。うまくいっているように見えるが、実は解の a^2 の係数の中には τ に比例した項が存在することから、これは発散解になっていることがわかる。つまり初期位置の a がどんなに小さくても、振り子のような振動解ではなく時間と共に回転角が大きくなるという解しか求められなかったことになり、前節の位相平面上の定性的な検討結果とも矛盾する。すなわち、このアプローチは失敗なのだ。

特異摂動法: 何がまずかったのか。実は、上のアプローチでは振動数が ω の解を求めようとしていた。つまり振動数が a とは無関係の一定値であるとしていた。もしかしたら、そこがまずかったのではないかと、賢い人が考えたのである。そこで、振動数は定数の ω そのものではなく、 a に依存した振動数 $\Omega(a^2)\omega$ になると考えて解を探してみることにしよう。ここに $\Omega(a^2)$ は未知の関数である。そこで

$$s \equiv \Omega(a^2)\omega t = \Omega(a^2)\tau \quad (9.258)$$

という独立変数³⁹を導入し、 τ ではなく s に関する 2π 周期の解を探することにしよう。この変数変換から $\frac{d}{d\tau} \rightarrow \Omega \frac{d}{ds}, \frac{d^2}{d\tau^2} \rightarrow \Omega^2 \frac{d^2}{ds^2}$ とすればいいので、支配方程式 (9.257) は

$$\Omega^2(a^2)\Theta'' + \Theta = \frac{1}{6}a^2\Theta^3 + O(a^4), \quad \Theta(0) = 1, \quad \Theta'(0) = 0$$

となる。ここのプライムは s による微分を表す。そこで漸近展開を

$$\Theta = \Theta_0(s) + a^2\Theta_1(s) + O(a^4), \quad \Omega(a^2) = \Omega_0 + a^2\Omega_1 + O(a^4) \quad (9.259a, b)$$

のように置くことにする。 Ω も展開していることに注意する必要がある。

これから

$$\Omega^2 = \Omega_0^2 + a^2 2\Omega_0\Omega_1 + O(a^4)$$

であることに留意して、上の方程式に代入して整理する。まず $O(1)$ の項を集めると

$$\Omega_0^2\Theta_0'' + \Theta_0 = 0, \quad \Theta_0(0) = 1, \quad \Theta_0'(0) = 0$$

を得る。したがって、一般解を求めて初期条件に代入すると、結局解は

$$\Theta_0 = \cos\left(\frac{s}{\Omega_0}\right)$$

³⁹ あるいは後述のように、座標 t のスケールを $s = \omega \bar{t}, \bar{t} \equiv \Omega(a^2)t$ のように変更したと考えてもいい。こう考えた方が、前の節で代数方程式に対して導入した特異摂動法のスケールの変更式 (9.254) と整合する。

と求められる。ここでは周期解、特に s については 2π 周期の解を探しているので $1/\Omega_0$ は自然数でなければならない。特に微小振動解は $\Omega_0 = 1$ だから、ここではそれが答だとする。したがって

$$\Theta_0 = \cos s, \quad \Omega_0 = 1 \quad (9.260a, b)$$

という解を得る。

次に、素朴なアプローチでは失敗した $O(a^2)$ の項を検討しよう。このべき乗の項を集めると

$$\Omega_0^2 \Theta_1'' + \Theta_1 = \frac{1}{6} \Theta_0^3 - 2\Omega_0 \Omega_1 \Theta_0''$$

という微分方程式を得る。初期条件を陽な形で示すのは難しいの割愛する。この式の両辺に $O(1)$ の計算で得た結果の式 (9.260) を代入すると、結局

$$\Theta_1'' + \Theta_1 = \left(\frac{1}{8} + 2\Omega_1\right) \cos s + \frac{1}{24} \cos 3s$$

という微分方程式になる。素朴なアプローチで発散解を発生させた非斉次項は $\cos s$ の項である。これが存在する限り発散解が特解として存在することになる。つまり、この項が無くなれば周期解を得ることができる。上式の $\cos s$ の項を消すためには

$$\Omega_1 = -\frac{1}{16}$$

であればいいことになる。そのとき一般解は

$$\Theta_1 = A_1 \sin s + B_1 \cos s - \frac{1}{192} \cos 3s$$

と求められる。

ここまでの解を集めると

$$\theta(t) = a \cos \left[\left\{ 1 - \frac{1}{16} a^2 + O(a^4) \right\} \omega t \right] + O(a^3)$$

と表すことができる。これは周期解であるが、振動数も初期位置 a に依存した値になっている。この解を、例えば

$$\theta(t) = a \cos \bar{\omega} t + O(a^3)$$

と置くと、それは、微小振動（線形系近似）のときの振動数が若干改善されて

$$\bar{\omega} \equiv \left\{ 1 - \frac{1}{16} a^2 + O(a^4) \right\} \omega \quad (9.261)$$

としたことになる。これを **Poincaré** の周波数シフトと呼ぶ。あるいは

$$\theta(t) = a \cos \omega \bar{t} + O(a^3) \quad (9.262)$$

と解釈したとすると、それは、時刻という独立変数（座標）を初期位置によって若干伸び縮みさせたもの、つまりスケール変更したものが

$$\bar{t} \equiv \Omega(a^2) t = \left\{ 1 - \frac{1}{16} a^2 + O(a^4) \right\} t$$

のように定義されたと考えてもいい。こういった考え方を **method of strained coordinates** と呼ぶことがある。この考え方はマイクロ・マクロのマルチスケール解析法の一つである均質化法 [155] の根拠にもなっている。この振り子の問題では ‘method of strained coordinates’ と「Poincaré の周波数シフト」による解同士が一致するが、一般には必ずしもそうではないらしい。もうこのあたりで摂動法の難しさが現れてくる。

(5) 静的安定

振り子が初速零で初期位置 $\theta = \pm\pi$ から運動を始めると、図 9.65 の太線のような位相平面上の軌跡を描く。ちょうど逆立ちした状態 $\theta = \pm\pi$ は分岐点のようなもので、その状態で逆転して元の方向に戻る運動の可能性と、そのまま同じ方向に回転し続けようとする運動の可能性の二つが存在する。位相平面上の軌跡は、 $\theta = \pm\pi$ で角が発生しているのは興味深い。いずれにしても逆立ち状態は不安定である。しかし、その状態は式 (9.251) で加速度が零の場合の式から

$$\omega^2 \sin \theta = 0 \quad \rightarrow \quad \theta = n\pi, \quad (n = 0, \pm 1, \dots)$$

が解であることから、明らかに静的なつり合い状態である。

そこで、静的なつり合い状態が安定か不安定かの判断をするために動的な挙動を利用することを考えてみよう。この手法は剛体バネモデルの座屈を調べた第 6.2.1 (3) 節でも用いた。代表的な静的つり合い状態として $\theta = \theta_0 = 0$ と $\theta = \theta_0 = \pi$ の二つを対象とする。このつり合い状態からの微小な乱れを $\Delta\theta$ と記すことにすると $\theta = \theta_0 + \Delta\theta$, $\sin \theta = \sin(\theta_0 + \Delta\theta) \approx \Delta\theta \cos \theta_0$ としていいから、これを運動方程式 (9.251) に代入すれば、 $\Delta\theta$ について線形化できて

$$\Delta\ddot{\theta} + \omega^2 \cos \theta_0 \Delta\theta = 0$$

を得る。したがって、ここで選んだ二つの静的つり合い状態は、それぞれ

$$\text{正立: } \theta_0 = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta\ddot{\theta} + \omega^2 \Delta\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \mathcal{L} \{ \sin(\omega t), \cos(\omega t) \} \quad (\text{振動解は安定解}),$$

$$\text{倒立: } \theta_0 = \pi \quad \rightarrow \quad \Delta\ddot{\theta} - \omega^2 \Delta\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \Delta\theta = \mathcal{L} \{ \sinh(\omega t), \cosh(\omega t) \} \quad (\text{発散解は不安定解})$$

のような微小な乱れの運動傾向が求められる。つまり正立の $\theta_0 = 0$ に対する乱れは周期解であり、静的つり合い位置を中心とした振り子運動をするので、もし減衰が存在すればそのうちに止まることを示している。つまり安定な状態だと判定できる。一方逆立ち状態の解は双曲線関数あるいは指数関数であり、発散解である。したがって逆立ち状態は不安定だと判定できるのだ。

9.5.2 リミットサイクル

粘性減衰振動モデルで減衰定数が負の場合には発散解を得る。例えば風荷重を受ける橋梁等でこのような動的不安定が発生すると考えられている。式 (9.27) で示したように電気回路も粘性減衰振動モデルで表すことができるが、その電気回路にも似たような発散解の例がある。それは **van der Pol 振動子** と呼ばれるもので、ある $\epsilon > 0$ に対して

$$\ddot{u}(t) + u(t) = \epsilon \{ 1 - u^2(t) \} \dot{u}(t), \quad u(0) = A, \quad \dot{u}(0) = 0 \quad (9.263a, b, c)$$

という支配方程式でモデル化されている。ちょうど粘性係数 (電気抵抗) c が変位 (電荷) u に非線形的に依存して $c \equiv \epsilon \{ u^2(t) - 1 \}$ になるモデルだ。容易に予想できるように、 $u \gg 1$ であれば正の減衰であり、その逆なら負減衰なので発散しようとする。だから振幅が大きくなろうとすると減衰が働き、逆に小さくなろうとすると発散しようとする。このことから、このモデルの発散解と減衰解はある周期解に収束するのではないかと

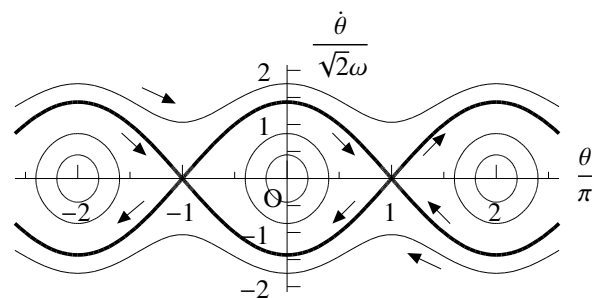


図 9.65 逆立ち振り子の運動

予想される。その収束する先の周期解をリミットサイクルと呼んでいる。この問題も摂動法で解いてみるが、リミットサイクルを求める程度なら素朴なアプローチで十分なことがわかっている。

まず解を

$$u(t) = u_0(t) + \epsilon u_1(t) + \epsilon^2 u_2(t) + O(\epsilon^3)$$

と置き、運動方程式 (9.263a) に代入して整理すると

$$[\ddot{u}_0 + u_0] + \epsilon [\ddot{u}_1 + u_1 - (1 - u_0^2) \dot{u}_0] + O(\epsilon^2) = 0$$

となり、初期条件式 (9.263b) (9.263c) が

$$u_0(0) + \epsilon u_1(0) + O(\epsilon^2) = A, \quad \dot{u}_0(0) + \epsilon \dot{u}_1(0) + O(\epsilon^2) = 0$$

と表される。これより、まず $O(1)$ の支配方程式は

$$\ddot{u}_0 + u_0 = 0, \quad u_0(0) = A, \quad \dot{u}_0(0) = 0$$

となるので、解は

$$u_0(t) = A \cos t$$

と求められる。次に $O(\epsilon)$ の支配方程式は

$$\ddot{u}_1 + u_1 = (1 - u_0^2) \dot{u}_0, \quad u_1(0) = 0, \quad \dot{u}_1(0) = 0$$

となる。これに上の u_0 を代入すると、 u_1 の特解 $(u_1)_p$ として

$$(u_1)_p(t) = \frac{1}{2} A \left(1 - \frac{1}{4} A^2 \right) t \cos t - \frac{1}{32} A^3 \sin 3t$$

を得る。右辺の第1項は前節の振り子の問題と同じく発散解である。今求めようとしているのは、リミットサイクルという周期解なので、この項は零になる必要がある。したがって $A \neq 0$ だから

$$1 - \frac{1}{4} A^2 \rightarrow A = \pm 2$$

でなければならない。つまりリミットサイクルは初期条件が $A = \pm 2$ の振動解になる。したがって一般解は

$$u_1 = \mp \frac{1}{4} \sin 3t + B \sin t + C \cos t$$

と求められ、初期条件から $C = 0, B = \pm 3/4$ となるので

$$u_1 = \pm \frac{1}{4} (3 \sin t - \sin 3t)$$

を得る。以上までの摂動解の範囲なら

$$u = \pm 2 \cos t \pm \frac{\epsilon}{4} (3 \sin t - \sin 3t) + O(\epsilon^2), \quad \dot{u} = \mp 2 \sin t \pm \frac{3\epsilon}{4} (\cos t - \cos 3t) + O(\epsilon^2)$$

と求められる。 t を媒介変数とすれば位相平面上のリミットサイクルを描くことができ、図 9.66 にはそれを太い実曲線で示した。この図は $O(\epsilon)$ までの上式から求められる u と \dot{u} の関係を描いたものである。リミットサイクルは半径1の円に近いのではないかと想像したが、素人の浅はかさだったようだ。これに対し破線と一点鎖線は、減衰定数を $\beta := -\epsilon \{1 - u^2(t)\}$ と置いた上で、中央差分で数値的に求めたものである。破線は $A = 1$ の初期条件から、一点鎖線は $A = 4$ の初期条件から始めたものである。実線は ϵ までの摂動解なので数値解のたどり着く先とは若干のずれがある。しかし発散解も減衰解もある周期解に収束しようとしていることが明らかである。数値解析によって非線形解析も容易にできることも楽しいでしょ。

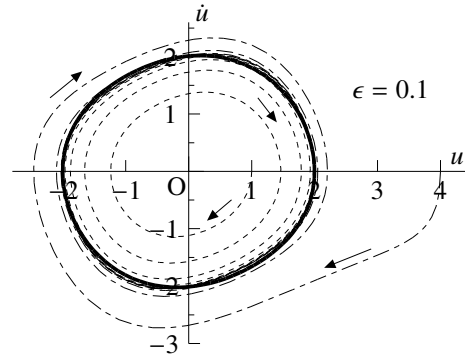


図 9.66 リミットサイクル

9.5.3 係数励振

(1) 変調振り子

図 9.67 の左側には、長さ ℓ の振り子の支点が上下に $v_f(t)$ で強制的に変位させられ、それに伴って左右に振動している状態を描いてある。しかし、これはおかしくないか。本当に左右に振動するだろうか。手で実験するのはかなり難しいが、乱れが生じないようにそおーっとゆっくり振り子の支点を上下させても、それがその運動の直角方向に振り子運動を始めるとは予想し難い。右側の図には、同じ振り子が天井の穴を通して設置された上で、支点を上下に $v_f(t)$ で強制的に変位させたため、振り子そのものの長さが元の長さではなく $\ell - v_f(t)$ になりながら振動している状態を描いた。このような振り子を変調振り子と呼んでいる。社会基盤構造の場合、例えば吊橋や斜張橋のケーブルがその張られている面内で上下左右に振動をしているとき、場合によってはその面外に振動を始める現象 [143] がこの変調振り子と同じものだと考えられている。

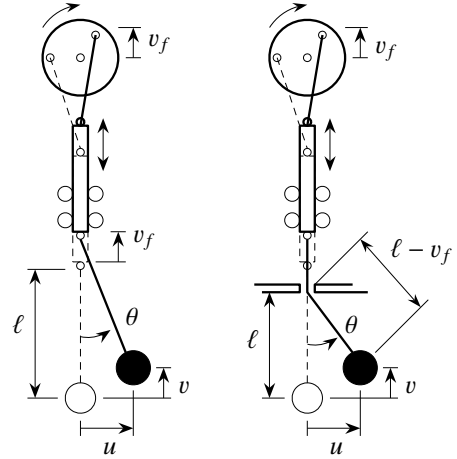


図 9.67 変調振り子

まず左側の図のような運動の場合、質点の変位は

$$u = \ell \sin \theta, \quad v = \ell (1 - \cos \theta) + v_f$$

だから加速度は

$$\ddot{u} = \ell \ddot{\theta} \cos \theta - \ell (\dot{\theta})^2 \sin \theta, \quad \ddot{v} = \ell \ddot{\theta} \sin \theta + \ell (\dot{\theta})^2 \cos \theta + \ddot{v}_f \quad (a)$$

である。一方、糸の張力を T とすると左右上下方向の運動方程式はそれぞれ

$$-T \sin \theta = m \ddot{u}, \quad T \cos \theta - mg = m \ddot{v}$$

となるので、 T を消去すれば

$$\ddot{u} \cos \theta + \ddot{v} \sin \theta + g \sin \theta = 0 \quad (b)$$

と表される。この式 (b) に式 (a) を代入して整理すると

$$\ell \ddot{\theta} + (g + \ddot{v}_f) \sin \theta = 0$$

のように運動方程式が求められる。ここで、支点の強制変位が cosine 関数で与えられて

$$v_f = -v^* \cos \omega t, \quad \omega_0 \equiv \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad (9.264a, b)$$

のように記号を定義しておく、上式は

$$\ddot{\theta} + \left\{ \omega_0^2 + \frac{v^*}{\ell} \omega^2 \cos \omega t \right\} \sin \theta = 0$$

となる。もし微小な振動を考えることにするならば、sine 関数を近似して

$$\ddot{\theta} + \left\{ \omega_0^2 + \frac{v^*}{\ell} \omega^2 \cos \omega t \right\} \theta = 0 \quad (9.265)$$

を得る。これは **Mathieu** 方程式と呼ばれている。

図 9.67 の右側の図に示した振り子の場合

$$u = (\ell - v_f) \sin \theta, \quad v = \ell - (\ell - v_f) \cos \theta$$

となるので、加速度は

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= \{\ddot{\theta} (\ell - v_f) - 2\dot{\theta} \dot{v}_f\} \cos \theta - \left\{ \ddot{v}_f + (\dot{\theta})^2 (\ell - v_f) \right\} \sin \theta, \\ \ddot{v} &= \{\ddot{\theta} (\ell - v_f) - 2\dot{\theta} \dot{v}_f\} \sin \theta + \left\{ \ddot{v}_f + (\dot{\theta})^2 (\ell - v_f) \right\} \cos \theta \end{aligned}$$

と表される。運動方程式は式 (b) と同じなので、それに代入して整理すると

$$\ddot{\theta} (\ell - v_f) - 2\dot{\theta} \dot{v}_f + g \sin \theta = 0$$

となる。ここで $w \equiv (\ell - v_f) \theta$ と定義して上式に代入すると

$$\ddot{w} + \frac{\ddot{v}_f}{\ell - v_f} w + g \sin \left(\frac{w}{\ell - v_f} \right) = 0$$

と表すことができる。さらに、変位が小さければ近似的に

$$|\theta| \ll 1, \quad \left| \frac{v_f}{\ell} \right| \ll 1$$

が成立するので、前の例と同様に式 (9.264a) で強制変位が与えられているとすると、上式は

$$\ddot{w} + \left(\omega_0^2 + \frac{v_f^*}{\ell} \omega^2 \cos \omega t \right) w = 0$$

となる。これも式 (9.265) と同じ Mathieu 方程式である。ここで変数変換をして

$$\tau \equiv \frac{1}{2} \omega t \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} = \frac{1}{2} \omega \frac{d}{d\tau}, \quad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{1}{4} \omega^2 \frac{d^2}{d\tau^2}$$

として、 $w(t) \rightarrow u(\tau)$ と置き換えると、上式は

$$\ddot{u} + \left(\frac{4\omega_0^2}{\omega^2} + \frac{v_f^*}{\ell} \cos 2\tau \right) u = 0$$

と変形できる。この上付きドットは τ による微分である。そこで

$$\delta \equiv \frac{4\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \epsilon \equiv \frac{v_f^*}{\ell} \tag{9.266a, b}$$

と定義すると、最終的に Mathieu 方程式を

$$\ddot{u}(\tau) + \{\delta + \epsilon \cos 2\tau\} u(\tau) = 0 \tag{9.267}$$

と表すことができる。これを解こう。

(2) 摂動法 — 素朴なアプローチ

最初は単純な摂動法を用いてみる。

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2) \tag{9.268}$$

と置いて、上式 (9.267) に代入して整理すると

$$[\ddot{u}_0 + \delta u_0] + \epsilon [\ddot{u}_1 + \delta u_1 + u_0 \cos 2\tau] + O(\epsilon^2) = 0$$

となる。これから $O(1)$ の解は

$$u_0 = \sin \sqrt{\delta}\tau, \quad \cos \sqrt{\delta}\tau$$

と求められる。ただし、 2π 周期の解でなければならないので

$$\sqrt{\delta} = n \quad \rightarrow \quad \delta = n^2, \quad (n = 0, 1, \dots)$$

と求められる。

次に $O(\epsilon)$ の方程式は

$$\ddot{u}_1 + n^2 u_1 = -u_0 \cos 2\tau$$

と求められる。まず $n = 0$ の場合には

$$u_0 = 1, \quad \ddot{u}_1 = -\cos 2\tau \quad \rightarrow \quad u_1 \sim \frac{1}{4} \cos 2\tau$$

のように周期解が求められるので、特に問題は生じない。しかし $n = 1$ の場合の運動方程式は二つの u_0 に対してそれぞれ

$$\ddot{u}_1 + u_1 = \frac{1}{2} (\sin \tau - \sin 3\tau) \quad \text{あるいは} \quad = -\frac{1}{2} (\cos \tau + \cos 3\tau)$$

となってしまうので、右辺の $\sin \tau, \cos \tau$ の項に対応した特解の $\tau \sin \tau, \tau \cos \tau$ を含むので発散解にしかならない。つまりこの運動は不安定である可能性があり、確かに実験すると不安定な運動になる。

(3) 特異摂動法

そこで特異摂動法を用いて周期解を探してみる。そのために、式(9.268)の摂動に加えて、 δ も ϵ に依存するものとして

$$\delta = \delta_0 + \epsilon \delta_1 + O(\epsilon^2) \tag{9.269}$$

という漸近展開をしておく。これを方程式(9.267)に代入して整理すると

$$[\ddot{u}_0 + \delta_0 u_0] + \epsilon [\ddot{u}_1 + \delta_0 u_1 + (\delta_1 + \cos 2\tau) u_0] + \epsilon^2 [\ddot{u}_2 + \delta_0 u_2 + \delta_2 u_0 + (\delta_1 + \cos 2\tau) u_1] + O(\epsilon^3) = 0$$

となる。これから $O(1)$ の解は素朴なアプローチの解と同じで

$$\delta_0 = n^2, \quad u_0 = \sin n\tau, \quad \cos n\tau$$

と求められる。

では $n = 0, u_0 = 1$ の場合をまず考えてみる。 $O(\epsilon)$ の方程式は

$$\ddot{u}_1 = -\delta_1 - \cos 2\tau$$

となるので、解は

$$u_1 = -\delta_1 \left(\frac{1}{2} \tau^2 + c_1 \tau + c_2 \right) + \frac{1}{4} \cos 2\tau + c_0$$

と求められる。周期解になるためには $\delta_1 = 0$ でなければならないので、解は

$$u_1 = \frac{1}{4} \cos 2\tau + c_0$$

と求められる。次に $O(\epsilon^2)$ の運動方程式は

$$\ddot{u}_2 = -\delta_2 - c_0 \cos 2\tau - \frac{1}{4} \cos^2 2\tau = -\delta_2 - \frac{1}{8} (1 + \cos 4\tau) - c_0 \cos 2\tau$$

となるので、再度発散解にならない条件から $\delta_2 = -1/8$ と求められる。ここまでの漸近展開では δ が

$$\delta = -\frac{1}{8}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (c)$$

であれば周期解になることがわかる。

次に $n = 1$ の場合を考えよう。 $u_0 = \sin \tau$, $\delta_0 = 1$ の場合の $O(\epsilon)$ の運動方程式は

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -(\delta_1 + \cos 2\tau) \sin \tau = \left(\frac{1}{2} - \delta_1\right) \sin \tau - \frac{1}{2} \sin 3\tau$$

となるので、周期解を得るには

$$\delta_1 = \frac{1}{2}, \quad u_1 = \frac{1}{16} \sin 3\tau$$

でいいこと（斉次解はあっても無くても一緒）になる。次に $O(\epsilon^2)$ の方程式が

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -\delta_2 \sin \tau - \frac{1}{16} \left(\frac{1}{2} + \cos 2\tau\right) \sin 3\tau = -\left(\delta_2 + \frac{1}{32}\right) \sin \tau - \frac{1}{32} (\sin 3\tau - \sin 5\tau)$$

となる。したがって、周期解を得るには $\delta_2 = -1/32$ であればいいから、結局、ここまでの漸近展開では δ が

$$\delta = 1 + \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{32}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (d)$$

であれば周期解になる。

同様の演算を $n = 1$ で $u_0 = \cos \tau$, $\delta_0 = 1$ の場合で実行する。 $O(\epsilon)$ の運動方程式は

$$\ddot{u}_1 + u_1 = -(\delta_1 + \cos 2\tau) \cos \tau = -\left(\frac{1}{2} + \delta_1\right) \cos \tau - \frac{1}{2} \cos 3\tau$$

となるので、周期解を得るには

$$\delta_1 = -\frac{1}{2}, \quad u_1 = \frac{1}{16} \cos 3\tau$$

でいいことになる。次に $O(\epsilon^2)$ の方程式が

$$\ddot{u}_2 + u_2 = -\delta_2 \cos \tau - \frac{1}{16} \left(\cos 2\tau - \frac{1}{2}\right) \cos 3\tau = -\left(\delta_2 + \frac{1}{32}\right) \cos \tau + \frac{1}{32} (4 \cos 3\tau - \cos 5\tau)$$

となるので、周期解を得るには $\delta_2 = -1/32$ であればいい。結局、ここまでの漸近展開では δ が

$$\delta = 1 - \frac{1}{2}\epsilon - \frac{1}{32}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (e)$$

であれば周期解になる。

同様の演算を $n = 2$, $u_0 = \sin 2\tau$, $u_0 = \cos 2\tau$ に対して行くと、結局 $u_0 = \sin 2\tau$ に対しては

$$u_1 = \frac{1}{24} \sin 4\tau, \quad \delta_1 = 0, \quad \delta_2 = -\frac{1}{48} \rightarrow \delta = 4 - \frac{1}{48}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (f)$$

と求められる。また $u_0 = \sin 2\tau$ に対しては

$$u_1 = -\frac{1}{8} + \frac{1}{24} \cos 4\tau, \quad \delta_1 = 0, \quad \delta_2 = \frac{5}{48} \rightarrow \delta = 4 + \frac{5}{48}\epsilon^2 + O(\epsilon^3) \quad (g)$$

でないといけないことがわかる。

以上の式 (c)~(g) の関係を図 9.68 の左側に実曲線で描いた。この線上の解は振動解であることがわかったのだ。そこで $\epsilon = 0.1$ として、式 (d) (e) で挟まれたくさびの中に相当する $\delta = 1$ の場合（図中の ⊙）と、くさびの外に相当する $\delta = 0.8$ の場合（図中の ⊕）について、中央差分法を用いて Mathieu 方程式を解いた解が図 9.68 の右側の図である。くさびの外の設定の解（細い実曲線）は振動解を示しているので安定な解である。くさび

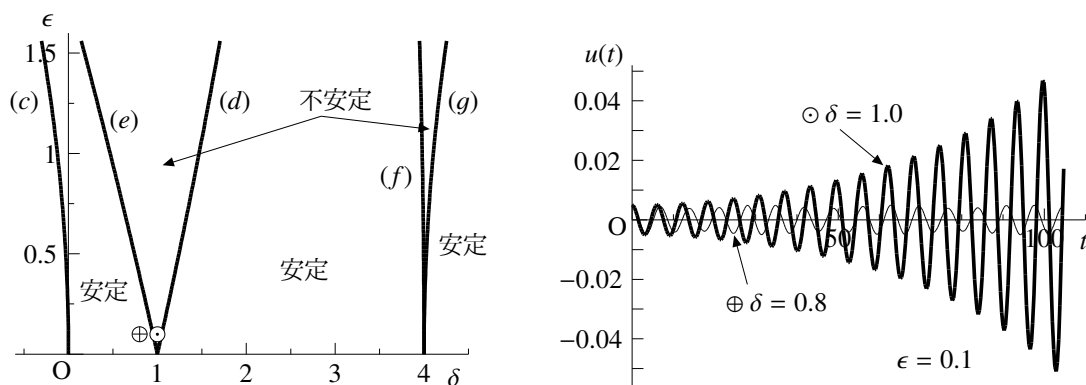


図 9.68 係数励振動 — 変調振り子の動的不安定

の中の設定（太い実曲線）の場合には解はかなり速く振幅が大きくなり、発散解であることを示唆している。以上から図 9.68 の左側の図に示したように、動的応答が安定解になる $\epsilon - \delta$ の組み合わせと、不安定な発散解である場合が存在する。ここでは著者の能力の関係で数値的に安定性を確認したが、数学的には Floquet の定理を用いて安定領域を決定することができる。実際には γ も零の周辺で摂動させ

$$\phi = \phi_0 + \epsilon \phi_1 + O(\epsilon^2), \quad \delta = \delta_0 + \epsilon \delta_1 + O(\epsilon^2), \quad \gamma = 0 + \epsilon \gamma_1 + O(\epsilon^2)$$

と置いて Mathieu 方程式を解く。例えば $\delta_0 = 1$ の場合、くさびの中の設定では γ が実数になり発散解であることを意味し、くさびの上では $\gamma_1 = 0$ なので周期解を意味し、くさびの外の設定では γ は純虚数になって、若干の周波数シフトを伴った振動解になることを示すことができるようだ。

Floquet Theorem: 周期 T の係数を持つ線形常微分方程式の解は

$$u(t) = \exp(\gamma t) \phi(t)$$

で表される。ここに ϕ は周期が T で、 γ は定数で実数とは限らない。 $\Re(\gamma)$ の符号で、解が発散解か減衰解かの判断ができる。☐

この動的不安定現象を係数励振と呼ぶが、実はこれはブランコがこげる原理なのである。図 9.67 の右側の変調振り子の見方を変えると、振り子の重りの重心が上下運動したときの運動である。つまり、ブランコに乗った幼稚園児が足を屈伸してその重心を上下させることによってブランコが揺れ始めるのだ。幼稚園児が体で Mathieu 方程式を解くことができるというのは興味深い。というのも、その園児の大半が大学生になると線形の常微分方程式も解けなくなるのだから。呵呵。この現象には、1980 年代に Northwestern 大学の Technological Institute のオープンキャンパスのとき、図 9.67 の左側バージョンの模型で初めて接した。そのときのオープンキャンパスでは箱庭地盤の液状化模型にも感激⁴⁰した。この二つに類似した模型は東北大学の菅原紘一さん（技術職員）に作ってもらって、何回かオープンキャンパス等でも見せることができた。液状化模型はそのあとも地盤工学研究室で改良されて今でも活躍している。



写真 9.1 ブランコ

⁴⁰ 模型で液状化が起きた瞬間、1990 年頃には数名の学生がオォーッくらい声を出してくれたが、2000 年頃以降はそんなことも無くなった。一方、ブランコの原理が係数励振だという説には TAINsbbms (p.iv) の電子掲示板で数名の教員から反論が出たため、緊急オフ会を開催してこの模型をお見せしたが、あまり強い賛同は得られなかった。

9.5.4 Duffing 振動子の強制振動

(1) 非線形弾性体の振動

社会基盤構造で考慮すべき材料非線形性の代表で重要なものは塑性である。しかし除荷と載荷の変形経路が異なること等があるので、解析的に動的問題を解くのは困難なことが多く、数値解析に頼らざるを得ないのが現実だ。ここでは非線形的な材料特性の具体例として、もう少し簡単な非線形弾性体を対象としておこう。図 9.69 に示したように、例えばバネの抵抗力 f がバネの伸び u との間に

$$f = \alpha^2 u + \epsilon \beta u^3, \quad 0 < \epsilon \ll 1 \quad (9.270)$$

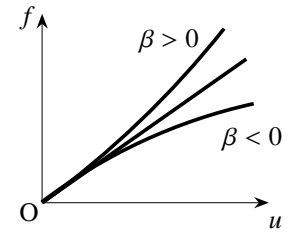


図 9.69 非線形弾性体

のような法則が成立する場合を考えよう。 $\alpha^2 > 0$ が線形バネの弾性係数であり、 β が非線形性を代表する弾性係数で、正の場合は硬化材料であり、負の場合は軟化材料のモデルに相当する。 ϵ はその非線形性の程度を代表している。

このような抵抗則の線形バネに $q \cos pt$ の外力が作用した場合の共振点付近の振動を解析したい。したがって対応する運動方程式は

$$\ddot{u}(t) + \alpha^2 u(t) + \epsilon \beta u^3(t) = q \cos pt \quad (9.271)$$

と表される。初期条件は零初期条件としておく。このような振動モデルを **Duffing** の振動子と呼んでいる。この問題も摂動法を用いて解いてみよう。

$$u = u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2)$$

と置き、式 (9.271) に代入して整理すると

$$\left[\ddot{u}_0 + \alpha^2 u_0 - q \cos pt \right] + \epsilon \left[\ddot{u}_1 + \alpha^2 u_1 - \beta u_0^3 \right] + O(\epsilon^2) = 0$$

となる。 $O(1)$ の問題では 1 自由度系の強制振動の特解と同じく

$$u_0 = \frac{q}{\alpha^2 - p^2} \cos pt$$

が特解になる。上述のようにここではこの分母が非常に小さい場合、つまり共振点付近の非線形応答を求めたい。しかし、このまま続けて $O(\epsilon)$ の運動方程式に代入したとしても、分母は $(\alpha^2 - p^2)$ のべき乗の乗数が大きくなるだけで、さらに問題が重大になるだけである。つまり線形系の共振曲線の特異性が強くなるだけだが、本当だろうか。

(2) スケールの変更

そこで外力レベルを小さくすれば共振点付近の挙動が求められるかもしれないと考え、当面は

$$q = \epsilon q_0 \quad (a)$$

と置いた上で、時刻を外力周波数で無次元化して

$$\tau \equiv pt \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt} = p \frac{d}{d\tau}$$

と定義する。以下、上付きドットはこの τ による微分を表す。上の運動方程式 (9.271) を書き直すと

$$p^2 \ddot{u} + \alpha^2 u + \epsilon \beta u^3 = \epsilon q_0 \cos \tau$$

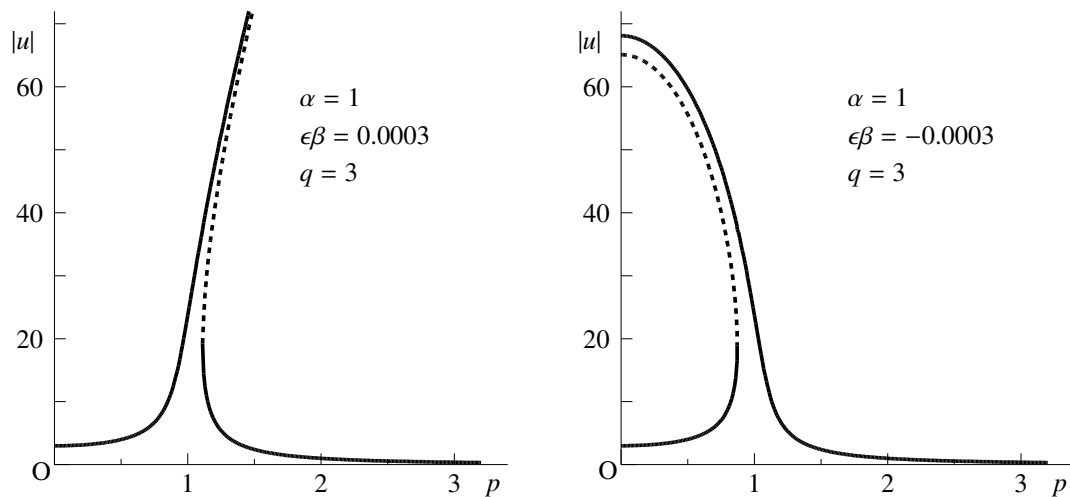


図 9.70 Duffing 振動子 — 硬化材料と軟化材料の共振曲線

となる。そこで p が共振点 α に近い場合を対象とするので p も摂動展開して

$$p = \alpha + \epsilon p_1 + O(\epsilon^2), \quad u = u_0 + \epsilon u_1 + O(\epsilon^2)$$

と置くことにすると p^2 は

$$p^2 = \alpha^2 + 2\alpha p_1 \epsilon + O(\epsilon^2) \rightarrow 2\alpha p_1 \approx \frac{p^2 - \alpha^2}{\epsilon} \quad (b)$$

と表される。この展開を運動方程式に代入すると、まず $O(1)$ の方程式は

$$\alpha^2 \ddot{u}_0 + \alpha^2 u_0 = 0$$

となるので、一般解は

$$u_0 = c_1 \sin \tau + c_2 \cos \tau$$

でいい。

次に $O(\epsilon)$ の運動方程式は

$$\alpha^2 (\ddot{u}_1 + u_1) = -2\alpha p_1 \ddot{u}_0 - \beta u_0^3 + q_0 \cos \tau$$

となる。これに上の u_0 を代入して整理すると、右辺には問題を発生させる $\sin \tau, \cos \tau$ の他に、 $\sin 3\tau, \cos 3\tau$ の項が存在する。周期解を得るために前二者には無くなって欲しいわけだ。そこでその二つの項を集めると

$$\left[2\alpha p_1 c_1 - \frac{3}{4}\beta c_1 (c_1^2 + c_2^2) \right] \sin \tau + \left[2\alpha p_1 c_2 - \frac{3}{4}\beta c_2 (c_1^2 + c_2^2) + q_0 \right] \cos \tau$$

と求められる。この各係数がいずれも零になって

$$c_1 \left\{ 2\alpha p_1 - \frac{3}{4}\beta (c_1^2 + c_2^2) \right\} = 0, \quad c_2 \left\{ 2\alpha p_1 - \frac{3}{4}\beta (c_1^2 + c_2^2) \right\} + q_0 = 0$$

が成立すれば周期解を得ることができる。この第1式の括弧が零であれば、第2式から $q_0 = 0$ という意味の無い解しか求められないので、結局第1式から $c_1 = 0$ でなければならない。したがって、第2式に代入して

$$2\alpha p_1 c_2 - \frac{3}{4}\beta c_2^3 + q_0 = 0$$

という関係が成立することになる。式(a)の q_0 の定義と式(b)の摂動展開の表現をそれぞれ第3, 1項に代入すると結局

$$\frac{p^2 - \alpha^2}{\epsilon} c_2 - \frac{3}{4}\beta c_2^3 + \frac{q}{\epsilon} = 0$$

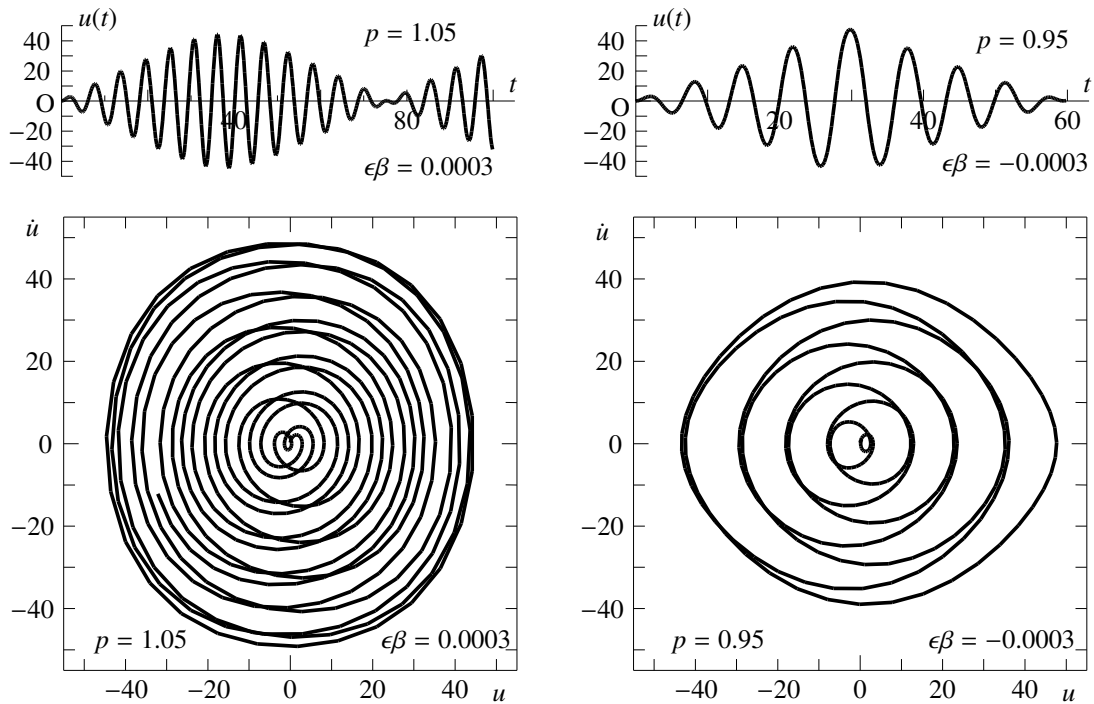


図 9.71 Duffing 振動子 — 硬化の場合と軟化の場合の例

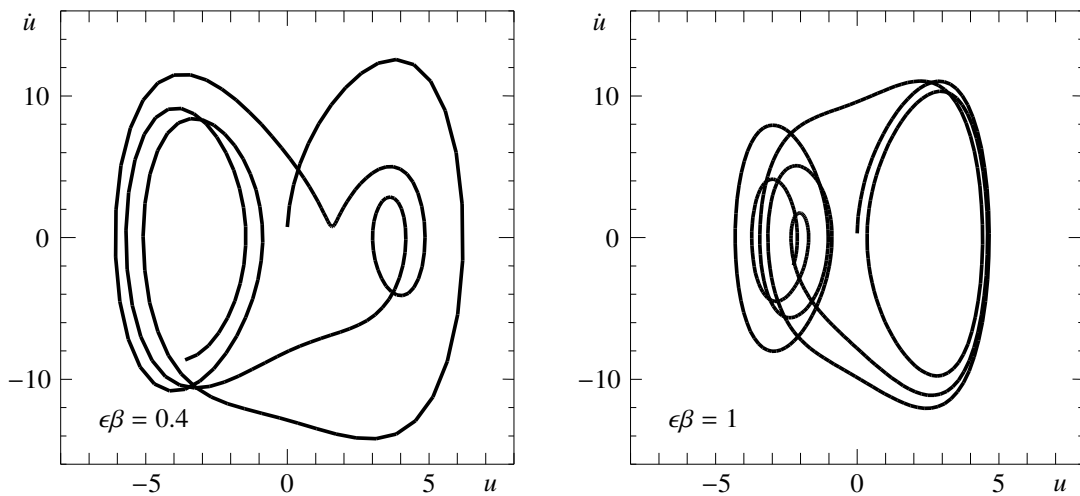


図 9.72 Duffing 振動子 — ちょっと面白い位相平面の軌跡 (時系列応答は単純だが)

を得るので、非線形材料パラメータ ($\epsilon\beta$) を含んだ振幅 c_2 を求める式が

$$\frac{3}{4} (\epsilon\beta) c_2^3 + (\alpha^2 - p^2) c_2 - q = 0$$

のように求め⁴¹られる。図 9.70 の縦軸には $|c_2|$ つまり $|u|$ をとり、非線形系の場合の共振曲線を描いた。パラメータは $\alpha = 1, q = 3$ とした上で、硬化の場合は $\epsilon\beta = 0.0003$ とした結果であり、軟化の場合は $\epsilon\beta = -0.0003$ とした結果である。 $p \simeq \alpha = 1$ 付近でも有界の振幅を得る等、線形系の共振曲線とは異なる特徴が明らかである。特に、破線で示した振幅の振動は不安定であり、現実には生じ得ない。したがって、共振点付近の動的挙動は複雑なものになることが予想される。

そこで、再度中央差分を用いた数値解析手法で時系列挙動を求めてみた。図 9.71 は $\alpha = 1, q = 3$ として、硬

⁴¹ 実は 3 次の項を右辺に移項して $u := A \cos pt$ を代入した逐次代入法 [130] から同じ式を得ることができる。

化の場合は $p = 1.05$, $\epsilon\beta = 0.0003$ とした結果であり, 軟化の場合は $p = 0.95$, $\epsilon\beta = -0.0003$ とした結果である。それぞれの図の下には位相平面上の挙動も示してある。時系列応答の振幅は確かに大きい, その挙動そのものはそれほど複雑ではなかった。ただ位相平面上の軌跡は面白い。もう少し複雑な挙動を探すためにパラメータの設定を種々変更してみた中から, 一例として図 9.72 には $\epsilon\beta$ をもう少し大きくした場合の結果を示した。例では $\alpha = 1$, $p = 1$, $q = 30$ としている。この挙動は複雑に見えるが, 時系列応答はさほど変わったものにはならなかった。このような位相平面を用いたアプローチは動的不安定現象にはよく用いられているようだ。ちょっと変わったところでは, 心理学の分野にも力学モデルとして適用しているという情報をインターネットで見たことがある。

(3) 摂動法は難しい

特に Duffing の振動子の場合には ϵ によるスケールの変更を随所で用いている。これは摂動法の使い方がとても難しいことを示唆している。例えば 1 自由度系の線形の粘性減衰自由振動の問題に戻ろう。減衰定数に相当するパラメータを ϵ とすると, 運動方程式は

$$\ddot{u} + u = -\epsilon \dot{u} \quad (9.272)$$

となる。初期条件を

$$u(0) = 1, \quad \dot{u}(0) = 0$$

として, これを摂動法で解いてみる。もちろん, 素朴なアプローチは破綻するだろうと予想して method of strained coordinates を用いことにし

$$t = s + \epsilon s_1(s) + \dots, \quad u = u_0 + \epsilon u_1 + \dots$$

と置いておく。以下の演算を実施すると $O(\epsilon)$ の運動方程式を

$$\ddot{u}_1 + u_1 = \sin s(1 - s_1') + \cos s(-2s_1')$$

のように得る。ここにプライムは s による微分である。ここで既に右辺の欲しくない項を消すような s_1 が存在せず, 破綻してしまっている。

これはなぜか。もちろんすべての読者は既に減衰自由振動の正解を知っているはずだが, その解は

$$u = \exp\left(-\frac{\epsilon}{2}t\right) \sin\left(t\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{4}}\right)$$

である。この指数関数のところと sine 関数のところの時刻 t は, それぞれ異なる速さでシフトしないといけないう変数になっている。したがって 1 種類のスケール変更だけでは摂動解は求められないことになるようだ。これを克服するためには「速い時刻」と「遅い時刻」の二つの時刻スケールを導入して摂動解析する方法が提案されており, それは **method of multiple scales** と呼ばれているらしい。これも全く理解していないのでここでやめよう。昨今の研究対象の問題で摂動法が有用か否かは著者にはわからないが, Northwestern 大学では今でも摂動法の講義は提供されているようだ。問題を解析的に解くことは非常に重要なので, 興味を持った読者は勉強してみたい。

Gauss の発散定理⁴²と部分積分そして積分の縦棒: $x = 0$ から $x = \ell$ までの部分積分を、図のように体積と端表面のある 1 次元領域の二つの関数の積 $\{g(x) f(x)\}$ の積分に対する Gauss の発散定理のように解釈すると

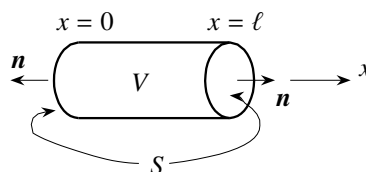


図 9.73 部分積分

$$\int_0^\ell g(x) \frac{df(x)}{dx} dx = \int_V g \frac{df}{dx} dV = \int_S n_x (g f) dS - \int_V \frac{dg}{dx} f dx$$

$$= n_x g f|_{x=0} + n_x g f|_{x=\ell} - \int_0^\ell \frac{dg}{dx} f dx$$

となるが、図から明らかなように両端の法線ベクトル \mathbf{n} と x 軸の正方向単位ベクトルとの内積は $n_x|_{x=0} = -1, n_x|_{x=\ell} = +1$ なので結局

$$\int_0^\ell g(x) \frac{df(x)}{dx} dx = g(x) f(x) \Big|_0^\ell - \int_0^\ell \frac{dg(x)}{dx} f(x) dx$$

と書くことができる。これから $g(x) \equiv 1$ の特別な場合が

$$\int_0^\ell \frac{df(x)}{dx} dx = f(x) \Big|_0^\ell$$

となり、積分を習って以来無意識に使っていた縦棒の意味がわかるのだ。この縦棒の意味がわかると、法線ベクトル \mathbf{n} が座標軸方向を向いていない場合もなんとなくわかるのではないだろうか。そうすれば、応力の Cauchy の定理等や、浮力や曲面上の静水圧分布等の図の意味が少し理解し易くなると思う。

‘lazybones:’ 第 1 著者のように、いつも goof off している人達のことである。しかし、こんなのやら ‘pissed off’ とかを小学校から教えるのかねえー。

⁴² ベクトル場ではないので Green の定理と呼ぶのかもしれないが、この文書では厳密な区別をせず発散定理にした。



写真9.2 松齢橋 福島県 1925年竣工



‘talent:’ 第1著者が在職中の夏に帰省したとき、市営プールで泳いだあとN美術館の喫茶室に友人が連れて行ってくれた。メニューには「ジュース」とだけあり、泳いだあとだったので冷たいものにしようかなと思い、「グレープフルーツジュースはあるの?」と尋ねたところ、あるとのこと。しかし瞬間迷ったあと、何気なく「じゃあ、ホットコーヒー」と注文した。言い方がおかしいと友人に注意されたが、あまり気にしなかった。するとウェイトレスは、「はい、グレープフルーツジュースです。」と、ホットコーヒーを持ってきてくれた。この客には冗談（あるいは嫌味）が通じると短時間で判断できたのか、本気で怒っていたのかは不明。でもすごい!

第 10 章

弾性体中を伝播する波・・・初歩

10.1 1次元の波動

10.1.1 非破壊評価の勉強を目指して

この章の元々の内容は付録Fの逆問題を定式化して非破壊評価をするための超音波探査法についての講義用で、北原道弘先生が担当していたものだ。それを引き継いだ¹第1著者の脳味噌レベルは北原先生の足許にも及ばない程度なので、その初歩的な範囲だけをまとめ、地震応答問題等における平面波と表面波の初歩的な力学までに限定されている。しかし面白いことに、北原先生の講義でもこの章の範囲と逆問題の定式化くらいまでしかカバーできていなかった。なおここではNorthwestern大学のAchenbach先生の‘Wave Propagation’の講義ノート（1980年頃）と文献[1]²を参考にした。

10.1.2 支配方程式

まず1次元の波動問題は柱の運動方程式(4.91a)でモデル化できる。つまり変位 $u(x, t)$ を用いて

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{c_b^2} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \quad (10.1)$$

と表される。ここに c_b は式(4.91b)で定義された波の位相速度である。この解が唯一に求められるためには初期条件と境界条件が必要だ。初期条件は時刻 $t = 0$ に任意の場所における変位 $u(x, 0)$ と速度 $\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0)$ を与えればいい。これに対し境界条件は、棒の両端の変位 u が直応力³ σ が適切に規定されていなければならない。あるいは曲げの無い場合の構成関係式(4.7)、つまり

$$\sigma(x, t) = E \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (10.2)$$

を使って、直応力 σ の代わりに伸びひずみ $\epsilon \equiv \frac{\partial u}{\partial x}$ で規定することもできる。

10.1.3 d'Alembert の解と解の意味

式(10.1)を解くために

$$y = x + c_b t, \quad z = x - c_b t$$

¹ さすがに数年で講義はやめた。特に初年度は聴講している学生さんの方が多くの正しい知識を持っていた。

² 世界で最も高価なペーパーバックの教科書と言われていたことがある。参考にしたというのは嘘で、ほぼ写したものだ。

³ 棒を平面応力状態の1軸状態の物体と考えて σ_{11} の添え字を省略した。

という変数変換をして $u(x, t)$ を $v(y, z)$ で置き換えると、偏微分の連鎖律から

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = c_b \left(\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c_b^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)$$

という関係があるので、式 (10.1) は

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 0 \quad (10.3)$$

のような形の波動方程式であることがわかる。この式 (10.3) を 2 回積分すれば、例えば

$$v(y, z) = \int w(z) dz + V(y) = W(z) + V(y)$$

となるので、元の関数形に戻すと

$$u(x, t) = \bar{f}(x - c_b t) + \bar{g}(x + c_b t) \quad (10.4)$$

と表現できる。2 種類の解の重ね合わせになっていて、これを **d'Alembert** の解と呼ぶ。第 9.3.1 (5) 節で説明したように、関数 $\bar{f}(x - c_b t)$ は「 x の正の方向に c_b で伝播する物理現象」を表し、関数 $\bar{g}(x + c_b t)$ は「 x の負の方向に c_b で伝播する物理現象」を表している。以下前者を進行波と呼び、後者を後退波と呼ぶ。

式 (10.2) の Hooke の法則を用いれば、応力 $\sigma(x, t)$ も同様の関数形で求められて

$$\sigma(x, t) = E \left(\bar{f}'(x - c_b t) + \bar{g}'(x + c_b t) \right) = \bar{F}(x - c_b t) + \bar{G}(x + c_b t) \quad (10.5)$$

と表されることになる。ここでプライムは関数の引数による微分を表している

$$\frac{\partial \bar{f}(x - c_b t)}{\partial x} = \frac{\partial \bar{f}(x - c_b t)}{\partial (x - c_b t)} = \bar{f}'$$

である。以下この表現を用いるが、偏微分の連鎖律には十分気を付けること。さて実際に問題を解く場合には、速度ではなく

$$s_b \equiv \frac{1}{c_b} \quad (10.6)$$

で定義した遅度で表した方が便利な場合がある。つまり変位が

$$u(x, t) = f(t - s_b x) + g(t + s_b x) \quad (10.7)$$

と表現できる。この表現を用いると次のように扱うことができる。

1. 進行波 $u = f(t - s_b x)$ の場合は式 (10.2) の Hooke の法則から

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} = -E s_b f' = -E s_b \frac{\partial f}{\partial t} = -E s_b \frac{\partial u}{\partial t} = -\rho c_b \frac{\partial u}{\partial t}$$

という関係がある。ここでは

$$\frac{\partial u(t - s_b x)}{\partial x} = \frac{\partial f(t - s_b x)}{\partial (t - s_b x)} \frac{\partial (t - s_b x)}{\partial x} = -s_b f', \quad \frac{\partial u(t - s_b x)}{\partial t} = \frac{\partial f(t - s_b x)}{\partial (t - s_b x)} = f' = \frac{\partial f}{\partial t}$$

を用いていることに注意して欲しい。つまり、応力 σ と速度 $\frac{\partial u}{\partial t}$ は同じ引数の関数で表すことができることになるので

$$\sigma \sim -\frac{\partial u}{\partial t} = -f'(t - s_b x) \Rightarrow -F(t - s_b x)$$

と置いてもいいのである。

2. 後退波 $u = g(t + s_b x)$ の場合も同様にして

$$\sigma = \rho c_b \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \sigma \sim \frac{\partial u}{\partial t} = g'(t + s_b x) \Rightarrow G(t + s_b x)$$

と置いていいことになる。

以下、上付きドットで時間微分を表すことにすると、上で求めた関係式から

$$\text{進行波なら } \dot{u}(x, t) = -\frac{\sigma(x, t)}{\rho c_b}, \quad \text{後退波なら } \dot{u}(x, t) = \frac{\sigma(x, t)}{\rho c_b} \quad (10.8a, b)$$

という関係が成立する。これは次の節で使える便利な関係であるが、このような扱いは初学者にとまどいを与えるので、早めに慣れるようにして欲しい。

10.1.4 波の反射

一例として、図 10.1 のような長さ ℓ の棒の自由端を外力 $p(t)$ でたたいたときの縦波の伝播を解析しよう。初期条件は

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0$$

である。境界条件は、左端に作用しているのが圧縮力であることに注意して、右端が固定されていることから

$$\sigma(0, t) = -p(t), \quad u(\ell, t) = 0$$

と与えられる。しかし、式 (10.8) のように速度と応力が同じ関数で表現できることから、境界条件も応力と変位だけではなく、速度も加えて表した方が便利だろう。つまり

$$\sigma(0, t) = -p(t), \quad u(\ell, t) = 0, \quad \dot{u}(\ell, t) = 0 \quad (10.9a, b, c)$$

のように与えることもできる。

まず最初の波が $x = \ell$ に到達する前、つまり $0 < t < \ell/c_b = \ell s_b$ の間を検討しよう。この間は進行波しか存在しないから、任意点の応力の関数形は $\sigma(x, t) = f(t - s_b x)$ で⁴ある。しかし $x = 0$ における境界条件式 (10.9a) から

$$\sigma(0, t) = f(t - s_b \times 0) = f(t) = -p(t) \quad (*)$$

を満足しなければならない。したがって、任意点の応力は

$$\sigma(x, t) = f(t - s_b x) = -p(t - s_b x)$$

と求められる。式 (*) のように、 f と p の関数の引数同士が等しいという条件からこの結論が得られていることを理解して欲しい。端部をたたいたために圧縮（負の応力）波が発生している。そしてこれは進行波なので、式 (10.8a) から速度は

$$\dot{u}(x, t) = \frac{1}{\rho c_b} p(t - s_b x)$$

となる。伝播する応力波を図 10.2 に示した。

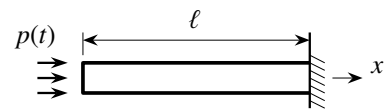


図 10.1 たたかれた棒

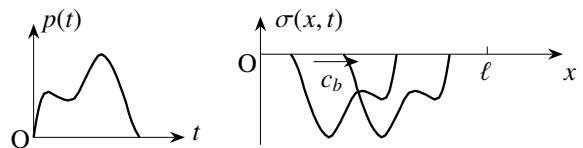


図 10.2 伝播する応力の形

⁴ 上の定式化では、 u を f で、 σ を F で表現したが、以下 F の代わりに f を用いている。

次に、最初の波が $x = \ell$ に到達して反射したあと、つまり $\ell/c_b < t < 2\ell/c_b$ の間を検討しよう。この状態は、進行波（入射する波なので入射波と呼ぶ）と後退波（反射波）が重ね合わさったものになる。つまり入射波は上式から

$$\dot{u}_1(x, t) = \frac{1}{\rho c_b} p(t - s_b x)$$

である一方で、応力の反射波は後退波なので

$$\sigma_{R1}(x, t) = g(t + s_b x)$$

と置くことにすると、変位（速度）は

$$\dot{u}_{R1}(x, t) = \frac{1}{\rho c_b} g(t + s_b x)$$

という表現になる。添え字の I は入射波を、 R は反射波を指す。これを重ね合わせた速度が $x = \ell$ における速度の境界条件式 (10.9c) を満足しなければならないから

$$\dot{u}_1(\ell, t) + \dot{u}_{R1}(\ell, t) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\rho c_b} p(t - s_b \ell) + \frac{1}{\rho c_b} g(t + s_b \ell) = 0$$

が成立する。右の式で $\xi \equiv t + s_b \ell$ と変数変換すると g は

$$g(\xi) = -p(\xi - 2s_b \ell) \quad \rightarrow \quad g(t + s_b x) = -p(t + s_b x - 2s_b \ell)$$

という関数であることがわかる。したがって、応力の反射波は

$$\sigma_{R1}(x, t) = -p(t + s_b x - 2s_b \ell)$$

となるので、この二つの波を重ね合わせて

$$\sigma(x, t) = -p(t - s_b x) - p(t + s_b x - 2s_b \ell) = -p(t - s_b x) - p((t - s_b \ell) + s_b(x - \ell))$$

と表現できる。つまり第 2 項は、 $t > s_b \ell$ の時間帯に $x = \ell$ を始点として x の負方向に伝わる波を表している。図 10.3 の左側にその様子を示した。

さらに、最初の波先が反射して元の $x = 0$ まで戻ったあと、つまり $2\ell/c_b < t < 3\ell/c_b$ の間を検討しよう。この場合は左端における反射波 σ_{R2} が進行波としてさらに加わるので

$$\text{最初の波} \quad \sigma_1 = -p(t - s_b x),$$

$$\text{右端反射波} \quad \sigma_{R1} = -p(t - s_b \ell + s_b(x - \ell)),$$

$$\text{次の反射波} \quad \sigma_{R2} = h(t - s_b x)$$

と置いていい。この重ね合わせた応力全体が、境界条件式 (10.9a) の $x = 0$ における条件

$$-p(t) = \sigma_1(0, t) + \sigma_{R1}(0, t) + \sigma_{R2}(0, t)$$

を満足しなければならないので、上で求められた解を代入すれば

$$-p(t) = -p(t) - p(t - 2s_b \ell) + h(t) \quad \rightarrow \quad h(t) = p(t - 2s_b \ell)$$

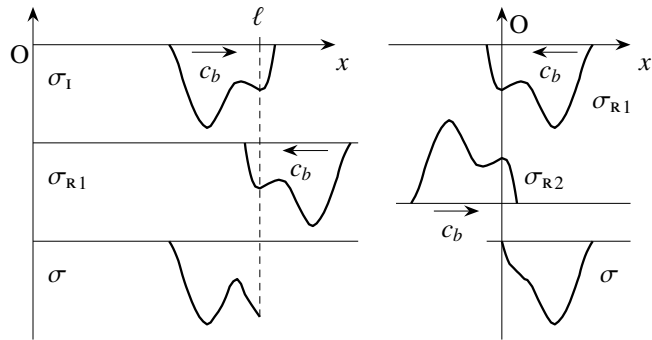


図 10.3 反射による引張・圧縮の逆転

のように $h(t)$ が求められる。つまり

$$\sigma_{R2} = p(t - 2s_b \ell - s_b x)$$

が次の反射波になる。ここでは応力の符号が変わって引張に転じたことに注意しなければならない。したがって、以上の三つの波を重ね合わせた応力は

$$\sigma(x, t) = -p(t - s_b x) - p(t - 2s_b \ell + s_b x) + p(t - 2s_b \ell - s_b x)$$

となる。 $p(t)$ が短時間のみの作用の場合の例を図 10.3 の右側に示した。

演習問題 10-1

1. 例と同じ棒に図 10.4 の左側に示した矩形波形の圧縮外力

$$p(t) = p_0, \quad 0 < t < \frac{a}{c_b}$$

を与えたときの $0 < t < 3a/c_b$ の間の応力を求めよ。ただし $a = \ell$ とする。さらに、もし棒の材料の引張強度が $p_0/2$ で圧縮強度が $3p_0$ のとき、この棒はいつどこで最初に破断する可能性が高いか示せ。文献 [1] の問題から。

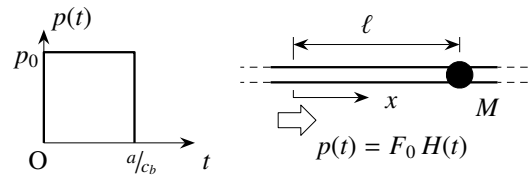


図 10.4 二つの演習問題のために

2. 図 10.4 の右側に示したように、無限に長く断面積が A の棒の途中の $x = \ell$ の位置に大きさが無視できる質量 M の球が挟まっている。 $t < 0$ には静止していた棒の $x = 0$ の位置に、力 $p(t) = F_0 H(t)$ が x 方向に作用したとする。ここに $H(t)$ は式 (9.46) で定義した **Heaviside 関数** である。この力による波が $x = \ell$ の球に到達したあとの応力の反射波と透過波を求めよ。これも文献 [1] の問題である。ところで、式 (9.46) (左辺右辺を入れ替えて) には

$$\frac{dH(t - t_0)}{dt} \stackrel{d}{=} \delta(t - t_0) \tag{10.10}$$

という関係式を書いておいた。 $\delta(t - t_0)$ は式 (4.57) で定義した Dirac のデルタ関数である。解析学では $H(t - t_0)$ のような関数の微係数は $t = t_0$ では定義できないと習ったと思うが、式 (10.10) の等号は次のような意味である。無限遠点で零になる十分滑らかな任意の関数 $\phi(t)$ (試験関数と呼ばれる) に対して

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dH(t - t_0)}{dt} \phi(t) dt &= H(t - t_0) \phi(t) \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} H(t - t_0) \frac{d\phi(t)}{dt} dt = - \int_{t_0}^{\infty} \frac{d\phi(t)}{dt} dt \\ &= \phi(t_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) \phi(t) dt \end{aligned}$$

という等式が成立する。この等式から被積分関数だけを取り出して、式 (10.10) では $\stackrel{d}{=}$ という特殊な等号で表現しているのだ。Heaviside 関数もデルタ関数も本当は関数ではなく超関数なので、常にこのような積分の作用が必要なのである。

10.2 平面波

10.2.1 3次元の運動方程式

変位 $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ で表した 3次元物体の運動方程式は式 (3.152) で表される。その分布外力 \mathbf{X} を無視したのが

$$(\lambda + \mu) \sum_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x_j \partial x_i} + \mu \sum_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j^2} = \rho \ddot{u}_i, \quad (\lambda + \mu) \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \mu \nabla^2 \mathbf{u} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \tag{10.11a, b}$$

である。しかしこの章以降では総和記号の Σ を省略し、また偏微分演算子の表記を簡略化するために

- 同じ添え字記号が二度⁵現れた項は、その記号については必ず 1 から 3 まで総和をとるものとする。2 次元の場合は 1 から 2 までの総和とする。この規則を総和規約と呼ぶ。例えば

$$\delta_{kk} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3, \quad \delta_{ij} \sigma_{jk} = \sigma_{ik}, \quad \delta_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_{ii} = \sigma_{jj} = \sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

のようになる。ここに δ_{ij} は Kronecker のデルタである。したがって Hooke の法則式 (3.46) (3.49a) も

$$\sigma_{ij} = 2\mu \epsilon_{ij} + \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk}, \quad \sigma_{ij} = C_{ijmn} \epsilon_{mn} \quad (10.12)$$

と表すことができる。

- 微分はコンマで表し、コンマの次に現れる添え字に対応した独立変数についての偏微分演算子を表すものとする。例えば 3 次元のひずみの定義式 (3.6) とつり合い式 (3.22) はそれぞれ

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad \sigma_{ji,j} + X_i = 0 \quad (10.13a, b)$$

と表すことができる。元の式と見比べて早目に慣れて欲しい。

という「表記上の規則⁶」を用いることにする。この規則を使うと変位で表した運動方程式 (10.11) は

$$(\lambda + \mu) u_{j,ji} + \mu u_{i,jj} = \rho \ddot{u}_i \quad (10.14)$$

と表される。これを解こう。ただし、任意の初期値境界値問題を解くには時間について Fourier 変換された支配方程式を対象とする必要がある等の難しさが伴う。著者の能力ではそれをカバーすることは不可能だ。ここではある特定の運動場を設定し、弾性無限体中で定常的に伝播する調和振動の基礎的な現象だけを列挙する。

10.2.2 平面波の定義

ある観測地からとても遠い活断層で地震が発生した場合、その震源を観測地から見ると、それは無限遠点にある点源にしか見えないだろう。その点源からはほぼ球面状の波動が発生するが、観測地が震源からとても遠いので、そこに到達する波は点源からの曲率半径がとても大きな球面波であり、それをほぼ平面状の現象が伝播する波として近似しても工学的には問題は生じないだろう。さて式 (10.4) で示したように、1 次元の進行波は $f(x - c_b t)$ という関数形で表現できる。この関数は、 $x = \text{const.}$ の面の物理現象が、その面の法線方向つまり x 方向に c_b の速さで伝播していることを示している。一方、図 10.5 に示したように \mathbf{p} をある平面の単位法線ベクトルとすると、3 次元空間の任意の平面は $p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 = \text{const.}$ で定義できる。つまりその平面は $\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} = x_k p_k = \text{const.}$ と表すことができる。したがって 1 次元の進行波からの類推で、3 次元空間の平面波の変位は

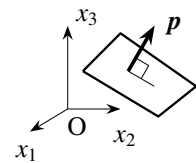


図 10.5 平面状の波

$$\mathbf{u} = \mathbf{d} f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct) \quad \text{あるいは} \quad u_i = d_i f(x_k p_k - ct) \quad (10.15)$$

という関数で表現できることは容易に理解できるだろう。ここに \mathbf{d} は変位ベクトルの向きを表す単位ベクトルであり、 c は考えている波の位相速度である。引数の $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct)$ を位相と呼ぶことがある。

⁵ 興味深いことに、一つの物理的な項に同じ添え字記号が三度以上現れることは無い。逆に二度現れる添え字記号に対して総和をとらない場合もあり、そのときは注意書きをすることになっている。例えば式 (12.191)。

⁶ 「表記上」と書いたのは、ここに書いた総和規約とコンマは直角座標でしか用いることができない不正確な定義であるからである。正確な定義は付録 D に示したので一度は必ず読んでおいて欲しい。

式 (10.15) のような平面状の波が存在するかどうかを調べるために、それを式 (10.14) の運動方程式に代入してみよう。そのために式 (10.15) を微分すると

$$u_{i,j} = d_i p_j f'(x_k p_k - ct), \quad u_{i,jj} = d_i p_j p_j f''(x_k p_k - ct) = d_i f'', \quad u_{j,ji} = d_j p_j p_i f'', \quad \ddot{u}_i = c^2 d_i f''$$

等という関係が成り立つ。第 2 式では \mathbf{p} が単位ベクトルであること ($p_j p_j = 1$) を用いた。これを運動方程式に代入して整理すると

$$\{(\lambda + \mu) (d_j p_j) p_i + \mu d_i - \rho c^2 d_i\} f''(x_k p_k - ct) = 0$$

となるので、この関数形を持った解が存在するためには、係数が零でなければならないから

$$(\mu - \rho c^2) d_i + (\lambda + \mu) (d_j p_j) p_i = 0 \tag{10.16}$$

が成立しなければならない。

この式 (10.16) が成り立つ可能性は二つある。

1. 一つは $\mathbf{p} = \pm \mathbf{d}$ つまり $p_i = \pm d_i$ の場合である。これは、平面状の運動の変位は平面の法線方向であることを示している。これを上式 (10.16) に代入すると

$$\{(\mu - \rho c^2) + (\lambda + \mu)\} d_i = 0 \quad \rightarrow \quad (\lambda + 2\mu) - \rho c^2 = 0$$

となる。つまり、位相速度が式 (3.156a) で定義したものと同じく

$$c = c_L \equiv \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \tag{10.17}$$

で定義される縦波 (P 波) の速度になる。この場合は

$$\nabla \times \mathbf{u} = \mathbf{d} \times \mathbf{p} f'(x \cdot \mathbf{p} - c_L t) = \pm \mathbf{d} \times \mathbf{d} f' = 0 \quad [\because \mathbf{d} \times \mathbf{d} = \mathbf{0}]$$

を満たす波動、つまり非回転波になっている。これはせん断変形が伝播するのではなく、1次元の波動のような疎密波の伝播に相当する。

2. もう一つの可能性は $\mathbf{p} \cdot \mathbf{d} = 0$ つまり $p_i d_i = 0$ の場合である。つまり、平面状の運動の変位が平面の法線方向と直角方向になることを示している。これを上式 (10.16) に代入すると

$$\mu - \rho c^2 = 0 \quad \rightarrow \quad c = c_T \equiv \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} < c_L \tag{10.18}$$

となるから、位相速度は式 (3.156b) で定義された横波 (S 波) の速度になる。この場合は

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \mathbf{d} \cdot \mathbf{p} f'(x \cdot \mathbf{p} - c_T t) = 0 \quad [\because \mathbf{d} \cdot \mathbf{p} = 0]$$

を満たす波動、つまり等体積波になっている。これは体積変形が無いまません断変形が伝播していることになる。

以下では、 x_1 - x_3 平面が文字通りの水平面と平行で、波の進行方向を定義する \mathbf{p} は x_1 - x_2 平面内にあることを前提とする。その前提の下で、図 10.6 に示した 3 種類の波の挙動を検討する。

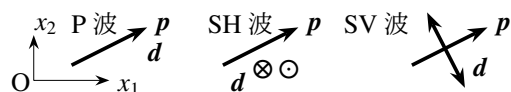


図 10.6 P 波・SH 波・SV 波

P 波: 縦波で、変位ベクトルの向きの \mathbf{d} が x_1 - x_2 平面内にあるものとする。

SH 波: 横波のうち \mathbf{d} が x_3 方向にある波、つまり $\mathbf{d} = [0 \ 0 \ 1]^T$ である。したがって平面状の運動は x_1 - x_2 平面の法線方向に生じ、水平 (x_3) 方向の運動になっているので H[orizontal] の文字を用いている。面外波と呼ぶこともある。

SV 波: 横波のうち、 \mathbf{d} も x_1 - x_2 平面内にある波である。平面状の運動は x_1 - x_2 平面内に生じ、一般には水平方向ではない (傾いた鉛直方向の) 運動になっているので V[ertical] の文字を用いている。面内波と呼ぶこともある。

10.2.3 無限領域の調和平面波

(1) 調和振動

これまでは $f(\cdot)$ の関数形は任意として扱い、初期条件や境界条件で決まるものだったが、ここからは定常運動を対象として、定周期運動とする。つまり振幅 A の調和振動運動として

$$f(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct) = A \exp(i\eta), \quad \eta \equiv k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} - ct) = k(\mathbf{x} \cdot \mathbf{p}) - \omega t \quad (10.19a, b)$$

と仮定する。ここに $k \equiv \omega/c$ は波数であり、 ω は振動数である。また、波が伝播する領域は図 10.7 のように、水平面 $x_2 = 0$ を境にして上下別々の領域に分割されているものを対象とする。

(2) SH 波の反射

SH 波は図 10.7 に示した $\mathbf{d} = [0 \ 0 \ 1]^T$ の波である。境界条件を検討すると明らかになるが、実は SH 波の反射では SH 波しか生じない。したがって、入射する波も反射波も生じる変位は x_3 方向成分 u_3 のみである。そこで図のように角度と波の進むベクトルを定義すると

$$\mathbf{p}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \sin \theta_2 \\ -\cos \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (10.20a, b)$$

となるので、入射波は

$$u_3^{(0)} = A_0 \exp\{i k_0 (x_1 \sin \theta_0 + x_2 \cos \theta_0 - c_T t)\} \quad (10.21)$$

であり、反射波は

$$u_3^{(2)} = A_2 \exp\{i k_2 (x_1 \sin \theta_2 - x_2 \cos \theta_2 - c_T t)\} \quad (10.22)$$

と表される。ここに A_0, A_2 は複素数の振幅である。

上半分が剛な場合: 比較的剛な物体が載った地盤等で生じる反射をモデル化したものとして、 $x_2 > 0$ の領域が剛な場合を考えよう。この場合 $x_2 = 0$ の境界条件は $u_3 = 0$ となるから、入射波と反射波の重ね合わせから

$$\begin{aligned} u_3(x_2 = 0) &= u_3^{(0)}(x_2 = 0) + u_3^{(2)}(x_2 = 0) \\ &= A_0 \exp\{i k_0 (x_1 \sin \theta_0 - c_T t)\} + A_2 \exp\{i k_2 (x_1 \sin \theta_2 - c_T t)\} = 0 \end{aligned} \quad (10.23)$$

が任意の x_1, t に対して成立しなければならない。つまり、二つの指数関数 (exp) の形は共に同じでなければならず、 x_1 の係数同士と t の係数同士の等置から

$$k_0 \sin \theta_0 = k_2 \sin \theta_2, \quad k_0 = k_2$$

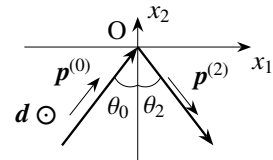


図 10.7 SH 波の反射

が成り立つ必要がある。よって

$$k_2 = k_0, \quad \theta_2 = \theta_0 \quad (10.24a, b)$$

を得、これを境界条件式(10.23)に代入し戻せば

$$A_2 = -A_0 \quad (10.25)$$

と求められる。したがって x_3 方向変位は、この結果を反射波の式(10.22)に代入したものと入射波の式(10.21)とを重ね合わせて

$$\begin{aligned} u_3(x_1, x_2, t) &= A_0 \exp\{i k_0 (x_1 \sin \theta_0 + x_2 \cos \theta_0 - c_T t)\} - A_0 \exp\{i k_0 (x_1 \sin \theta_0 - x_2 \cos \theta_0 - c_T t)\} \\ &= 2i A_0 \sin(k_0 x_2 \cos \theta_0) \exp\{i k_0 (x_1 \sin \theta_0 - c_T t)\} \end{aligned} \quad (10.26)$$

となる。解の最初の関数 $\sin(k_0 x_2 \cos \theta_0)$ の部分は、深さ方向の x_2 方向には sine 関数状の振幅分布を示すことを示しており、このような波を重復波と呼んでいる。また二つ目の指数関数は、その引数が $(x_1 \sin \theta_0 - c_T t)$ であることから、 x_1 の正の方向に進む進行波であることを示している。

水平面が自由表面の場合: 水平面より上が大気(真空)である場合の反射をモデル化したものとして、 $x_2 = 0$ が自由表面である場合を考えよう。このときの $x_2 = 0$ の境界条件は $\sigma_{i2} = 0$ ($i = 1, 2, 3$) である。SH 波は $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = u_3(x_1, x_2)$ なので、各ひずみ成分は $\epsilon_{11} = 0, \epsilon_{22} = 0, \epsilon_{33} = 0, \epsilon_{12} = 0$ となるので、Hooke の法則から $\sigma_{12} = 0$ と $\sigma_{22} = 0$ は常に成立する。したがって残った条件は

$$\sigma_{32} = 2\mu \epsilon_{32} = \mu u_{3,2} = 0$$

となる。このことから自由表面の境界条件は

$$u_{3,2} = 0 \quad (10.27)$$

で与えられる。剛体の場合と同様にして入射波と反射波の重ね合わせで境界条件式(10.27)を表すと

$$\begin{aligned} u_{3,2}(x_2 = 0) &= u_{3,2}^{(0)}(x_2 = 0) + u_{3,2}^{(2)}(x_2 = 0) \\ &= i k_0 A_0 \cos \theta_0 \exp\{i k_0 (x_1 \sin \theta_0 - c_T t)\} - i k_2 A_2 \cos \theta_2 \exp\{i k_2 (x_1 \sin \theta_2 - c_T t)\} = 0 \end{aligned} \quad (10.28)$$

となり、これが任意の x_2, t に対して成り立たなければならない。したがって

$$k_2 = k_0, \quad \theta_2 = \theta_0 \quad A_2 = A_0 \quad (10.29a, b, c)$$

が解になる。よって、定常状態の変位は剛体の場合とほぼ同様に

$$u_3(x_1, x_2, t) = 2 A_0 \cos(k_0 x_2 \cos \theta_0) \exp\{i k_0 (x_1 \sin \theta_0 - c_T t)\} \quad (10.30)$$

と求められる。境界条件の違いは、重復波の部分のみに現れている。

(3) 自由表面における P 波の反射

前節のように SH 波の反射では境界条件によらず SH 波しか生じなかったが、P 波の場合には、例えば

P, SV 波が発生: 次の条件のとき

1. 上領域が剛なとき: $u_1 = 0, u_2 = 0$

2. 自由表面のとき: $\sigma_{21} = 0, \sigma_{22} = 0$

P 波のみが発生: 次の条件のとき

1. $u_1 = 0, \sigma_{22} = 0$

2. 摩擦の無い境界のとき: $u_2 = 0, \sigma_{21} = 0$

のような反射が生じることがわかっている。

ここでは代表的な例として、自由表面を持つ半無限体を対象として解くので、その他の場合については各自試して欲しい。図 10.8 に示したように角度とベクトルを定義すると、三つの波の変位を $n = 0, 1, 2$ で区別して

$$u_i^{(n)} = A_n d_i^{(n)} \exp(i \eta_n) \quad (i = 1, 2), \quad (10.31a)$$

$$\eta_n \equiv k_n (x_1 p_1^{(n)} + x_2 p_2^{(n)} - c_n t) \quad (10.31b)$$

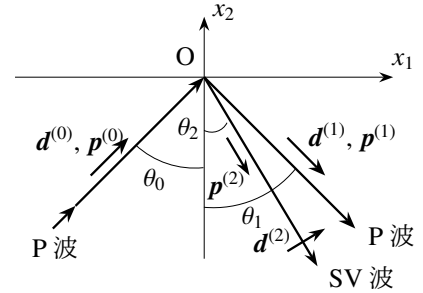


図 10.8 P 波の反射

と表すことができる。ここに

$$\text{入射 P 波: } \mathbf{d}^{(0)} = \mathbf{p}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{Bmatrix}, \quad c_0 = c_L, \quad \text{反射 P 波: } \mathbf{d}^{(1)} = \mathbf{p}^{(1)} = \begin{Bmatrix} \sin \theta_1 \\ -\cos \theta_1 \end{Bmatrix}, \quad c_1 = c_L, \quad (10.32a, b, c, d)$$

$$\text{反射 SV 波: } \mathbf{d}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(2)} = \begin{Bmatrix} \sin \theta_2 \\ -\cos \theta_2 \end{Bmatrix}, \quad c_2 = c_T \quad (10.32e, f, g)$$

である。ひずみ成分はそれぞれ

$$\epsilon_{11}^{(n)} = u_{1,1}^{(n)} = i k_n p_1^{(n)} d_1^{(n)} A_n \exp(i \eta_n), \quad \epsilon_{22}^{(n)} = u_{2,2}^{(n)} = i k_n p_2^{(n)} d_2^{(n)} A_n \exp(i \eta_n), \quad (10.33a, b)$$

$$2\epsilon_{12}^{(n)} = u_{1,2}^{(n)} + u_{2,1}^{(n)} = i k_n (d_1^{(n)} p_2^{(n)} + d_2^{(n)} p_1^{(n)}) A_n \exp(i \eta_n) \quad (10.33c)$$

と書くことができるので、Hooke の法則に代入すれば各応力成分も

$$\sigma_{22}^{(n)} = (\lambda + 2\mu) \epsilon_{22}^{(n)} + \lambda \epsilon_{11}^{(n)} = i k_n \{(\lambda + 2\mu) d_2^{(n)} p_2^{(n)} + \lambda d_1^{(n)} p_1^{(n)}\} A_n \exp(i \eta_n), \quad (10.34a)$$

$$\sigma_{12}^{(n)} = 2\mu \epsilon_{12}^{(n)} = i k_n \mu \{d_2^{(n)} p_1^{(n)} + d_1^{(n)} p_2^{(n)}\} A_n \exp(i \eta_n) \quad (10.34b)$$

と表される。

自由表面の境界条件は $x_2 = 0$ で $\sigma_{22} = 0, \sigma_{21} = 0$ なので、式 (10.34) の重ね合わせから

$$\sigma_{22}(x_2 = 0) = \sum_{n=0}^2 \sigma_{22}^{(n)}(x_2 = 0) = \sum_{n=0}^2 i k_n \{(\lambda + 2\mu) d_2^{(n)} p_2^{(n)} + \lambda d_1^{(n)} p_1^{(n)}\} A_n \exp(i \bar{\eta}_n) = 0, \quad (10.35a)$$

$$\sigma_{21}(x_2 = 0) = \sum_{n=0}^2 \sigma_{21}^{(n)}(x_2 = 0) = \sum_{n=0}^2 i k_n \mu \{d_2^{(n)} p_1^{(n)} + d_1^{(n)} p_2^{(n)}\} A_n \exp(i \bar{\eta}_n) = 0 \quad (10.35b)$$

となる。ここに $\bar{\eta}_n \equiv \eta_n(x_2 = 0) = k_n (x_1 p_1^{(n)} - c_n t)$ と置いた。この条件式に式 (10.32) を代入して整理すると

$$i k_0 (\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_0) A_0 \exp(i \bar{\eta}_0) + i k_1 (\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_1) A_1 \exp(i \bar{\eta}_1) - 2i k_2 \mu \sin \theta_2 \cos \theta_2 A_2 \exp(i \bar{\eta}_2) = 0, \quad (10.36a)$$

$$2i k_0 \mu \sin \theta_0 \cos \theta_0 A_0 \exp(i \bar{\eta}_0) - 2i k_1 \mu \sin \theta_1 \cos \theta_1 A_1 \exp(i \bar{\eta}_1) + i k_2 \mu (\sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2) A_2 \exp(i \bar{\eta}_2) = 0 \quad (10.36b)$$

を得る。この式が任意の x_1, t に対して成立するためには、まず指数関数同士が等価でなければならないから

$$k_0 c_L = k_1 c_L = k_2 c_T = \omega, \quad k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 = \text{見かけの波数} \quad (10.37a, b)$$

の条件が成り立つ必要がある。後者の式 (10.37b) は **Snell** の法則と呼ばれている。したがって

$$k_1 = k_0, \quad k_2 = \kappa k_0, \quad \kappa \equiv \frac{c_L}{c_T} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}} = \sqrt{\frac{2(1+\nu)}{1-2\nu}} > 1 \quad (10.38a, b, c)$$

となり、角度は

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \sin \theta_2 = \frac{k_0}{k_2} \sin \theta_0 = \frac{1}{\kappa} \sin \theta_0 < 1 \quad \rightarrow \quad \theta_2 < \theta_1 = \theta_0 \quad (10.39a, b, c)$$

と求められる。式 (10.38c) で定義した κ が 1 より大きいので実数の θ_2 が必ず存在し、最後の式で示したように、その値は θ_1 より小さくなることには注意すること。この結果を式 (10.36) に代入して整理すると

$$(\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_0) \frac{A_1}{A_0} - \kappa \mu \sin 2\theta_2 \frac{A_2}{A_0} = -(\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_0), \quad \sin 2\theta_0 \frac{A_1}{A_0} + \kappa \cos 2\theta_2 \frac{A_2}{A_0} = \sin 2\theta_0 \quad (*)$$

を得る。第 1 式を μ で除して $\kappa^2 = \lambda/\mu + 2$ を使うと

$$(\kappa^2 - 2 \sin^2 \theta_0) \frac{A_1}{A_0} - \kappa \sin 2\theta_2 \frac{A_2}{A_0} = -(\kappa^2 - 2 \sin^2 \theta_0)$$

と書き換えられ、さらに $\sin \theta_0 = \kappa \sin \theta_2$ を使えば、 $\kappa^2 - 2 \sin^2 \theta_0 = \kappa^2 \cos 2\theta_2$ となるので、この式は

$$\kappa \cos 2\theta_2 \frac{A_1}{A_0} - \sin 2\theta_2 \frac{A_2}{A_0} = -\kappa \cos 2\theta_2$$

となり、結局上の二つの式 (*) は

$$\begin{pmatrix} \kappa \cos 2\theta_2 & -\sin 2\theta_2 \\ \sin 2\theta_0 & \kappa \cos 2\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1/A_0 \\ A_2/A_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\kappa \cos 2\theta_2 \\ \sin 2\theta_0 \end{pmatrix}$$

と書き換えられる。したがって

$$\begin{pmatrix} A_1/A_0 \\ A_2/A_0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} \kappa \cos 2\theta_2 & \sin 2\theta_2 \\ -\sin 2\theta_0 & \kappa \cos 2\theta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\kappa \cos 2\theta_2 \\ \sin 2\theta_0 \end{pmatrix}, \quad \Delta \equiv \sin 2\theta_0 \sin 2\theta_2 + \kappa^2 \cos^2 2\theta_2$$

のように誘導できて、振幅比が

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_2 - \kappa^2 \cos^2 2\theta_2}{\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_2 + \kappa^2 \cos^2 2\theta_2}, \quad \frac{A_2}{A_0} = \frac{2\kappa \sin 2\theta_0 \cos 2\theta_2}{\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_2 + \kappa^2 \cos^2 2\theta_2} \quad (10.40a, b)$$

と求められる。これから

1. $\theta_0 = 0$ の場合には $\theta_1 = \theta_2 = 0, A_2 = 0$ になるので反射は P 波のみになり、 $A_1 = -A_0$ になる。ただし $A_0 d_2^{(0)} = A_1 d_2^{(1)}$ になるから、 u_2 の入射波と反射波が同位相になって重複波になる。
2. $\theta_0 = \pi/2$ の場合 (かすめ入射と呼ばれる) にも $A_2 = 0$ になり、反射は P 波のみである。ただし、この場合は $A_0 d_1^{(0)} = -A_1 d_1^{(1)}$ になるので u_1 の入射波と反射波は逆位相になり、結局 $u_1 = 0$ になる。真横からの入射なのに波動が伝わらないというのは一体?
3. $\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_2 = \kappa^2 \cos^2 2\theta_2$ を満たすような θ_0 で入射した場合には $A_1 = 0$ になるから、反射は SV 波のみになる。このような現象をモード変換と呼ぶ。

といった特徴が明らかになる。

(4) P 波の反射と透過

次に、上半分の領域の材料が下半分のそれとは異なる場合の無限領域における、その二つの領域境界を通じた反射と透過について、その概要を説明しておく。図 10.9 に示したように角度とベクトルを定義して上半分の領域の透過波についても $n = 3, 4$ で区別すれば、その変位も式 (10.31) と同じように表すことができる。また透過波についての諸量は

$$\text{透過 P 波: } \mathbf{d}^{(3)} = \mathbf{p}^{(3)} = \begin{Bmatrix} \sin \theta_3 \\ \cos \theta_3 \end{Bmatrix}, \quad c_3 = c_L^B \equiv \sqrt{\frac{\lambda_B + 2\mu_B}{\rho_B}}, \quad (10.41a, b)$$

$$\text{透過 SV 波: } \mathbf{d}^{(4)} = \begin{Bmatrix} -\cos \theta_4 \\ \sin \theta_4 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(4)} = \begin{Bmatrix} \sin \theta_4 \\ \cos \theta_4 \end{Bmatrix}, \quad c_4 = c_T^B \equiv \sqrt{\frac{\mu_B}{\rho_B}} \quad (10.41c, d, e)$$

と置くことができる。ここに μ_B, λ_B が上半分の領域の Lamé 定数であり、 ρ_B が密度である。これによる応力成分も前節同様に表現でき

$$\sigma_{22}^{(n)} = i k_n \{(\lambda_B + 2\mu_B) d_2^{(n)} p_2^{(n)} + \lambda_B d_1^{(n)} p_1^{(n)}\} A_n \exp(i \eta_n), \quad \sigma_{12}^{(n)} = i k_n \mu_B \{d_2^{(n)} p_1^{(n)} + d_1^{(n)} p_2^{(n)}\} A_n \exp(i \eta_n) \quad (10.42a, b)$$

と表される。

$x_2 = 0$ における条件は、二つの変位成分 u_1, u_2 と応力の二つの成分 σ_{22}, σ_{21} がそれぞれ連続していることなので、式 (10.34) (10.42) の重ね合わせから

$$\sum_{n=0}^2 A_n d_i^{(n)} \exp(i \bar{\eta}_n) = \sum_{n=3}^4 A_n d_i^{(n)} \exp(i \bar{\eta}_n), \quad (10.43a)$$

$$\sum_{n=0}^2 i k_n \{(\lambda + 2\mu) d_2^{(n)} p_2^{(n)} + \lambda d_1^{(n)} p_1^{(n)}\} A_n \exp(i \bar{\eta}_n) = \sum_{n=3}^4 i k_n \{(\lambda_B + 2\mu_B) d_2^{(n)} p_2^{(n)} + \lambda_B d_1^{(n)} p_1^{(n)}\} A_n \exp(i \bar{\eta}_n), \quad (10.43b)$$

$$\sum_{n=0}^2 i k_n \mu \{d_2^{(n)} p_1^{(n)} + d_1^{(n)} p_2^{(n)}\} A_n \exp(i \bar{\eta}_n) = \sum_{n=3}^4 i k_n \mu_B \{d_2^{(n)} p_1^{(n)} + d_1^{(n)} p_2^{(n)}\} A_n \exp(i \bar{\eta}_n) \quad (10.43c)$$

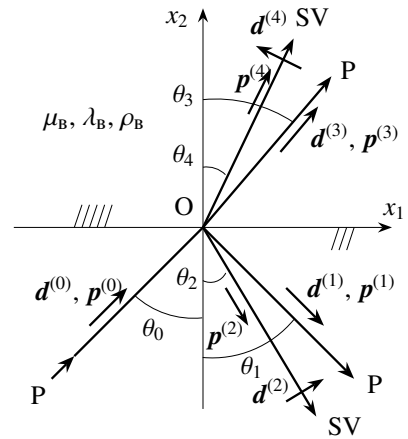


図 10.9 P 波の反射と透過

を満足していなければならない。ここでも前節同様、 $\bar{\eta}_n \equiv \eta_n(x_2 = 0) = k_n(x_1 p_1^{(n)} - c_n t)$ と置いた。この式に式 (10.32) (10.41) を代入して整理すれば角度や振幅の間の関係式を得る。まず指数関数同士が等価でなければならないから

$$k_1 = k_0, \quad k_2 = \kappa k_0, \quad k_3 = \alpha_B k_0, \quad k_4 = \beta_B k_0 \quad (10.44a, b, c, d)$$

となる。ここに

$$\alpha_B \equiv \frac{c_L}{c_L^B}, \quad \beta_B \equiv \frac{c_L}{c_T^B} > \alpha_B \quad (10.45a, b)$$

と定義してあり、 κ は式 (10.38c) で定義されている。また角度は

$$\theta_1 = \theta_0, \quad \sin \theta_2 = \frac{1}{\kappa} \sin \theta_0 < 1, \quad \sin \theta_3 = \frac{1}{\alpha_B} \sin \theta_0, \quad \sin \theta_4 = \frac{1}{\beta_B} \sin \theta_0 < \sin \theta_3 \quad (10.46a, b, c, d)$$

と求められる。これを上式 (10.43) に代入し直せば、各振幅比を求めることができる。以下面倒なので結果は省略するので各自計算してみたい。

(5) 自由表面における SV 波の反射

今度は図 10.8 に示した左からの入射波が SV 波である場合を考えよう。この場合には

$$\text{入射 SV 波: } \mathbf{d}^{(0)} = \begin{Bmatrix} -\cos \theta_0 \\ \sin \theta_0 \end{Bmatrix}, \quad \mathbf{p}^{(0)} = \begin{Bmatrix} \sin \theta_0 \\ \cos \theta_0 \end{Bmatrix}, \quad c_0 = c_T \quad (10.47a, b, c)$$

となる以外は、式 (10.32) と同じだ。これを用いて自由表面の境界条件に代入すると

$$2i k_0 \mu \sin \theta_0 \cos \theta_0 A_0 \exp(i \bar{\eta}_0) + i k_1 (\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_1) A_1 \exp(i \bar{\eta}_1) - 2i k_2 \mu \sin \theta_2 \cos \theta_2 A_2 \exp(i \bar{\eta}_2) = 0, \quad (10.48a)$$

$$i k_0 \mu (\sin^2 \theta_0 - \cos^2 \theta_0) A_0 \exp(i \bar{\eta}_0) - 2i k_1 \mu \sin \theta_1 \cos \theta_1 A_1 \exp(i \bar{\eta}_1) + i k_2 \mu (\sin^2 \theta_2 - \cos^2 \theta_2) A_2 \exp(i \bar{\eta}_2) = 0 \quad (10.48b)$$

を得る。したがって、指数関数同士の等価性から

$$k_0 c_T = k_1 c_L = k_2 c_T, \quad k_0 \sin \theta_0 = k_1 \sin \theta_1 = k_2 \sin \theta_2 \quad (10.49a, b)$$

でなければならないので

$$k_2 = k_0, \quad k_1 = \frac{1}{\kappa} k_0, \quad \theta_2 = \theta_0, \quad \sin \theta_1 = \kappa \sin \theta_0 \quad (10.50a, b, c, d)$$

と求められる。この結果を式 (10.48) に代入して整理すると

$$(\lambda + 2\mu \cos^2 \theta_1) \frac{A_1}{A_0} - \kappa \mu \sin 2\theta_0 \frac{A_2}{A_0} = -\kappa \mu \sin 2\theta_0, \quad -\mu \sin 2\theta_1 \frac{A_1}{A_0} - \kappa \mu \cos 2\theta_0 \frac{A_2}{A_0} = \kappa \mu \cos 2\theta_0$$

となる。これを解けば

$$\frac{A_1}{A_0} = \frac{-\kappa \sin 4\theta_0}{\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_1 + \kappa^2 \cos^2 2\theta_0}, \quad \frac{A_2}{A_0} = \frac{\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_1 - \kappa^2 \cos^2 2\theta_0}{\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_1 + \kappa^2 \cos^2 2\theta_0} \quad (10.51a, b)$$

と求められる。この結果からは

1. $\theta_0 = 0, \pi/4, \pi/2$ の場合には $A_1 = 0$ になり、反射は SV 波のみになる。
2. $\sin 2\theta_0 \sin 2\theta_1 = \kappa^2 \cos^2 2\theta_0$ を満たすような θ_0 で入射した場合には $A_2 = 0$ になるから、反射は P 波のみになる。これもモード変換である。

といった特徴が明らかになる。

ところが、式 (10.38c) で示したように $\kappa > 1$ であることから、式 (10.50d) からは

$$\theta_0 < \theta_{cr} \equiv \sin^{-1} \left(\frac{1}{\kappa} \right) \quad (10.52)$$

の条件を満足するように入射しない限り θ_1 は実数にならないことがわかる。では、 $\theta_0 > \theta_{cr}$ のときにはどのような現象になっているのか考察しておこう。この場合には

$$\cos^2 \theta_1 = 1 - \sin^2 \theta_1 = 1 - \kappa^2 \sin^2 \theta_0 < 0 \quad \rightarrow \quad \cos \theta_1 = i \sqrt{\kappa^2 \sin^2 \theta_0 - 1} = i \kappa \beta, \quad \beta \equiv \sqrt{\sin^2 \theta_0 - \frac{1}{\kappa^2}} \quad (10.53a, b, c)$$

と置くと

$$p_1^{(1)} = \sin \theta_1 = \kappa \sin \theta_0, \quad p_2^{(1)} = -\cos \theta_1 = -i \kappa \beta$$

となるので、反射 P 波の変位成分は

$$u_i^{(1)} = A_1 d_i^{(1)} \exp\{i k_1 (x_1 p_1^{(1)} + x_2 p_2^{(1)} - c_L t)\} = A_1 d_i^{(1)} \exp(k_0 \beta x_2) \exp\left\{i k_0 \sin \theta_0 \left(x_1 - \frac{c_L}{\kappa \sin \theta_0} t\right)\right\} \quad (10.54)$$

となる。この波は x_1 の正方向に進む波ではあるが、深さ方向の $x_2 < 0$ の領域では $\exp(k_0 \beta x_2)$ のように指数関数的に振幅が小さくなる波になっている。すなわち、浅い部分においてのみ顕著な振幅を持つ波になっている。表面のみで顕著な波なので表面波と呼ばれている。これについては次節で検討しよう。

演習問題 10-2

3. 総和規約とコンマ表記の練習のために式 (10.12) (10.13) から式 (10.14) の左辺を求めてみよ。
4. $x_2 = 0$ を挟んだ上半分のせん断弾性係数が μ_B で、下半分のそれが μ であるような、図 10.9 に示した無限領域を対象とする。この領域に、左下から SH 波が θ_0 で入力 ($n = 0$) した場合の、反射 SH 波 ($n = 2$) と透過 SH 波 ($n = 4$) の特性を求めよ。特に、透過する波の振幅の増幅率 $\frac{A_4}{A_0}$ と角度 θ_4 を用いて、地震波の増幅の仕方と角度の変化について議論したい。文献 [116] には表 10.1 に示したような地盤における基盤の加速度記録と表層の加速度記録が示されており、その加速度振幅の増幅率は 2.8 倍になっている。これを、最初に表面に到達する SH 波の増幅率を用いて計算してみよ。なお、簡単のために最初以外の反射波は無視していい。入射角度は $\theta_0 = 0$ と 60 度の場合について求めてみよ。

表 10.1 地盤特性

層	ρ (kg/m ³)	μ (MN/m ²)
表層	1500	12
第 2 層	1670	28
第 1 層	1850	56
基盤	1950	490

10.3 表面波

10.3.1 Rayleigh 波

図 10.10 のように、 x_1 方向に進む波ではあるが、その振幅が x_2 方向に向かって指数関数的に小さくなるような波⁷が存在できるかどうかについて考えてみよう。ここでは x_2 は下向きを正にしてあり、 $x_2 = 0$ の水平面は自由表面とする。この運動に対応した変位成分 (運動場)

$$u_1 = A \exp(-b x_2) \exp\{i k (x_1 - c t)\}, \quad (10.55a)$$

$$u_2 = B \exp(-b x_2) \exp\{i k (x_1 - c t)\}, \quad u_3 = 0 \quad (10.55b, c)$$

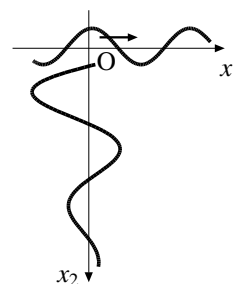


図 10.10 Raileigh 波

の存在の可能性を検討しようとしているのだ。ただし、深くなるほど振幅は小さくなるものとするため、少なくとも

$$\Re(b) > 0 \quad (10.56)$$

でなければならないものとする。ここに $\Re(\cdot)$ は実部を表す。

境界条件は $x_2 = 0$ で $\sigma_{22} = 0, \sigma_{21} = 0$ であるから、ひずみの定義と Hooke の法則を用いれば

$$(\lambda + 2\mu) u_{2,2} + \lambda u_{1,1} = 0, \quad \mu (u_{1,2} + u_{2,1}) = 0 \quad (10.57a, b)$$

⁷ もちろんこの図は式 (10.55) をプロットしたものではなく、特に深さ方向の図は、この方が直感的にわかり易いのではないかと考えたイメージである。

になる。また運動方程式は式 (10.14) から

$$(\lambda + \mu) (u_{1,1} + u_{2,2})_{,1} + \mu (u_{1,11} + u_{1,22}) = \rho \ddot{u}_1, \quad (10.58a)$$

$$(\lambda + \mu) (u_{1,1} + u_{2,2})_{,2} + \mu (u_{2,11} + u_{2,22}) = \rho \ddot{u}_2 \quad (10.58b)$$

である。式 (10.55a) (10.55b) を式 (10.58) に代入して $\exp \{ik (x_1 - ct)\}$ の係数同士を比べると

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) ik \{ikA - bB\} + \mu \{(ik)^2 + (-b)^2\} A &= \rho (-ikc)^2 A, \\ -(\lambda + \mu) b \{ikA - bB\} + \mu \{(ik)^2 + (-b)^2\} B &= \rho (-ikc)^2 B \end{aligned}$$

が成立しなければならない。したがって

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu) \{-k^2 A - ikbB\} + \mu (b^2 - k^2) A + \rho k^2 c^2 A &= 0, \\ (\lambda + \mu) \{-ikbA + b^2 B\} + \mu (b^2 - k^2) B + \rho k^2 c^2 B &= 0 \end{aligned}$$

つまり

$$\begin{pmatrix} -k^2 (\lambda + \mu) + \mu (b^2 - k^2) + \rho k^2 c^2 & -(\lambda + \mu) ikb \\ -(\lambda + \mu) ikb & (\lambda + \mu) b^2 + \mu (b^2 - k^2) + \rho k^2 c^2 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10.59)$$

でなければならない。右辺が零なので、解が存在するためには係数行列が特異でなければならない。つまり

$$\det \begin{pmatrix} -k^2 (\lambda + 2\mu) + \mu b^2 + \rho k^2 c^2 & -(\lambda + \mu) ikb \\ -(\lambda + \mu) ikb & b^2 (\lambda + 2\mu) - \mu k^2 + \rho k^2 c^2 \end{pmatrix} = 0$$

となるので、これを c_L と c_T を用いて書き直せば

$$\det \begin{pmatrix} -k^2 c_L^2 + b^2 c_T^2 + k^2 c^2 & -ikb (c_L^2 - c_T^2) \\ -ikb (c_L^2 - c_T^2) & b^2 c_L^2 - k^2 c_T^2 + k^2 c^2 \end{pmatrix} = 0$$

であればいいことになる。これを整理すると

$$\{c_T^2 b^2 - k^2 (c_T^2 - c^2)\} \{c_L^2 b^2 - k^2 (c_L^2 - c^2)\} = 0 \quad (10.60)$$

を満足するような c と b_1, b_2 が存在すれば、表面波の存在が可能になる。この式から、まず

$$b_1 = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_L^2}}, \quad b_2 = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}} \quad (10.61a, b)$$

という関係が成立する。 $c_L > c_T$ であり、式 (10.56) のように $\Re(b) > 0$ でなければならないことから、この式 (10.61) の形は

$$c < c_T < c_L$$

であることを示唆している。式 (10.59) も c_L, c_T を用いて書き直すと

$$\frac{B}{A} = \frac{k^2 (c^2 - c_L^2) + b^2 c_T^2}{ikb (c_L^2 - c_T^2)}, \quad \text{あるいは} \quad \frac{B}{A} = \frac{ikb (c_L^2 - c_T^2)}{k^2 (c^2 - c_T^2) + b^2 c_L^2}$$

と表すことができるので、これに式 (10.61) を代入すると

$$\left(\frac{B}{A}\right)_1 = \frac{ib_1}{k} = -\frac{b_1}{ik}, \quad \left(\frac{B}{A}\right)_2 = -\frac{k}{ib_2} = \frac{ik}{b_2}$$

と求められる。この関係を用いると、変位成分は

$$u_1 = \{A_1 \exp(-b_1 x_2) + A_2 \exp(-b_2 x_2)\} \exp\{ik(x_1 - ct)\}, \quad (10.62a)$$

$$u_2 = \left\{ -\frac{b_1}{ik} A_1 \exp(-b_1 x_2) + \frac{ik}{b_2} A_2 \exp(-b_2 x_2) \right\} \exp\{ik(x_1 - ct)\} \quad (10.62b)$$

と求められる。ここまでは運動方程式を料理しただけで、まだ境界条件を考慮していない。

あとは波の速さ c を決定すればいいわけだが、それを決定する方程式が境界条件から求められるのだ。つまり、式(10.62)を境界条件式(10.57)に代入すれば

$$(\lambda + 2\mu) \left\{ \frac{b_1^2}{ik} A_1 - ik A_2 \right\} + \lambda ik (A_1 + A_2) = 0, \quad \{-b_1 A_1 - b_2 A_2\} + ik \left\{ -\frac{b_1}{ik} A_1 + \frac{ik}{b_2} A_2 \right\} = 0$$

となり、 c_L, c_T を用いると

$$c_L^2 \left\{ k \left(1 - \frac{c^2}{c_L^2} \right) A_1 + k A_2 \right\} - k (c_L^2 - 2c_T^2) (A_1 + A_2) = 0, \quad -2b_1 A_1 - \left(b_2 + \frac{k^2}{b_2} \right) A_2 = 0$$

と書き換えられる。これを整理すると

$$(2c_T^2 - c^2) A_1 + 2c_T^2 A_2 = 0, \quad -2b_1 A_1 - \frac{k^2}{b_2} \left(2 - \frac{c^2}{c_T^2} \right) A_2 = 0$$

と表すことができる。つまり

$$\begin{pmatrix} 2 - \frac{c^2}{c_T^2} & 2b_2 \\ 2b_1 & k^2 \left(2 - \frac{c^2}{c_T^2} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2/b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が意味のある解 A_1, A_2 を持つことができれば、表面波が存在できることになる。したがって、この上式の係数行列が特異になる条件から

$$k^2 \left(2 - \frac{c^2}{c_T^2} \right)^2 - 4b_1 b_2 = 0 \quad \rightarrow \quad k^2 \left(2 - \frac{c^2}{c_T^2} \right)^2 - 4k^2 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_L^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}} = 0$$

つまり

$$R(c) \equiv 4 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_L^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}} - \left(2 - \frac{c^2}{c_T^2} \right)^2 = 0 \quad (10.63)$$

が成立しなければならない。この式の解 c が Rayleigh 波の速さ c_R である。ここで $0 < \varepsilon \ll 1$ に対して

$$R(c_T) = -1 < 0, \quad R(\varepsilon c_T) = 4 \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2 c_T^2}{c_L^2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2} - (2 - \varepsilon^2)^2 \approx 4 \left(1 - \frac{\varepsilon^2 c_T^2}{2c_L^2} \right) \left(1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \right) - 4 + 4\varepsilon^2 = 2\varepsilon^2 \left(1 - \frac{c_T^2}{c_L^2} \right) > 0$$

であることから、 $0 < c < c_T$ に少なくとも一つの実数解 c_R を持つことが期待できる。さらに複素関数論における「偏角の原理⁸」を用いて $R(c) = 0$ は 2 個の実数解しか持たないことが証明でき、 $R(c)$ が c^2 の関数であることから、その 2 個は符号のみが異なる二つの解であることがわかる。したがって、Rayleigh 波の速さは

$$0 < c_R < c_T < c_L \quad (10.64)$$

を満たすものとして唯一に決定できる。このような表面波は、地震が終わったあとに地球を 1 周して到達することがあるとされている。

⁸ すみませんが、理解できていません。Achenbach 先生の授業の宿題でも第 1 著者の答は間違っていた。

10.3.2 Love 波

前節の Rayleigh 波は SV 波的な表面波だったが、では、表面 SH 波は存在するだろうか。今度は面外変位を、式 (10.55a) や式 (10.55b) のように

$$u_3 = A \exp(-b x_2) \exp\{i k (x_1 - c t)\}$$

と仮定して確かめてみよう。運動方程式で意味のあるのは x_3 方向の

$$\mu (u_{3,11} + u_{3,22}) = \rho \ddot{u}_3 \quad (10.65)$$

のみだから、これに上式を代入して $c_T^2 = \mu/\rho$ を考慮すると、 $\exp(-b x_2) \exp\{i k (x_1 - c t)\}$ の係数同士の等価性から

$$-k^2 A + b^2 A = -\frac{k^2 c^2}{c_T^2} A \rightarrow \left\{ -k^2 + b^2 + \frac{k^2 c^2}{c_T^2} \right\} A = 0 \rightarrow b = k \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}} \quad (10.66a, b, c)$$

と求められる。また、境界条件は $x_2 = 0$ で $\sigma_{23} = 0$ つまり $u_{3,2} = 0$ であるから

$$u_{3,2}(x_2 = 0) = -b A \exp\{i k (x_1 - c t)\} = 0$$

となり、 $A \neq 0$ であるためには

$$b = 0$$

しかあり得ないことになる。つまり、面外波の表面波は存在しないことになる。

しかし、もし図 10.11 のように表面近くに材料特性が異なる層が存在した場合には、面外の表面波が存在し得ることがわかっている。そのような波を Love 波と呼ぶ。そこで、変位を

$$u_3 = \begin{cases} f(x_2) \exp\{i k (x_1 - c t)\}, & 0 > x_2 > -H \\ A \exp(-b x_2) \exp\{i k (x_1 - c t)\}, & x_2 > 0 \end{cases} \quad (10.67a, b)$$

と仮定する。ここに b と c は式 (10.66c) を満足しているものとする。境界条件は

$$u_{3,2}(x_2 = -H) = 0 \quad (10.68)$$

であり、 $x_2 = 0$ における u_3 と σ_{32} の連続条件は $\lim_{0 \leq \epsilon \rightarrow 0}$ に対して

$$u_3(0 + \epsilon) = u_3(0 - \epsilon), \quad \mu u_{3,2}(0 + \epsilon) = \mu_B u_{3,2}(0 - \epsilon) \quad (10.69a, b)$$

で与えられる。運動方程式は式 (10.65) を書き直して

$$u_{3,11} + u_{3,22} = \frac{1}{c_T^2} \ddot{u}_3, \quad x_2 > 0, \quad u_{3,11} + u_{3,22} = \frac{1}{(c_T^B)^2} \ddot{u}_3, \quad 0 > x_2 > -H \quad (10.70a, b)$$

である。ここに c_T^B は表層の波速で

$$c_T^B \equiv \sqrt{\frac{\mu_B}{\rho_B}} \quad (10.71)$$

と定義した。

まず $x_2 > 0$ の運動方程式に式 (10.67b) を代入すると式 (10.66c) が求められる。次に層の中を考えよう。式 (10.67a) を式 (10.70b) に代入すると

$$\left\{ -k^2 f(x_2) + f''(x_2) \right\} \exp\{i k (x_1 - c t)\} = -\frac{k^2 c^2}{(c_T^B)^2} f(x_2) \exp\{i k (x_1 - c t)\}$$

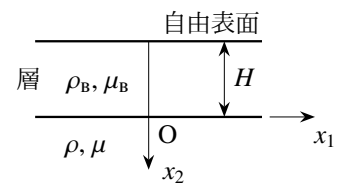


図 10.11 Love 波

となるので, $f(x_2)$ は

$$f'' + q_B^2 f = 0, \quad q_B \equiv k \sqrt{\left(\frac{c}{c_T^B}\right)^2 - 1} \quad (10.72a, b)$$

を満足しなければならない。したがって $f(x_2) = B_1 \sin(q_B x_2) + B_2 \cos(q_B x_2)$ と求められ

$$u_3 = \{B_1 \sin(q_B x_2) + B_2 \cos(q_B x_2)\} \exp\{ik(x_1 - ct)\} \quad (10.73)$$

を得る。次に $x_2 = -H$ における境界条件にこの解を代入すると

$$u_{3,2}(x_2 = -H) = q_B \{B_1 \cos(q_B H) + B_2 \sin(q_B H)\} \exp\{ik(x_1 - ct)\} = 0$$

となるので

$$B_1 \cos(q_B H) + B_2 \sin(q_B H) = 0 \quad (10.74)$$

を満足しなければならないことになる。

また $x_2 = 0$ における連続条件は, 式 (10.69) に式 (10.67b) と式 (10.73) を代入して, $\exp\{ik(x_1 - ct)\}$ の係数同士を比べれば

$$B_2 = A, \quad \mu_B q_B B_1 = -\mu b A \quad (10.75a, b)$$

になる。したがって, 式 (10.74) (10.75) から A を消去した残りの 2 式を並べると

$$\begin{pmatrix} \mu_B q_B & \mu b \\ \cos(q_B H) & \sin(q_B H) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

を得るので, 意味のある B_1, B_2 が存在するためには

$$\mu b \cos(q_B H) - \mu_B q_B \sin(q_B H) = 0 \quad \rightarrow \quad \tan(q_B H) - \frac{\mu b}{\mu_B q_B} = 0$$

でなければならない。これに式 (10.66c) (10.72b) の b と q_B を代入して得られる

$$L(c) \equiv \tan \left\{ k H \sqrt{\left(\frac{c}{c_T^B}\right)^2 - 1} \right\} - \frac{\mu \sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_T}\right)^2}}{\mu_B \sqrt{\left(\frac{c}{c_T^B}\right)^2 - 1}} = 0 \quad (10.76)$$

が, Love 波の速さ c を決定する方程式になる。 $c_T > c_T^B$ のとき式 (10.76) は

$$L(c = c_T) = \tan \left\{ k H \sqrt{\left(\frac{c_T}{c_T^B}\right)^2 - 1} \right\} > 0, \quad L(c \rightarrow c_T^B) = -\infty$$

となるので, $c_T^B < c < c_T$ に一つの解が存在することが期待できる。この結果を見たとき, ここまでに見た位相速度を持つ特徴とはかなり違った特性を Love 波の位相速度が持っていることに気付いて欲しい。平面波や Rayleigh 波の場合の位相速度 c は波数 k とは独立していた。しかし Love 波の場合は, 式 (10.76) から明らかなように波速 c が波数 k の関数になる。したがって, 複数の異なる波数でできた Love 波が伝播するときには, 波数毎に異なる位相速度で伝わるため, 最初の波の形が崩れながら伝播することになる。このような波は分散的であると呼ばれる。

さてどうでしょう。何か興味を持てる情報が得られたでしょうか。波の速度には群速度というものもありますが, それは何でしょう。非破壊評価の勉強をしている人達は, 実空間ではなく Fourier 変換された空間で物理を

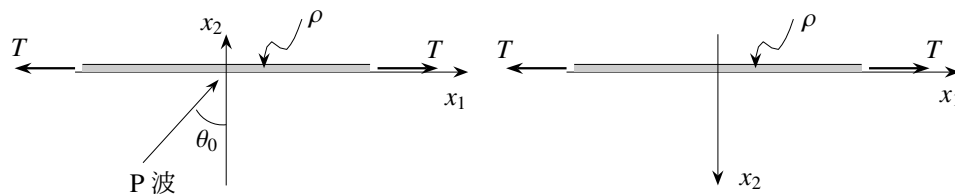


図 10.12 拘束された表面がある半無限領域における平面波と表面波

考えるようだ。よき師とかなりの覚悟が無いと、この分野の勉強はできないと思ってもいいのかもしれない。土木系のトップクラスの研究の基礎については文献 [139] で触れることができるので、是非勉強してがんばって欲しい。一つ面白い事実を述べておこう。内臓のエコー検査というのがある。例えば心臓の場合は動いている状況を画面で確認できるし、ドップラー効果を使って血液の流れそのものも目の当たりにすることができる。しかしこの画像は偽者なんだそうだ。例えば RC 橋梁のようなものと比べてとき、人間の体の組成はとても単純なので簡単に「積分」できるというのだ。だから、エコー検査の心臓の動き等がまるで本物のように見えているが、あれは逆問題が簡単に解けているだけらしいのだ。面白い。

演習問題 10-3

5. 図 10.12 の左に示したように、半無限領域の・・・文献 [1] の問題から。
6. 図 10.12 の右に示したように、半無限領域の・・・文献 [1] の問題から。

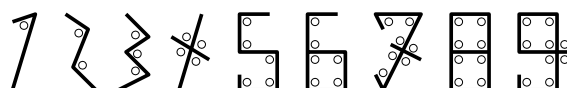
‘syllabus,’ ‘office hours,’ ‘portfolio,’ ‘effort,’ ‘faculty development,’ ‘good practice,’ ‘manifesto’ ‘initiative,’ ‘solution,’ ‘action plan’ and ‘front runner:’ うーん。全部が大学や学協会・省庁の文書中で、もちろん「カタカナ」で使われるし、‘hours’ の ‘s’ は省略される。講義順概要とか面談時間帯・通信簿・従事割合・教員啓発研修・良好な実証的取組み・所信表明（正確にはそうじゃないらしいがどうでもいい）・先導的取組み・解決策（これは複数の表現がありそうなので本当の意味が理解できていない）・実行計画・第一線の人物じゃ駄目なんだろうか。ところで某大学工学部の syllabus の多くの記述には「第 5 回 構造と環境 1」「第 6 回 構造と環境 2」等とある。全くと言っていいほど何の役にも立たない「講義題目」だけが並んでいる。とても syllabus とは呼べない状況にある。



写真 10.1 琵琶湖疎水のアーチ 京都南禅寺



‘アラビア数字:’⁹ その起源についてはインターネットにもいろいろ示されているが、以前、チュニジアの留学生¹⁰から聞いたものもってもらいなので、ここに示しておこう。「画数」に関連付けたものによく似ている。我が国やヨーロッパでは‘7’がときどき‘𐌺’と書かれる。これはアメリカ合州国では受け入れられないが、なぜ腹に斜めの線があるのだろう、という疑問に答えてくれる。



以前ある丸秘の作業中、数字の書き方、特に‘4’について理学部・工学部の先生達の間で議論が始まったとき、この順番でお教えして最後に「だから‘0’は・・・」と楕円を描いたところ、みなさんとても喜んでくださった。となると、上方で線のつながった‘4’には6個の角が存在してしまう。しかし、アメリカ人が‘6’を‘𐌺’と書く（という記憶があるが?）のは‘4’と紛らわしい。

⁹ T 大学（故意にちょっと面白くするために、ややまずい引用をすると「T は必ずしも大学名のアルファベットの頭文字に対応するとはかりは限らないという可能性もわずかに残されている」そうだが）の須藤靖先生の「著名な」随筆にアラビア数字の話題が出たとき、失礼ながらメールでこのコラムの内容をお伝えしたのだが、単行本化された随筆 [148] では後日談として第 1 著者（仙台の匿名希望さん）からの情報を加筆して下さっていた。見つけたときとても嬉しかった。

¹⁰ この学生さんはとても面白い人で、何か頼むと「どーんと (Don't) 任せなさい!」と応えてくれていた。

第 III 部

非線形の静力学



Machinac 橋, Michigan 州 1957 年竣工



1985, 1987 年当時の児島坂出ルート

第 11 章

塑性序論 — 時間が関与しない増分の力学

11.1 非可逆変形と 1 次元塑性モデル

11.1.1 非可逆変形と破壊

(1) 塑性と延性破壊

まっすぐな針金のある 1 箇所を力任せに曲げると、手を離しても元のまっすぐな状態には戻らない。さらに、折れ曲がった部分は他の部分よりも硬くなっている、そこを平らな机の上に押し付けたりしても元のまっすぐな状態に戻すのは困難だ。また、一度曲げた部分付近を逆向きに曲げたりする変形を繰り返すと曲がった部分が少し暖かくなり、最終的には破断することがある。このような非可逆的特性を非弾性と呼ぶが、特に、力を抜いたときの形と元の形の差である残留変形が時間と共に変化しない場合には、その残留変形量を塑性変形と呼ぶ。残留変形が生じるということは、曲げるために入力したエネルギーの一部が、元の形に戻すため以外のエネルギー（熱）として散逸してしまったことを意味しており、これが温度の上がる理由である。ちなみに残留変形が時間と共に変化する場合には、その特性を粘性と呼ぶ。図 11.1 では、一番左側の図に示した応力履歴が生じた場合にそれぞれの材料に生じる変形履歴を比較した。

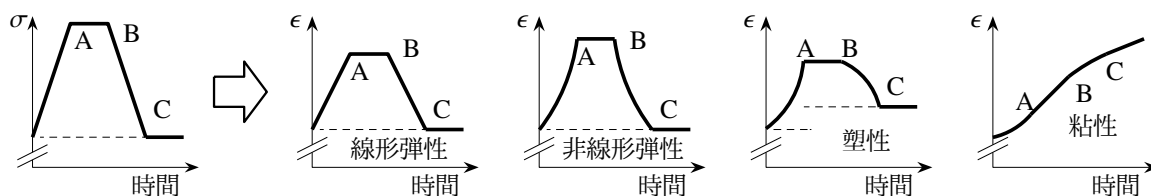


図 11.1 弾性と塑性・粘性の違いの概要：縦軸のスケールは気にしないこと

塑性論は鋼等の結晶金属を対象として発展した基本的かつ合理的な理論である。この章でも第 11.4.2, 11.4.3 節のモデル以外は主に結晶金属を対象としている。さて、その結晶金属の微視構造は原子の規則的な格子になっていてその結合力はかなり大きいはずなので、いかに針金といえどもそんなに容易には非可逆変形は生じないと思うかもしれない。しかし実際には、図 11.2 のような内部欠陥が無数に分布していて悪戯をするのだ。図の A から E を矢印方向に眺めたのが左側の丸の中で、この E のすぐ上にある点線で示した面をベリッと引き剥がした状態を斜め上から眺めたのが

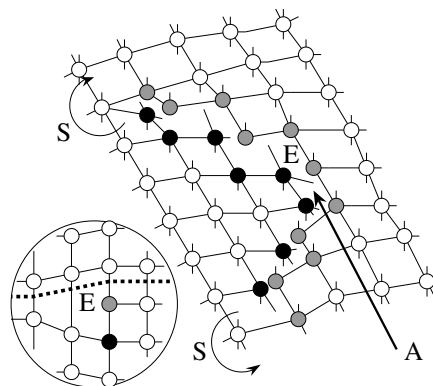


図 11.2 結晶構造の内部欠陥

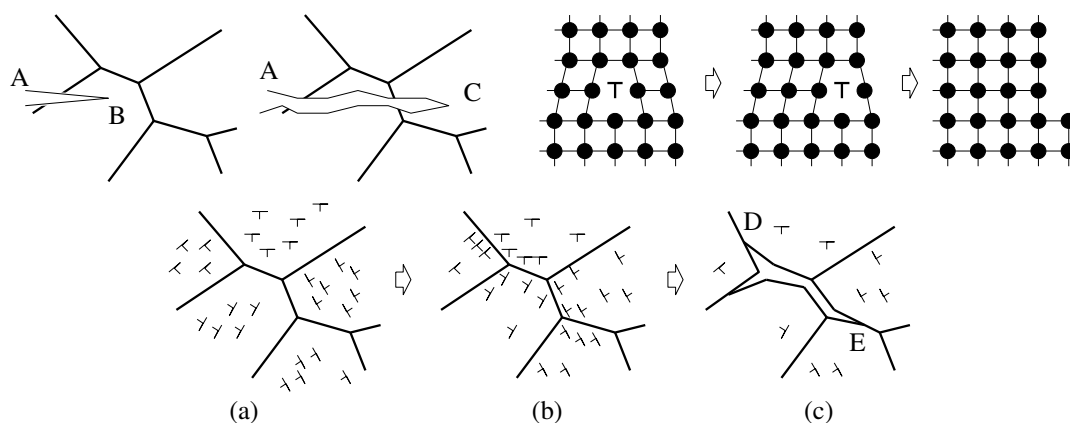


図 11.3 3 種類の破壊形態の微視的な違い

その右側の図である。二つある S の箇所では、ある原子面（黒丸のある下の階）からその上の原子面（その上の網掛け丸のある階）へとらせん階段のようにつながっている。したがって E 付近にある網掛け丸の原子とそのすぐ下にある黒丸の原子とのそれぞれの位置から図の左の方に移動していくと、S の位置で出会うことになる。この S のような欠陥をらせん転位と呼び、E のような欠陥を刃状転位と呼んでいる。黒丸の格子点をつないだ面（1 階）と網掛け丸の格子点をつないだ面（2 階）との隙間をつないだ曲線を転位線と呼ぶが、透過電子顕微鏡ではこれが黒い曲線として観察できる。そして面白いことに、力を加えるとこの転位線が移動するのだ。そして力を逆向きにすると逆方向に移動する。しかしこの転位が界面や表面に達すると、その位置で新しい界面・表面になってしまい動けなくなる。この表面が作られるときにエネルギーが放出されて熱が出る。これが非可逆的に残留変形が生じる微視的な仕組みのモデルの一つである。

さて上述の（常温環境下の）針金の実験では、繰り返し何度も曲げないと破断までは至らなかった。これは、延性や靱性と呼ばれる特性のために粘り強くなっているのだ。金属材料の破壊には次のような特性が関係する。

脆性: 普通のガラスのようにほとんど変形しないままパリンと壊れる特性を脆性と呼び、鋼等の場合は低温環境下で特に顕著になる。

靱性: なかなか破壊せず（エネルギー的に）粘り強く変形し続ける特性を靱性と呼ぶ。

延性: 例えば引張試験の破断までの主に塑性変形が大きくなることができる性質を延性と呼ぶ。この章の塑性論とは、この延性をモデル化するための数理科学である。

靱性と延性の違い: ただし、延性の高い材料が靱性も高いとは限らない。というのも、靱性は材料の内部欠陥周辺の微視的な破壊エネルギー的な抵抗の大きさを表すのに対し、延性は単純に延び易さを示しているからだ。

このような特性に関連して、主に次のような三つの破壊形態がある。

脆性破壊: 変形がそれほど大きくならないうちに壊れることを脆性破壊と呼ぶ。ちょうどガラスが割れるようなものだと考えればいい。図 11.3 の左上に描いたように、何らかの原因によって材料中に亀裂 AB が存在した場合で、さらにその亀裂先端の微視的な延性が小さい場合は靱性が低いので短時間で亀裂が（ある結晶面方向に）伸び続け、材料表面まで達すると破壊する。亀裂先端の延性が小さいため、その塑性変形も小さいまま破断するので、脆性破壊した材料の破面は目の細かい（大きい番手の）紙やすりくらいに「ザラザラ」している（ガラスの場合は「ツルツル」）のが普通である。

延性破壊: 同様の亀裂があっても、その先端の微視的な延性が大きい場合には、その塑性変形によって亀裂進展がある程度阻害される。そのため左上の二つ目の図のCまでの経路のように亀裂先端に塑性変形を伴いながら伸びて破壊する。一方、亀裂が無い場合は転位の集積等が関係していると考えられている。前述の刃状転位を簡単に描いたのが図 11.3 の右上に示した格子配置の三つの状態である。その左図のような位置にある刃状転位は外力の作用で中央の図のように移動できる。この格子の右端が界面あるいは表面だとすると、さらに外力を作用させて転位がそこに移動するとその右の図のように一格子面分だけ外に飛び出して、もう元には戻らなくなって残留変形になる。このときできる新しい表面からエネルギーが放出される。この転位は図 11.3 の左下の図 (a) のように、単結晶粒中に¹無数に分布して自由に動くことができる。そして外力レベルが上がるにつれて、中央の図 (b) のように転位が界面あるいは介在物周辺等に集まる。外力の増加に伴って、それが右の図 (c) のように転位は界面の新しい表面になり、同時に大きく塑性変形をしながら剥離して空隙になり、最終的にこの空隙等がつながって破壊する。このような比較的大きな塑性変形を伴う破壊を延性破壊と呼ぶ。延性破壊した材料の破面は塑性変形のために元の形（角度や面積）をほとんど留めず凸凹で「ゴツゴツ」しているのが普通である。触ると痛い。

疲労破壊: もう一つ、例えば鋼の場合には疲労破壊と呼ばれる破壊形態がある。これは材料の微視的な内部欠陥周辺の微視的な脆性破壊が徐々に進展して起こる。つまり図 11.3 の左上のような状態にある材料が脆性破壊と同じように亀裂の進展を伴うが、1回の外力の作用では亀裂が材料表面までには達することがなく、徐々に伸びていった場合の破壊形態である。亀裂が少しずつ伸びるので、疲労破壊した材料の破面は「縞々^{しましま}」になっており、貝殻模様や波に洗われた砂浜の模様（ビーチマーク）が残るのが普通だ。

このように、脆性破壊と疲労破壊の二者は延性破壊とメカニズムが異なっていることが明らかで、前二者を勉強するには破壊力学を学ぶ必要があるが、著者は苦手なので付録 E にその基礎だけを列挙した。なおこの章は主に Northwestern 大学の Nemat-Nasser 先生 (1980 年頃当時) の ‘Plasticity’ の講義ノートを参考にした。

さて、車体等をプレスして製造する塑性加工をシミュレートするためや、材料が実際に破断して構造の崩壊までを設計時に予測するためには、材料によってはひずみが数十%以上までに至る状態をモデル化する必要がある。大変形（有限変形）状態までを対象として取り扱わないといけない場合が多い。しかし、そのような扱いについては第 12 章を参考にして欲しい。この章では、その塑性変形を記述する材料モデルの考え方や物理的な意味そのものを理解して欲しいので、いわゆる微小変形理論の枠組の中で、上述のような塑性変形を伴う材料特性の数理的な記述の仕方を説明する。

(2) 実験観察

まず、鋼の最も単純な 1 軸引張試験等で観察される事実には次のようなものがある。

1. ある外力レベルに至るまでの変形はほぼ弾性だが、あるレベルで塑性変形が大きくなり始める。そのあとの例えば図 11.4 の点 U のように塑性変形が生じた状態で荷重を取り去ると、そこに至るまでに経験した変形経路を元に戻るのではなく、太い矢印で示したような別の変形経路をたどる。このとき転位はほとんど動かず結晶格子そのものの伸び縮みと歪みが元に戻るだけなので、ほぼ弾性挙動を示す。このように、応力ひずみ関係には一対一関係が成立しない上に、同じ応力状態で生じようとする（増分）変形特性が唯一ではない。

¹ 単結晶毎に結晶面の向きが異なるから界面には最初から転位が存在しているが、図には省略した。

2. その取り去った荷重を再度同じ方向に載せると、図の細い矢印で示したようにほぼ弾性応答をしたあと、点 U に近づいた時点で塑性変形がさらに大きくなる。つまり、転位を動かすための「力」があるレベルに達したときに塑性変形は増加するのであって、全体の「変形」があるレベルに至って塑性変形が生じるわけではないのだ。
3. 塑性変形を生じさせ続けると、弾性変形²とは異なり、ほとんどが非線形の応答を示す。これは内部の微視構造が転位の移動や集積によって変化するからと考えればいい。
4. ただし、鋼球を例えば日本海溝に沈めた場合、もちろん深海では大きな水圧のために体積が変化して縮んでいるものの、それを海面に戻すと元の径を持つ球に戻る（とは、見てきたかのような嘘だが）。つまり、等方的な外力载荷（静水圧状態あるいは等方応力状態）では転位は動かないので塑性変形はほとんど³生じない。つまり塑性変形は本質的にはせん断変形であってせん断力の作用と密接に関係していると考えられる。
5. 1 方向に大きく塑性変形が生じてしまった材料を、続いて別の方向に変形させていくと、最初の载荷方向に塑性変形が発生し始めた応力レベルよりも低い応力レベルで塑性変形が生じる⁴ことがある。これも転位の移動等によって内部の微視構造が変化したからである。この特性を **Bauschinger** 効果と呼ぶ。ただし、第 11.4.1 節で説明する移動硬化則の節以外ではこの性質をモデルには含めていない。

これが数理的塑性論を構築するときの根拠となる基本的な事実であり、多くの弾塑性材料モデルの基本である。

ちなみに図 11.4 の 2 種類の曲線のうち下の曲線は軟鋼の応力ひずみ関係である。面白いことに踊り場と呼ばれる平らな履歴があるが、ここで起こっていることが図 11.3 の下の図 (a) から (b) への変化、つまり転位の移動と集積に対応している。一方、踊り場が終わったあとの曲線は正の勾配を持って硬くなっていくが、これは、図 11.3 の図 (b) に示したような集積した界面等の転位が動き難くなることにその原因がある。硬くなるので、前述の針金の実験のように塑性変形させたあと元のまっすぐな状態に戻るのが困難になるのだ。そのあとの応力ひずみ関係はピークを迎え、この前後で引張試験片は細くなり（絞りが

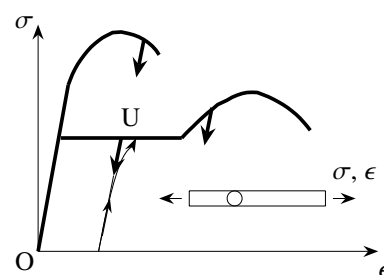


図 11.4 1 軸引張試験の変形履歴

生じ) 図 11.3 の (c) のような界面剥離等が生じて巨視的なすべり変形や微視空隙の生成が顕著になってくると考えられている。一方図 11.4 の上の曲線は高張力鋼が示す特性で、明確な踊り場が現れていない。これは内部の結晶粒径の違い等によって転位の移動量が少なくなっているからだと考えられている。

11.1.2 1次元の塑性モデル

(1) 基本的なモデル

ここではまず 1 次元の変形状態を対象にして、基本的な塑性モデルとその記述の仕方を説明する。前節の実験観察から判断して、次のように考えられる。

- まずは塑性変形が生じ始める規準（後述の降伏条件）が必要だ。それは前述のように変形で定義される規準ではなく、転位を動かそうとする応力状態で規定されなければならない。しかも観察項目 4 から明

² ゴムのように非線形挙動をする弾性体も無数に存在する。

³ 砂・岩・複合材料のような内部に微視構造を持つ材料では等方応力下でも塑性変形が生じる。鋼も多結晶材料であり内部に微視構造を持つが、等方応力状態の塑性変形は非常に小さいと考えている。

⁴ 非均質性が助長するため、特に内部に微視構造を持つ場合 (例えば文献 [50, 60]) に生じ易い。

らかなように、応力のうちの等方応力成分（静水圧成分）は塑性には関与しないから、せん断応力に関係した量、例えば式(3.43)で定義される偏差応力を用いてそれを記述する必要がある。

- また観察項目1から明らかなように、一対一関係が成立しない塑性の応力ひずみ関係では、同じ応力状態において「生じるかもしれない」変形が2種類ある。つまり、塑性変形が生じ続ける（後述の载荷状態）のか、あるいは弾性変形しか生じない（後述の除荷状態）のかの2種類である。したがって、ある応力状態でひずみの「変化」が2種類存在し得るし、変形履歴に依存した強い非線形挙動をする可能性も高いので、応力とひずみの関係だけではなく、応力とひずみの変化量、つまり「増分」についても記述する（後述の流れ則）必要が生じる。あるいは、その増分を用いた表現でないと本質的な塑性挙動はモデル化できない。

この二つ目の項はわかり難いかもしれない。例えば鋼の交番载荷試験等をして図 11.5 のような応力ひずみ関係が得られたとしよう。試験Ⅰは、まず引張ってA→B→C→D という履歴をたどったとする。次の試験Ⅱは、Aのあとに荷重を減らすのを少し遅らせてEへと至り、試験Ⅰの点Cと同じひずみレベル ϵ_1 に達したところで荷重を反転してFに至ったとする。さらに試験Ⅲではまず圧縮してG→H→K という履歴をたどったとする。このように、ある応力状態 σ_1 にある変形状態は、A, B, E, D, F, H, K の7種類も存在し、履歴依存の変形が生じていることが明らかだ。当然応力ひずみ関係には一対一関係も無い。また上述したように、増分同士（微分同士）の関係が表現できたとしても、その積分値が積分経路に依存するという事は、普通の定義ではそれを積分することはできない（積分の始点値と終点値だけでは求められない）はずだから

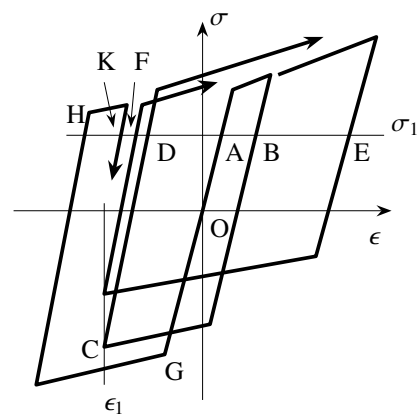


図 11.5 交番载荷の変形履歴

に、増分同士（微分同士）の関係が表現できたとしても、その積分値が積分経路に依存するという事は、普通の定義ではそれを積分することはできない（積分の始点値と終点値だけでは求められない）はずだから

$$\Delta\epsilon = F(\sigma, \epsilon)\Delta\sigma \quad \text{あるいは} \quad d\epsilon = F(\sigma, \epsilon)d\sigma \quad \nrightarrow G(\sigma, \epsilon) = 0$$

のように、応力とひずみの間の積分された関係式 $G(\sigma, \epsilon) = 0$ は存在しない。逆に、もし積分可能で $G(\sigma, \epsilon) = 0$ という非線形関係が成立するなら、応力とひずみが一対一には関係付けられないことは表現できていたとしても、それが履歴依存であることを表現することはできないことになってしまう。したがって増分で表現された塑性モデルの場合は、ひずみや応力の小さい増分毎の代数和で積分を置き換える必要が出てくるのだ。この履歴依存性については第 11.3.3 節に具体例を示すのであとで参照しておいて欲しい。

また塑性変形の発生規準に加えて増分についての規準も必要になることも初学者には難しいかもしれないので、これについては摩擦とすべりを例にして説明した第 3.4.5 (2) 節を参照して欲しいが、再度簡単に説明しておこう。図 11.6 に示したのは、ある斜めの力 F で消しゴムを押している状況である。ゴムの弾性的ため消しゴムは若干歪んでいるが、床と消しゴムとの間の静止摩擦係数 μ_s を通して、消しゴムがすべり始める可能性は条件式

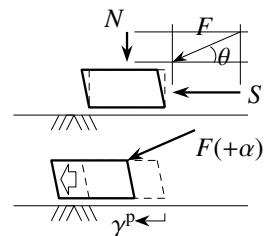


図 11.6 摩擦とすべり

$$f \equiv S - \mu_s N = F(\cos\theta - \mu_s \sin\theta) = 0 \tag{11.1}$$

で与えられるが、ここでは実際にはすべらないぎりぎりの状態だと考えて欲しい。これが後述する降伏条件に相当する。そして力やその向きが $+\alpha$ の変化をしたとき、例えば $F \rightarrow F \pm \Delta F, N \rightarrow N \pm \Delta N, S \rightarrow S \pm \Delta S, \theta \rightarrow \theta \pm \Delta\theta$ のように変化したとき

$$\Delta f > 0 \tag{11.2}$$

の条件を満足しようとしたときにすべり始める。これが後述の载荷状態の定義に相当する。そして、そのときの運動の向きは外力変動や作用の向きの変動とは無関係に、常に床に沿った方向、言い換えればせん断力 S の方向に

$$\Delta(\text{塑性的なすべり変形}) \equiv \Delta\gamma^p = \lambda \frac{S}{|S|}, \quad \text{つまり} \quad \Delta\gamma^p \parallel S, \quad \text{ただし} \quad \lambda = \lambda(F, S, \theta, \Delta F, \Delta S, \Delta\theta) \quad (11.3a, b, c)$$

のように生じる。これが後述の流れ則に相当する。上式の $\Delta\gamma^p$ の累積が図 11.6 の γ^p であり、常に $\lambda > 0$ である。そして、そのすべり運動は力を除いても元には戻らないから非可逆運動である。前述のような転位の移動はまさにこの摩擦面上のすべりのように見えるのだ。

(2) 剛・完全塑性体

塑性変形はせん断変形だと書いたが、基本モデルを構築する際に 1 軸引張試験を参照することが普通だ。これは図 11.7 のインセットに示したように、引張軸から 45 度回転した座標系で見れば、部分的にはせん断試験をしていることになるので問題は無いのだ。鋼等の主に終局状態を対象とするだけなら総変形量に対する弾性変形量は非常に小さいと考えていいから、最初は図 11.7 のように弾性変形が存在しない材料モデルを考えよう。この材料は材料パラメータとしての定数 $\tau_Y > 0$ より大きな抵抗力は持たないと仮定する。このような物体を剛・完全塑性体と呼んでいる。これは、図 11.4 の軟鋼のように踊り場を持つ材料を主に用いる構造力学で、構造の終局状態を簡便にモデル化する場合によく用いられる。また、荷重を取り去ろうとする状態を除荷状態と呼ぶが、実験観察に基づいて除荷経路は弾性経路と同じ特性を持つとするので、このモデルでは変形量には変化が生じない。

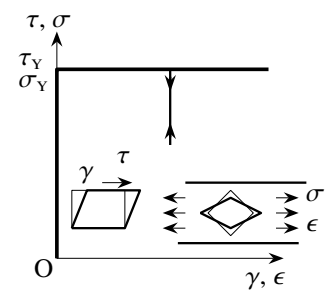


図 11.7 剛・完全塑性体

まず初期状態から荷重をかけた場合、図の縦軸の応力レベル τ_Y に達するまではひずみ γ は生じない。この応力 τ_Y を降伏応力と呼ぶ。基本モデルとして圧縮でも引張でも同じ応力レベルで降伏するものとする

$$|\tau| = \tau_Y \quad (11.4)$$

の条件を満足したときに塑性変形が生じ始める。この条件を降伏条件と呼んでいる。したがって $|\tau| < \tau_Y$ では弾性状態なので $\gamma = 0$ である。荷重が大きくなり降伏応力に達したあと、あるひずみが生じた状態で除荷すると、そこでも弾性変形しか生じないので、この剛・完全塑性体の場合にはひずみに変化が生じない。除荷というのは、例えば引張状態の $\tau = \tau_Y$ の応力状態で応力レベルを下げる変化 $\Delta\tau < 0$ を与えることなので、応力の正負両方で使える表現として除荷を $\tau \cdot \Delta\tau < 0$ となる瞬間として記述する。この除荷状態では上述のように $\Delta\gamma = 0$ だから、初期状態から降伏応力に達するまでの初期降伏前の変形特性も併せて、ひずみ増分に対しては

$$\Delta\gamma = 0 \quad \text{もし} \quad \begin{cases} |\tau| < \tau_Y & (\text{弾性状態}) \\ |\tau| = \tau_Y \quad \text{かつ} \quad \tau \cdot \Delta\tau < 0 & (\text{除荷の瞬間}) \end{cases} \quad (11.5)$$

と記述することができる。

これに対して材料が降伏する瞬間、あるいは降伏した状態を保持して塑性変形が生じ続ける場合の記述を検討しよう。このような変化状態を除荷に対比させて载荷状態と呼ぶ。除荷と同様の記述を用いると载荷は $\tau \cdot \Delta\tau = 0$ とすればいい。本当は $\tau \cdot \Delta\tau \geq 0$ としたいところだが、完全塑性では τ_Y が一定なので $\Delta\tau$ は零以外にはなれないことから、ここは等号のみにしてある。したがって、载荷は少なくとも

$$\Delta\gamma \text{ の符号} = \tau \text{ の符号} \quad \text{もし} \quad |\tau| = \tau_Y \quad \text{かつ} \quad \tau \cdot \Delta\tau = 0 \quad (\text{载荷の瞬間}) \quad (11.6)$$

と記述できる。あるいは式(11.10b)が適切な表現である。ただし $\Delta\gamma$ がいくつになるのかを決める規則はまだ導入できていない。あるいは第11.1.3節の構造系の例のように、境界値問題の答として $\Delta\gamma$ が求められる。

(3) 弾・完全塑性体

これに対し図11.8のように、剛・完全塑性体に弾性を考慮したものを弾・完全塑性体と呼ぶ。この場合は

$$\Delta\gamma = \frac{\Delta\tau}{\mu} \quad \text{もし} \quad \begin{cases} \{|\tau| < \tau_Y\} & \text{あるいは} \\ \{|\tau| = \tau_Y \text{ かつ } \tau \cdot \Delta\tau < 0\} \end{cases} \quad (11.7a)$$

$$\Delta\gamma \text{の符号} = \tau \text{の符号} \quad \text{もし} \quad \{|\tau| = \tau_Y \text{ かつ } \tau \cdot \Delta\tau = 0\} \quad (11.7b)$$

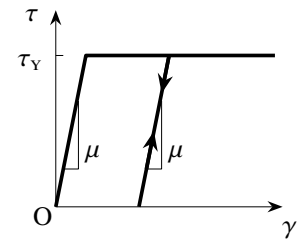


図11.8 弾・完全塑性体

と記述できるだろう。ここに μ はせん断弾性係数⁵である。実はもう少し詳細な記述が必要だが、それは次の弾・塑性硬化体の特別な場合($H' \equiv 0$)に相当するので、ここでは省略する。

(4) 弾・塑性硬化体

もっと一般的には、降伏後の抵抗力は一定とは限らず塑性変形に伴って大きくなるのが普通である。降伏後の抵抗力が変形に伴って大きくなることを硬化と呼ぶ。また弾・完全塑性体もそうだが、弾性を含む弾塑性材料の場合には、増分ひずみに弾性成分と塑性成分があるとみなし

$$\Delta\gamma = \Delta\gamma^e + \Delta\gamma^p \quad (11.8)$$

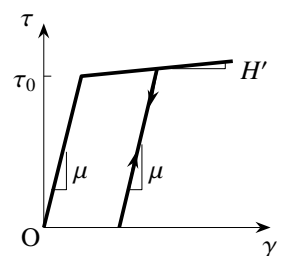


図11.9 弾・塑性硬化体

の加算が成立する。上添え字の‘e’と‘p’がそれぞれ弾性成分と塑性成分を表している。弾性はHookeの法則に従うものとする(暗黙のうちに γ を工学ひずみにしてあることには注意)

$$\Delta\gamma^e = \frac{\Delta\tau}{\mu} \quad (11.9)$$

が成立する。载荷の場合の塑性成分は、完全塑性体と同様 $\{\Delta\gamma^p \text{の符号} = \tau \text{の符号}\}$ とすればいいので、摩擦とすべりで説明したときに示した式(11.3a)と同じように

$$\Delta\gamma^p = \lambda \frac{\tau}{|\tau|}, \quad \text{あるいは簡単に} \quad \Delta\gamma^p = \lambda \tau, \quad \lambda > 0 \quad (11.10a, b, c)$$

と置くことにする。この関係の流れ則と呼んでいる。右辺に Δ が無いことは大事なことなので覚えておいて欲しい。この λ は材料パラメータ⁶ではなく、応力増分 $\Delta\tau$ にも関係した量である。以上をまとめると、弾性・除荷・载荷に対して

$$\lambda = 0 \quad \text{もし} \quad \{|\tau| < \tau_Y(\bar{\gamma}^p)\} \quad \text{あるいは} \quad \{|\tau| = \tau_Y(\bar{\gamma}^p) \text{ かつ } \tau \cdot \Delta\tau < 0\} \quad (11.11a)$$

$$\lambda > 0 \quad \text{もし} \quad \{|\tau| = \tau_Y(\bar{\gamma}^p) \text{ かつ } \tau \cdot \Delta\tau \geq 0\} \quad (11.11b)$$

と記述できる。ただし、降伏後の一定ではない抵抗力をモデル化するために、降伏応力 τ_Y は一定ではなく履歴に依存した関数になるとすればいいので、例えばここでは $\tau_Y(\bar{\gamma}^p)$ と記述した。 $\bar{\gamma}^p$ は $\Delta\gamma^p$ の何らかの積分量である。また降伏応力 τ_Y が一定ではないことから、载荷の条件を $\tau \cdot \Delta\tau = 0$ から $\tau \cdot \Delta\tau \geq 0$ に拡張してある。

⁵ この章では G ではなく μ でせん断弾性係数を表す。

⁶ もし λ が材料パラメータである場合の式(11.10b)は粘性抵抗則を表す。また λ はLamé定数でもないことに注意すること。この章では μ は使うがLamé定数の λ は用いない。

全ひずみ理論による近似: 一般には式 (11.8) にあるように, 増分ひずみの弾性成分と塑性成分の和が総増分ひずみ量になるが, ここではもう少し物理的な理解を深めるために, いわゆる全ひずみ理論で仮定されるように, 総ひずみ量同士にも同様の加算則が成立するという近似的な状況を考えておこう。これは微小変形の範囲で, 除荷が生じない線形硬化の 1 次元の単調載荷状態に限定すれば, あまり問題は無いだろう。そこで弾性則は従来通り

$$\gamma^e = \frac{\tau}{\mu} \quad (11.12)$$

の Hooke の法則を満足すると同時に, あくまでも近似的⁷⁾には

$$\gamma = \gamma^e + \gamma^p \quad (11.13)$$

が成立するものとする。図 11.9 から, 常に降伏状態にある正の応力は, ひずみと

$$\tau = \tau_0 + H' \left(\gamma - \frac{\tau_0}{\mu} \right) \quad (11.14)$$

の関係にあり, これに式 (11.12) (11.13) を代入すると

$$\tau = \tau_0 + \frac{H'}{\mu} \tau + H' \gamma^p - \frac{H'}{\mu} \tau_0$$

となるから, 整理すると

$$\tau = \tau_0 + \left(\frac{1}{H'} - \frac{1}{\mu} \right)^{-1} \gamma^p$$

という関係になる。この τ は降伏状態を常に満足していることから, 右边が $\tau_Y(\gamma^p)$ であり, さらに $\Delta\gamma^p$ が積分できるとしたので $\bar{\gamma}^p = \gamma^p$ と設定できて, これは $\tau_Y(\gamma^p)$ でいいことがわかる。つまり線形硬化する降伏応力は, 単純には

$$\tau_Y(\gamma^p) = \tau_0 + H \gamma^p, \quad H \equiv \frac{\partial \tau_Y}{\partial \gamma^p} = \left(\frac{1}{H'} - \frac{1}{\mu} \right)^{-1} \quad (11.15a, b)$$

のようにモデル化できる。 H はその硬化の変化率を与えるので硬化係数と呼ばれる材料パラメータである。

図 11.10 にその様子を描いた。このことから降伏状態を規定する降伏条件は

$$f(\tau) \equiv |\tau| - (\tau_0 + H \gamma^p) = 0 \quad (11.16)$$

と与えればいいことがわかる。 $f(\tau)$ を降伏関数と呼ぶ。これに対し H' は応力ひずみ関係上の弾性も含んだ見かけ上の硬化係数であり, 実験で測定できるのは H' の方であるが, 鋼等では $H' \ll \mu$ なのでほぼ $H \sim H'$ と考えてもいい。

このような仮定が成立する場合の λ の具体的な表現を求めておこう。簡単のために $\tau > 0$ で考える。降伏して常に載荷状態にあれば, 常に塑性ひずみ増分が非零で生じ続ける。このとき, 式 (11.16) の降伏条件は常に満足され続けなければならない。したがってその変化は零であり続ける。式 (11.16) の増分をとると, それは

$$\Delta f = \Delta\tau - H \Delta\gamma^p = 0$$

が成立し続ける。これを整合条件と呼ぶ。この最後の項に流れ則の式 (11.10b) を代入することによって

$$\lambda = \frac{\Delta\tau}{H\tau} = \frac{\Delta\tau \cdot \tau}{H\tau^2} \rightarrow \Delta\gamma^p = \frac{\tau \cdot \tau}{H\tau^2} \Delta\tau = \frac{\tau \cdot \tau}{H\tau_Y^2} \Delta\tau \quad (11.17a, b)$$

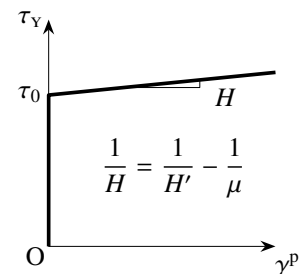


図 11.10 全ひずみ理論近似を併用した場合の硬化材の降伏応力の例

⁷⁾ 厳密には塑性ひずみ増分 $\Delta\gamma^p$ が積分できず次式の第 2 項が定義できないため「近似」と書いた。

と求められる。载荷状態では $\tau \cdot \Delta\tau > 0$ であるし、 H' は一般に弾性剛性 μ より小さいから $H > 0$ となるので $\lambda > 0$ が成立する。式 (11.17b) の表現では分子と分母に τ が乗じられた冗長な表現になっているが、これで τ の符号と無関係な表現になり、また後述の3次元表現との比較を容易にするために敢えて用いた表現である。最後の表現では、分母の τ^2 が降伏条件式 (11.16) を満足しているので τ_Y^2 で置き換えてある。なおここでは1次元モデルである上に全ひずみ理論を用いたため、式 (11.10b) の基本的な仮定『塑性ひずみ増分は応力と同じ向きにある』という根本原理とは異なり、塑性ひずみ増分が応力増分にそのまま比例した表現式 (11.17b) になっている（物理的には異なる表現に見える）ことには十分に注意しておいて欲しい。

11.1.3 弾・完全塑性材料でできた構造要素の例

(1) トラス部材

1次元応力状態の簡単な応用例は構造要素である。特に軟鋼の場合は初期降伏後に応力がほぼ一定のままひずみが急増するので、前述の弾・完全塑性モデルを適用できる。実際許容応力設計法では降伏応力を鋼の引張強度と考えているので、このモデルの利用は適切だろう。そこで文献 [105] の例からトラスと梁を対象とした代表的な結果を引用しておく。ただし、トラスや梁の場合にはせん断応力ではなく直応力の1次元応力状態にあるので、前節までの議論をすべて直応力で置き換える。また静的終局強度のみを求めるための単調载荷状態だけを対象とすることから、全ひずみ理論つまり増分を用いない表現が使えるものとする。つまり、弾性は Young 率を通して1次元の応力 σ とひずみ ϵ が線形の $\sigma = E\epsilon$ で表現されているものとし、降伏応力 τ_Y を σ_Y で置き換え、そのときの降伏ひずみを $\epsilon_Y \equiv \frac{\sigma_Y}{E}$ とする。

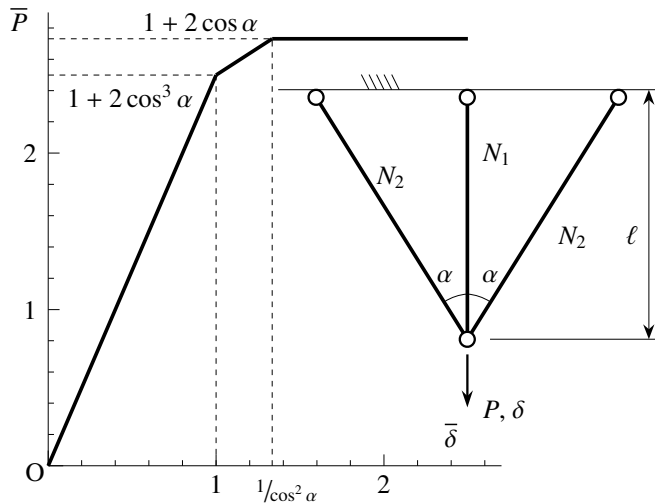


図 11.11 3本トラスの弾塑性挙動

図 11.11 に示した不静定トラスの支配方程式は、直応力が断面内で一樣なので

$$\text{つり合い式: } N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P$$

$$\text{変形の適合条件: } \delta = \frac{\delta_2}{\cos \alpha}, \text{ ただし } \delta_2 \text{ は斜材の伸び}$$

$$\text{構成則: 弾性状態では } N_1 = EA \frac{\delta}{\ell}, N_2 = EA \frac{\delta_2}{\ell/\cos \alpha}, \text{ 降伏後は } N_1 = \sigma_Y A, N_2 = \sigma_Y A$$

である。ここに A は断面積で3本とも同じとした。3本とも弾性状態であれば

$$\delta = \frac{P\ell}{EA} \frac{1}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

であるから

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2 \cos^3 \alpha} > N_2 = \frac{P \cos^2 \alpha}{1 + 2 \cos^3 \alpha}$$

となるため、鉛直材が先に降伏することがわかる。鉛直材が降伏するのは $\delta = \frac{\ell \sigma_Y}{E}$ のときで、そのあとは

$$\delta = \frac{\ell}{2EA \cos^3 \alpha} (P - \sigma_Y A)$$

という関係が成り立つ。さらに

$$P = P_p \equiv P_Y (1 + 2 \cos \alpha), \quad \delta = \frac{\ell \sigma_Y}{E \cos^2 \alpha}$$

に至って斜材も降伏し、そのあと δ は不定となる。この履歴を示したのが図 11.11 である。ただし

$$\bar{P} \equiv \frac{P}{A \sigma_Y} = \frac{P}{P_Y}, \quad \bar{\delta} \equiv \frac{\delta E}{\ell \sigma_Y} = \frac{\delta}{\ell \epsilon_Y}$$

と定義した。 $P_Y \equiv A \sigma_Y$ は初期降伏軸力である。この結論で重要なことは、不静定構造であっても最終的な荷重の終局荷重 P_p が弾性係数には依存しないということである。つまり剛・完全塑性モデルで終局荷重を求めることができる可能性を、この簡単な解析例は示している。これが、第 11.5 節で示す塑性解析や極限解析に通じていると考えて欲しい。設計においては便利で有用な情報である。

(2) 曲げ部材 — モーメント曲率関係

次に純曲げを受ける梁部材を対象とする。梁の場合は断面内で伸びひずみは三角形分布になると仮定しているので、それが崩壊まで成立するなら、矩形断面を例とすると対応する直応力は図 11.12 のような三つの状態になる。左端の図 (a) に至るまでが弾性状態であり、図 (b) の状態では中立軸から z_Y 離れた箇所までが弾性でその外側が降伏している。これが最終的には図 (c) の極限状態に至り、これ以上の外力には抵抗できないので、これが終局状態である。このとき曲げモーメント M と曲率 ϕ の関係を調べると、弾性状態では

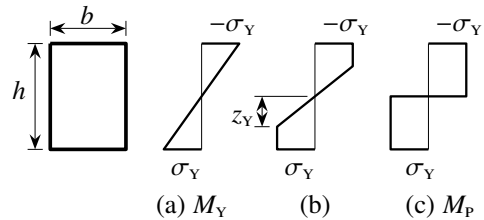


図 11.12 弾塑性状態の曲げ応力分布

$$M = EI \phi, \quad \sigma_e = \frac{M}{W_e}, \quad W_e \equiv \frac{I}{h/2}$$

という関係になる。ここに σ_e は最外縁応力の大きさであり W_e は断面係数である。図 (a) の状態は σ_e が降伏応力に達したときに相当するので、このときの曲げモーメントを M_Y (降伏モーメントと呼ばれる) とすると

$$M_Y \equiv W_e \sigma_Y = EI \phi_Y = \frac{bh^2}{6} \sigma_Y, \quad \phi_Y \equiv \frac{2\sigma_Y}{Eh} \quad (11.18a, b)$$

になる。ここに ϕ_Y は初期降伏時の曲率である。さらに荷重が増えて弾塑性状態 (図の (b)) になると

$$M = M_Y \left\{ \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\phi_Y}{\phi} \right)^2 \right\}, \quad z_Y = \frac{\sigma_Y}{E \phi} = \frac{h}{2} \frac{\phi_Y}{\phi}$$

が成立する。さらに曲率が無限大になる $\phi \rightarrow \infty$ で上図の (c) の極限状態

$$M \rightarrow M_p = \frac{bh^2}{4} \sigma_Y = \frac{3}{2} M_Y \quad (11.19)$$

に至る。この M_p は全塑性モーメントと呼ばれるが、これも弾性特性とは無関係である。

(3) 両端単純支持梁の曲げ

前節の結果を利用して図 11.13 の両端単純支持梁の 3 点曲げを解析する。中央断面が最初に降伏することは明らかであり、そのあと、この図のように中央付近の a の領域で断面の一部⁸が降伏する。左端から x 軸をとると、 $P > P_Y$ のとき $\frac{\ell - a}{2} < x < \frac{\ell}{2}$ の範囲で弾性部分の大きさは

$$z_Y = h \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{P x}{P_Y \ell}}, \quad P_Y \equiv \frac{4 M_Y}{\ell}, \quad \frac{a}{\ell} = 1 - \frac{P_Y}{P} \quad (11.20a, b, c)$$

⁸ 図 11.13 の降伏域はもう少し三角形に近いが、誇張して描いてある。

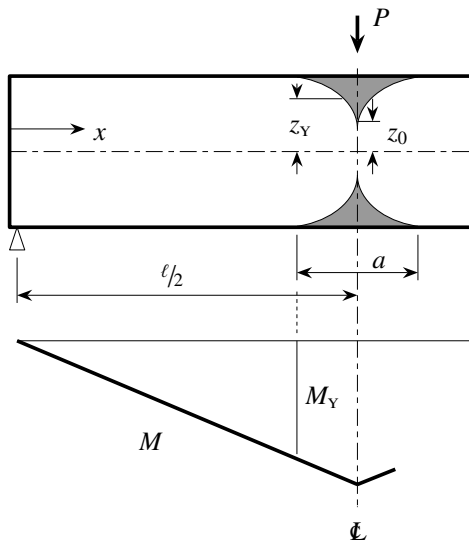


図 11.13 両端単純支持梁の3点曲げ

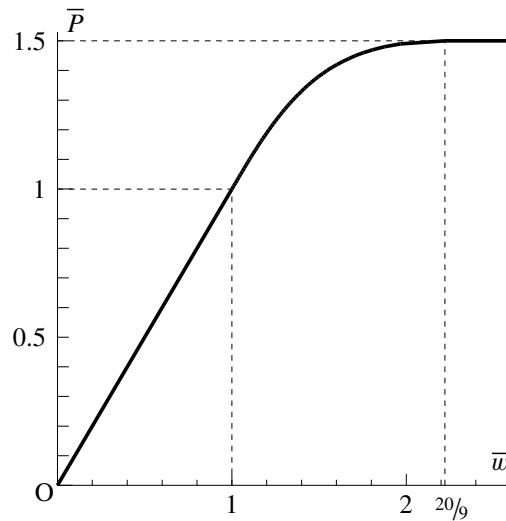


図 11.14 両端単純支持梁の弾塑性挙動

であり、中央のたわみ $w(\ell/2)$ は曲率を積分することによって $w(\ell/2) = \int_0^{\ell/2} \phi(\eta) \eta d\eta$ で算定できる⁹ので、結局

$$\bar{w} = \frac{1}{\bar{P}^2} \left\{ 5 - (\bar{P} + 3) \sqrt{3 - 2\bar{P}} \right\}$$

と求められる。ここに、中央が初期降伏するときの外力を P_Y として

$$\bar{w} \equiv \frac{w(\ell/2)}{\delta_Y}, \quad \delta_Y \equiv \frac{M_Y \ell^2}{12 EI}, \quad \bar{P} \equiv \frac{P}{P_Y}$$

と定義した。 δ_Y は中央断面が初期降伏するときの中央のたわみである。上式の平方根の中から明らかのように

$$P \leq P_p \equiv \frac{3}{2} P_Y = \frac{4 M_p}{\ell} \tag{11.21}$$

までしか解は存在せず、 $P = P_p$ に至ったときに $z_0 \equiv z_Y(\ell/2) \rightarrow 0$ 、つまりスパン中央で全断面降伏が生じてしまい、そこで梁が折れ曲がり、つまり曲率が無限大になり、それ以上の荷重には抵抗できなくなる。塑性変形の進展によって折れ曲がったということは、このスパン中央部がヒンジ状態になったのと同じなので塑性ヒンジがそこに生じたと称することが多いのだが、その抵抗モーメントは零ではなく M_p である。図 11.14 にその弾塑性挙動をまとめた。

もちろん梁にはせん断応力も生じているが、それが大きくなるのは直応力が比較的小さい中立軸付近である上に、その大きさは直応力よりも一桁くらいは小さいため、構造力学の範囲では以上の方法で設計することにほとんど問題は無い。実際3次元解析をした図 12.52 の片持ち梁固定端の数値解析結果と比較しても、図 11.13 の中央部の塑性域の拡がり方の精度がそれほど悪くないことがわかる。

演習問題 11-1

1. この節のトラスと梁の結果を求め、図 11.11, 11.13, 11.14 を確認せよ。

⁹ 誘導できますか?

11.2 3次元への一般化

11.2.1 降伏条件 — 状態の定義

最も基本的な **Prandtl-Reuss** モデルの構築から始めよう。まず運動学上の設定として式 (11.8) と同様、ひずみ増分がその弾性部分と塑性部分に分解されるものとする。つまり、 ϵ^p をひずみ増分の塑性成分とし、弾性成分を ϵ^e と記したときに、総ひずみ増分が

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2} (\dot{u}_{i,j} + \dot{u}_{j,i}) \quad \text{あるいは全微分で} \quad d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial du_i}{\partial x_j} + \frac{\partial du_j}{\partial x_i} \right) \quad (11.22a, b)$$

のように分解される。なお、ここまで用いてきた Δ あるいは微分 d の代わりに以下、上付きドットで増分を表す。 $\dot{\mathbf{u}}$ は速度と捉えてもいいが、この章の塑性論では「時間」は「変形（応力）履歴」であり実際の時間ではないし時間の単位を持たない無次元量¹⁰なので、 $\dot{\mathbf{u}}$ は実際には変位増分である。つまり、この章では

$$\dot{\mathbf{u}} \sim \Delta \mathbf{u} \sim d\mathbf{u}, \quad \dot{\mathbf{u}} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \quad \text{ただし、} t = \text{変形（応力）履歴を表す単調増加無次元パラメータ}$$

のように、速度と増分と全微分をすべて増分を表す記号として用いる。上式 (11.22) から明らかなように、総ひずみ増分は式 (3.16) を増分ひずみで表した適合条件を満足する適合ひずみであるが、その弾性成分と塑性成分は共に「非適合ひずみ」であること¹¹には注意すること。また式 (11.22) は微小変形の枠組では全く問題は無いと考えていいが、有限変形の枠組の中でも、変形勾配の乗算則を载荷の瞬間毎に「ある参照状態」において増分をとったものであれば [厳密に [71]/ 近似的に [127]] 成立¹²し、本質的には変形勾配の乗算則と整合する考え方である。詳細は第 12.2.2, 12.2.3 節を参照のこと。

さて前節の実験観察の項で述べたように、鋼のような材料の場合には一般に静水圧では塑性変形はほとんど発生しない。したがって、塑性変形特性を支配しているのはせん断変形およびせん断抵抗が主であると考えるのが適切である。ただし残留変形は変形履歴に従って累積することから、降伏条件をその累積する変形あるいはひずみで規定することは適切ではない。したがってせん断抵抗成分を代表している応力成分、すなわち式 (3.43) で定義した偏差応力で降伏条件を与えるのが適切だと想像できる。ただし、ある座標系の偏差応力テンソルの「成分」でその条件を与えることは、力学的にはまずいのも明らかだ。というのも、材料の性質は、それを観察あるいは記述している人間の都合で導入した座標系に依存するとは限らない¹³からだ。したがって、座標とは関係の無い量として偏差応力の主値（主偏差応力）か不変量を用いるのが適切であることも容易に想像できる。まず、偏差応力式 (3.43) の第 1 不変量 (J_1 と記すことにする) は、式 (3.36) の応力の不変量に準じて算定すると零 ($J_1 = \sigma'_{kk} = 0$) になるから何の情報も教えてくれない。これに対し、第 2, 3 不変量は

$$\bar{\sigma}^2 \equiv J_2 \equiv \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ji}, \quad J_3 \equiv \det(\sigma') \quad (11.23a, b)$$

と定義できる。この J_2 の定義と式 (3.36b) で定義した応力の第 2 不変量 I_2 とでは符号が異なっているので注意するように。また主偏差応力を s と記すと、それを求める式は

$$s^3 - J_2 s - J_3 = 0$$

となる。3 次方程式の根の公式から、主偏差応力は

$$s_I = 2 \sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos \theta_s, \quad s_{II} = 2 \sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos \left(\theta_s - \frac{2\pi}{3} \right), \quad s_{III} = 2 \sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos \left(\theta_s + \frac{2\pi}{3} \right) \quad (11.24a, b, c)$$

¹⁰ 文献によっては誤解を避けるために、例えば履歴を表す単調増加無次元パラメータを θ として $\dot{\mathbf{u}} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta}$ のように定義しているが、この文書では面倒なので記号 t を用いている。

¹¹ 塑性ひずみ増分の代表的な原因である転位は欠陥であり、図 3.43 のように物体中のギャップであることから適合場ではないことは明らかだ。したがって、それを調整・相殺して連続体としての適合場にするための弾性ひずみ増分も適合場ではなくなる。

¹² 著者は前者を支持している。式 (12.73) の説明部分を参照のこと。

¹³ 客観性の一つ。ただし材料内部に微視構造が存在する場合の座標系は物理的な意味を持つ場合がある。

と求められる。ここに θ_s は、後述の式 (11.58a) の Lode 角とも関係するが

$$\cos 3\theta_s = \frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}}, \quad 0 \leq \theta_s \leq \frac{\pi}{3} \quad (11.25a, b)$$

を満足する角である。もちろん $s_I + s_{II} + s_{III} = 0$ である。これを用いると次のような降伏条件が考えられる。

- 最大主偏差応力があるレベルに達したときに降伏が始まると考える。ただし式 (11.24) (11.25) からわかるように主偏差応力は J_2 と J_3 で表すこともできるので、結局は J_2 と J_3 の組み合わせで与える次項のモデルの一つとみなすことができるが、どちらかといえば後述の Tresca の降伏条件に相当する。
- 不変量 J_2 と J_3 の組み合わせで定義される量があるレベルに達したときに降伏が始まると考える。このモデルの基本的な代表が後述の Mises の降伏条件である。

ここではまず、後者のモデルのうち第2不変量だけを用いる Mises のモデルを説明しよう。

式 (11.23a) の右辺は Euclid 幾何学のノルムを6次元空間のそれに拡張したものとも解釈できるだろうから、 $\bar{\sigma}$ は偏差応力の6次元応力空間における一種のノルムと考えてもよさそうだ。特別な例として x_1 - x_2 面内の単純なせん断応力状態である場合を考えると、応力テンソル成分は σ_{12} のみが非零なので、これを式 (11.23a) に代入すると $\bar{\sigma} = |\sigma_{12}|$ となる。このことから、 $\bar{\sigma}$ がせん断抵抗を代表した指標であることが明らかだ。なおこの文書では、あとで定義する $\bar{\sigma}$ の名称と同じく、こちらを「相当応力」と呼ぶので注意して欲しい。この $\bar{\sigma}$ がある限界値に達したときに塑性変形が発生すると考えれば

$$f(\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}^p) \equiv \bar{\sigma} - \tau_Y(\bar{\epsilon}^p) \rightarrow f = 0 \quad (11.26a, b)$$

が降伏条件になる。応力成分で表した具体形は式 (11.53) (11.54) である。弾性状態は $f < 0$ で定義され、 $f > 0$ の状態は許容されない。この降伏条件は **Mises** の降伏条件とも呼ばれている。この f は降伏関数であり、 τ_Y はせん断降伏応力である。 $\bar{\epsilon}^p$ は塑性変形が履歴に依存することを陽に表すために定義されたスカラー量であり、後述のように塑性仕事増分の物理的意味を考慮すると、相当応力の定義式 (11.23a) に対応させて

$$\bar{\epsilon}^p \equiv \int_{\text{履歴}} \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ji}^p} dt \quad (11.27)$$

で定義したものを多く用いることが多い。前述のように t は時間ではなく履歴を表す無次元の単調増加パラメータであり、定義中に用いた積分は履歴に沿って累加させることを表している。これを累積塑性ひずみ（つまり塑性ひずみ増分の第2不変量¹⁴相当量の累積¹⁵）と呼ぶことにする。ただし以下では後述の $\bar{\epsilon}^p$ と同様、この累積塑性ひずみの方を「相当塑性ひずみ」と呼ぶので注意して欲しい。なお、この累積塑性ひずみはひずみテンソルのせん断成分の2倍、つまりいわゆる工学ひずみに相当している（前節1次元の場合の γ ）ことに注意して欲しい。上式では、硬化に伴って降伏応力が変化することを示すために τ_Y を累積塑性ひずみの関数として定義した。

一方、鋼の1軸引張試験のように x_1 方向の直応力 σ_{11} だけを測定する場合には式 (11.23a) は $\bar{\sigma}^2 = 1/3(\sigma_{11})^2$ となるので、降伏条件は $|\sigma_{11}| = \sqrt{3}\tau_Y$ となる。このことから引張降伏応力 σ_Y とせん断降伏応力が

$$\sigma_Y = \sqrt{3}\tau_Y \quad (\text{Mises}) \quad (11.28)$$

という関係にある¹⁶ことがわかる。このため、式 (11.23a) (11.26) の代わりに

$$f \equiv \bar{\sigma} - \sigma_Y(\bar{\epsilon}^p), \quad \bar{\sigma}^2 \equiv \frac{3}{2}\sigma'_{ij}\sigma'_{ji} = 3\bar{\sigma}^2 \quad (11.29a, b)$$

¹⁴ ここでは塑性的体積変形は無いと仮定しているので、塑性ひずみ増分の第1不変量は零である。

¹⁵ 累積塑性ひずみは第1著者の造語である。

¹⁶ 道路橋示方書 [176] のせん断強度はこれを根拠にしている。

のように降伏関数を定義する場合もある。この $\bar{\sigma}$ は相当応力と呼ばれ¹⁷ている。構造解析における降伏の代表値には引張降伏応力の方がよく用いられる。この定義を用いる場合には、後述の式 (11.35) に示す塑性仕事増分の物理的意味から、式 (11.27) の累積塑性ひずみも

$$\bar{\epsilon}^p \equiv \int_{\text{履歴}} \sqrt{\frac{2}{3} \epsilon_{ij}^p \epsilon_{ji}^p} dt \quad (11.30)$$

と定義し直しておく方がいい。これを相当塑性ひずみと呼ぶ。定数 $\sqrt{3}$ だけの違いだから何も問題は無いが、この文書では、降伏が微視すべりつまりせん断変形に主に関わっているという物理的観点から前述の $\bar{\sigma}$ と $\bar{\epsilon}^p$ の方を主に用い、そちらを相当応力・相当塑性ひずみと呼ぶことにしている。

このように、塑性変形が主にせん断で支配されていることから類推できるように、降伏条件が成立したあとの塑性変形は物体内部の非可逆的なすべり変形でモデル化できそうだ。つまり、図 11.15 に模式的に示したように、外力の作用によって物体内部に生じた応力成分の組み合わせがある特定の向きを持った面上¹⁸の摩擦抵抗を無力にし、すべりの発生¹⁹が可能になるのだ。そしてそのような面上の応力状態がすべりを可能にした場合に「降伏条件が満足された」と判断でき、そこで塑性変形が生じ始めるのである。したがって、第 3.4.5 (2) 節の摩擦とすべりでも説明したように、そのあとのすべり変形の向きはこの面の向き、つまり応力成分の組み合わせの向きで決まってしまうことになる。これは弾性変形には無い特性である。

面心立方晶を例にとって、その微視的なメカニズムの簡単なモデルを説明すると以下ようになる。図 11.16 の左が結晶構造を模したものだが、この原子配置の最も稠密な面ですべり易い（転位が移動し易い）とされている。このすべり面を右図に示した。三角形 ABC の面が Miller 指数を用いて (111) 面と呼ばれるもので、それと等価な面三つを網掛けで区別して示した。この四つの面で正四面

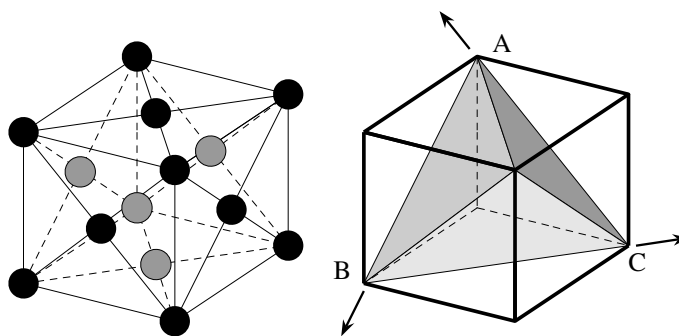


図 11.16 面心立方晶構造とすべり面

体を形成している。そして、すべる方向は矢印の 3 方向 AB, BC, CA に（負の方向も可能）なる。例えば A から C への逆向きの矢印も Miller 指数を用いて $[0\bar{1}1]$ 方向と呼ばれる。合計で 4 面 \times 3 方向、つまり 12 通り（負の方向も区別すると 24 通り）のすべりが可能な微視構造²⁰になっている。逆にこの材料では、その面の向きのその方向のすべりしか可能にはならない微視構造になっていると捉えるのである。そしてこのうちの一つ以上のすべり面上で、例えば式 (11.26b) を満足する応力状態になったときに降伏条件が満たされ、すべる（転

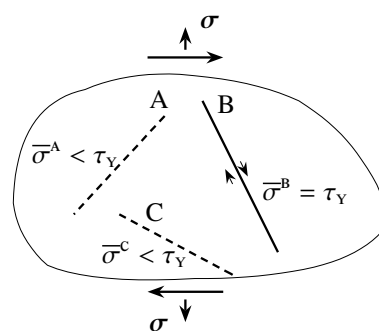


図 11.15 降伏条件 — すべり系 B だけが条件を満足して塑性変形の「向き」が決まる。

¹⁷ これを Mises 応力と呼ぶのはやめませんか。汎用プログラムのマニュアルや出力にでも書いてあるのだらうかしらん。

¹⁸ 単結晶体の場合には結晶格子の稠密面に相当する。

¹⁹ その面上を転位と呼ばれる格子欠陥が移動し始めることに相当する。なお一旦動いた転位は、界面や表面に達しないうちは外力の向きを変えたときに反対に動くこともよく知られている。

²⁰ 冶金屋さん達は 12 通りの「集合として」のすべり面を $\{111\}$ 面と表し、対応するすべり方向を $\langle 1\bar{1}0 \rangle$ 方向と表すらしい。上付きバーは負: $\bar{1} = -1$ 。

位が動く)可能性²¹が発生すると考えるのである。

ところで、第3.4.2(1)節のせん断抵抗の式(3.54)に関連して説明した写真11.1の3軸圧縮試験の場合は巨視的には

$$\sigma_{11} = \sigma_a, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_c$$

のような主応力状態になっている。そのため、相当応力は

$$\sigma'_{11} = \frac{2}{3}(\sigma_a - \sigma_c), \quad \sigma'_{22} = \sigma'_{33} = -\frac{1}{3}(\sigma_a - \sigma_c) \quad \rightarrow \quad \bar{\sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}}|\sigma_a - \sigma_c|$$

となることから、この軸差応力 $(\sigma_a - \sigma_c)$ で地盤材料のせん断抵抗を測定していることがわかる。また地盤材料では弾性ひずみ成分がほとんど存在しない一方で、後述のように体積ひずみの塑性成分も存在すると考えて、この3軸応力状態と同様の主ひずみ増分状態が

$$\dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\epsilon}_a, \quad \dot{\epsilon}_{22}^p = \dot{\epsilon}_{33}^p = \dot{\epsilon}_l$$

のように生じているものとする、式(11.27)の相当塑性ひずみ増分は

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{2}{\sqrt{3}}|\dot{\epsilon}_a - \dot{\epsilon}_l| = \frac{1}{\sqrt{3}}|3\dot{\epsilon}_a - \dot{\Delta}^p|$$

となる。ここに $\dot{\Delta}^p$ は

$$\dot{\Delta}^p \equiv \dot{\epsilon}_i^p = \dot{\epsilon}_a + 2\dot{\epsilon}_l$$

で定義される塑性的な体積ひずみ増分である。したがって3軸圧縮試験結果では、相当応力 $\bar{\sigma}$ と相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ の関係を整理することによって地盤材料のせん断抵抗則を表そうとしていることがわかる。ただし、実験で横方向のひずみ増分 $\dot{\epsilon}_l$ を測定するのは困難なので $\dot{\epsilon}_a$ と $\dot{\Delta}^p$ のひずみ増分間の関係も図示して整理しながら、相当応力つまり軸差応力 $(\sigma_a - \sigma_c)$ と軸ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_a$ を用いた図によってせん断抵抗則を表しているのだろう(多分)。地盤工学や土質力学・工学の教科書で、なぜ1軸圧縮のように見える試験でせん断抵抗特性を定量化しようとしているのかについては、以上のように捉えれば少しは理解が進むかもしれない。

11.2.2 流れ則 — 変形の変化則

前節でも述べたように、降伏条件を満足したあとは塑性変形が継続して生じる载荷と、塑性変形をほとんど含まない除荷とで変形経路が異なる。除荷は例えばHookeの法則のような弾性特性で定義されることが多い一方、载荷は履歴依存性を持つため、ひずみ増分が応力等となんらかの関係にあるとする流れ理論で与える必要がある。したがって少なくとも载荷の抵抗特性は、応力速度(増分²²)とひずみ速度(増分)を関係付けた増分理論になる。このように、現在の状態からどのように発展するのか、つまり増分や変化がどのように生じるのかを記述したモデルを流れ則あるいは発展則と総称している。

流れ則の発展の経緯をHillの文献[38]からそのまま引用すると次のようになる。

まずSaint-Venantが1870年に

$$(\dot{\epsilon} \text{の主軸}) \parallel (\sigma \text{の主軸})$$

²¹ 東京工業大学の森勉先生から見せていただいたニッケル超合金の例だが、単結晶の破断面がこのような稠密面とは必ずしも同じではないのは興味深い。ミクロとマクロの間には亜空間があり、そこには魔物が棲んでいるのだろう。文献[4]等の写真も参照のこと。

²² 応力速度を定義することに困難があることもあって、それを極力用いない解析法も特に近年は盛んであるが、履歴依存を表現するための非線形性が本質的に存在することから、数値解析においても結局塑性変形はひずみ増分でしか定義されていないので、常に小さい増分毎の計算は避けられない。



写真 11.1 3軸圧縮試験

と洞察し、Lèvy (1871) と Mises (1913) が同様に

$$\frac{\dot{\epsilon}_{xx}}{\sigma'_{xx}} = \frac{\dot{\epsilon}_{yy}}{\sigma'_{yy}} = \dots = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}}{\sigma'_{xy}}$$

になるとした。そのあと Prandtl (1924) と Reuss (1930) は、弾性成分と塑性成分を分離して考える必要があるとして

$$\frac{\dot{\epsilon}_{xx}^p}{\sigma'_{xx}} = \frac{\dot{\epsilon}_{yy}^p}{\sigma'_{yy}} = \dots = \frac{\dot{\epsilon}_{xy}^p}{\sigma'_{xy}} = \text{一定比率} = \lambda_{PR} \quad \rightarrow \quad \dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda_{PR} \sigma'_{ij}, \quad \lambda_{PR} \geq 0 \quad (11.31a, b, c)$$

であるとした (Prandtl-Reuss の式)。

つまり残留 (塑性) 変形の変化 $\dot{\epsilon}^p$ は偏差応力 σ' と同じ「方向」に発生しようとするのだ。偏差応力が物理的にはせん断応力であることを思い出すと、この流れ則の式 (11.31b) は摩擦とすべりで説明した式 (11.3) と同じで、塑性変形はせん断変形であることがわかる。ところで式 (11.31b) はいわゆる粘性の記述によく似ているが、粘性とは異なり、右辺の λ_{PR} は応力状態と応力増分に依存した比例パラメータであり、単純な材料パラメータではないことには十分注意すること。具体的に式 (11.31b) を式 (11.27) に代入して式 (11.23a) を考慮すると

$$\dot{\epsilon}^p = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ji}^p} = \lambda_{PR} \sqrt{2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ji}} = 2 \lambda_{PR} \bar{\sigma} \quad \rightarrow \quad \lambda_{PR} = \frac{\dot{\epsilon}^p}{2 \bar{\sigma}} \quad (11.32)$$

となり、 λ_{PR} が応力状態と相当塑性ひずみ増分に依存していて、これが λ_{PR} の物理的な意味である。

上の式 (11.31b) 等からは塑性が弾性と本質的に異なっていることが明らかである。すなわち、塑性の場合には Saint-Venant が記述したように「塑性ひずみ増分が偏差 (せん断) 応力そのものと共軸であろうとする」

$$\dot{\Delta}^p \equiv 0, \quad \dot{\epsilon}^p \parallel \sigma' \quad (11.33a, b)$$

のに対し (共軸性)、弾性の場合には式 (3.44) (3.45) から明らかのように、「弾性ひずみは応力と、また弾性ひずみ増分は応力増分と共軸であろうとする」

$$\Delta^e \propto \sigma_{AVE}, \quad \epsilon^{e'} \parallel \sigma'; \quad \dot{\Delta}^e \propto \dot{\sigma}_{AVE}, \quad \dot{\epsilon}^{e'} \parallel \dot{\sigma}'$$

ことになる。ここに、 Δ^e と Δ^p はそれぞれ式 (3.14) で定義した体積ひずみの弾性成分と塑性成分であり、 σ_{AVE} は式 (3.42) で定義された平均応力である。言い換えると、変形の増分に着目したときに「弾性ではその増分変形の向きも大きさも応力増分に直接関係している」が、「塑性では、増分変形の向きは応力そのものの向きに支配されるが、その増分変形の大きさには応力増分も影響を与える」ことになる。これは、次のような塑性の「内部メカニズム」を考えると少しはわかり易いかもしれない。

つまり図 11.15 を用いて説明したように、ある面上で「降伏条件」が満足された場合、その面の向きによってそのあとの塑性変形の向きは既に決定されてしまっている。したがってそのあとさらに外力を増やそうとした場合、このすべり面上のすべり変形しか²³生じようとはしないだろう。このことから、その増分変形の向きはすべり出そうとするすべり面の向きで決定され、結局増分変形の向きは応力状態そのもので支配されることになる。この現象を記述したのが「流れ則」である。一方図 11.17 のように、実際にすべり変形 (増分) が生じるかどうかは、そこに発生する応力増分の向きと大きさに依存し、後述の式 (11.38a) でそれを陽に示す。

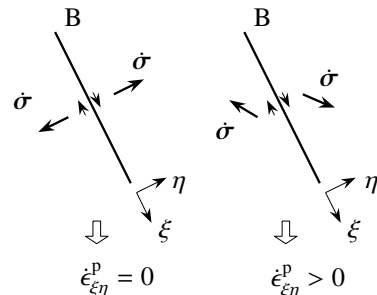


図 11.17 流れ則 — 塑性変形の向き ξ - η は応力そのもの σ で決定される。

²³ 結晶金属の場合には、結晶格子の稠密面上の転位の移動によるせん断変形が主な塑性変形であるため、塑性的な体積変形は発生しない。これに対し、砂地盤等を連続体として取り扱う場合には、せん断に対して (一説では) 砂粒が隣の砂粒に乗り上げるような変形も伴いながらすべりするため、塑性的な体積変形 (ダイラテンション) が生じることがある。

さてここで、塑性仕事増分を用いて上述の共軸性の意味について考察しておこう。ある応力状態において、その応力が塑性ひずみ増分とする仕事として塑性仕事増分を

$$\dot{w}^p \equiv \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (11.34)$$

と定義する。流れ則の式(11.31b)を式(11.34)に代入すると、式(11.23a)の $\bar{\sigma}$ あるいは式(11.29b)の $\tilde{\sigma}$ を用いればそれぞれ

$$\dot{w}^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = 2 \lambda_{PR} \bar{\sigma}^2 = \frac{2}{3} \lambda_{PR} \tilde{\sigma}^2$$

という二つの関係が成立する。そこで、式(11.27)の累積塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ あるいは式(11.30)の相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ の増分に式(11.31b)の流れ則を代入すると

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ji}^p} = \lambda_{PR} \sqrt{2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ji}} = 2 \lambda_{PR} \bar{\sigma}, \quad \dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ji}^p} = \lambda_{PR} \sqrt{\frac{2}{3} \sigma'_{ij} \sigma'_{ji}} = \frac{2}{3} \lambda_{PR} \tilde{\sigma}$$

となる。この式から求められる λ_{PR} をそれぞれ上式の第3,4式に代入すると

$$\dot{w}^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = \bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p = \tilde{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p \quad \Leftrightarrow \quad (11.35)$$

(内積) = (ノルム同士の積) \times cos(内角) = (ノルム同士の積) [\because (内角) = 0]

という関係を得る。これが共軸性(二つのテンソルが同じ向きになること)という大事な特性である。

式(11.23a)の $\bar{\sigma}$ がせん断応力に相当し、式(11.29b)の $\tilde{\sigma}$ が単軸応力に相当していることを念頭に置けば、上の塑性仕事増分の表現から、式(11.27)の累積塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ と式(11.30)の相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ の物理的な意味も明らかだ。例えば塑性変形が純せん断状態であって $\dot{\epsilon}_{12}^p = \dot{\epsilon}_{21}^p = \frac{\dot{\gamma}_0}{2} > 0$ 以外の成分が零であれば、式(11.27)の累積塑性ひずみ増分 $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ は

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ji}^p} = \sqrt{4 (\dot{\epsilon}_{12}^p)^2} = |\dot{\gamma}_0|$$

となる。したがって前述のように、累積塑性ひずみはせん断工学ひずみに相当することがわかる。また、単軸応力状態 $\sigma_{11} = \sigma_0$ で降伏している場合には、式(11.31b)の流れ則から、例えば

$$\dot{\epsilon}_{11}^p = \frac{2}{3} \lambda_{PR} \sigma_0, \quad \dot{\epsilon}_{22}^p = \dot{\epsilon}_{33}^p = -\frac{1}{3} \lambda_{PR} \sigma_0 \quad \rightarrow \quad \dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\epsilon}_0 > 0, \quad \dot{\epsilon}_{22}^p = \dot{\epsilon}_{33}^p = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_0$$

と考えればいから、式(11.30)の相当塑性ひずみ増分 $\dot{\bar{\epsilon}}^p$ は

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ji}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} \left(\frac{3}{2} \dot{\epsilon}_0^2 \right)} = |\dot{\epsilon}_0|$$

となり、相当塑性ひずみは単軸の伸び縮みひずみに相当することがわかる。この文書では、塑性変形はせん断変形であり、それを発生させる駆動力もせん断応力であるという物理的な解釈を踏まえ、前述のように原則として $\bar{\sigma}$ と $\bar{\epsilon}^p$ の組の方を用いる。

11.2.3 増分型構成方程式

载荷状態のまま塑性変形が継続する間は降伏条件も成立し続けるので $f = 0$ であり続けなければならない。言い換えると载荷中に f は変化しないので、その変化率も零になる条件

$$\dot{f} = 0 \quad (11.36)$$

を満足しなければならない。この条件を整合条件と呼んでいる。この式に、降伏関数の具体的な式 (11.26a) を代入すると、偏微分の連鎖律と同じ操作によって

$$\dot{f} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \tau_Y(\bar{\epsilon}^p)}{\partial \bar{\epsilon}^p} \dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \tau_Y(\bar{\epsilon}^p)}{\partial \bar{\epsilon}^p} \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} = 0$$

を得る。最後から二番目の式の第 2 項の平方根の中に式 (11.31b) の流れ則を代入し、また式 (11.23a) から

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} \quad (11.37)$$

であることを代入して上式を整理すると

$$\dot{f} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \tau_Y(\bar{\epsilon}^p)}{\partial \bar{\epsilon}^p} \lambda_{PR} \sqrt{2 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}} = \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} \dot{\sigma}_{kl} - \frac{\partial \tau_Y(\bar{\epsilon}^p)}{\partial \bar{\epsilon}^p} \lambda_{PR} 2\bar{\sigma} = 0$$

となることから、 λ_{PR} が

$$\lambda_{PR} = \frac{1}{H} \frac{\sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \dot{\sigma}_{kl}, \quad H \equiv \frac{\partial \tau_Y(\bar{\epsilon}^p)}{\partial \bar{\epsilon}^p} \quad (11.38a, b)$$

と求められる。ここに H は硬化係数である。これを式 (11.31b) の流れ則に代入すれば、塑性ひずみ増分は

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.39)$$

と表現できる。形の上では 1 次元の場合の式 (11.17b) と整合している。塑性変形はせん断成分が主であるとしたので塑性的な体積変形は当然零 ($\dot{\epsilon}_{kk}^p \equiv 0$) になる。したがって、塑性変形は非圧縮性を持っている²⁴ ことになり、そういう意味では「水²⁵」の変形と同じである。

以上の結果を用いて「載荷」と「除荷」を定義し直そう。1 次元の場合には単純に応力増分が $\tau \cdot \Delta \tau$ の正負あるいは零のどちらを満足するかによって載荷と除荷の二つの状態を区別できた。3 次元の場合は式 (11.38a) の $\lambda_{PR} > 0$ が載荷条件であり、軟化が生じない $H > 0$ の場合には、 $(\sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} > 0)$ が載荷条件になる。したがって

$$\text{弾性: } \lambda_{PR} = 0 \quad \text{もし } f < 0 \quad (11.40a)$$

$$\text{除荷: } \lambda_{PR} = 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \quad (11.40b)$$

$$\text{中立載荷: } \lambda_{PR} = 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (11.40c)$$

$$\text{載荷: } \lambda_{PR} > 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad (11.40d)$$

$$\text{許容されない状態: } f > 0 \quad (11.40e)$$

と定義すればいい。ここで中立載荷とは、新たな塑性ひずみは発生しないままその応力状態が同じ降伏条件を満足する異なる応力状態に変化することを意味している。この偏差応力テンソルと応力増分テンソル²⁶の積の和が正である条件 ($\sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} > 0$) は一種の内積の正定値性なので、幾何学的に解釈すると「載荷は偏差応力 (せん断応力) と応力増分の向きが 90 度以内 (ほぼ同じ方向) にある」ことを意味しており、1 次元の載荷状態の定義の単純な拡張になっていることもわかる。

一方、弾性成分は一般化された Hooke の法則の式 (3.105b) の非弾性ひずみ ϵ^* を塑性ひずみ ϵ^p で置き換えてモデル化すればいいはずだ。しかし前述のように塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}^p$ は積分できないし、全ひずみ理論はあくま

²⁴ 弾性を無視しない限り決して非圧縮的な変形にはならないが、弾性ひずみが塑性ひずみよりもかなり小さい場合が普通であることから、数値解析等では総適合ひずみがほぼ非圧縮性を持っている場合があり得る。

²⁵ 水のような非圧縮性流体に対する連続の式 (3.157a) と体積変形零の式は同じ条件である。

²⁶ ここで言う応力増分というのはもちろん材料中に生じる抵抗力の変化を表現できなければならないのは当然である。しかし、ここで示しているように応力速度で単純にその応力増分を表現した場合、材料が剛体的に回転するだけでもその応力速度テンソルの各成分は零にはならないから、単純な応力速度を構成方程式に用いることができないのは明らかである。ただし、微小変形理論の枠内ではこれが問題になることは無いので、この章では特に応力速度の定義については議論しない。

でも近似理論だ。そこで、式(11.22)のように増分同士の加算則は成立すると考えるので、式(3.105b)も増分同士の関係に変換するのが便利だろう。つまり

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\dot{\epsilon}_{kl} - \dot{\epsilon}_{kl}^p) = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}^e \quad (11.41)$$

という増分型の Hooke の法則が成立すると考えるのだ。したがって式(3.59)の代わりに

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = D_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} \quad (11.42)$$

という増分関係が成立するものとする。しつこいようだが、この弾性部分の両辺のせん断成分同士を見ると、 $\dot{\epsilon}_{ij}^e$ と右辺の $\dot{\sigma}_{ij}$ が同じ添え字 (ij) を持っていることから、増分同士が同じ向きを持っていることがわかる。これに対して式(11.39)から明らかのように、 $\dot{\epsilon}_{ij}^p$ が応力増分 $\dot{\sigma}_{kl}$ ではなく偏差応力 σ'_{ij} と同じ添え字 (ij) を持っている。つまり、塑性ひずみ増分は応力増分ではなく応力そのものと同じ向きを持っているのだ。最終的にこの二つの成分の式(11.39)(11.42)を、総ひずみ増分の式(11.22)に代入すると

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} + \frac{1}{H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.43)$$

という弾塑性増分構成関係が求められる。

さて、塑性論はなぜ増分量で表されているのかという質問がときどきある。一つの変形状態で载荷と除荷の可能性もあることも一つの理由だが、塑性変形が履歴依存性を持つので、それを表した流れ則が一般には積分可能ではないことが最も重要な理由だ。上式(11.39)の速度を増分(微分)に置き換えた流れ則は

$$d\epsilon_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} d\sigma_{kl}$$

と解釈でき、例えば $d\epsilon_{11}^p$ を例にとって展開して

$$d\epsilon_{11}^p = F_1 d\sigma_{11} + F_2 d\sigma_{22} + F_3 d\sigma_{33} + F_4 d\sigma_{23} + F_5 d\sigma_{31} + F_6 d\sigma_{12} \quad (a)$$

と書いたときに、ちょっと面倒な計算が必要になるが、最終的に例えば

$$\frac{\partial F_1}{\partial \sigma_{22}} \neq \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{11}}, \quad \frac{\partial F_2}{\partial \sigma_{23}} \neq \frac{\partial F_4}{\partial \sigma_{22}}, \quad \dots \quad (11.44a, b)$$

となることを示すことができる。つまり上式(a)は全微分形式にはなっていないので積分できないのだ。具体例を第11.3.3節に示したので読者は手を動かして欲しい。物理的に言えば、発生する塑性ひずみは载荷履歴に依存して結果が異なることになり、例えばある同じ応力状態に至るまでの载荷の順序やその都度の増分载荷量が違えば、発生する総変形は異なってくるのである。例えば(不可能だが)全く同じ粒界の配置を持つ多結晶で、かつ転位が全く同じ場所にある二つの材料があったとしよう。一つの材料は、 σ_{11} と σ_{12} がある一定の比で (σ_0, τ_0) に至るまで载荷したとする。このとき粒界に達してしまった N 個の転位に名前を 'd₁' から 'd_N' のように付けたとする。そこでもう一つの材料は、まず σ_{11} が σ_0 になるまで载荷し、それを一定に保ったまま σ_{12} が τ_0 に至るような実験ができたとしよう。このとき、前者の材料にあった 'd₁' から 'd_N' の転位はすべて粒界に達しているだろうか。ま、そういうことは決して無く、逆にそれ以外の転位のいくつかは粒界に達しているだろう。したがって塑性変形を伴う応答には履歴依存があるのだ。それをモデル化したのが流れ則という履歴依存モデルになっている。つまり塑性ひずみ増分は定義できるものの、塑性ひずみそのものは定義できず、結局数値解析で小さい増分を加算し続けて塑性ひずみを算定せざるを得ない。敢えて式で表現すると

$$\epsilon^p \approx \int_{\text{履歴}} d\epsilon^p = \int_{\text{履歴}} \dot{\epsilon}^p dt \quad \Rightarrow \quad \epsilon^p \equiv \sum_{\text{履歴}} \Delta \epsilon^p = \sum_{\text{履歴}} \dot{\epsilon}^p \quad (11.45a, b)$$

ということ²⁷になり、数値計算でしか塑性ひずみそのものは定義できない。したがって式 (11.22) の代わりに

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}^e + \boldsymbol{\epsilon}^p \quad \text{【不適切な式】}$$

という式にするのは、最終状態だけでひずみが求められるという表現に見えるので不適切だし、近似の全ひずみ理論と誤解される恐れがあるので注意が必要である。せめて $\boldsymbol{\epsilon}^p$ (履歴依存) とでも明記すべきだろう。

逆関係の標準的物理的な誘導: さて有限要素法等への組み込みを考えると、式 (11.43) の逆関係も求めておいた方が便利だろう。まず、式 (11.43) の i と j を一致させて 1 から 3 まで和をとる²⁸と

$$\dot{\epsilon}_{ii} = \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}_{ii} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ii} \dot{\sigma}_{kk} = \frac{1}{3K} \dot{\sigma}_{kk}$$

となるから、結局平均応力増分が

$$\dot{\sigma}_{kk} = 3K \dot{\epsilon}_{kk} \quad (b)$$

となる。体積変化は塑性に関与しないから、当然これは弾性関係のみになる。次に式 (11.43) に σ'_{ij} を乗じて i と j を 1 から 3 まで和をとり、仕事増分を算定すると

$$\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{ij}}{4\bar{\sigma}^2} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}_{kl}$$

となる。右辺第 2 項に式 (11.23a) の $\bar{\sigma}$ の定義を考慮すると、結局

$$\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\mu} \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2H} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}_{kl} = \frac{\mu + H}{2\mu H} \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij}$$

となるので、逆関係として

$$\sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{2\mu H}{\mu + H} \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \quad (c)$$

を得る。式 (b)(c) を式 (11.43) の右辺に代入すれば、右辺第 1 項以外はすべてひずみ増分で表される。よって、左辺にひずみ増分の項を集めて、左右を入れ替え、両辺に 2μ を乗じることによって

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu \dot{\epsilon}_{ij} + \left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} - \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (11.46)$$

という弾塑性増分構成関係が求められる。結局式 (3.56) の等方弾性係数 \mathbf{C} を用いて

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (11.47)$$

という増分応力増分ひずみ関係を得る。後述のように、この式の $\frac{\mu H}{\mu + H}$ が図 11.9 の H' つまり弾性も含む見かけ上の硬化係数に相当する。また式 (11.43) の関係も、式 (3.58) の弾性コンプライアンスを用いて

$$\dot{\epsilon}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{1}{H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.48)$$

と表すこともできる。

あるいは、弾塑性接線係数および接線コンプライアンスを

$$C_{ijkl}^{\text{ep}} \equiv C_{ijkl} - \chi \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2}, \quad D_{ijkl}^{\text{ep}} \equiv D_{ijkl} + \frac{\chi}{H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \quad (11.49a, b)$$

²⁷ 文献 [26] でも積分記号が用いられているが、本文中の説明ではきちんと「台数和 (algebraic sum)」と明記して区別してある。

²⁸ 縮約と呼ばれる演算であり、物理的には体積変形増分を求めている。

と定義すれば、弾塑性増分構成方程式は

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{\text{ep}} \dot{\epsilon}_{kl}, \quad \dot{\epsilon}_{ij} = D_{ijkl}^{\text{ep}} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.50a, b)$$

と表すことができる。ただし χ は载荷・除荷を区別するスイッチで

$$\chi = \begin{cases} 0 & \text{もし 弾性・除荷・中立载荷} \\ 1 & \text{もし 载荷} \end{cases} \quad (11.51)$$

と定義した。再度しつこいようだが、このように表現してしまうと弾塑性係数と弾性係数が同じように見えてしまうことから、弾性と塑性の物理的な違いを忘れてしまう可能性があるので十分注意すること。

材料試験と硬化係数: さて、硬化係数の H は材料特性を表すパラメータなので、材料試験等で決定しなければならない。最も基本的な試験は1軸引張試験だろう。そこで式(11.43)は、1軸状態 ($\sigma_{11} = \sigma_0$ で他の成分はすべて零。増分も同様。)では

$$\dot{\epsilon}_{11} = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_0 + \frac{1}{3H} \dot{\sigma}_0 = \frac{1}{E_t} \dot{\sigma}_0$$

という関係になる。ここに E は Young 率であり、 E_t は引張試験の応力ひずみ関係の接線係数である。この関係より

$$\frac{1}{3H} = \frac{1}{E_t} - \frac{1}{E} \quad \rightarrow \quad 3H = \frac{E_t}{1 - \frac{E_t}{E}}$$

であることがわかる。応力と塑性伸びひずみ関係の接線係数が $3H$ である。この '3' は、 $\bar{\sigma}$ と $\bar{\epsilon}$ および $\bar{\epsilon}^p$ と $\bar{\epsilon}^e$ の違いの $\sqrt{3}$ から派生している。

一方、せん断試験が可能であれば、 $\sigma_{12} = \tau_0$ のみが非零だとして同様の計算をすると

$$\dot{\gamma}_{12} = 2\dot{\epsilon}_{12} = \frac{1}{\mu} \dot{\tau}_0 + \frac{1}{H} \dot{\tau}_0 = \frac{1}{H'} \dot{\tau}_0$$

となる。 H' はせん断試験の応力と工学ひずみの関係の接線係数である。これより

$$\frac{1}{H} = \frac{1}{H'} - \frac{1}{\mu} \quad \rightarrow \quad H = \frac{H'}{1 - \frac{H'}{\mu}}$$

となり、これは1次元モデルの場合の全ひずみ理論の近似で求めた硬化係数の式(11.15b)と形式的には同じ関係になる。試験で得る応答は一般には非線形性を持っていて、それをよく「べき乗則」等でモデル化することがある。べき乗則については第11.4.4節を参照のこと。

演習問題 11-2

- 式(11.49)の接線係数から、例えば1軸応力状態の見かけ上の弾塑性 Poisson 比を各自定義し、接線的な非圧縮性について考察せよ。例えば式(3.84)を参照のこと。

11.3 一般化された弾塑性構成方程式

11.3.1 降伏曲面と法線則

(1) 降伏関数

ここでは降伏関数を $f = f(J_2, J_3, \dots)$ のように一般化して、いわゆる一般化された Prandtl-Reuss の構成方程式を誘導する。基本的な代表モデルを具体的には二つだけ紹介するが、降伏条件 $f = 0$ は応力の6次元空間の曲面とも解釈でき、その曲面を降伏曲面と呼ぶ。

Mises の降伏条件: まず前節で用いた **Mises** の降伏条件の場合、偏差応力の第 2 不変量のみを用いて

$$f = f(J_2, \text{履歴}) = \sqrt{J_2} - \tau_Y(\text{履歴}) = 0 \quad (11.52)$$

と定義したことになる。\$J_2\$ は応力成分で表すと

$$J_2 = \frac{1}{6} \{ (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 \} + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2 \quad (11.53)$$

となり、主応力を用いて降伏条件は

$$f = \sqrt{\frac{1}{6} \{ (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 + (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 + (\sigma_I - \sigma_{II})^2 \}} - \tau_Y = 0 \quad (11.54)$$

とも書くことができる。この条件は、図 11.18 のような主応力軸を直交する 3 軸とする座標系で、 $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ の直線（静水圧軸あるいは等方応力軸）方向の単位ベクトル e を法線とする平面（ π 平面と呼ぶ）内に円断面を持つ、無限に長い円柱形になる。なぜなら e 方向の等方応力状態では降伏しない²⁹からである。

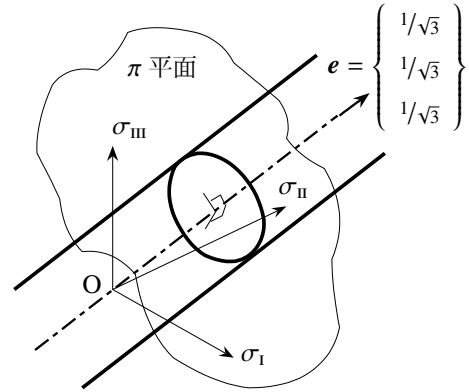


図 11.18 π 平面と Mises の降伏条件

Tresca の降伏条件: これに対し、最大せん断応力がある規定値に達したときに降伏するという規準もあり得る。特に図 11.16 の単結晶金属のように結晶方位で決定されるすべり面上のすべりで塑性変形が生じる場合は、この最大せん断応力による規準の方が適していると考えられる。しかもそのような単結晶中のすべり面は有限個（面心立方晶では 4 面）しか存在しないから、降伏曲面には角が存在することも容易に想像できる（図 12.25 参照）。さて最大せん断応力は第 3.6.3 (3) 節で示した Mohr の円を見れば明らかなように、主応力の差の半分である。したがって、二つずつの主応力差の半分、 $\frac{1}{2}|\sigma_i - \sigma_j|$, ($i, j = \text{I, II, III}$) のうちの最大値（最大せん断応力）で降伏を規定すればいい。この条件は **Tresca の降伏条件** と呼ばれ、例えば

$$f^*(\sigma, \text{履歴}) \equiv \{ (\sigma_I - \sigma_{II})^2 - 4\tau_Y^2(\text{履歴}) \} \{ (\sigma_{II} - \sigma_{III})^2 - 4\tau_Y^2(\text{履歴}) \} \{ (\sigma_{III} - \sigma_I)^2 - 4\tau_Y^2(\text{履歴}) \} = 0 \quad (11.55)$$

と表すことができる。この降伏曲面は滑らかではなく角が存在し、図 11.19 の六角形がその例である。さて、この表現では偏差応力との関係が明確ではないが、偏差応力の不変量と主応力の関係を用いて書き直すと

$$f^*(J_2, J_3, \text{履歴}) = 4J_2^3 - 27J_3^2 - 36(J_2)^2 \tau_Y^2 + 96J_2 (\tau_Y)^4 - 64 (\tau_Y)^6 = 0$$

と書き直すこともできる。ただし、一見滑らかな関数に置き換えられているため、例えば σ_I のみが非零であるような 1 軸状態にこの式 (11.55) を用いると負になってしまう等、使用には注意が必要である。そのため f でなく f^* と記した。そういう観点からは

$$f = \max_{i,j=\text{I,II,III}} (\sigma_i - \sigma_j)^2 - 4\tau_Y^2(\text{履歴}) \quad (11.56)$$

と定義した方が正しいかもしれないが、使い難いことには変わりがない。また主偏差応力 s_x ($x=\text{I, II, III}$) が主応力差と

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{3} - \frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{3}, \quad \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{3} - \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{3}, \quad \frac{\sigma_{III} - \sigma_I}{3} - \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{3}$$

という関係にあることと、式 (11.24) の主偏差応力 s_x の表現とを比べることによって、Tresca の条件は

$$f = \sqrt{J_2} \cos \theta_L - \tau_Y = 0 \quad (11.57)$$

²⁹ 複合材料のように内部に微視構造を持つ材料の場合は、例えば各相が Mises の降伏条件に従う材料であっても、巨視的には等方応力で降伏 [197] する場合もある。具体的には図 I.10 を参照のこと。

と表すこと [70] もできる。ここに θ_L は Lode 角と呼ばれるもので

$$\theta_L \equiv \frac{1}{3} \sin^{-1} \left(\frac{-3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{\frac{3}{2}}} \right), \quad -\frac{\pi}{6} \leq \theta_L \leq \frac{\pi}{6}, \quad \theta_L = \theta_s - \frac{\pi}{6} \quad (11.58a, b, c)$$

で定義されている。ここには式 (11.25) の角度 θ_s との関係も示しておいた。

ところでここでは、この基本的な二つの降伏関数同士で、降伏せん断応力 τ_Y が共通になるように定義した。つまり図 11.19 の左図の A, B 点 ($\sigma_I = -\sigma_{III} = \pm\tau_Y, \sigma_{II} = 0$ の純せん断状態) で両条件が一致する。したがって、Tresca の降伏条件に基づけば 1 軸状態の降伏引張応力 σ_Y は

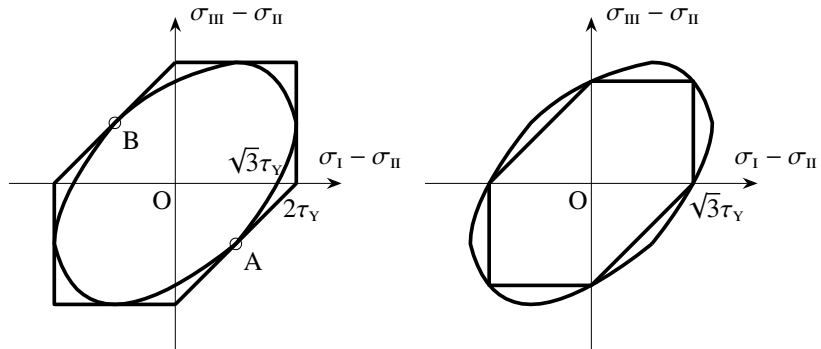


図 11.19 Mises (楕円形) と Tresca (六角形) の降伏条件

$$\sigma_Y = 2\tau_Y \quad (\text{せん断一致の Tresca の場合}) \quad (11.59)$$

という関係にあり、Mises の降伏条件に基づいた式 (11.28) の関係とは異なる³⁰ ことには注意する必要がある。この図 11.19 の左図は、よく教科書等に描かれているものとは異なり Tresca の条件の方が Mises のその外側に位置しているが、これは上述のように、お互いの降伏せん断応力を一致させたからである。もし両条件の降伏引張応力を一致させると右図のように、多くの教科書等にある図になる。この場合の降伏せん断応力と降伏引張の関係は、式 (11.28) の Mises のそれと同じになる。金属材料の実験値はこの右図の Mises と Tresca の条件の間のやや Mises 側に分布する [126] ため Mises の降伏条件がよく用いられて³¹ いる。

(2) 安定材料の一つの定義

Drucker [21] は、次の条件を満足する材料を「安定な材料」と定義した。

$$\int (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(0)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p dt \geq 0 \quad (11.60)$$

これを **Drucker** の公準と呼ぶ。ここに積分は、塑性変形を伴いながら変形する経路に沿った履歴の累積を表しており、 $\sigma_{ij}^{(0)}$ はそのような履歴の開始時の任意の応力状態である。この条件式 (11.60) が降伏状態近傍の非常に微小な任意の時間の間に成立しなければならない (厳しい) 条件を

$$(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^{(0)}) \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0 \quad (11.61)$$

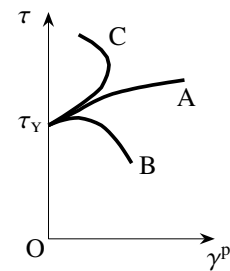


図 11.20 安定材料の抵抗履歴

と記すことができそうだ。任意の塑性変形は、この条件式 (11.61) を満足するように生じるものとするのが基本となっている。図 11.20 には直感的かつ短絡的な説明を描いておいたが、履歴 B のような軟化材料や、履歴 C のような材料を除外していると考えればいい。この公準は解の唯一性とも密接に関係していて、上式の σ や $\sigma^{(0)}$ および $\dot{\epsilon}^p$ の定義を明確にした上で、上の安定規準が**最大塑性仕事の原理**に相当することも示されているが、著者は理解できなかったので詳細については文献 [38] 等を参照のこと。ただし実験等と比較すると、この基準を満足する材料は安定過ぎる挙動を示すことが多いので、この条件を緩和したモデルも多く存在する。

³⁰ 第 11.5 節の塑性的平面ひずみ状態の塑性解析ではこの関係式の方が用いられている。式 (11.170) 参照。

³¹ 前述のように単結晶なら角のある多面体状の降伏曲面になるはずだが、多結晶の場合はすべり面の方向が等方的に無数に分布するため、降伏曲面の角が取れて滑らかになって Mises の降伏条件に近づくと考えればいい。

(3) 基本的な流れ則 — 法線則

等方材料の降伏条件を一般化して降伏条件式 (11.26b) を

$$f \equiv h(J_2, J_3) - \tau_Y(\bar{\epsilon}^P) = 0, \quad (11.62)$$

と表す。ここでも初期降伏後の履歴依存を明示するために、材料パラメータのせん断降伏応力 τ_Y を相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^P$ の関数として定義した。また基本的な扱いに留めるために h は J_2 と J_3 のみの関数とし、より一般的なモデルはその例をいくつか第 11.4 節に示すに留めた。さて弾性状態でも降伏した状態でもいいが、ある任意の応力状態の $\sigma^{(0)}$ から出発して塑性変形が生じるような変形履歴をたどって降伏条件式 (11.62) を満足する応力状態の σ に達したとしたとき、任意の応力増分 $(\sigma - \sigma^{(0)})$ に対して生じる塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}^P$ は

1. 式 (11.61) の安定条件と
2. 歴史的に発見された式 (11.31b) が示すように、その向きは応力増分ではなく、現応力状態 σ で唯一に定まる条件と

の両方を同時に満足しなければならない。

実は、この条件がどちらも同時に満足されるためには

制約 1: 降伏曲面は凸面であり、同時に

制約 2: 塑性ひずみ増分は降伏曲面の法線方向を向く

必要がある。というも

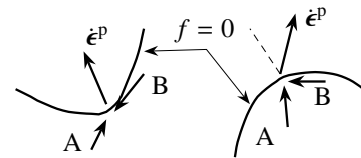


図 11.21 法線則と凸曲面

- もし降伏曲面が凹面になっていたとすると、図 11.21 の左図のように、塑性ひずみ増分がどの向きであったとしても、その塑性ひずみ増分と $(\sigma - \sigma^{(0)})$ の向きが 90 度以上になる場合 (B) が存在してしまい、安定条件式 (11.61) を満足しない場合があり得るし
- 塑性ひずみ増分の向きが降伏曲面の法線方向ではない場合にも、図 11.21 の右図のように安定条件式 (11.61) を満足しない場合 (B) があるか、あるいは塑性ひずみ増分が応力状態だけではなく応力増分の向きにも依存してしまう

からである。制約 1 は、この節で紹介した Mises の降伏関数も Tresca の降伏関数も満足している。また制約 2 は、流れ則が

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P \parallel \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \rightarrow \quad \dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda \geq 0 \quad (11.63a, b, c)$$

を満足しないといけない³²ことを意味する。というも $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ はその曲面 ($f = 0$) の外向き法線「ベクトル」³³に相当するからだ。ただし、前節の λ_{PR} が応力の逆数の次元を持つのに対し、ここの λ は、式 (11.62) のような f の定義と式 (11.63b) の流れ則の下では無次元量になることには注意すること。この条件を法線則と呼んでいる。応力空間と塑性ひずみ増分空間を同じ「座標系」に重ねて議論することは非常に考え難いと思われるが、式 (11.31b) が発見されるに至った実験観察から「応力」と「塑性ひずみ増分」は共軸性を持っているので、重ねて考えられているのである。

³² ただし、Tresca の降伏関数の場合には図 11.19 から明らかなように降伏曲面に角点が存在することから、式 (11.63b) の微係数が唯一には定義できない問題点がある。角点の発生は、多結晶体のように複数の降伏メカニズムが存在する場合に、その複数の降伏曲面の一番内側の包絡面で降伏曲面を定義する [50] ことから生じる。これについては文献 [126] あるいは第 11.4.3 節で紹介するモデル [81] 等を参照のこと。

³³ 円の方程式 $f(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$ を x と y で微分して求められるベクトル $\mathbf{v} \equiv \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \right]^T = [2x \ 2y]^T$ が円の外向き法線ベクトルを表していることからわかるだろう。

(4) 増分型構成方程式

塑性ひずみ増分が生じ続ける载荷状態では降伏条件式 (11.62) が成立し続けなければならないので、整合条件を満足し

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \tau_Y(\bar{\epsilon}^p)}{\partial \bar{\epsilon}^p} \dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \tau_Y(\bar{\epsilon}^p)}{\partial \bar{\epsilon}^p} \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} = 0$$

が成立する。第2項に流れ則の式 (11.63b) を代入すると

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \lambda \frac{\partial \tau_Y(\bar{\epsilon}^p)}{\partial \bar{\epsilon}^p} \sqrt{2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} = 0$$

となるので、最終的に

$$\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}, \quad H \equiv \frac{\partial \tau_Y(\bar{\epsilon}^p)}{\partial \bar{\epsilon}^p} \sqrt{2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \quad (11.64a, b)$$

を得る。H は硬化係数である。これを再度流れ則の式 (11.63b) に戻せば

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.65)$$

を得る。これが一般化された **Prandtl-Reuss** の関係である。Mises の降伏関数を用いた場合には式 (11.37) の関係が成立するので、この式 (11.65) は前節の式 (11.39) に一致する。弾性成分との和および逆関係の誘導は、次節に示す塑性ポテンシャルを用いた場合の結果の特別な場合に相当するので割愛する。

また式 (11.64a) から、载荷や除荷も同様に降伏曲面の法線を用いて規定できることがわかる。すなわち

$$\text{弾性: } \lambda = 0 \quad \text{もし } f < 0 \quad (11.66a)$$

$$\text{除荷: } \lambda = 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \quad (11.66b)$$

$$\text{中立载荷: } \lambda = 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (11.66c)$$

$$\text{载荷: } \lambda > 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad (11.66d)$$

$$\text{許容されない状態: } f > 0 \quad (11.66e)$$

となる。つまり降伏曲面の法線「ベクトル」と応力増分「ベクトル」の内積で各状態を規定している。内積が正であるということは、降伏曲面が凸である限り、応力増分がこの降伏曲面から外に出ようとする解釈することができる。逆に内積が負であれば、応力増分は降伏曲面の内側に戻ろうとしていることに相当しており、これが上式では除荷として規定されていることになる。Mises の降伏関数を用いた場合には式 (11.37) の関係が成立するので、この式 (11.66) は前節の式 (11.40) に一致する。

11.3.2 塑性ポテンシャルの導入

(1) 塑性ポテンシャルと弾塑性増分関係

塑性ひずみ増分の空間と応力空間を同じ「座標系」に重ねて法線則を解釈したところに違和感を持った人もいたと思う。そこでここではそれを緩和しよう。ここも Hill [38] の記述をそのまま引用する。まず単調に载荷し続けて塑性変形を発生させ続けた場合には、式 (11.62) の h も τ_Y も単調に増加し続けるものの、 f は零を満足し続ける。したがって「载荷」という状況は

$$\text{载荷: } f = 0, \quad \dot{f} = 0, \quad \dot{h} > 0, \quad \dot{\tau}_Y > 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\epsilon}^p > 0, \quad f = 0 \quad (11.67)$$

という条件で定義できる。これに対し、一旦材料が降伏したあと降伏条件は満足し続けるものの、塑性変形が新たには生じないまま単に応力状態のみが変化する「中立载荷」の場合には、式 (11.62) の右辺の τ_Y も不変であるし、同時に h も不変である。つまり

$$\text{中立载荷: } f = 0, \quad \dot{f} = 0, \quad \dot{h} = 0, \quad \dot{\tau}_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\epsilon}^p = 0, \quad f = 0 \quad (11.68)$$

という条件で定義できる。さらに、一旦降伏した材料の外力が取り除かれ弾性に戻る「除荷」の場合には、 τ_Y は不変のまま降伏条件を満足しなくなるので

$$\text{除荷: } f = 0, \quad \dot{f} < 0, \quad \dot{h} < 0, \quad \dot{\tau}_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\epsilon}^p = 0, \quad f < 0 \quad (11.69)$$

で定義できる。

したがって、上式の「载荷」と「中立载荷」の比較から $\dot{\epsilon}^p$ と \dot{h} の符号に整合性が存在するので、塑性ひずみ増分は

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = G_{ij} \dot{h} \quad (11.70)$$

という関係を満足すると考えてよさそうだ。ただし、基本的な（結晶金属の）場合のテンソル \mathbf{G} は

$$(\mathbf{G} \text{ の主軸}) \parallel (\boldsymbol{\sigma} \text{ の主軸}), \quad G_{kk} = 0 \quad (11.71)$$

を満足しなければならない。一つ目は前節で説明した流れ則が持つべき共軸性であり、二つ目の条件は塑性的な体積変形は生じないというものである。このように考えると、このテンソル \mathbf{G} は降伏関数 f とは必ずしも直接の関係が無くてもいいことになる。そこで、この条件を満足する一つの形として

$$G_{ij} = \frac{1}{H'} \frac{\partial g(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \frac{\partial g(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{kk}} = 0 \quad (11.72a, b)$$

という関数 $g(J_2, J_3)$ の存在を仮定することができる。ここに H' はある種の硬化係数であり、 g を塑性ポテンシャルと呼ぶ。もはや数学的モデルだろう。式 (11.72a) を式 (11.70) に代入すれば、塑性ひずみ増分は

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H'} \frac{\partial g(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{ij}} \dot{h} \quad (11.73)$$

と表される。载荷され続ける状態では上述のように降伏条件 $f = 0$ は満足され続けるので、式 (11.62) の増分は零となり

$$\dot{f} = 0 = \dot{h} - \frac{\partial \tau_Y}{\partial \epsilon_{ij}^p} \dot{\epsilon}_{ij}^p$$

を常に満足していることになる。この条件は整合条件である。この式の右辺第 2 項に式 (11.73) を代入すれば、载荷時には \dot{h} が非零の正であることから、硬化係数が

$$\dot{h} = \frac{\partial \tau_Y}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{1}{H'} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \dot{h} \quad \rightarrow \quad H' = \frac{\partial \tau_Y}{\partial \epsilon_{ij}^p} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

と表現される。さて通常、式 (11.73) を式 (11.31b) に対応させて表現したものが用いられているが、それは $\frac{\dot{h}}{H'}$ を λ と置き

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda \geq 0 \quad (11.74a, b)$$

としたもので、これを一般的な流れ則と呼んでいいだろう。この法則は式 (11.63b) とほぼ同じであるが、塑性ポテンシャル g が必ずしも降伏関数 f と同じである必要は無いのが特徴だ。したがって Drucker の安定公準式 (11.61) は必ずしも満足されないので、その定義の下の安定性は緩和されている。

(2) 一般化された増分型構成方程式

基本的な降伏関数として

$$f(J_2, J_3, \bar{\epsilon}^p) \equiv h(J_2, J_3) - \tau_Y(\bar{\epsilon}^p) \tag{11.75}$$

と定義する。また塑性ポテンシャルにはこの f とは別の関数 $g(J_2, J_3)$ を定義し、流れ則は式 (11.74a) で与えられる。まず状態を規定するために前節の Hill の考察を用いると、載荷は式 (11.67) の場合なので

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0$$

がその状態を規定している。同様に、中立載荷と除荷も式 (11.68) (11.69) のように考えればよく、結局各状態は式 (11.66) で定義される。

次に整合条件は、式 (11.75) から

$$\dot{f} = \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \tau_Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} = 0$$

となるので、流れ則の式 (11.74a) を第 2 項に代入すれば、 $\frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ なので

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial \tau_Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \lambda \sqrt{2 \frac{\partial g(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial g(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{mn}}} = 0 \tag{a}$$

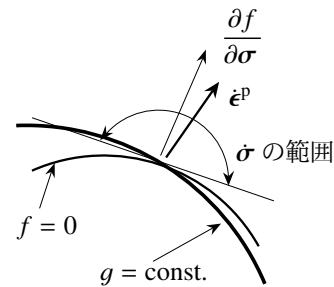


図 11.22 塑性ポテンシャルと降伏条件

となることから、硬化係数 H を、式 (11.64b) の代わりに塑性ポテンシャル g を用いて

$$H \equiv \frac{\partial \tau_Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \sqrt{2 \frac{\partial g(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{mn}} \frac{\partial g(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{mn}}} \tag{11.76}$$

と定義しておけば

$$\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \tag{b}$$

を得る。この結果を、再度流れ則の式 (11.74a) に戻せば

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\partial g(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \tag{11.77}$$

と求められる。塑性ポテンシャル g の導入によって、硬化係数 H の定義と塑性ひずみ増分の向きが一般化された。その概念を図 11.22 に示した。

さて、弾性成分は増分型の Hooke の法則式 (11.42) で与えられるので、それと式 (11.77) を加算則の式 (11.22) に代入すれば

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \left\{ D_{ijkl} + \frac{\chi}{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \right\} \dot{\sigma}_{kl} \tag{11.78}$$

という関係を得る。したがって、弾塑性接線コンプライアンスを

$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl} + \frac{\chi}{H} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \tag{11.79}$$

と表すことができる。ここに χ は式 (11.51) で定義したスイッチである。

逆関係の汎用的な誘導: 物理的に λ を考察するには以上のような定式化が重要だが、誘導された増分ひずみ・増分応力関係の逆関係を得ることは一般には困難だ。そこで Simo と Hughes [84] の汎用的な誘導法をここに引用しておく。式 (a) に式 (11.76) を代入すると

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = H \lambda \quad (c)$$

となる。一方弾性関係は式 (11.41) なので、それに流れ則を代入すれば

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left(\dot{\epsilon}_{kl} - \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (d)$$

と書くことができる。式 (d) を式 (c) に代入すると

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} C_{ijkl} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} = H \lambda$$

となるので、これから λ を求めると

$$\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} C_{abcd} \dot{\epsilon}_{cd}, \quad \tilde{H} \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnpq} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{pq}} + H \quad (11.80a, b)$$

となる。式 (b) と比べると物理的にはわかり難い形をしている。これを再度式 (d) に代入し戻せば

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \left\{ \dot{\epsilon}_{kl} - \chi \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \frac{1}{\tilde{H}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} C_{abcd} \dot{\epsilon}_{cd} \right\}$$

を得るので、結局

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left\{ C_{ijkl} - \frac{\chi}{\tilde{H}} C_{ijab} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ab}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{cd}} C_{cdkl} \right\} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (11.81)$$

と求められる。したがって、弾塑性接線係数を

$$C_{ijkl}^{\text{ep}} = C_{ijkl} - \frac{\chi}{\tilde{H}} C_{ijab} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ab}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{cd}} C_{cdkl} \quad (11.82)$$

と定義することができる。ここに χ は式 (11.51) で定義したスイッチである。

J_2 流れ理論と関連流れ則: 一般化された Prandtl-Reuss の式 (11.65) は、式 (11.77) において

$$\frac{\partial f(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial h(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial g(J_2, J_3)}{\partial \sigma_{ij}} \left(= \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} \right) \quad \text{つまり} \quad h = g (= \bar{\sigma}) \quad (11.83a, b)$$

と置いたこと (元々の Prandtl-Reuss の式 (11.39) は上式の括弧内のように置いたこと) に相当する。 f と g の間にこの式 (11.83) (括弧内を除く) が成立する流れ則を、**関連流れ則**と呼び、したがってそうではないものを**非関連流れ則**と呼んでいる。あるいは式 (11.77) は

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{\text{p}} = P_{ij} Q_{kl} \dot{\sigma}_{kl}, \quad \dot{\epsilon}^{\text{p}} = (\mathbf{P} \otimes \mathbf{Q}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

と表現することができるので、この二つのテンソル \mathbf{P} と \mathbf{Q} が等しいときが**関連流れ則**である。Prandtl-Reuss の式 (11.39) の場合は、降伏関数と塑性ポテンシャルに J_2 のみを用いた理論であることから、 **J_2 流れ理論**とも呼ばれる**関連流れ則**である。また、その場合は

$$\dot{\epsilon}^{\text{p}} = \lambda \frac{1}{\sqrt{J_2}} \sqrt{\frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ji}} = \lambda \quad (11.84)$$

となるので、 λ の物理的な意味は相当塑性ひずみ増分そのものであることもわかる。

軟化材料って？ ところで、材料非線形性に関係した安定問題を扱うモデルで、塑性軟化の設定をする研究があるように思われるが、その場合には例えば「載荷」と「除荷」をどう定義すべきだろうか。例えば式(11.49a)の弾塑性接線係数 C^{ep} に1軸応力状態の設定をして行列表示した場合、せん断弾性係数が正である条件下で接線係数が正定値である条件は実は $H > 0, H < -\mu$ となる。後者は非現実的だろうから、安定な材料の硬化係数は正である。ちなみに、この行列表示の接線係数の 2×2 小行列の正定値性からは

$$\frac{H}{\mu} > -\frac{1+\nu}{6}$$

という関係を得るのは興味深い。ただこれは3次元でも平面問題でもない2次元問題として対象をモデル化した場合の条件なので注意しておかなければならない。

さて、軟化するということは $\dot{f} = 0$ と $\dot{h} < 0$ および $\tau_Y < 0$ が同時に成立せざるを得ないことであり、それで正の塑性ひずみ増分が発生する ($\lambda > 0$) ためには、必然的に $\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0$ が成立するような応力増分 $\dot{\sigma}$ が生じる必要がある。こうなっていれば、ここで示した枠組の中であっても $H < 0$ による問題は生じない。しかし $\frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$ であることから、「載荷」の条件が $\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0$ になってしまい、「除荷」の判定と区別がつかない。ということは、式(11.66)は

$$\text{弾性: } \lambda = 0 \quad \text{もし } f < 0 \tag{11.85a}$$

$$\text{除荷: } \lambda = 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \dot{f} < 0 \quad \text{かつ } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} < 0 \tag{11.85b}$$

$$\text{中立載荷: } \lambda = 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \dot{f} = 0 \quad \text{かつ } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = 0 \tag{11.85c}$$

$$\text{載荷: } \lambda > 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \dot{f} = 0 \quad \text{かつ } \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0 \tag{11.85d}$$

$$\text{許容されない状態: } f > 0 \quad \text{あるいは } \dot{f} > 0 \tag{11.85e}$$

とでも定義し直す必要があるのかもしれないが、よくわからない。

あるいは、式(11.80a)の λ の表現を用いて

$$\text{載荷: } \lambda > 0 \quad \text{もし } \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ab}} C_{abcd} \dot{\epsilon}_{cd} > 0$$

とすれば、軟化の場合にも対応できるとする考え方(単に $\lambda > 0$ の条件だから本質的な解決ではないと思うが)もあるようだ。ただし、式(11.80b)の $\tilde{H} > 0$ を必須条件とする。この必須条件は、上でも述べたように、負の H を許容している。いずれにしても数値解析では、載荷を仮定して計算して求められる $\dot{\epsilon}, \dot{\sigma}$ を用いて、その仮定が正しいか否か判定せざるを得ないのだろう・・・か?

演習問題 11-3

- まず一度は標準的物理的な手法を用いて式(11.43)から逆関係の式(11.46)を求めた上で、式(11.81)を求め手法を用いて Prandtl-Reuss の関係式(11.43)から逆関係の式(11.46)を求めよ。

11.3.3 具体例と履歴依存性

(1) 2 応力状態の例

初めて塑性論を学ぶ読者はもう何が何だかわからなくなっているかもしれない。添え字がたくさん出現するし、式だけで応力ひずみ関係を想像するのは困難かもしれない。しかしここまでは初歩である。式で物理を思い描けるようにならないといけないので、わからない部分がある読者はもう一度最初から読み返して欲しい。

特に式の誘導を自分でやらずに読んだだけの文字通りの「読者」には、やはり手を動かして³⁴欲しい。さてここでは、最も基本的な Prandtl-Reuss モデルを用い、二つの応力成分だけが非零である状態を対象として具体的に手を動かして結果を図示してみよう。そのモデルでは

$$f \equiv \bar{\sigma} - \tau_Y, \quad \bar{\sigma} \equiv \sqrt{J_2}, \quad J_2 \equiv \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}, \quad \tau_Y \equiv \tau_{Y0} + H \bar{\epsilon}^P, \quad \dot{\bar{\epsilon}}^P \equiv \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^P \dot{\epsilon}_{ij}^P} \quad (11.86a, b, c, d, e)$$

と定義されている。ただし、しばらくは硬化係数 H は定数とする。まず

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2\bar{\sigma}} \sigma'_{ij}$$

であり、載荷条件は

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2\bar{\sigma}} \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} > 0 \quad (11.87)$$

と表される。また流れ則と整合条件から

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \frac{1}{H} \frac{1}{4\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.88)$$

という関係になる。

最も簡単でやや一般的な例として、2 応力状態の

$$\sigma_{11} = \sigma, \quad \sigma_{12} = \tau, \quad \text{他の成分} \equiv 0 \quad (11.89a, b, c)$$

であり続ける場合を考えてみよう。これは薄肉円管を引張りながらねじる実験を想定すればいい。このとき弾性は式 (11.42) の増分型の Hooke の法則から

$$\epsilon_{11}^e = \frac{1}{E} \dot{\sigma}, \quad \epsilon_{22}^e = -\frac{\nu}{E} \dot{\sigma}, \quad \epsilon_{33}^e = \epsilon_{22}^e, \quad \epsilon_{12}^e = \frac{1}{2\mu} \dot{\tau} \quad (11.90a, b, c, d)$$

となる。また、直応力成分の偏差成分は

$$\sigma'_{11} = \frac{2}{3} \sigma, \quad \sigma'_{22} = -\frac{1}{3} \sigma, \quad \sigma'_{33} = \sigma'_{22} \quad (11.91a, b, c)$$

となるので、まず式 (11.86b) (11.86c) から相当応力は

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{3} \sigma^2 + \tau^2} \quad (11.92)$$

となり、載荷条件は式 (11.87) から

$$\sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{2}{3} \sigma \dot{\sigma} + 2\tau \dot{\tau} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3} \sigma \dot{\sigma} + \tau \dot{\tau} > 0 \quad (11.93)$$

を得る。さらに式 (11.88) の流れ則は、この載荷条件式 (11.93) が成立しているとき

$$\dot{\epsilon}_{11}^P = \frac{\sigma}{3H(\sigma^2 + 3\tau^2)} (\sigma \dot{\sigma} + 3\tau \dot{\tau}), \quad \dot{\epsilon}_{22}^P = -\frac{1}{2} \dot{\epsilon}_{11}^P, \quad \dot{\epsilon}_{33}^P = \dot{\epsilon}_{22}^P, \quad \dot{\epsilon}_{12}^P = \frac{\tau}{2H(\sigma^2 + 3\tau^2)} (\sigma \dot{\sigma} + 3\tau \dot{\tau}) \quad (11.94a, b, c, d)$$

という関係が成り立つ。ちなみに、流れ則からは

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \lambda_{PR} \sigma'_{ij} \quad \rightarrow \quad \frac{3\dot{\epsilon}_{11}^P}{2\sigma} = \frac{\dot{\epsilon}_{12}^P}{\tau} \quad (11.95)$$

³⁴ ある論文を読んでくるようにと Nemat-Nasser 先生から初めて指示された第 1 著者が読後に部屋を訪れると、「見せなさい（確かそうだった）」と言われた。「えっ!」である。その論文の式をすべて誘導してみたかどうかを先生は聞いたのだ。論文の読み方を初めて習った瞬間だった。このとき p.76 の脚注 '24' に書いたミスをした。

が成立することを意味している。これはかなり特殊な制約条件に感じられるかもしれないが、後述のように重要な条件だ。式(11.94)を式(11.86e)に代入すれば、2 応力状態で**載荷が継続する限り**は

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \sqrt{3(\dot{\epsilon}_{11}^p)^2 + 4(\dot{\epsilon}_{12}^p)^2} = \frac{1}{H\sqrt{1/3\sigma^2 + \tau^2}} \left\{ \frac{1}{3}\sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau} \right\} \quad (11.96)$$

となり、式(11.92)から $\dot{\bar{\epsilon}}^p = \frac{1}{H}\dot{\bar{\sigma}}$ となるので、 H が定数なら**載荷が継続する限り**は積分できて

$$\bar{\epsilon}^p = \frac{1}{H} \sqrt{\frac{1}{3}\sigma^2 + \tau^2} + \text{const.} \quad \rightarrow \quad \bar{\sigma} = H(\bar{\epsilon}^p - \text{const.}) \quad \rightarrow \quad \bar{\sigma} = \tau_{y0} + H\bar{\epsilon}^p \quad (11.97)$$

となることから、式(11.86a)(11.86d)の降伏条件に一致する。なお σ か τ のいずれかが零であり続けるような単純な1次元応力状態の場合には、それぞれ

$$\tau \equiv 0 \text{ の場合には } 3H\dot{\epsilon}_{11}^p = \dot{\sigma}, \quad \sigma \equiv 0 \text{ の場合には } 2H\dot{\epsilon}_{12}^p = \dot{\tau} \quad (11.98a, b)$$

となる。

ところで、式(11.94)の流れ則は

$$\begin{Bmatrix} 3H\dot{\epsilon}_{11}^p \\ 2H\dot{\epsilon}_{12}^p \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\tau} \end{Bmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \equiv \frac{1}{\sigma^2 + 3\tau^2} \begin{pmatrix} \sigma^2 & 3\sigma\tau \\ \sigma\tau & 3\tau^2 \end{pmatrix} \quad (11.99a, b)$$

のように書くことができる。ここで**載荷が継続されている**とした場合、もし

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial \tau} = \frac{\partial A_{12}}{\partial \sigma}, \quad \frac{\partial A_{21}}{\partial \tau} = \frac{\partial A_{22}}{\partial \sigma} \quad (11.100a, b)$$

が成立してしまうと流れ則は積分可能(完全な全微分表現)になり、積分経路に依存せずに塑性ひずみが唯一に求められることになる。そこで、この各係数の微係数を求めてみると

$$\frac{\partial A_{11}}{\partial \tau} = \frac{-6\sigma^2\tau}{(\sigma^2 + 3\tau^2)^2}, \quad \frac{\partial A_{12}}{\partial \sigma} = \frac{3\tau(3\tau^2 - \sigma^2)}{(\sigma^2 + 3\tau^2)^2}, \quad \frac{\partial A_{21}}{\partial \tau} = \frac{\sigma(\sigma^2 - 3\tau^2)}{(\sigma^2 + 3\tau^2)^2}, \quad \frac{\partial A_{22}}{\partial \sigma} = \frac{-6\sigma\tau^2}{(\sigma^2 + 3\tau^2)^2}$$

となるので上の条件式(11.100)は満足されない。これが式(11.44)の具体例である。つまり、除荷をしない場合であっても流れ則は一般には積分可能ではないことを意味し、最終状態の応力が同じであっても、そこまでの応力履歴が異なれば最終的な変形状態は違ってくる。さらに比例載荷 $\sigma/\tau = \text{const.}$ の場合も積分可能にはならない。これが弾性と塑性の違いの中で最も重要な特性[61]だ。あるいは相当応力が非零のまま式(11.100)が成立するためには、第1式からは $\tau \equiv 0$ 、第2式からは $\sigma \equiv 0$ でなければならず、1次元応力状態の場合にのみ積分可能であり履歴依存が無い(除荷の順序は大丈夫?)こともわかる。

(2) 継続された載荷の場合

では**載荷が継続されている**とした場合に、式(11.99)の流れ則の逆関係を求めてみよう。この係数行列の行列式が零であることから、解は存在しないか唯一には決まらないかのいずれかである。そこで p.245 で述べた Alternative Theorem を適用しよう。まず

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix}^T \begin{Bmatrix} w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau \\ -\sigma \end{Bmatrix}$$

であることから、解が存在するための適合条件は

$$\begin{Bmatrix} 3H\dot{\epsilon}_{11}^p \\ 2H\dot{\epsilon}_{12}^p \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} w \end{Bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 3\dot{\epsilon}_{11}^p \tau - 2\dot{\epsilon}_{12}^p \sigma = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{3\dot{\epsilon}_{11}^p}{2\sigma} = \frac{\dot{\epsilon}_{12}^p}{\tau}$$

となり、制約条件式 (11.95) が成立する限りは、この方程式には解が存在することがわかる。そこで、斉次解が

$$\left(A \right) \left\{ v \right\} = \left\{ 0 \right\} \rightarrow \left\{ v \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 3\tau \\ -\sigma \end{array} \right\}$$

であり、式 (11.95) の流れ則が成立するなら、特解が 1 次元状態を仮定したときの関係式 (11.98) そのものの

$$\left\{ \text{特解} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 3H \dot{\epsilon}_{11}^p \\ 2H \dot{\epsilon}_{12}^p \end{array} \right\}$$

でいいことから、最終的に一般解が

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{\sigma} \\ \dot{\tau} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} 3H \dot{\epsilon}_{11}^p \\ 2H \dot{\epsilon}_{12}^p \end{array} \right\} + c \left\{ \begin{array}{c} 3\tau \\ -\sigma \end{array} \right\} \quad (11.101)$$

と求められる。この逆関係式 (11.101) は c の表現には左右されるが、あたかも積分可能な式に見える。ちなみに式 (11.93) に代入すれば明らかなように、この係数 c を持つ斉次解の部分は中立载荷 ($\partial f / \partial \sigma_{ij} \dot{\sigma}_{ij} = 0$) に相当する解である。ということは上式 (11.101) が

$$(\text{応力増分}) = (\text{降伏曲面に鉛直な成分}) + (\text{降伏曲面の接線方向成分})$$

であることを意味している。数学は面白い。 $|c| < \infty$ なので、比例载荷だけではない降伏曲面の外向き任意の方向を向いた応力増分が可能である。

(3) 純せん断の場合

最も単純な純せん断の場合には $\sigma \equiv 0$ としておけばいいので、流れ則と相当応力は式 (11.92) (11.98b) から

$$\dot{\epsilon}_{12}^p = \frac{1}{2H} \dot{\tau}, \quad \bar{\sigma} = |\tau|$$

となる。一方、Hooke の法則式 (11.90) からは

$$\dot{\epsilon}_{12}^e = \frac{1}{2\mu} \dot{\tau}$$

であるから、総ひずみ増分は

$$\dot{\epsilon}_{12} = \frac{1}{2\mu} \dot{\tau} + \frac{1}{2H} \dot{\tau}$$

となる。もし $\tau > 0$ のまま载荷状態が継続している場合には簡単に積分できて、工学ひずみで表すと

$$2\epsilon_{12} = \left(\frac{1}{H} + \frac{1}{\mu} \right) \tau - \frac{1}{2H} \tau_{Y0}$$

という関係が成立する。あるいは逆関係が

$$\tau = \frac{\mu H}{\mu + H} (2\epsilon_{12}) + \frac{\mu}{\mu + H} \tau_{Y0} = \mu (2\epsilon_{12}) - \frac{\mu^2}{\mu + H} \left\{ (2\epsilon_{12}) - \frac{\tau_{Y0}}{\mu} \right\}$$

となるので図 11.23 のようになる。このような単純な (1 軸の) 応力状態の場合には流れ則が積分できてしまうため、図 11.10 や式 (11.14) の全ひずみ理論と増分理論が同じ結果をもたらすことは明らかである。

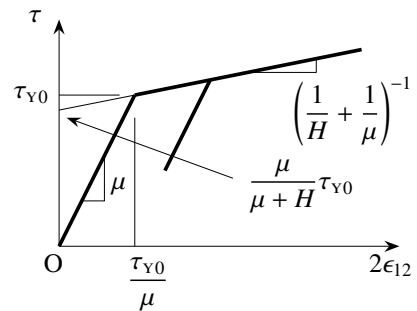


図 11.23 純せん断 (線形硬化)

(4) ベキ乗則硬化の場合

後述の式 (11.161) に相当する

$$\bar{\sigma} = \tau_{y0} + h (\bar{\epsilon}^p)^m \quad \text{あるいは} \quad H = mh (\bar{\epsilon}^p)^{m-1} \quad (11.102a, b)$$

で表されるベキ乗則硬化の場合も式 (11.96) の相当塑性ひずみ増分は積分できて、上式 (11.102) を得る。しかし式 (11.94) の塑性ひずみ増分はこの場合も一般には積分可能ではないから、履歴依存性を持つことになる。

ただし純せん断の場合なら前節同様に積分可能で簡単な関係式を得て

$$2\epsilon_{12} = \frac{\tau}{\mu} + \left(\frac{\tau - \tau_{y0}}{h} \right)^{1/m} \quad (11.103)$$

となり図 11.24 のような関係を得る。初期降伏の状態では、弾性の直線部分と硬化後の曲線部分の勾配は一致して滑らかに連続した関係を得る。具体的な例を後ろの図 11.46 にいくつか示したが、パラメータ h の定義が若干違って、さらにその図では横軸が相当塑性ひずみである。

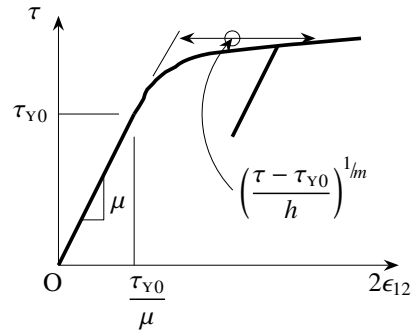


図 11.24 純せん断 (ベキ乗則硬化)

(5) 増分の 2 次項はどう扱うべきか

降伏条件式には応力の 2 乗が存在することから、増分理論で得られる応力増分の 2 乗も計算に含めることができるように感じるかもしれない。しかし、履歴依存特性を表現するために積分不可能な増分理論でしか記述できないモデルに 2 次項を含めることには矛盾を感じる。そこでここでは、そういった高次項の扱いに潜む問題を記しておく。まず、ある応力状態と、それに載荷された次の応力状態との降伏条件はそれぞれ

$$\frac{1}{3} \sigma^2 + \tau^2 = (\tau_{y0} + H \bar{\epsilon}_{\text{current}}^p)^2, \quad \frac{1}{3} (\sigma + \dot{\sigma})^2 + (\tau + \dot{\tau})^2 = \left\{ \tau_{y0} + H (\bar{\epsilon}_{\text{current}}^p + \dot{\epsilon}^p) \right\}^2 \quad (11.104a, b)$$

となる。ここで整合条件を認めた上で、同時に応力増分の 2 次項を無視しない場合がどういう状態に対応するのかを求めておこう。上の 2 式に式 (11.96) を代入して $(\tau_{y0} + H \bar{\epsilon}_{\text{current}}^p)$ を消去すると

$$\frac{1}{3} (\sigma + \dot{\sigma})^2 + (\tau + \dot{\tau})^2 = \left\{ \sqrt{\frac{1}{3} \sigma^2 + \tau^2} + \frac{1}{\sqrt{1/3 \sigma^2 + \tau^2}} \left(\frac{1}{3} \sigma \dot{\sigma} + \tau \dot{\tau} \right) \right\}^2$$

となる。この演算を続けて簡単な表現に変形していくと、最終的に

$$\frac{1}{1/3 \sigma^2 + \tau^2} (\sigma \dot{\tau} - \tau \dot{\sigma}) = 0$$

となり、結局、高次項も含めて厳密に降伏条件が成立するためには

$$\sigma \dot{\tau} - \tau \dot{\sigma} = 0$$

でなければならないことがわかる。つまり

$$\frac{\dot{\sigma}}{\dot{\tau}} = \frac{\sigma}{\tau} \quad \rightarrow \quad \ln \sigma = \ln \tau + \text{const.} \quad \rightarrow \quad \frac{\sigma}{\tau} = \text{const.} \quad (11.105)$$

となるので、比例載荷条件の場合にのみ高次項も含めた降伏条件が成立することがわかる。逆に言うと、比例載荷でない場合には増分の 2 次項を無視しない降伏条件式を厳密に満足させることは不可能だということになる。そもそも流れ則が積分不可能である以上、塑性ひずみはその増分の累積 (代数和) としてしか求めること

ができないから、結局、種々の数値解析において応力やひずみを求めるためには、ある状態の各変数にその増分を加算し続ける計算をせざるを得ない。それは増分が十分に小さいことを要請していることから、整合条件式 ($f = 0$) を真の関係式だと認めたことに相当する。その整合条件を容認するのであれば、応力の 2 次項までを含めて降伏条件式を厳密に成立させ続けることは不可能であることが明らかである。

そこで、更新された相当応力に含まれる応力増分の 2 次項を無視して

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1}{3}(\sigma + \dot{\sigma})^2 + (\tau + \dot{\tau})^2} &\approx \sqrt{\frac{1}{3}\sigma^2 + \tau^2} \left\{ 1 + \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{3}\sigma^2 + \tau^2}} \left(\frac{1}{3}\sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau} \right) \right\} \\ &\approx \sqrt{\frac{1}{3}\sigma^2 + \tau^2} + \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}\sigma^2 + \tau^2}} \left(\frac{1}{3}\sigma\dot{\sigma} + \tau\dot{\tau} \right) \end{aligned} \quad (11.106)$$

とした場合に問題が無いか確かめておこう。この右辺に式 (11.96) (11.104) を代入し、塑性仕事の恒等式

$$\bar{\sigma} \dot{\bar{\epsilon}}^p = \sigma \dot{\epsilon}_{11}^p + 2\tau \dot{\epsilon}_{12}^p \quad (11.107)$$

等を用いれば

$$(\text{右辺}) = \tau_{y0} + H (\bar{\epsilon}_{\text{current}}^p + \dot{\bar{\epsilon}}^p)$$

となり、増分の線形項のみを用いて降伏条件を厳密に成立させられることがわかる。この線形項のみの降伏条件式 (11.106) に一般解の式 (11.101) を代入すると結局 c は任意でよく、前述のように载荷方向のすべての応力増分解が可能になり、増分つり合い式³⁵を用いて境界値問題を解くことによって c を求めることになる。

非線形項を含む降伏条件を繰り返し計算で解く手続きをした上で、整合条件を用いた接線剛性を修正子の接線勾配として取り扱うことの是非については後述するが、次のようにも考えている。そもそも塑性論は流れ則が積分不可能な増分型で表されるし、整合条件式の誘導からも明らかなように、その増分は十分に小さいことを前提としている。したがって、降伏条件は厳密には成立しないものの、比例载荷以外の任意の载荷パターンにおいても増分解で十分な精度の解が得られるのである。以上の結果をまとめると次のようになる。

- 整合条件を物理的に厳密な式と捉えるのであれば、降伏条件に現れる応力増分の非線形項は無視すべきである。無視する必要が無いのは比例载荷の場合のみである。
- 応力増分の非線形項を含めて降伏条件を厳密に満足させるためには、整合条件を用いてはいけないから、前節までに求めた接線構成方程式 (具体的には C^{ep} や D^{ep}) を用いることは好ましくない。

小さくない増分を用いたときの具体的な誤差の程度については、次の節以降の例で定量的に示す。

(6) 複雑な経路に沿った数値解

普通鋼を念頭に置いて、 $E = 200 \text{ GN/m}^2$, $\nu = 0.3$, $H = E/1000$, $\tau_{y0} = 300 \text{ MN/m}^2$ とする。载荷パターンは図 11.25 に示したような 3 種類とする。つまり、いずれも初期降伏までの载荷は比例で $\tau = \alpha\sigma$ とし、比例载荷 (prop) の場合はそのままの比率で最終応力状態 (σ_{final} , τ_{final}) まで硬化させた。他の二つの载荷パターンは、初期降伏状態 (σ_{start} , τ_{start}) から σ か τ の片方を最終応力の σ_{final} ($s2t$: stretch-to-torsion) か τ_{final} ($t2s$: torsion-to-stretch) まで載せ

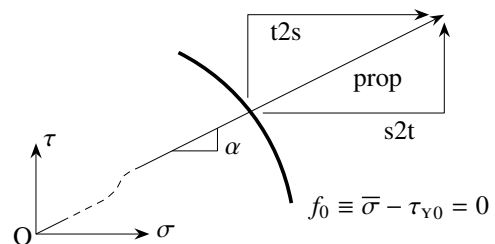


図 11.25 载荷パターン

³⁵ c は何らかの増分量であるから。

たあと、もう片方を最終応力まで載せた。比例係数の α の具体的な値としては、二つの成分がほぼ同程度になる場合を $\alpha = 1/\sqrt{3}$ とし、同程度ではない場合をその十分の一と 10 倍に設定した。初期降伏時の応力と最終応力をそれぞれの α に対して表 11.1 に示した。

初期降伏からのステップ数 N を $N = 10000$ ('t2s' と 's2t' では $N = 20000$) で解析した総ひずみのひずみ成分と相当塑性ひずみの結果を表 11.2 に示した。相当塑性ひずみは、その増分が式 (11.97) のように積分可能なので最終状態ではいずれも同じ値に達しているものの、それぞれの総ひずみ成分は履歴依存のために異なったレベルに達している。括弧内のコロンの前の数値は、比例载荷の場合の各ひずみ成分値に対する履歴依存による増減差の比率である。

ここでは 10% という非現実的に大きなひずみレベルまで計算したのでこのような差になっている。これに対しコロンの後ろに書いた比率は、各ひずみ成分値の増減差の相当塑性ひずみ値に対する比率である。応力比が $\alpha = 1/\sqrt{3}$ の場合にはこの差が比較的大きな 1.4~1.7% 程度になっているのに対し、応力比が $\alpha = 1/(10\sqrt{3})$ と $\alpha = 10/\sqrt{3}$ の場合にはそれが小さいことから、履歴依存性は高めの多軸応力状態の場合に顕著になることがわかる。ここでは線形硬化を対象としたことから、両方の増減差比率とも、半分の最終応力レベルまでの载荷では半分になるし、一桁小さい最終応力レベルまででは一桁小さくなる。重要なのは、履歴に依存して到達する変形状態が違ってくるといことである。

表 11.1 初期降伏時の応力と解析の最終応力 (MN/m²)

α	σ_{start}	τ_{start}	σ_{final}	τ_{final}
$1/\sqrt{3}$	367	212	433	250
$1/(10\sqrt{3})$	517	29.9	589	34.0
$10/\sqrt{3}$	51.7	299	64.1	370

表 11.2 異なる载荷パターンで到達するひずみ成分 (%) の比較：括弧内相対誤差の分母は (比例载荷の各成分値：相当塑性ひずみ)

α	ひずみ成分	prop-ortional	t2s: torsion-to-stretch	s2t: stretch-to-torsion
$1/\sqrt{3}$	ϵ_{11}	11.148	10.688 (-4.1%: -1.7%)	11.584 (3.9%: 1.6%)
	ϵ_{12}	9.6295	10.007 (3.9%: 1.4%)	9.2310 (-4.1%: -1.5%)
	$\bar{\epsilon}^p$	26.777	26.777	26.777
$1/(10\sqrt{3})$	ϵ_{11}	12.271	12.263 (-0.065%: -0.038%)	12.278 (0.057%: 0.034%)
	ϵ_{12}	1.0593	1.1275 (6.4%: 0.33%)	0.99390 (-6.2%: -0.31%)
	$\bar{\epsilon}^p$	20.848	20.848	20.848
$10/\sqrt{3}$	ϵ_{11}	2.0957	1.8840 (-10%: -0.59%)	2.3226 (11%: 0.63%)
	ϵ_{12}	18.113	18.130 (0.094%: 0.047%)	18.092 (-0.11%: -0.058%)
	$\bar{\epsilon}^p$	35.923	35.923	35.923

また念のために、増分解析で求められた応力増分を現応力に加算したものを 2 乗して、増分の非線形項も含めた降伏条件式 (11.104) を算定してみると、比例载荷の場合には第 11.3.3 (5) 節の式 (11.105) で証明したように数値解析上でも厳密に (数値的には倍精度計算で f そのものが 10^{-12} 程度以下、つまり初期降伏応力との相対誤差で 10^{-15} 以下だから事実上零) 成立した。これに対し、例えば $\alpha = 10/\sqrt{3}$ の比例载荷ではない場合には、 f の値と初期降伏応力の比で定義した相対誤差の累積の仕方が図 11.26 のようになる。応力状態が $(\sigma_{\text{start}}, \tau_{\text{start}})$ から $(\sigma_{\text{final}}, \tau_{\text{final}})$ までを $N = 1000$ で (相当塑性ひずみで大きめな 300μ 程度の増分でも) 解析すれば、このような単純な増分解析でも六桁は精度が確保できている。もちろん $N = 10$ のように増分を大きくしてしま

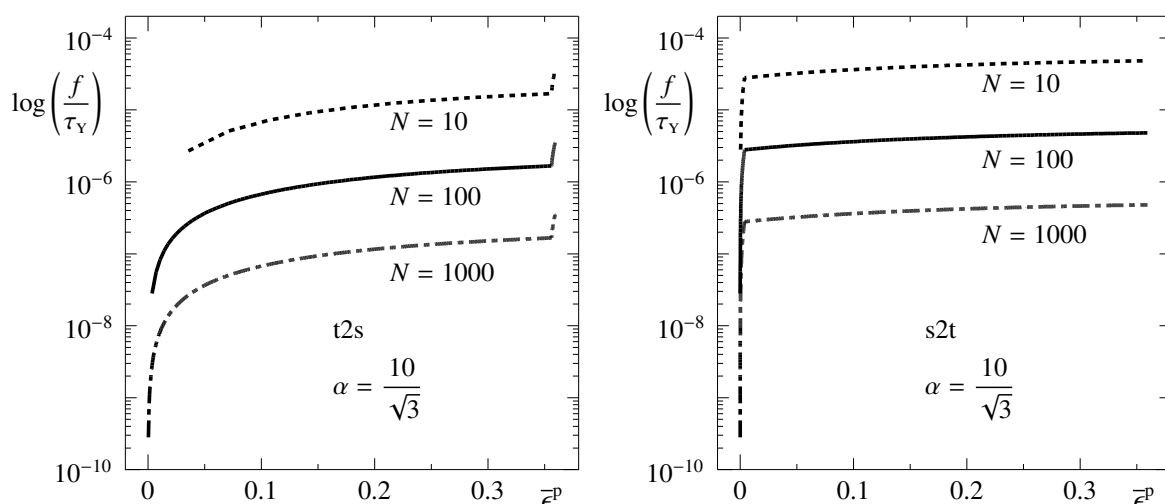


図 11.26 単純な増分解析で累積される降伏条件の相対誤差

表 11.3 異なる载荷パターンで到達するひずみ成分 (%) の比較：高降伏応力・高硬化の場合

α	ひずみ成分	prop	t2s	s2t
$1/\sqrt{3}$	ϵ_{11}	1.1698	1.1389 (-2.6%: -1.5%)	1.1992 (2.5%: 1.5%)
	ϵ_{12}	0.97208	0.99752 (2.6%: 1.3%)	0.94536 (-2.7%: -1.3%)
	$\bar{\epsilon}^p$	1.9957	1.9957	1.9957

うと累積誤差は大きくなるが、それでも三桁程度の精度は得られている。しかも、载荷パターンが変化しない間は誤差の累積が次第に遅くなる。しかし、载荷パターンが急変するとまた累積が急増する。この結果は $\alpha = 1/(10\sqrt{3})$ の場合も同様だった。何度も書くが、そもそも増分理論の基本的な前提は増分非線形性を無視することであり、したがって $f = 0$ は厳密には満たされなくとも、整合条件式 $\dot{f} = 0$ によってそれを保証しようとするものである。以上の結果から次のようなことがわかる。

- 式 (11.97) のように ϵ^p は積分可能だが、各ひずみ成分は履歴依存性を持つ。
- 各载荷ステップで生じる応力増分が降伏応力 τ_{Y0} の数% 以下になるように設定すれば、繰り返し計算の無い単純な増分解析で十分な精度を得ることができる。

少し現実的な場合の例として高張力鋼のような設定、つまり硬化係数と初期降伏応力が高い場合を計算しておこう。弾性特性は前の例と同じにした上で $H = E/50$, $\tau_{Y0} = 500 \text{ MN/m}^2$ とした。履歴依存度が他の場合より大きくなる応力比 $\alpha = 1/\sqrt{3}$ の場合のみを対象としたので、初期降伏時の応力が $(\sigma_{\text{start}}, \tau_{\text{start}}) = (612, 354)$ となり、最終状態は相当塑性ひずみが約 2% というやや現実的な値を目標として $(\sigma_{\text{final}}, \tau_{\text{final}}) = (710, 410)$ とした。結果を表 11.3 に示した。前例よりも一桁小さい 2% 程度の塑性変形までで既に、相当塑性ひずみを基準とした比率で 1.5% 程度と、前例と同じ程度の履歴依存による差が発生している。

(7) 整合条件を用いない数値解析 — 降伏条件を高次項まで満足させる場合

さて、降伏条件を厳密には満足させられないことに対する疑問や不満・不安が生じたかもしれない。昨今は数値解析が容易なので、この程度の応力状態における非線形性の取り扱いにはほとんど問題が生じないだろう。そこで、整合条件を用いることなく、降伏条件を非線形項まで含めて満足させるような解析を試みよう。多分、

return-mapping 法 [84] を使う人達の中ではこういった方法が標準になっていると予想される。ただし材料定数等は最初の例と同じとして、べき乗則硬化については後述する。

まず流れ則の式 (11.95) と応力状態を表す式 (11.91) とから

$$\dot{\epsilon}_{11}^p = \frac{2}{3} \lambda_{PR} \sigma, \quad \dot{\epsilon}_{12}^p = \lambda_{PR} \tau \quad (11.108a, b)$$

となる。これを式 (11.96) に代入すると

$$\dot{\epsilon}^p = 2\lambda_{PR} \sqrt{\frac{\sigma^2}{3} + \tau^2} \quad (11.109)$$

を得る。一方、Hooke の法則式 (11.90) と上式 (11.108) から

$$\dot{\sigma} = E \left(\dot{\epsilon}_{11} - \frac{2}{3} \lambda_{PR} \sigma \right), \quad \dot{\tau} = 2\mu (\dot{\epsilon}_{12} - \lambda_{PR} \tau) \quad (11.110a, b)$$

が成立する。そこで、現時点の降伏条件と増分後の降伏条件式 (11.104) からは

$$\sqrt{\frac{1}{3} (\sigma + \dot{\sigma})^2 + (\tau + \dot{\tau})^2} = \sqrt{\frac{1}{3} \sigma^2 + \tau^2} + H \dot{\epsilon}^p$$

という関係が成り立つので、これに式 (11.109) (11.110) を代入することによって λ_{PR} に対する 2 次方程式を

$$\tilde{f}(\lambda_{PR}) \equiv a \lambda_{PR}^2 + b \lambda_{PR} + c = 0, \quad a \equiv 4 \left\{ \left(\frac{E^2}{27} - \frac{H^2}{3} \right) \sigma^2 + (\mu^2 - H^2) \tau^2 \right\}, \quad (11.111a, b)$$

$$b \equiv -4 \left\{ \left(\frac{E}{9} + \frac{H}{3} \right) \sigma^2 + (\mu + H) \tau^2 + \frac{E^2}{9} \sigma \dot{\epsilon}_{11} + 2\mu^2 \tau \dot{\epsilon}_{12} \right\}, \quad (11.111c)$$

$$c \equiv \frac{E}{3} \left\{ 2\sigma \dot{\epsilon}_{11} + E (\dot{\epsilon}_{11})^2 \right\} + 4\mu \left\{ \tau \dot{\epsilon}_{12} + \mu (\dot{\epsilon}_{12})^2 \right\} \quad (11.111d)$$

のように得ることができる。これを増分毎に解いていけば、整合条件を用いることなく、厳密に（数値解析上は誤差があっても）降伏条件を満足させた解析ができる。

ちなみに整合条件式は、式 (11.104a) の両辺の平方根を用いて

$$f = \frac{1}{\sqrt{1/3 \sigma^2 + \tau^2}} \left(\frac{1}{3} \sigma \dot{\sigma} + \tau \dot{\tau} \right) - H \dot{\epsilon}^p = 0$$

と書くことができるので、式 (11.109) (11.110) を代入することによって λ_{PR} に対する 1 次方程式が

$$-2 \left\{ \left(\frac{E}{9} + \frac{H}{3} \right) \sigma^2 + (\mu + H) \tau^2 \right\} \lambda_{PR} + \left(\frac{1}{3} \sigma E \dot{\epsilon}_{11} + 2\mu \tau \dot{\epsilon}_{12} \right) = 0$$

のように得られる。当然これは、上式 (11.111) に含まれる λ_{PR} とひずみ増分の非線形項を無視して得られる \tilde{f} の線形式である。これに対し、式 (11.111) を例えば Newton-Raphson 法で解く場合の修正のための接線係数は $(d\tilde{f}/d\lambda_{PR} = 2a \lambda_{PR} + b)$ であることから、整合条件を用いて算定される下の式 (11.113) の物理的な接線係数は、非線形項を含めた降伏条件式を Newton-Raphson 法で満足させるための数値解析的に適切な（あるいは便宜的な）接線係数にはなっていない。

ところで、最初の例の増分解析では応力増分を与えてひずみを求めて議論したが、その逆も可能である。式 (11.94) の塑性ひずみ増分と Hooke の法則式 (11.90) から

$$\begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} D^{ep} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\tau} \end{Bmatrix} \quad (11.112)$$

と書くことができる。ここに

$$D_{11}^{ep} = \frac{1}{E} + \frac{\sigma^2}{3H(\sigma^2 + 3\tau^2)}, \quad D_{12}^{ep} = \frac{\sigma\tau}{H(\sigma^2 + 3\tau^2)}, \quad D_{21}^{ep} = \frac{1}{2} D_{12}^{ep}, \quad D_{22}^{ep} = \frac{1}{2\mu} + \frac{3\tau^2}{2H(\sigma^2 + 3\tau^2)}$$

表 11.4 降伏条件を非線形項まで満足させた場合の応力 (MN/m²) の解との比較

	prop	t2s	s2t
$(\epsilon_{11}, \epsilon_{12})_{\text{start}}$ (%)	(0.18371, 0.13789)		
$(\epsilon_{11}, \epsilon_{12})_{\text{switching}}$ (%)	—	(5.6235, 5.2930)	(6.1407, 4.8489)
$(\epsilon_{11}, \epsilon_{12})_{\text{final}}$ (%)	(11.148, 9.6295)		
整合条件を用いない (σ, τ)	(433.01, 250.00)	(453.71, 237.53)	(411.41, 261.96)
prop に対する履歴依存の差 (%)	—	(4.8, -5.0)	(-5.0, 4.8)
$\bar{\epsilon}_{\text{final}}^p$ (%)	26.78	26.80	26.81
増分解析 $N = 100$	(433.01, 250.00)	(454.04, 237.75)	(411.76, 262.18)
増分解析 $N = 1000$	(433.01, 250.00)	(453.74, 237.55)	(411.44, 261.98)
増分解析 $N = 10000$	(433.01, 250.00)	(453.72, 237.53)	(411.41, 261.96)

と定義したので、この式 (11.112) の逆関係

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma} \\ \dot{\tau} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} C^{\text{ep}} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} D^{\text{ep}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \dot{\epsilon}_{11} \\ \dot{\epsilon}_{12} \end{Bmatrix} \quad (11.113)$$

から、ひずみ増分に対する応力増分を求めることができる。この 2 式の係数行列が、式 (11.89) の応力状態における式 (11.49) の具体例である。この接線特性は増分理論の枠組における弾塑性モデルの物理的な特性であり、決して Newton-Raphson 法で便宜的に用いられる数値解析的な接線係数ではない。

ここではひずみを与えて応力を求めるが、前の例で二つの応力がほぼ同じレベルにある载荷比 $\alpha = 1/\sqrt{3}$ の応力を与えた場合に得られたひずみ値を最終状態の目標値とする。つまり、表 11.4 第 2 行の初期ひずみ状態は载荷比 $\alpha = 1/\sqrt{3}$ のときの初期降伏時のひずみ値であり、最終ひずみ状態は表 11.2 の第 3 列上方 2 行の比例载荷時の最終応力時のひずみ値である。さらに 't2s' と 's2t' の载荷時のパターン変更時点のひずみを中間ひずみ値 $\epsilon_{\text{switching}}$ として設定した。こうすることによって除荷が生じず常に载荷条件が満足され続けるようにひずみ増分を与えることができる。比例载荷の場合には表 11.4 のように、整合条件を用いない結果は、整合条件を用いた $N = 100$ の場合の下から 3 行目の増分解析解と完全に一致する。これは線形硬化に設定したためである。また最終的に到達した応力に現れる履歴依存の程度は 5% 前後となり表 11.2 の結果と同程度だ。なお、相当塑性ひずみ値は数値誤差によって若干異なる。このときの応力ひずみ関係を図 11.27 に示した。直応力 σ_{11} を縦軸にとったので、载荷パターンが切り替わったステップで軟化が生じて除荷が発生しているようにも見えるが、数値解析では载荷条件が常に成立していた。そこで確認のために降伏曲面と応力履歴を図 11.28 に示した。図では初期降伏後の履歴を拡大してあるが、図の右下の小さい図が第 1 象限の降伏曲面図である。このように応力の変化は常に载荷方向を向いている。

これに対し、単純な増分解析をした結果も同じ表の下 3 行に載せた。比例载荷パターンではない 't2s' や 's2t' の場合であっても、 $N = 100$ の増分解析で四桁の精度を得ていることは、図 11.26 の降伏条件に含まれる誤差のオーダーの結果と整合している。これは各ステップのひずみ増分をやや大きめの 1000μ 程度に設定した増分解析に相当する。なお $N = 10$ といった大きなひずみ増分を与えた場合には、ある増分ステップ時に除荷条件になってしまって数値解析が不安定になることがあった。以上の結果から次のようなことがわかる。

- 整合条件を用いずに応力増分の非線形項も含めて降伏条件を満足させる解析結果と比較すると、一载荷ステップで生じるひずみ増分が 1000μ より小さくなるように設定すれば、単純な増分解析でも十分な精

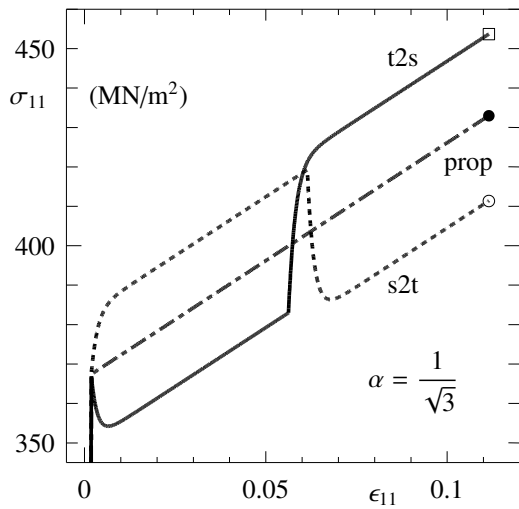


図 11.27 整合条件を用いない解析例 (線形硬化)

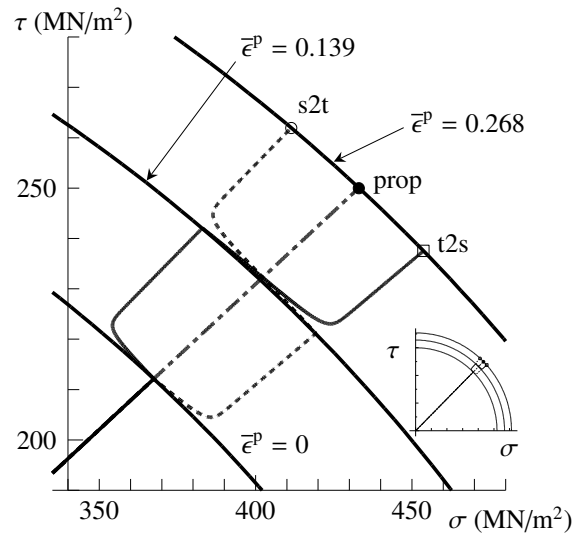


図 11.28 降伏曲面の膨張と応力履歴

度で得ることができる。つまり、降伏条件を増分の2次項も含めて厳密に満足させるような繰り返し計算や非線形計算をすることは、力学的な観点からも必要が無い。

- そもそも流れ則が増分についての線形関係のみでモデル化³⁶されているのに対し、式(11.111)のように応力増分の2次項も含めて降伏条件を満足させる手法は、増分の取り扱い方にバランスを欠いた考え方になっている。その考え方と、増分解析で十分な精度が得られることを踏まえると、整合条件を無視して降伏条件を厳密に満足させる解析をする必要はない。

(8) べき乗則硬化の場合の数値解

式(11.102a)のべき乗則の場合には、その非線形硬化の影響でさらに载荷の順番の影響が大きく現れそうだ。そこで $h = 500 \text{ MN/m}^2$, $m = 0.17$, $\tau_{y0} = 400 \text{ MN/m}^2$ の場合を数値解析しておこう。まず $m < 1$ なので $\bar{\epsilon}^p$ が零のときに硬化係数が無限大になる。数値解析でこれを避けるために、ある小さい数値 ζ を零とみなし

$$\zeta = 10^{-300}, \quad H = \begin{cases} mh(\bar{\epsilon}^p)^{m-1} & \text{if } \bar{\epsilon}^p > \zeta \\ mh(\zeta)^{m-1} & \text{if } \bar{\epsilon}^p \leq \zeta \end{cases} \quad (*)$$

と近似した。線形硬化の場合とは異なり、前出の高張力鋼を念頭に置いた例と同様少し大きめの降伏応力と硬化を設定して、最終的な変形状態は相当塑性ひずみで1%程度を目標としたので、表11.5に示した初期降伏応力状態から最終状態までの载荷とした。

まず、二つの応力がほぼ同じレベルにある载荷比 $\alpha = 1/\sqrt{3}$ の場合を増分解析する。べき乗則の場合には一般に比例载荷であっても降伏条件を厳密に満足させることができない。比例载荷で累積する降伏条件の誤差を図11.29に示したが、ステップ数が小さい $N = 10^3$ の場合には三桁の精度も得られていない。ただし硬化係数が非常に大きい初期降伏段階の誤差が主に影響を受けていて、そのあとは誤差の累積が無い特性が明らかだ。したがって上式(*)のような近似の扱いによっても結果に影響を受ける可能性がある。実際の工学的シミュレーション

表 11.5 初期降伏時の応力値と解析の最終目標の応力値 (MN/m²)

α	σ_{start}	τ_{start}	σ_{final}	τ_{final}
$1/\sqrt{3}$	489.9	282.8	779.4	450.0
$1/(10\sqrt{3})$	689.4	39.80	1091	63.00
$10/\sqrt{3}$	68.94	398.1	109.1	630.0

³⁶ 岸野佑次先生がこの件についてコメントしてくださったのだが、一つのわかり易い例として中立载荷条件を挙げてくださった。増分が小さくないのであれば中立载荷条件は载荷条件になってしまうからである。

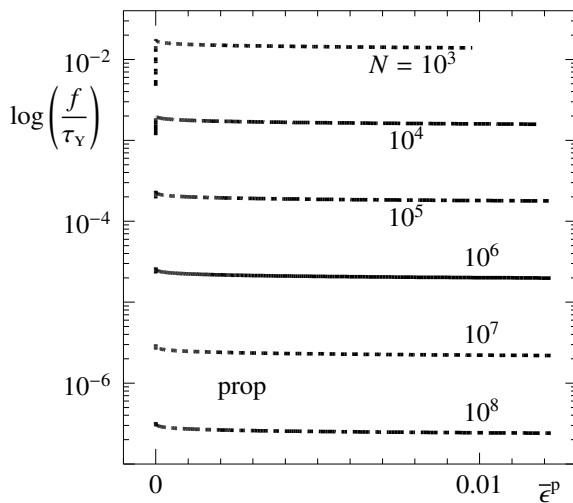


図 11.29 増分解析における降伏条件の相対誤差 (比例載荷)

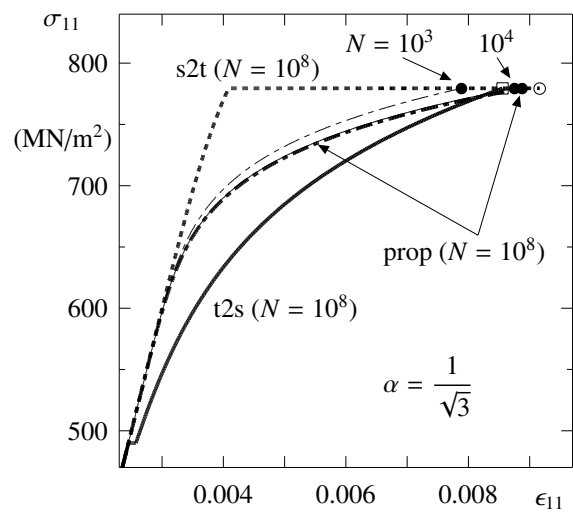


図 11.30 異なる載荷パターンで応力ひずみ関係に生じる履歴依存性 (増分解析)

表 11.6 異なる載荷パターンで到達するひずみ成分 (%) の比較 : 比率はそれぞれ ($N = 10^8$) [prop] に対する値

載荷パターン	ひずみ成分	$N = 10^3$	10^4	10^5	10^6	10^7	10^8
prop	ϵ_{11}	.78875 (-11%)	.87537	.88629	.88754	.88768	0.88770
	ϵ_{12}	.63808 (-12%)	.71309	.72255	.72364	.72376	0.72377
	$\bar{\epsilon}^p$.97744 (-2.0%)	1.1896	1.2164	1.2194	1.2198	1.2198
t2s	ϵ_{11}	.80450 (-6.0%)	.84950	.85487	.85548	.85555	0.85556 [-3.6%]
	ϵ_{12}	.69787 (-6.8%)	.74264	.74800	.74860	.74867	0.74868 [3.4%]
	$\bar{\epsilon}^p$	1.0849 (-11%)	1.2038	1.2180	1.2196	1.2198	1.2198
s2t	ϵ_{11}	.85780 (-6.4%)	.90949	.91567	.91637	.91645	0.91646 [3.2%]
	ϵ_{12}	.65172 (-6.4%)	.69069	.69534	.69587	.69593	0.69593 [-3.8%]
	$\bar{\epsilon}^p$	1.0849 (-11%)	1.2038	1.2180	1.2196	1.2198	1.2198

では、降伏条件に生じる誤差が許容範囲に入るように荷重増分等を適切にコントロールする等の工夫が必要だろう。ただここでは簡単のために一定の増分で解析した。

最終状態で得られたひずみ成分の値を表 11.6 に示した。まずステップ数の影響を見るために 3 列目にある普通の括弧に入れた相対誤差の比率を見ると、どの載荷パターンにおいても $N = 10^3$ の結果は $N = 10^8$ の値の 5% 以上の誤差になっており、図 11.29 の結果と整合する。比例載荷 (prop) の場合のステップ数の影響を、応力ひずみ関係図 11.30 に黒丸を最終状態とする 3 本の曲線で示したが、細い実線の $N = 10^4$ の場合の結果は $N = 10^8$ の太い一点鎖線の結果にほとんど一致する。この解析では応力増分を 30 kN/m^2 程度以下で十分であることを示しているが、この増分は線形硬化の場合より二桁程小さいことに注意して欲しい。そしてこの小さい増分は前述のように初期降伏段階の非常に大きい硬化係数に支配されている。

一方、履歴依存性について比べるために表 11.6 の右端の列にある鉤括弧に入れた相対誤差の比率を見ると、比例載荷に対してそうでない二つの載荷パターンで 3% 程度の差が生じている。ただし、やはり相当塑性ひずみ増分は積分可能であったことから履歴に依存しない値を得ている。 $N = 10^8$ の結果を用いた応力ひずみ関係

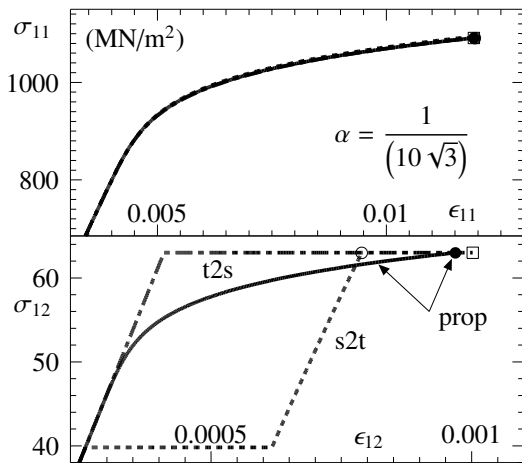


図 11.31 セン断成分が小さい場合 (増分解析 $N = 10^8$)

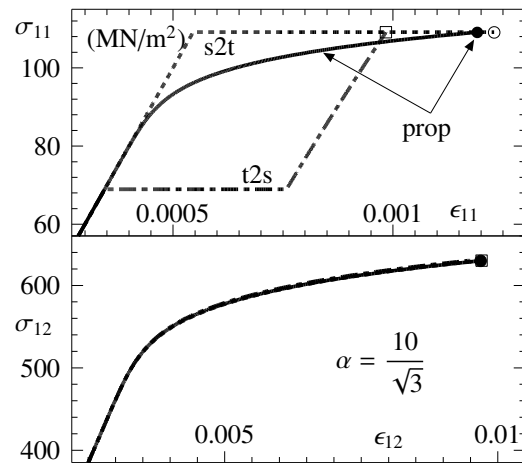


図 11.32 セン断成分が大きい場合 (増分解析 $N = 10^8$)

を同じ図 11.30 に示した ('t2s' が□までの実線で, 's2t' が○までの破線) が, 相対誤差では 3% 程度あるものの, 図で明確に判別できる程度の履歴依存性が 1% 程度のひずみレベルで生じている。応力比が $\alpha = 1/(10\sqrt{3})$, $10/\sqrt{3}$ の場合もステップ数に対する誤差は $\alpha = 1/\sqrt{3}$ の例とほぼ同様だった。 $N = 10^8$ の場合の具体的な履歴を応力ひずみ関係図 11.31, 11.32 に示した。

最後に, 流れ則には増分線形性を保つ一方で整合条件を用いずに, 応力増分の非線形項も含んだ降伏条件を満足させる解析を行う。式 (11.108) (11.109) (11.110) を式 (11.102a) の降伏条件に代入して整理すると, 増分後の降伏条件が λ_{PR} の関数として

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\lambda_{PR}) \equiv & \sqrt{\frac{1}{3} \left(\sigma + E \epsilon_{11} - \frac{2}{3} E \sigma \lambda_{PR} \right)^2 + (\tau + 2\mu \epsilon_{12} - 2\mu \tau \lambda_{PR})^2} - \sqrt{\frac{1}{3} \sigma^2 + \tau^2} \\ & + h (\bar{\epsilon}^p)^m - h \left(\bar{\epsilon}^p + 2 \lambda_{PR} \sqrt{\frac{1}{3} \sigma^2 + \tau^2} \right)^m = 0 \end{aligned}$$

と表される。これを標準的な Newton-Raphson 法で解くと, 第 m ステップの修正計算と収束判定は

$$\lambda_{PR}^{(m+1)} = \lambda_{PR}^{(m)} - \left\{ \frac{d\tilde{f}}{d\lambda_{PR}} \left(\lambda_{PR}^{(m)} \right) \right\}^{-1} \tilde{f} \left(\lambda_{PR}^{(m)} \right), \quad \left| \frac{\lambda_{PR}^{(m+1)} - \lambda_{PR}^{(m)}}{\lambda_{PR}^{(m+1)}} \right| < \tilde{\epsilon}$$

とすればいい。以下の計算では $\tilde{\epsilon} = 10^{-6}$ とした。求めたい解 $\lambda_{PR}^{(m)}$ が非常に小さい量なので, N が大きい場合にこの $\tilde{\epsilon}$ を小さくし過ぎると桁落ちのために収束しないことがある。

载荷は線形硬化の場合と同じようにした。つまり, 表 11.6 の増分解析で得られた比例载荷の初期降伏時から载荷を開始し, 同じく表 11.6 の比例载荷の最終ひずみを最終状態とした。また比例ではない载荷の場合は, パターン変更時のひずみを中間状態とした。その値を表 11.7 の上方の 3 行に示した。もちろん表 11.6 の増分解析ではべき乗則の非線形性のために, 二つのひずみ成分の増加の仕方は比例的でもなく線形でもなかったはずだが, ここではそれを線形的に与える。したがって応力の最終状態は表 11.6 の結果とは異なる。同じ表 11.7 の中ほどに, 整合条件を用いずに得られた最終状態の応力成分を示した。線形硬化の場合と異なり, 少し多めのステップ数 N を用いないと精度がよくない。これは, 数値解析上の洗練された丁寧な工夫をしていないために, **Newton-Raphson** 法の繰り返し計算中にも非常に小さいとはいえ履歴依存性が生じるからだ。しかしもちろん, 同じ表の下半分に並べた単純な増分解析よりは少ないステップ数でいい精度が得られるので, 実際のシミュレーションでは繰り返し計算を用いるメリットはあるかもしれない。ただ, 表の下 4 行に示した単純な増分解析結果と比較すると, 必ずしも繰り返し計算が必要かどうかはそれほど明確ではない。

表 11.7 降伏条件の高次項まで満足させた場合の応力 (MN/m²) の解との比較

	prop	t2s	s2t
$(\epsilon_{11}, \epsilon_{12})_{\text{start}}$ (%)	(0.24495, 0.18385)		
$(\epsilon_{11}, \epsilon_{12})_{\text{switching}}$ (%)	—	(0.25731, 0.30864)	(0.40834, 0.19455)
$(\epsilon_{11}, \epsilon_{12})_{\text{final}}$ (%)	(0.88770, 0.72377)		
整合条件を用いない $(\sigma, \tau) N = 10^2$	(783.07, 447.87)	(824.39, 422.58)	(734.86, 474.75)
整合条件を用いない $(\sigma, \tau) N = 10^3$	(783.02, 447.90)	(823.85, 422.93)	(735.43, 474.45)
整合条件を用いない $(\sigma, \tau) N = 10^4$	(783.02, 447.90)	(823.80, 422.96)	(735.48, 474.42)
整合条件を用いない $(\sigma, \tau) N = 10^5$	(783.02, 447.90)	(823.79, 422.97)	(735.49, 474.41)
prop に対する履歴依存の差 (%)	—	(5.21, -5.57)	(-6.07, 5.92)
$\bar{\epsilon}_{\text{final}}^p$ (%)	1.2196	1.2225	1.2289
増分解析 $N = 10^2$	(789.05, 451.94)	(826.82, 424.79)	(738.29, 476.43)
増分解析 $N = 10^3$	(783.62, 448.31)	(824.09, 423.15)	(735.77, 474.61)
増分解析 $N = 10^4$	(783.08, 447.95)	(823.82, 422.98)	(735.52, 474.43)
増分解析 $N = 10^5$	(783.02, 447.91)	(823.79, 422.97)	(735.49, 474.41)

そこで、比例载荷時の繰り返し計算回数と相当塑性ひずみレベルの関係を図 11.33 に示した。 N が小さいときには 10 回程度の繰り返し計算が必要になることから、繰り返し計算を伴う少なめの N ステップの解析結果とは、 $10 \times N$ ステップを用いた単純な増分解析結果を比較するのが適切だろう。そのような観点で表 11.7 の中ほどの結果と下 4 行の結果を比べると、単純な増分解析でもかなり良好な精度が得られていることがわかる。ちなみに表 11.7 第 9 行の履歴依存による応力値の差は、表 11.6 のひずみ値に現れる差に比べてやや大きい。これは応力を与えたかひずみを与えたかの違いがあるからだ。

得られた応力ひずみ関係を図 11.34 に示した。この図だけを見ると線形硬化の場合と同様、比例载荷ではない場合に軟化が生じているように見え除荷が生じているようにも見えるが、数値解析では载荷条件が常に成立していた。図 11.35 に示した降伏曲面上の履歴からもそれは明らかだ。このような载荷パターンが履歴依存をさらに顕著にしたと考えられる。また最終的に到達する全ひずみを同じにしたので、累積される相当塑性ひずみ値は载荷パターン毎に数値誤差によって若干異なり、その差は線形硬化の場合よりも顕著だった。単純な増分解析との精度の差を見るために、かなり粗い $N = 100$ の場合の増分解析結果を細い線で同じ図 11.34 に示したが、この程度の差しか無く、モデルシミュレーションという工学的目的のためにはそれほど問題になる差にはなっていない。ちなみに、 $N = 10^3$ の増分解析結果はこの図の上では $N = 10^8$ の結果との区別がつかない。これは与える増分ひずみが 10μ 程度に相当し、やはり線形硬化の場合の二桁程小さい増分ステップが必要だということを示唆している。表 11.7 を見ると、ここで選んだ材料パ

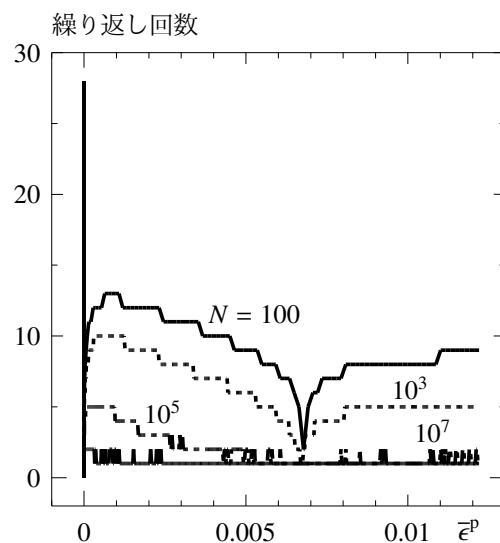


図 11.33 Newton-Raphson 法の繰り返し回数

表 11.35 に示した降伏曲面上の履歴からもそれは明らかだ。このような载荷パターンが履歴依存をさらに顕著にしたと考えられる。また最終的に到達する全ひずみを同じにしたので、累積される相当塑性ひずみ値は载荷パターン毎に数値誤差によって若干異なり、その差は線形硬化の場合よりも顕著だった。単純な増分解析との精度の差を見るために、かなり粗い $N = 100$ の場合の増分解析結果を細い線で同じ図 11.34 に示したが、この程度の差しか無く、モデルシミュレーションという工学的目的のためにはそれほど問題になる差にはなっていない。ちなみに、 $N = 10^3$ の増分解析結果はこの図の上では $N = 10^8$ の結果との区別がつかない。これは与える増分ひずみが 10μ 程度に相当し、やはり線形硬化の場合の二桁程小さい増分ステップが必要だということを示唆している。表 11.7 を見ると、ここで選んだ材料パ

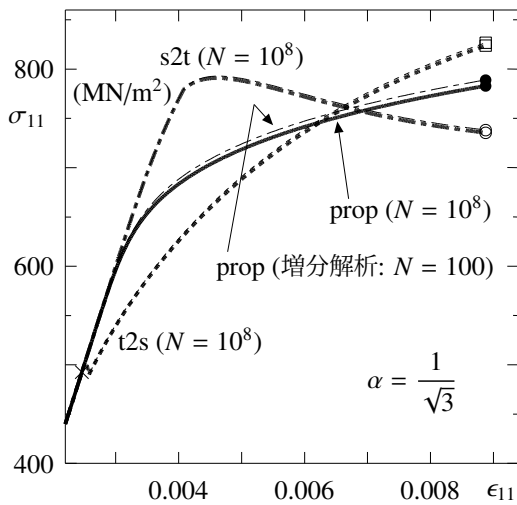


図 11.34 整合条件を用いない例（べき乗則硬化）

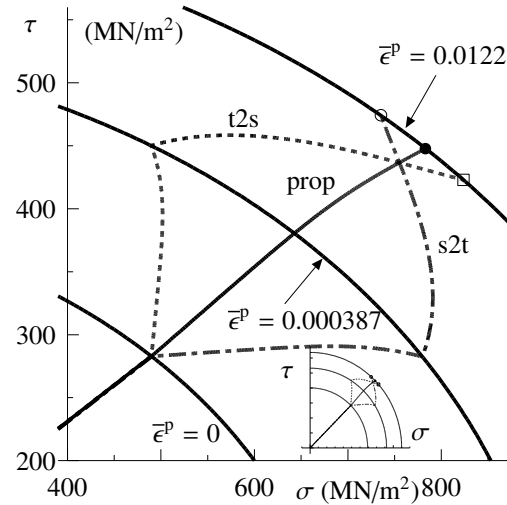


図 11.35 降伏曲面の膨張と応力履歴

ラメータの場合は $N = 10^5$ で五桁の有効数字の精度が確保できていた。以上の結果から次のようなことがわかる。

- べき乗則硬化の場合も単純な増分解析で十分な精度を得ることができるが、初期降伏段階に線形硬化よりも比較的大きな硬化係数を持つモデルを用いる場合には、線形硬化の場合より二桁程は小さい増分になるようにする必要がある。
- 用いる硬化則に依らず、降伏条件に応力増分の非線形項を考慮する必要は無く、逆に、増分の取り扱い方にバランスがとれている単純な増分解析には何も問題が無いことが明らかである。

11.3.4 転位の運動と Prandtl-Reuss モデル

ここでちょっと数理物理の世界で遊んでみよう。かく書く著者は全く理解していないが、文献 [69] にとても面白い記述がある。それは第 3.6.4 節の二つ目の例でも示した数学的転位の移動と塑性の関係を論じた部分である。**Burgers** ベクトル（結晶格子のずれ分量）が \mathbf{b} の転位が \mathbf{v} 方向に伸びているとする。この転位が伸びている方向の線を転位線と呼ぶ。この転位線が外力の作用によって速度 \mathbf{V} で移動しつつあるとしよう。このとき、この転位が移動したことによって生じる速度勾配（変形勾配の変化）は

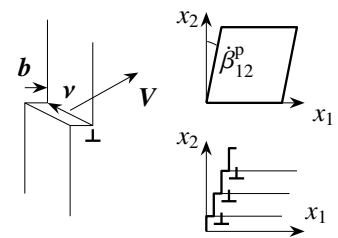


図 11.36 移動する転位と塑性

$$\dot{\beta}_{ij}^p = -\rho e_{jnh} V_n v_h b_i \quad \text{あるいは} \quad \dot{\beta}^p = -\rho (\mathbf{V} \times \mathbf{v}) \mathbf{b} \quad (a)$$

と³⁷なる。ここに e_{jnh} は式 (3.27) で定義した交代記号である。以下

$$\alpha_{hi} \equiv \rho v_h b_i$$

と定義するが、この α は転位密度と呼ばれている。図 11.36 は、 $\mathbf{b} \equiv [b_1 \ 0 \ 0]^T$ の転位の転位線が x_3 方向のみ $\mathbf{v} \equiv [0 \ 0 \ 1]^T$ に伸びていて、それが速度 $\mathbf{V} \equiv [V_1 \ 0 \ 0]^T$ で移動する場合の速度勾配 $\dot{\beta}_{12}^p = \rho V_1 b_1$ を例示している。この転位によって生じる塑性ひずみ増分は、速度勾配の対称成分で表すことができ

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2} (\dot{\beta}_{ij}^p + \dot{\beta}_{ji}^p) \quad (b)$$

³⁷ ここはわからない。なぜかについては文献を勉強して欲しい。原点に転位があって $x_1 < 0$ が b_1 だけずれた転位による変形勾配が $\dot{\beta}_{21}^p = -n_2 b_1 H(-x_1) \delta(x_2)$ というのは、どうやら認識はできてはいるが。

となる。このとき塑性载荷状態の塑性仕事増分と塑性的な体積ひずみ増分は、式 (a) (b) から

$$\dot{w}^p = \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p = -\sigma_{ij} e_{jnh} V_n \alpha_{hi} > 0, \quad \dot{\epsilon}_{ii}^p = -e_{inh} V_n \alpha_{hi} = 0$$

でなければならない。この 2 式が同時に成立するためには

$$V_n \alpha_{hi} = \mu^* g_{nhi}, \quad g_{nhi} \equiv -\frac{1}{2} e_{nhj} \sigma'_{ji}, \quad \mu^* > 0 \tag{c}$$

でなければならないことを村先生は見出した。つまり、この式 (c) の 2 式をすぐ上の 2 式に代入すると

$$\dot{w}^p = \frac{1}{2} \mu^* e_{nhj} e_{nhk} \sigma_{ij} \sigma'_{ki} = \mu^* \sigma'_{ij} \sigma'_{ji} > 0, \quad \dot{\epsilon}_{ii}^p = \frac{1}{2} \mu^* e_{nhi} e_{nhj} \sigma'_{ji} = 0$$

のように、いずれも満足されることが確かめられる。この g_{nhi} は転位線に生じている何らかの力 (ん? 3 階のテンソルの力って? 震源と同じような偶応力? 転位の駆動力?) だと考えられている。ちなみに上式の誘導では、交代記号の定義を持つ $e_{nab} e_{nij} = \delta_{ai} \delta_{bj} - \delta_{aj} \delta_{bi}$ という関係を用いた。

式 (c) の関係を式 (a) に代入して、式 (b) を書き直すと

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2} \mu^* e_{nhj} e_{nhk} \sigma'_{ki} = \mu^* \sigma'_{ji}, \quad \mu^* > 0$$

となり、この μ^* を λ_{PR} と読み替えればそれは式 (11.31b) の流れ則に他ならない。また、転位線に生じている力 g の大きさ (絶対値に相当) は

$$g_{nhi} g_{nhi} = \frac{1}{4} e_{nhk} \sigma'_{ki} e_{nht} \sigma'_{li} = \frac{1}{2} \sigma'_{ji} \sigma'_{ji}$$

となり、式 (11.23a) の相当応力 $\bar{\sigma}$ に一致する。すなわち、降伏条件を満足した位置にある転位は移動し始め、その運動によって体積変形の無いせん断の非可逆ひずみが生じ始めることになる。いかがでしょう。ちょっと面白いような、知っている人が数学で遊んでいるような。でも物理的だよね。閑話休題。

11.4 その他の有用な物理モデル

11.4.1 移動硬化モデル

(1) 移動可能な降伏曲面の導入

前節までの基本的なモデルが正の硬化を持つ場合、降伏曲面の半径が単に大きくなるだけだ。したがって図 11.37 の右側の図の A のように、降伏曲面の半径はすべての応力方向に同じように大きくなるだけなので、左側の図の A のように引張って降伏させたあと除荷して圧縮していくと、次の降伏はその履歴上の最後の降伏応力値で始まる。このような硬化を等方硬化と呼んでいる。しかし、第 11.1.1 (2) 節の箇条 5. で述べたように実際には Bauschinger 効果が存在し、過去に経験した载荷の向きと異なる向きの再载荷では、その履歴上の最後の降伏応力よりも小さい応力レベルで降伏が始まることもある。これは例えば材料内部の微視構造が変化して転位の動き方が変化してしまうこと等が原因だが、その挙動を巨視的な量でモデル化できれば便利だろう。そこで図 11.37 の B や C のように降伏曲面の中心座標が原点以外の α の位置に移動するモデルを考える。このような硬化を移動硬化と呼んでいる。

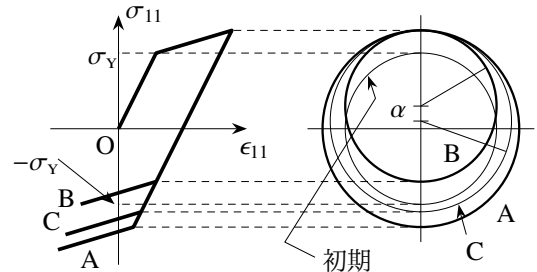


図 11.37 種々の硬化と降伏曲面の模式図

このように硬化を移動硬化と呼んでいる。

図 11.37 の B は降伏曲面の半径が変わらないまま中心だけが動く移動硬化のみを含むモデルで、C は中心が動きながら半径も同時に大きくなるような移動硬化と等方硬化の両方を含むモデルである。

まず降伏曲面の中心座標 α を導入し、これが変形に伴って移動できると考え、降伏関数の J_2 を変更して

$$f = f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \equiv h(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) - \tau_Y, \quad h(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = \overline{(\sigma - \alpha)} \equiv \sqrt{\frac{1}{2} (\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij})(\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij})} \quad (11.114a, b)$$

と定義し直そう。ここに α' は α の偏差成分である。つまり、応力そのものの偏差成分ではなく、変形履歴途中の降伏曲面中心からの相対的な応力成分の偏差成分で定義される一種のせん断応力成分が降伏を支配するものとする。ただしここでは、ひとまずは等方硬化を除外して τ_Y は定数とする。その代わりに、中心座標が塑性変形の変化と累積によって移動（硬化）するものとする。また流れ則は式 (11.63b) と同じく

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \lambda \geq 0 \quad (11.115a, b)$$

が成立するものとする。したがってこの微係数は式 (11.114) の定義から

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial h}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2(\sigma - \alpha)} (\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}) = \frac{1}{2\tau_Y} (\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}) \quad (11.116)$$

という関係にある。

まず整合条件をとると、式 (11.114) の全微分から

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \alpha_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\alpha}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} (\dot{\sigma}_{ij} - \dot{\alpha}_{ij}) = 0 \quad (11.117)$$

となる。つまり図 11.38 に示したように、応力増分の降伏曲面の法線方向成分の大きさは、降伏曲面の移動増分の同じ方向成分と同じでなければならず、したがって、 $\dot{\sigma} = \dot{\alpha}$ となるか、相対的な応力増分の成分 $(\dot{\sigma} - \dot{\alpha})$ が移動する降伏曲面の接線方向にしか変化できないことを示している。さてここまででは降伏条件と流れ則はこれまでとほぼ同様に定義できているが、まだ降伏曲面の中心 α の発展則が規定されていない。これには主に次の二つの考え方が用いられる。

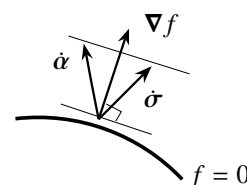


図 11.38 载荷の向き

(2) Prager モデル

Prager は、降伏曲面の中心は塑性ひずみ増分の方角、つまり降伏曲面の法線方向に移動すると仮定した。これは近年よく使われる多曲面モデルの運動学の基礎になっていると思われる。すなわち

$$\dot{\alpha}_{ij} = c \dot{\epsilon}_{ij}^p \quad (11.118)$$

とするので、式 (11.115a) の流れ則と式 (11.116) を代入すると

$$\dot{\alpha}_{ij} = c \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = c \lambda \frac{\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}}{2\tau_Y} \quad (11.119)$$

と仮定したことになる。したがって α は偏差成分しか持たない。これを整合条件式 (11.117) に代入すれば

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} c \lambda \frac{\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}}{2\tau_Y} = \lambda H_k^p \rightarrow \lambda = \frac{1}{H_k^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}$$

となる。ここに H_k^p は硬化係数で

$$H_k^p \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} c \frac{\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}}{2\tau_Y} = c \frac{\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}}{2\tau_Y} \frac{\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}}{2\tau_Y} = \frac{c}{2} \quad (11.120)$$

と定義した。これが c の物理的な意味でもある。

この λ を流れ則に代入すれば、最終的に塑性ひずみ増分が

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H_k^p} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{H_k^p} \frac{(\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij})(\sigma'_{kl} - \alpha'_{kl})}{4\tau_Y^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.121)$$

と求められる。したがって、降伏曲面の中心点の移動則 (α の発展則) も式 (11.118) (11.120) から

$$\dot{\alpha}_{ij} = \frac{(\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij})(\sigma'_{kl} - \alpha'_{kl})}{2\tau_Y^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.122)$$

と表現できるので、塑性ひずみ増分と同様、降伏曲面の中心は静水圧では移動しない。しかし、なぜ移動硬化が生じるかについて材料の微視的挙動を考えると、内部に存在する微視構造の何らかの変化がその原因の一つだろうと推測される。そのような微視構造を持つ材料では巨視的な静水圧载荷に対しても微視的な硬化が発生することは容易に推測できるのだが、読者はこのモデルをどう思いますか。

(3) Ziegler モデル

そこで、もう少し一般性を持たせるために (なのかどうかは別にして)、中心座標が式 (11.27) で定義された相当塑性ひずみの関数として変化すると仮定しよう。つまり

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}(\bar{\epsilon}^p) \quad (11.123)$$

と仮定する。したがって式 (11.117) の整合条件はさらに

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \bar{\epsilon}^p} \dot{\bar{\epsilon}}^p = 0$$

となる。式 (11.27) の相当塑性ひずみの定義に流れ則の式 (11.115a) を代入して、式 (11.116) を考慮すれば

$$\dot{\bar{\epsilon}}^p = \lambda \sqrt{2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} = \lambda$$

になるので

$$H_k \equiv \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \bar{\epsilon}^p} \quad (11.124)$$

によって硬化係数 H_k を定義すると、上の整合条件式から

$$\lambda = \frac{1}{H_k} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}$$

と求められる。したがって、再度流れ則にこれを代入して整理すると塑性ひずみ増分は

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H_k} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{H_k} \frac{(\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij})(\sigma'_{kl} - \alpha'_{kl})}{4\tau_Y^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.125)$$

と求められる。実はこれは Prager モデルの式 (11.121) と形式的には一致している。またこれは Prandtl-Reuss の式 (11.46) とよく整合しており、単に応力の中心を α だけずらしたモデルになっている。

ここまでではまだ中心の移動則つまり α の発展則が定義されていない。Ziegler はそれを

$$\dot{\alpha}_{ij} = \xi (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}), \quad \xi \geq 0 \quad (11.126a, b)$$

と仮定した。こうすることによって α は等方成分も定義できるようになる。 ξ は流れ則の λ のようなパラメータである。この仮定を式 (11.117) の整合条件に代入すると

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \xi (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \quad (*)$$

と表される。式 (11.116) を用いると、上式 (*) 右辺は

$$\text{式 (*) 右辺} = \xi \frac{1}{2\tau_Y} (\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}) (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = \xi \frac{1}{2\tau_Y} (\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}) (\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}) = \tau_Y \xi$$

となるので、結局上式 (*) から

$$\tau_Y \xi = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \quad \rightarrow \quad \xi = \frac{1}{\tau_Y} \frac{1}{2\tau_Y} (\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij}) \dot{\sigma}_{ij}$$

と求められる。これを上の仮定に代入すれば、Prager モデルと併記して

$$\text{Ziegler: } \dot{\alpha}_{ij} = \frac{(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma'_{kl} - \alpha'_{kl})}{2\tau_Y^2} \dot{\sigma}_{kl}, \quad \text{Prager: } \dot{\alpha}_{ij} = \frac{(\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij})(\sigma'_{kl} - \alpha'_{kl})}{2\tau_Y^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.127a, b)$$

と求められる。この二つのモデル間の違いは、中心の移動量が偏差成分だけかどうかだけである。これは、式 (11.119) の Prager の仮定と式 (11.126a) の Ziegler の仮定の間の

$$\text{Ziegler 式 (11.126a): } \dot{\alpha}_{ij} = \xi (\sigma_{ij} - \alpha_{ij}), \quad \text{Prager 式 (11.119): } \dot{\alpha}_{ij} = \frac{c\lambda}{2\tau_Y} (\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij})$$

といった違いが根本的な原因である。

(4) 増分型構成方程式

最後に逆関係を求める。弾性は増分型の Hooke の法則式 (11.42) で与えられるものとすれば、それと式 (11.125) を加算則の式 (11.22) に代入して、総ひずみ増分は

$$\dot{\epsilon}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \chi \frac{(\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij})(\sigma'_{kl} - \alpha'_{kl})}{4H_k \tau_Y^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.128)$$

となる。第 11.2.3 節で説明した手法で逆関係を求めると

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \chi \frac{\mu^2 (\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij})(\sigma'_{kl} - \alpha'_{kl})}{(\mu + H_k) \tau_Y^2} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (11.129)$$

と求められる。ここに χ は式 (11.51) で定義したスイッチである。この方程式と式 (11.127) が移動硬化則の増分型構成方程式である。

(5) 等方・移動硬化モデル

より現実的なモデルは、前節の移動硬化則とその前に定式化した等方硬化則を共に考慮したもの³⁸だろう。ここでは Ziegler のモデルの方を用いることにして、式 (11.114) の降伏関数を

$$f \equiv \overline{(\sigma - \alpha)} - \tau_Y(\bar{\epsilon}^p) \quad (11.130)$$

のように降伏応力が定数ではなく相当塑性ひずみの関数だとする。こうすることによって整合条件が

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \alpha_{ij}}{\partial \bar{\epsilon}^p} \dot{\bar{\epsilon}}^p - \frac{\partial \tau_Y}{\partial \bar{\epsilon}^p} \dot{\bar{\epsilon}}^p = 0$$

³⁸ そうやって材料パラメータの数を増やすことで、実際の材料挙動を近似し易くなるわけであるが、しかしそこに本質があるわけではないことには注意すること。

となる。式 (11.115a) の流れ則を代入し、式 (11.38b) (11.124) の硬化係数の定義を用いると

$$\lambda = \frac{1}{H_k + H} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}$$

を得る。これを流れ則に代入すれば、ひずみ増分の塑性成分が

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{(\sigma'_{ij} - \alpha'_{ij})(\sigma'_{kl} - \alpha'_{kl})}{4(H_k + H)(\sigma - \alpha)^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.131)$$

と求められる。中心の移動についても、前節同様の演算を行うと

$$\dot{\alpha}_{ij} = \frac{H_k}{H_k + H} \frac{(\sigma_{ij} - \alpha_{ij})(\sigma'_{kl} - \alpha'_{kl})}{2(\sigma - \alpha)^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.132)$$

となる。 $H = 0$ の場合が前節の Ziegler モデルである。

(6) 具体例

Ziegler の移動硬化モデルで線形硬化の場合の例を示す。材料は第 11.3.3 節の例と同じく $E = 200 \text{ GN/m}^2$, $\nu = 0.3$, $H = E/1000$, $\tau_{y0} = 300 \text{ MN/m}^2$ とし、移動硬化については $H_k = 50H$ とかなり大きめの設定をして移動の様子が誇張されるようにした。応力も同様に $\sigma \equiv \sigma_{11}$ と $\tau \equiv \sigma_{12}$ の 2 軸状態とし、载荷パターンも図 11.25 に示したのと同じ 3 種類とする。それに伴い、降伏曲面の中心位置も

$$\zeta \equiv \alpha_{11}, \quad \eta \equiv \alpha_{12}$$

のみを考えればいいことになる。こうすることによって関係式のほとんどが、第 11.3.3 節の σ と τ を

$$\sigma := \sigma - \zeta, \quad \tau := \tau - \eta$$

のように置き換えるだけでいい。降伏曲面の中心座標の発展則だけを明記しておく

$$\dot{\zeta} = \frac{H_k}{H_k + H} \frac{\sigma - \zeta}{3\tau_y^2} \{(\sigma - \zeta) \dot{\sigma} + 3(\tau - \eta) \dot{\tau}\}, \quad \dot{\eta} = \frac{H_k}{H_k + H} \frac{\tau - \eta}{3\tau_y^2} \{(\sigma - \zeta) \dot{\sigma} + 3(\tau - \eta) \dot{\tau}\}$$

となる。明らかにこれも積分不可能であり、中心座標の移動も履歴依存であることが明らかだ。数値例では $\alpha = 1/\sqrt{3}$ の比例载荷からの 3 種類のさらなる応力载荷を対象とし、具体的には

$$(\sigma, \tau) : (367.4, 212.1) \rightarrow (606.2, 350.0) \text{ MN/m}^2$$

のような履歴とした。結果的に生じた相当塑性ひずみは約 2% ($\bar{\epsilon}^p = 0.019$) であった。

図 11.39 が降伏後の応力ひずみ関係であり、履歴依存で最終状態が異なっている。増分ステップは $N = 100$ から 10^7 までを用いて結果を比較したが、この図の応力ひずみ関係で判別できるような差は生じなかった。しかし、単純な増分解析で降伏条件に蓄積される誤差はステップ数によって異なり、図 11.40 のようだった。相対誤差では有効数字三桁を確保していることが明らかなので、応力ひずみ関係の図に顕著な差が生じないのも当然である。そもそも履歴依存の増分理論なので、増分解析で十分な精度の解が得られるのは工学的には好ましい結果である。図 11.41 が降伏曲面の移動を示していて、原点から伸びる線分が降伏曲面の中心 α の軌跡である。一点鎖線と白丸が 's2t' の結果であり、破線と白四角が 't2s' の、実線と黒丸が比例载荷の結果を示している。最終応力状態が同じであっても履歴の影響を受けて降伏曲面の位置も異なるのが明らかだ。

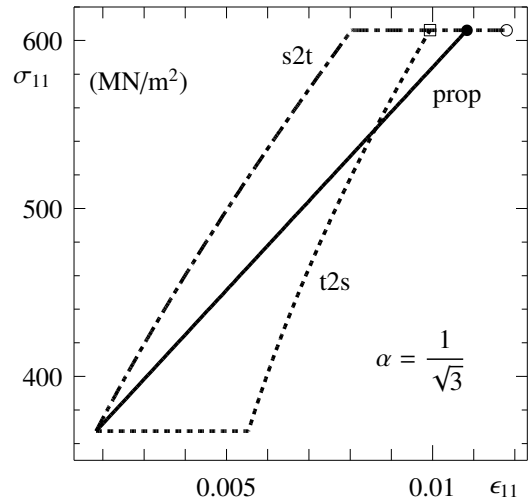


図 11.39 移動硬化を含む場合の応力ひずみ関係

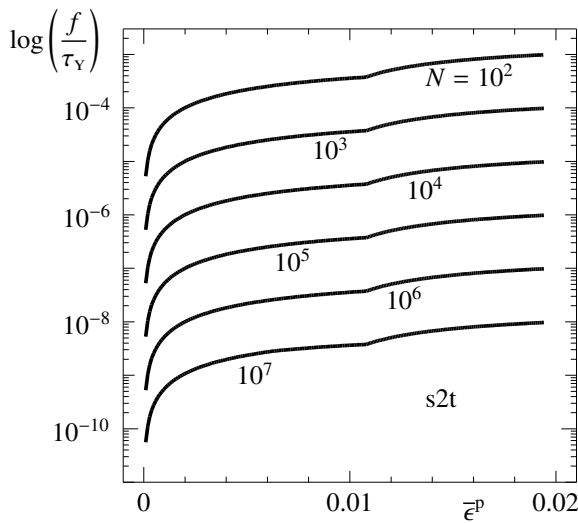


図 11.40 増分解析における降伏条件の相対誤差

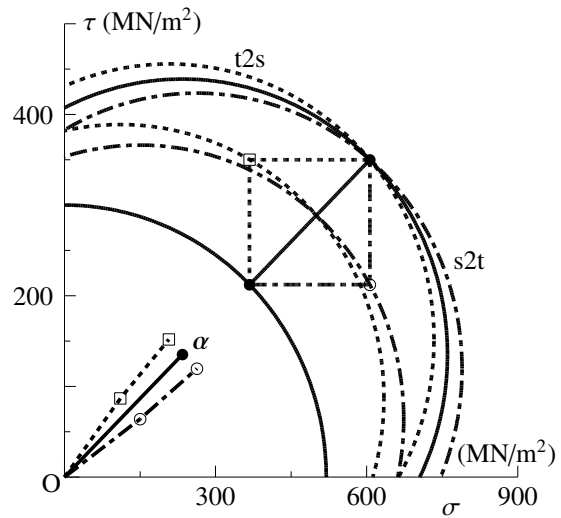


図 11.41 降伏曲面の移動と履歴依存

演習問題 11-4

4. 式 (11.128) から式 (11.129) を求めよ。
5. 式 (11.131) (11.132) を求めよ。
6. 図 11.39 等の結果を求め、降伏曲面の移動を確認せよ。

11.4.2 静水圧依存モデル

(1) 降伏関数と塑性ポテンシャル

鋼の場合には平均応力（静水圧）が降伏に及ぼす影響は非常に小さいが、砂や粘土のように必ずしも連続体として取り扱うことができ難い材料や、岩や複合材料のように内部に微視構造を持つ材料の場合には、平均応力が降伏や塑性変形に影響を及ぼす。ここでは非関連流れ則の代表的な例として **Drucker-Prager** モデル [22] を一般化したもの [74] を紹介しよう。そこでは、降伏関数 f と塑性ポテンシャル g を

$$f \equiv \bar{\sigma} - F(I_1, \Delta^p, \bar{\epsilon}^p), \quad g \equiv \bar{\sigma} + G(I_1) \tag{11.133a, b}$$

と定義している。ここに $\bar{\sigma}$ は式 (11.23a) で定義した相当応力であり、 I_1 は式 (3.36) で定義した応力の第 1 不変量である。静水圧 p は

$$p \equiv -\frac{1}{3} I_1 = -\frac{1}{3} \sigma_{kk} \tag{11.134}$$

で定義できるので、これを静水圧依存モデルと呼ぶことがある。履歴を代表するパラメータとしては前節までと同様相当塑性ひずみを用いるが、ここでは塑性的な体積変形も存在するので、式 (11.27) の相当塑性ひずみは塑性ひずみ増分の偏差成分のみで定義し直す必要がある。したがって

$$\bar{\epsilon}^p \equiv \int_{\text{履歴}} \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^p \dot{\epsilon}_{ij}^p} dt, \quad \Delta^p \equiv \int_{\text{履歴}} \dot{\epsilon}_{kk}^p dt \tag{11.135a, b}$$

と定義した。 Δ^p は体積変形の塑性成分³⁹で、前節までのモデルでは零だった。

³⁹ 地盤工学でダイレタンシーと呼ばれるものに対応している。

(2) 流れ則と塑性ひずみ

式 (11.133b) の塑性ポテンシャルを流れ則の式 (11.74a) に代入すると

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta \delta_{ij} \right\}, \quad \beta = \beta(I_1) \equiv \frac{\partial G(I_1)}{\partial I_1} \quad (11.136a, b)$$

という関係を得る。この関係から、せん断変形と体積変形の塑性成分がそれぞれ

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \lambda \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}}, \quad \dot{\epsilon}_{kk}^p = 3\lambda\beta \quad (11.137a, b)$$

となる。このことから、パラメータ β は「塑性的な体積膨張」に関する材料パラメータであることがわかる。

次に整合条件は

$$\dot{f} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial F}{\partial I_1} \dot{I}_1 - \frac{\partial F}{\partial \Delta^p} \dot{\Delta}^p - \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}^p} \dot{\bar{\epsilon}}^p = 0$$

であるから、式 (11.37) を考慮すれば

$$\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial F}{\partial I_1} \dot{\sigma}_{kk} = \frac{\partial F}{\partial \Delta^p} \dot{\epsilon}_{kk}^p + \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}^p} \sqrt{2 \dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij}} \quad (11.138)$$

となる。式 (11.137) を式 (11.138) の右辺に代入して整理すると

$$\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial F}{\partial I_1} \dot{\sigma}_{kk} = \lambda \left\{ 3 \frac{\partial F}{\partial \Delta^p} \beta + \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}^p} \right\}$$

という関係を得ることができることから、 λ が

$$\lambda = \frac{1}{H} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} - \frac{\partial F}{\partial I_1} \delta_{kl} \right) \dot{\sigma}_{kl}, \quad H \equiv 3 \frac{\partial F}{\partial \Delta^p} \beta + \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}^p} \quad (11.139a, b)$$

と求められる。この H は、せん断変形 $\bar{\epsilon}^p$ と体積変形 Δ^p の両方に対する降伏曲面の半径 F の変化の程度を示しているため、いわゆる硬化係数である。これを流れ則の式 (11.136a) に代入し戻せば

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta \delta_{ij} \right\} \left\{ \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha \delta_{kl} \right\} \dot{\sigma}_{kl}, \quad \alpha = \alpha(I_1, \Delta^p, \bar{\epsilon}^p) \equiv -\frac{\partial F(I_1, \Delta^p, \bar{\epsilon}^p)}{\partial I_1} \quad (11.140a, b)$$

のように塑性ひずみ増分を表現できる。ここに α (符号に注意) は、降伏関数に平均応力が及ぼす影響を代表する材料パラメータである。 $\alpha = \beta$ の場合は関連流れ則になる。

(3) 増分型構成方程式

弾性が増分型の Hooke の法則に従うものとすれば式 (11.42) を満足する。したがって総ひずみ増分は、これと塑性ひずみ増分の式 (11.140a) を加算則の式 (11.22) に代入して

$$\dot{\epsilon}_{ij} = D_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} + \frac{\chi}{H} \left(\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta \delta_{ij} \right) \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha \delta_{kl} \right) \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.141)$$

となる。ここに χ は式 (11.51) で定義したスイッチである。第 11.2.3 節で説明した手法を用いれば

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \chi \frac{\left(\frac{\mu \sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}} + 3K\beta \delta_{ij} \right) \left(\frac{\mu \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}} + 3K\alpha \delta_{kl} \right)}{H + \mu + 9K\alpha\beta} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (11.142)$$

という逆関係を得る。

(4) 降伏曲面

基本モデルとして α が定数の場合には、式 (11.133a) (11.140b) から降伏条件を

$$f = \bar{\sigma} + \alpha I_1 - \tau_Y(\Delta^P, \bar{\epsilon}^P) = 0 \tag{11.143}$$

と書くことができるので、例えば等方応力 I_1 とせん断応力 $\bar{\sigma}$ の関係として初期降伏条件を眺めれば図 11.42 の上の図のようなになる。あるいは3次元の主応力空間で描くと、下の図のような、等方応力の正方向にとがった円錐状の降伏曲面に相当する。引張側には等方応力状態であっても降伏曲面が存在するが、圧縮側では降伏しない。では、この円錐の先端Pではどうなっているのか調べておこう。というのも、法線則のことを念頭に置くと、塑性ひずみ速度がこの角点でどうなるのかという不安が生まれるからだ。初期降伏の場合には、そのこの応力状態は単純に

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{3\alpha} \delta_{ij} \tau_{Y0}, \quad \tau_{Y0} \equiv \tau_Y(0, 0)$$

となるため、式 (11.140a) からは

$$\dot{\epsilon}_{ij}^P = \frac{\alpha\beta}{H} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk}$$

のように、塑性的体積膨張が唯一に決定されるだけだ。

具体的な降伏曲面を示すために、第 11.3.3 節と同様に、軸力を用いた円筒供試体のねじり試験のような応力状態の $\sigma \equiv \sigma_{11}$ と $\tau \equiv \sigma_{12}$ の2軸状態を調べておこう。まず $\alpha < 1/\sqrt{3} \approx 0.577$ の場合には楕円形の

$$\left(\frac{\sigma}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}\alpha\tau_Y}{1-3\alpha^2} \right)^2 + \frac{\tau^2}{1-3\alpha^2} = \left(\frac{\tau_Y}{1-3\alpha^2} \right)^2$$

となる。また $\alpha = 1/\sqrt{3}$ の場合には放物線

$$\frac{\sigma}{\sqrt{3}} \tau_Y + \frac{1}{2} \tau^2 = \frac{1}{2} \tau_Y^2$$

になる。さらに $\alpha > 1/\sqrt{3}$ の場合には双曲線

$$\left(\frac{\sigma}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}\alpha\tau_Y}{3\alpha^2-1} \right)^2 - \frac{\tau^2}{3\alpha^2-1} = \left(\frac{\tau_Y}{3\alpha^2-1} \right)^2$$

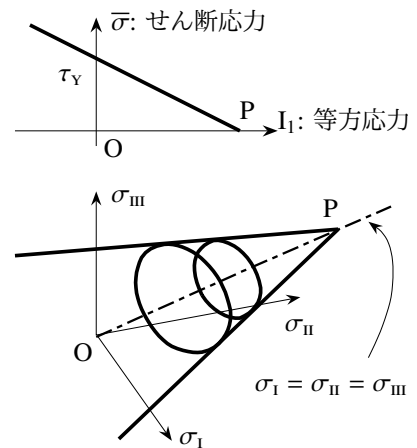


図 11.42 静水圧依存モデルの例

になる。これは図 11.42 の円錐表面と σ_I - σ_{II} 面との交線であり、図 11.43 に示したように α が大きくなると圧縮側に降伏曲面が存在しなくなる。また図 11.42 の下の図にはある角点Pが無いので取り扱いが容易になる。これはゴムのような材料のモデルにも利用できそうだ。

あるいは、式 (11.136a) の流れ則で算定される塑性ひずみ増分の成分を用いて、塑性的な平面ひずみ条件を

$$\dot{\epsilon}_{31}^P = 0, \quad \dot{\epsilon}_{23}^P = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{31} = 0, \quad \sigma_{32} = 0$$

および

$$0 = \dot{\epsilon}_{33}^P = \lambda \left(\frac{\sigma'_{33}}{2\bar{\sigma}} + \beta \right) \quad \rightarrow \quad \sigma'_{33} = -2\beta\bar{\sigma} \tag{11.144a, b}$$

と定義して、この平面ひずみ状態における降伏曲面を求め、塑性的な体積膨張に関するパラメータ β の影響を把握しておこう。上式 (11.144b) が成立するためには

$$\sigma_{33} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{\xi}{2}, \quad \xi \equiv \frac{6\beta}{\sqrt{1-3\beta^2}} \sqrt{\left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2} \right)^2 + \sigma_{12}^2}$$

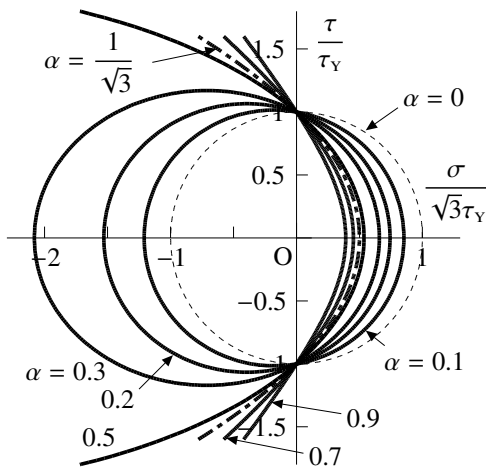


図 11.43 静水圧依存モデルの降伏曲面

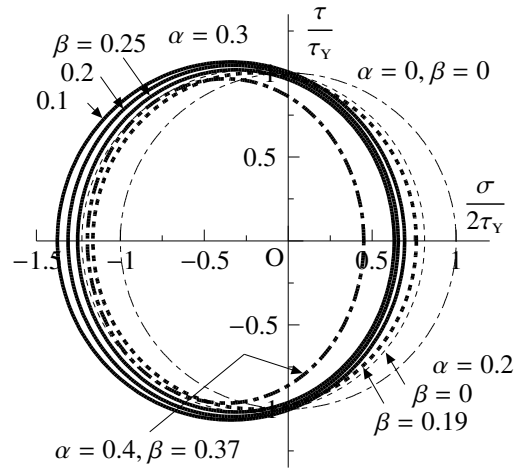


図 11.44 塑性的平面ひずみ状態の場合

という関係を得る。 $\beta = 0$ の場合のこの式を弾性の平面ひずみの式 (3.177) と比べると、一見して $\nu = 1/2$ にしたように見える。これは、塑性変形には体積変形が無い ($\nu = 1/2$ の材料特性と同) からである。この関係から

$$\sigma'_{11} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \frac{\xi}{6}, \quad \sigma'_{22} = -\frac{1}{2}(\sigma_{11} - \sigma_{22}) + \frac{\xi}{6}, \quad \sigma'_{33} = -\frac{\xi}{3}$$

となり、相当応力と平均応力は

$$\bar{\sigma}^2 = \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2 + \frac{\xi^2}{12} = \frac{1}{1 - 3\beta^2} \left\{ \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{2}\right)^2 + \sigma_{12}^2 \right\}, \quad I_1 = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22}) - \frac{\xi}{6}$$

と表される。これから $\sigma \equiv \sigma_{11}, \tau \equiv \sigma_{12}$ で他の応力成分が零の場合の降伏条件は

$$\frac{(x + \eta\alpha)^2}{\eta(1 - \alpha\beta)^2} + \frac{y^2}{\eta} = 1, \quad \eta \equiv \frac{1 - 3\beta^2}{(1 - \alpha\beta)^2 - (1 - 3\beta^2)\alpha^2}, \quad x \equiv \frac{\sigma}{2\tau_y}, \quad y \equiv \frac{\tau}{\tau_y}$$

となり、それを図 11.44 に示した。定式化から

$$0 \leq \beta < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

でなければならず、また次項で説明するように $\beta < \alpha$ が望ましいとされているが、この図から、 α が降伏曲面を圧縮側に移動させようとするのに対し、特に α が大きい場合には、塑性的な体積膨張に関するパラメータ β は降伏曲面の半径を減少させる効果を持っていることがわかる。

(5) 地盤材料モデルとの比較

式 (11.133a) の降伏関数で α が定数の場合の式 (11.143) と、Drucker-Prager [22, 86] の降伏条件式

$$\bar{\sigma} + \alpha_\phi I_1 - k = 0 \quad (11.145)$$

とを比べると、 α_ϕ と k が式 (11.143) の α と τ_y に対応していることがわかる。一方、内部摩擦角という概念がある地盤材料でよく用いられる Mohr-Coulomb の破壊規準⁴⁰は

$$\frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} + \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} \sin \phi = c \cos \phi$$

あるいは

$$\tau_\phi + \sigma_\phi \tan \phi = c, \quad \tau_\phi = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \cos \phi, \quad \sigma_\phi = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} + \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} \sin \phi \quad (11.146a, b, c)$$

⁴⁰ 縦軸 τ で横軸 σ が引張正の Mohr の応力円に破壊規準 $\tau = c - \sigma \tan \phi$ が接する条件から求められる。

と表される。あるいは式(11.58)のLode角 θ_L を用いると

$$\bar{\sigma} \left(\cos \theta_L - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta_L \sin \phi \right) + \frac{1}{3} I_1 \sin \phi - c \cos \phi = 0 \quad (11.147)$$

と表す[70]こともできる。ここに c は粘着力であり、 ϕ は内部摩擦角であり、 σ_{\max} と σ_{\min} は主応力の最大値と最小値である。降伏条件の概念のところで説明に使った摩擦に関する条件そのものである。この両者を比べると、Drucker-Pragerモデルの材料パラメータ α_ϕ と k は、Mohr-Coulombの破壊規準の c と ϕ との間に

$$3 \text{ 軸圧縮で同定: } \alpha_\phi = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}, \quad k = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 - \sin \phi)}, \quad (11.148a)$$

$$3 \text{ 軸引張で同定: } \alpha_\phi = \frac{2 \sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)}, \quad k = \frac{6 c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin \phi)}, \quad (11.148b)$$

$$\text{平面ひずみで同定: } \alpha_\phi = \frac{\sin \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin^2 \phi)}, \quad k = \frac{\sqrt{3} c \cos \phi}{\sqrt{3} (3 + \sin^2 \phi)} \quad (11.148c)$$

という(近似)関係がある[86, 138]とされている。 $\phi \approx 30$ 度で $\alpha_\phi \approx 0.16 \sim 0.22$ 程度に相当する。Mohr-Coulombの破壊規準が角のある破壊規準面(降伏曲面)になるので、それを滑らかに近似したものがDrucker-Pragerの降伏条件だと解釈する[86]こともできる。

一方、式(11.140a)のモデルの β が α と一致して関連流れ則である場合を想定すると、 β の方も式(11.148)の α_ϕ のように定義できると考えられるが、特に地盤材料にそれを用いた場合には、塑性的な体積膨張が実測値より大きくなることが多い[86]とされている。そのため、地盤材料の場合には非関連流れ則とした上で β を式(11.148)と同様に定義するものの、 $\beta < \alpha$ となるように内部摩擦角 ϕ の代わりにダイレタンシー角と呼ばれる別の角度 ψ ($\psi < \phi$)を用いることが多い。

演習問題 11-5

7. 式(11.141)から式(11.142)を求めよ。

11.4.3 非共軸モデル

(1) 流れ則の非共軸項

砂や岩のように内部に空隙や欠陥・節理があるような材料では、巨視的な材料試験レベルで必ずしも法線則が成立するとは限らない。つまり降伏曲面の法線方向のみにではなく、その接線方向にも応力増分に依存した塑性ひずみ増分の成分が存在すると考えることがある。ここでは、その代表的なモデル[81]について説明する。基本的なPrandtl-Reussモデルの塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_{PR}^p$ は偏差応力 σ' と平行($\dot{\epsilon}_{PR}^p \parallel \sigma'$)だったが、それに応力増分 $\dot{\sigma}$ 方向成分を新たに加えるのである。提案されたモデルでは前節の静水圧依存モデルを用いているが、新たな塑性ひずみ増分 $\dot{\epsilon}_{NC}^p$ を

$$\left(\dot{\epsilon}_{NC}^p \right)_{ij} \parallel \left\{ \dot{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}'_{kl} \right\}$$

の方向成分として与えている。ここで重要なのは、この成分が塑性仕事をしないということである。つまり上式に σ_{ij} を乗じ、式(11.23a)を考慮すれば

$$\sigma_{ij} \left(\dot{\epsilon}_{NC}^p \right)_{ij} \sim \sigma_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma_{ij} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}'_{kl} = \sigma'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} - \sigma'_{kl} \dot{\sigma}'_{kl} = 0 \quad (*)$$

となるのである。つまり式(11.60)のDruckerの安定公準に関与しない一種の不安定項になっているのだ。これを流れ則の式(11.74a)に加えることによって、新たな流れ則を

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{1}{2h_1} \left(\dot{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}'_{kl} \right) \quad (11.149)$$

で与えることにする。したがって、塑性ひずみ増分が応力増分方向の成分を持つ（式 (11.149) の右辺に添え字 (ij) を持つ応力増分成分項が存在する）ことになり、式 (11.33b) で示した共軸性を満足しないので、非共軸モデルと呼ぶことがある。ここに h_1 はその非共軸性に関する材料パラメータである。

また上式 (*) は偏差応力 σ'_{ij} との積でも成立するので、上式 (11.149) の第 2 項の塑性ひずみ増分の非共軸成分 $\dot{\epsilon}_{NC}^p$ は偏差応力とその意味で直交する。したがって、もし関連 J_2 流れ則で基本的な塑性変形がモデル化された場合には式 (11.31b) にあるように、上式 (11.149) の塑性ひずみ増分の第 1 項の Prandtl-Reuss 成分 $\dot{\epsilon}_{PR}^p$ が偏差応力 σ' と平行なので、結局、非共軸な成分 $\dot{\epsilon}_{NC}^p$ は Prandtl-Reuss の成分 $\dot{\epsilon}_{PR}^p$ と直交していることになる。したがって図 11.45 に示したように、 $\dot{\epsilon}_{NC}^p$ は降伏曲面の接線方向成分になっていることがわかる。

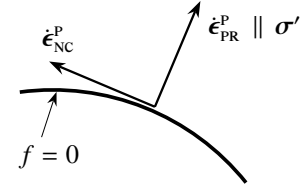


図 11.45 J_2 流れ則の場合

$\dot{\epsilon}_{NC}^p$ は偏差成分しか持たないので、流れ則の式 (11.149) に式 (11.133b) の塑性ポテンシャルを代入すると

$$\dot{\epsilon}'_{ij} = \lambda \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \frac{1}{2h_1} \left(\dot{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}'_{kl} \right), \quad \dot{\epsilon}'_{kk} = 3\lambda\beta$$

となる。これを式 (11.138) の整合条件に代入すれば λ が求められるのだが、ここで相当塑性ひずみの平方根の中を算定すると

$$2\dot{\epsilon}'_{ij} \dot{\epsilon}'_{ij} = \lambda^2 + \frac{1}{2h_1^2} \left\{ \dot{\sigma}'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} (\sigma'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij})^2 \right\}$$

となる。これまでのモデルを見ればわかるように、右辺第 1 項の λ は硬化係数 H の逆数のオーダーを持っているのに対し、ここで新たに導入した h_1 は弾性係数と同じくらいのオーダーを持つと考えられているのが普通である。したがって、上式右辺では第 1 項の λ に比べて第 2 項は非常に小さいと近似仮定できる⁴¹ものとして、以下無視することにする。以上の近似によって、式 (11.139a) と同じく λ は近似的に

$$\lambda \simeq \frac{1}{H} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha \delta_{kl} \right) \dot{\sigma}'_{kl}$$

と求められる。この硬化係数 H も式 (11.139b) で定義したものと同一である。これを流れ則の式 (11.149) に代入することによって、塑性ひずみ増分が

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta \delta_{ij} \right\} \left\{ \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha \delta_{kl} \right\} \dot{\sigma}'_{kl} + \frac{1}{2h_1} \left(\dot{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}'_{kl} \right) \quad (11.150)$$

と求められる。弾性成分は式 (11.42) で与えられるので、それと上式を加算則の式 (11.22) に代入すれば、総ひずみ増分が

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij} = & \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}'_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \dot{\sigma}'_{kk} \\ & + \frac{1}{H} \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta \delta_{ij} \right\} \left\{ \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha \delta_{kl} \right\} \dot{\sigma}'_{kl} + \frac{1}{2h_1} \left(\dot{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}'_{kl} \right) \end{aligned} \quad (11.151)$$

となる。右辺第 1 項と最後の h_1 の項を比較すれば、この非共軸項が弾性的なせん断抵抗を弱める効果を持っていることがわかる。

(2) 増分型構成方程式

式 (11.151) のひずみ増分を、偏差成分と体積変形成分に分解した上で、前節の同様の成分と比較する [81] と

$$\bar{\mu} \equiv \left(\frac{1}{\mu} + \chi \frac{1}{h_1} \right)^{-1}, \quad \bar{K} \equiv \left\{ \frac{1}{K} - \chi^9 \alpha \beta \frac{1}{h_1} \left(1 - \frac{H}{h_1} \right)^{-1} \right\}^{-1}, \quad (11.152a, b)$$

⁴¹ この整合条件で近似をしてしまっているのが、数値解析では増分ステップをどんなに小さくしても、降伏条件を精度よく満足させることはできないことに注意する必要がある。

$$\bar{H} \equiv \left(\frac{1}{H} - \frac{1}{h_1} \right)^{-1}, \quad \bar{\alpha} \equiv \alpha \left(1 - \frac{H}{h_1} \right)^{-1}, \quad \bar{\beta} \equiv \beta \left(1 - \frac{H}{h_1} \right)^{-1} \quad (11.152c, d, e)$$

という上バー付きのパラメータを定義して、前節の上バー無しの各パラメータをそれで置き換えさえすれば、前節の表現式で非共軸性を考慮した増分関係を得ることができる。ここに χ は式(11.51)で定義したスイッチである。つまり式(11.151)は

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{1}{2\bar{\mu}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3\bar{K}} - \frac{1}{2\bar{\mu}} \right) \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} + \frac{\chi}{H} \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \bar{\beta} \delta_{ij} \right\} \left\{ \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \bar{\alpha} \delta_{kl} \right\} \dot{\sigma}_{kl} \quad (11.153)$$

と書くこともでき、したがってその逆関係は

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\bar{\mu} \dot{\epsilon}_{ij} + \left(\bar{K} - \frac{2\bar{\mu}}{3} \right) \delta_{ij} \dot{\epsilon}_{kk} - \chi \frac{\left(\frac{\bar{\mu} \sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}} + 3\bar{K} \bar{\beta} \delta_{ij} \right) \left(\frac{\bar{\mu} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}} + 3\bar{K} \bar{\alpha} \delta_{kl} \right)}{\bar{H} + \bar{\mu} + 9\bar{K} \bar{\alpha} \bar{\beta}} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (11.154)$$

と求められる。ただし弾塑性状態では、上バーの付いた材料パラメータに弾性と塑性の両方の成分が含まれていることに注意する必要がある。また前述のように整合条件を近似しているので、増分のみ数値解析においては大きな変形になるにつれて降伏条件を満足しなくなる⁴²ので、初期降伏以降は単なる増分モデルとして捉えざるを得なくなることに注意すること。

元々非共軸項を考慮しようとした理由の一つは、共軸材料がかなり安定な材料特性を持っており、例えば塑性加工や砂等の要素試験で観察される「しわ」や「絞り」「すべり線」「せん断帯」等の不安定挙動を、有限変形解析においてもうまく予測できなかったからだと思われる。式(11.152)から明らかのように、例えば h_1 によって見かけ上の「弾性(接線)」せん断係数を小さくすることができるので、「せん断帯」等の発生が促進されることになるわけだ。また h_1 をかなり小さくすることによって見かけ上の硬化係数 \bar{H} を負(軟化)にすることができるので、不安定現象を予測し易くなって都合がいいと思うかもしれない。しかし流れ則を解くときに仮定した近似のように、 $h_1 \gg H$ を満たすべきであることにも留意する必要がある。硬化係数 H が応力ひずみ関係曲線の接線係数に相当していたが、この非共軸モデルの h_1 は応力ひずみ関係曲線のいわゆる割線係数に相当し、いわゆる全ひずみ理論のように定式化されたモデルである[90]と捉えることができる。

11.4.4 材料パラメータ特性

硬化係数 H 等の材料パラメータは一般には変形履歴に依存した非線形性を持つので、塑性加工のような大変形解析ではべき乗則と呼ばれるものが用いられることがある。その一つは、平面応力状態の単調な1軸引張載荷試験の応力ひずみ関係を

$$\sigma = \begin{cases} E \epsilon & (\sigma \leq \sigma_Y) \\ \sigma_Y \left(\frac{\epsilon}{\epsilon_Y} \right)^m & (\sigma > \sigma_Y) \end{cases} \quad (11.155)$$

のようにモデル化している。 E はYoung率で、 $m (< 1)$ が塑性硬化についての材料パラメータであり、例えば $m = 0.0625$ のような値を設定する。 ϵ_Y は初期降伏時のひずみで $\epsilon_Y \equiv \frac{\sigma_Y}{E}$ である。ここでは弾性部分を見捨て、このべき乗則によってモデル化される硬化係数の表現を求めてみよう。べき乗則は1軸引張試験を念頭に置いていることから、 σ, ϵ をそれぞれ式(11.29b)(11.30)の相当応力・相当塑性ひずみ $\bar{\sigma}, \bar{\epsilon}^p$ に関連させるのが望ましいだろう。一方 H や h_1 は、式(11.23a)や式(11.27)で定義されたせん断応力ノルムと相当塑性ひずみの間の係数と考えるべきである。この2種類の応力ノルム・塑性ひずみノルムの間の関係から

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} = \frac{\sqrt{3} \bar{\sigma}}{\sqrt{3} \tau_Y} = \frac{\bar{\sigma}}{\tau_Y} \quad (a)$$

⁴² 文献[81]ではある変形状態の接線的な力学現象だけを扱っているため、この近似による不具合は生じない。

という関係がある。また

$$\epsilon_Y = \frac{\sigma_Y}{E} = \frac{\sqrt{3}\tau_Y}{E} = \sqrt{3} \frac{2\mu}{E} \frac{\tau_Y}{2\mu} = \sqrt{3} \frac{1}{2(1+\nu)} \frac{\tau_Y}{\mu}$$

であることから

$$\frac{\bar{\epsilon}^P}{\epsilon_Y} = \frac{\bar{\epsilon}^P}{\sqrt{3}} \frac{2\mu(1+\nu)}{\sqrt{3}\tau_Y} = \frac{2(1+\nu)}{3} \frac{\bar{\epsilon}^P}{\gamma_Y}, \quad \gamma_Y \equiv \frac{\tau_Y}{\mu} \quad (b)$$

という関係がある。ここに μ はせん断弾性係数であり ν は Poisson 比である。 γ_Y は初期降伏せん断ひずみと考えればよい。相当塑性ひずみは工学ひずみに相当するので 2μ ではなく μ で除して定義した。そこで式 (a) の $\bar{\sigma}$ を τ と置き、式 (b) の $\bar{\epsilon}^P$ を γ と置いた上で、式 (11.155) の $\frac{\sigma}{\sigma_Y}$ を $\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y}$ すなわち $\frac{\tau}{\tau_Y}$ で置き換え、 $\frac{\epsilon}{\epsilon_Y}$ を $\frac{\bar{\epsilon}^P}{\epsilon_Y}$ すなわち $\frac{2(1+\nu)}{3} \frac{\gamma}{\gamma_Y}$ で置き換えれば、降伏後のべき乗則は

$$\frac{\tau}{\tau_Y} = \left(\frac{2(1+\nu)}{3} \frac{\gamma}{\gamma_Y} \right)^m$$

と書くことができる。平面応力状態の 1 軸引張から始めたために Poisson 比が含まれてしまっているが、結局このべき乗則は

$$\tau = \begin{cases} \frac{2\mu(1+\nu)}{3} \gamma & (\tau \leq \tau_Y; \gamma \leq \frac{3\gamma_Y}{2(1+\nu)}) \\ \tau_Y \left(\frac{2(1+\nu)}{3} \frac{\gamma}{\gamma_Y} \right)^m & (\tau > \tau_Y) \end{cases} \quad (11.156)$$

と書くこともできる。

さて、硬化係数は降伏後の応力ひずみ曲線の接線に相当するので

$$H \equiv \frac{d\tau}{d\gamma} = m \frac{\tau_Y}{\gamma_Y} \frac{2(1+\nu)}{3} \left\{ \frac{2(1+\nu)}{3} \frac{\gamma}{\gamma_Y} \right\}^{m-1} = \frac{mE}{3} \left\{ \frac{2(1+\nu)}{3} \frac{\gamma}{\gamma_Y} \right\}^{m-1}$$

となる。同様に h_1 が割線係数だと解釈できるので

$$h_1 \equiv \frac{\tau}{\gamma} = \frac{\tau_Y}{\gamma_Y} \frac{2(1+\nu)}{3} \left\{ \frac{2(1+\nu)}{3} \frac{\gamma}{\gamma_Y} \right\}^{m-1} = \frac{E}{3} \left\{ \frac{2(1+\nu)}{3} \frac{\gamma}{\gamma_Y} \right\}^{m-1}, \quad H = m h_1 < h_1 \quad (11.157a, b)$$

となる。接線と割線で定式化したので H が h_1 よりも小さいという適正なモデルになっている。

ちなみに、随所に現れる Poisson 比を含む係数は $\nu = 1/3$ の場合には $8/9$ という値を持つ。さらに、塑性変形が非圧縮性を持つことから、このべき乗則の Poisson 比が弾塑性の見かけ上のそれであると解釈して極限として $\nu = 1/2$ と置くと、べき乗則は

$$\tau = \begin{cases} \mu \gamma & (\tau \leq \tau_Y; \gamma \leq \gamma_Y) \\ \tau_Y \left(\frac{\gamma}{\gamma_Y} \right)^m & (\tau > \tau_Y) \end{cases} \quad (11.158)$$

と書くことができ、二つの硬化係数も

$$\frac{H}{\mu} = m \left(\frac{\gamma}{\gamma_Y} \right)^{m-1}, \quad \frac{h_1}{\mu} = \left(\frac{\gamma}{\gamma_Y} \right)^{m-1} \quad (11.159a, b)$$

のような単純なモデルとして定義できる。これを用いて m を実験等からうまく同定することによって、硬化後に非線形挙動を示す材料の簡単なモデルを作ることができる。そのような数値解析では、上式の γ は相当塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^P$ で置き換えればよいだろう。あるいはもっと簡略に、2種類の塑性ひずみノルムの関係をそのまま初期降伏ひずみにも当てはめて $\epsilon_Y = \frac{\gamma_Y}{\sqrt{3}}$ とすると、式 (11.155) は

$$\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} = \frac{\sqrt{3}\bar{\sigma}}{\sqrt{3}\tau_Y} = \left(\frac{\bar{\epsilon}^P}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{\gamma_Y} \right)^m \rightarrow \frac{\bar{\sigma}}{\tau_Y} = \left(\frac{\bar{\epsilon}^P}{\gamma_Y} \right)^m \quad (11.160a, b)$$

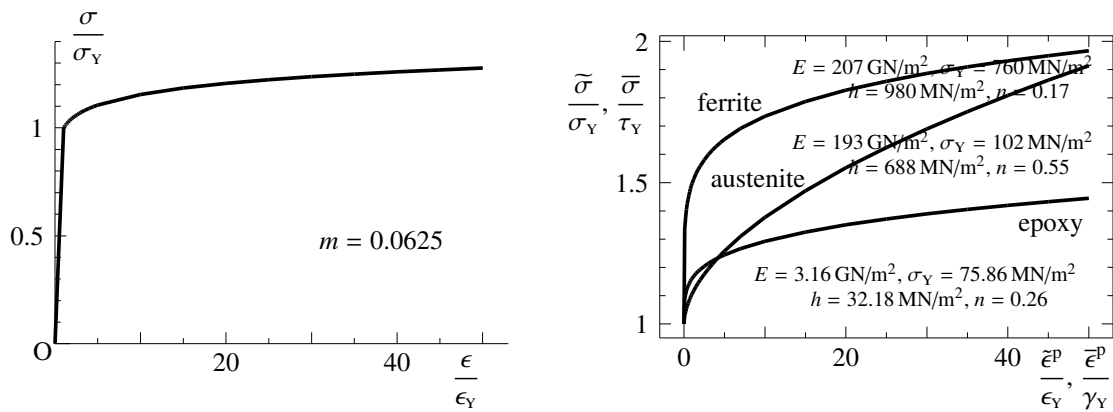


図 11.46 べき乗則

というモデルだと考えてもいい。

もう一つのべき乗則に改訂 Ludwik 式 [93, 102] というものがあり、それは降伏関数を

$$f \equiv \bar{\sigma} - \{\sigma_Y + h (\bar{\epsilon}^P)^n\} \tag{11.161}$$

で定義している。引張試験を元に行っているので式 (11.29) (11.30) の相当応力と相当塑性ひずみを用いてある。これをせん断で定義した降伏関数に変換すると

$$f \equiv \bar{\sigma} - \left\{ \tau_Y + \frac{h}{\sqrt{3}} (\bar{\epsilon}^P)^n \right\} = \bar{\sigma} - \left\{ \tau_Y + \frac{h}{(\sqrt{3})^{n+1}} (\bar{\epsilon}^P)^n \right\} \tag{11.162}$$

になる。これに対応する硬化係数はその定義式 (11.64b) から

$$H = \frac{\partial \bar{\tau}_Y}{\partial \bar{\epsilon}^P} = \frac{\partial \bar{\tau}_Y}{\partial \bar{\epsilon}^P} \frac{\partial \bar{\epsilon}^P}{\partial \bar{\epsilon}^P} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \bar{\tau}_Y}{\partial \bar{\epsilon}^P} = \frac{h n}{3} (\bar{\epsilon}^P)^{n-1} = \frac{h n}{(\sqrt{3})^{n+1}} (\bar{\epsilon}^P)^{n-1} \tag{11.163}$$

となる。いくつかの例を図 11.46 に示した。

11.4.5 もっと現実的なモデル

(1) 異方性材料の降伏関数

ここまでは等方性を持つ代表的な降伏条件を列挙してきたが、例えば多結晶モデルの例で予測される降伏曲面の図 12.25 のように、実際には等方硬化ではなく载荷方向にも依存した異方性を有していることは容易に推測される。つまり Mises 型の降伏曲面の場合なら円柱状のものが楕円柱状になるわけだが、このような事実を等方・移動硬化の二つの硬化係数だけで表現するのは困難だし、カーブフィッティングのようにパラメータを複雑にしたりその数を無闇に増やしたりすることは力学的な観点からは本末転倒である。そこで異方性を持つ基本的な降伏曲面について、文献 [38] の直交異方性を一般化した文献 [126] のモデルを簡単に紹介だけしておこう。Tresca の降伏条件でも説明したように、また J_2 の表現式 (11.53) からわかるように、直応力の差がせん断応力に密接に関係していることから、降伏関数は J_2 の代わりに

$$\begin{aligned} & F (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 \\ & + \sigma_{23} \{a_4 (\sigma_{11} - \sigma_{22}) + a_5 (\sigma_{11} - \sigma_{33})\} + \sigma_{31} \{a_6 (\sigma_{22} - \sigma_{33}) + a_7 (\sigma_{22} - \sigma_{11})\} \\ & + \sigma_{12} \{a_8 (\sigma_{33} - \sigma_{11}) + a_9 (\sigma_{33} - \sigma_{22})\} + a_{10}\sigma_{23}\sigma_{31} + a_{11}\sigma_{31}\sigma_{12} + a_{12}\sigma_{12}\sigma_{23} \end{aligned} \tag{11.164}$$

で定義される。この第 1 行が Hill の直交異方性の場合の成分 [38] である。さらに

$$a_4 \sim a_{12} = 0, \quad 3F = 3G = 3H = L = M = N = \frac{1}{2}$$

の場合が等方材料の Mises の降伏条件に相当する。

(2) 寸法効果や損傷等について

Mises と Tresca のモデルを拡張した代表的・基本的なモデルをいくつか紹介したが、どのモデルも観察される巨視的な挙動を巨視的な物理量で表現する現象論的⁴³な記述になっている。そのため、材料内部の微視構造の影響が直接的には反映されておらず、例えば、いわゆる寸法効果と密接に関係する材料内部の特性長さ⁴⁴等も考慮できていない。それに対する本質的な解決法では決していないが、そういった特徴を考慮するために非局所理論の近似としてのひずみ勾配を用いた定式化等も考えられているようだが、あまり筋がいいようには感じないのでこの文書では触れ(る能力が)ない。ただ単結晶についての微視的な観点に基づいた興味深い美しいモデルの一例として、有限変位理論の枠組における記述を第 12.5.4(4) 節に示しておいた。さらに内部構造の大きな変化を伴いながら終局状態に至るプロセスをモデル化することについては、第 11.5.5(3) 節に若干のコメントを加えておいた。

11.5 塑性解析

11.5.1 メカニズムと安全率

終局状態設計法を用いる場合、実際の挙動を有限要素法等でシミュレーションしてその終局状態を予測するのは材料非線形性の観点から一般には多くの困難が伴う。しかもその結果がどういう意味・精度で正しいかという判断も極めて難しい。特にコンクリートや地盤材料等のように徐々に微視的な破壊が伸展する材料を対象とする場合にはさらに難しくなる。これについては第 11.5.5(3) 節にコメントを加えておいた。ただ弾・完全塑性モデルで表現できる鋼等の場合は、第 11.1.3 節に示した簡単な例等から

- 終局状態は弾性特性には影響を受けず、断面の形状と寸法だけに依存した P_V や M_p のような強度パラメータで支配される。
- 崩壊に至るまでには、全断面が降伏する塑性ヒンジのようなメカニズムが構造や材料のある局所的な箇所いくつか発生・発達し、その発生位置もある程度予測可能だ。しかもこれは地盤材料等の場合もある程度同様である。

といったことがわかる。したがって、特に断面緒元等を仮定する設計の初期段階で終局状態と安全率をある程度の精度で予測したいとき、弾性特性を無視する等の比較的簡便な手法が利用可能になることも想像でき、さらにその方が便利で有意義だろう。有限要素法はその次の段階で用いればいいのだ。つまり、つり合いを満足するだけの解や幾何学的に適合なだけの場に対する解が、近似とはいえ比較的容易に求められることを利用して、断面を設計して安全率を算定しようとするのである。さらに特徴的なのは、そのような解を用いて安全率の範囲、つまり「上界」と「下界」を求めようとするのが塑性解析である。ここではそのアプローチの基礎的な考え方や定義と定理およびいくつかの利用例について述べておく。なおこの節は Northwestern 大学の村外志夫先生(1980 年頃当時)による 'Plasticity' の講義ノートを参考にした。

⁴³ 英語の 'phenomenological' の直訳で、観察をそのままモデルにしたという意味で使っている。これは相応しくないという査読意見をいただいたこともあるが、理由が理解できなかった。

⁴⁴ 例えば多結晶体中の単結晶の粒径や、転位や亀裂に関係した長さや密度等。

11.5.2 すべり線理論

(1) 基礎方程式

まず崩壊メカニズムの最も基本的なモデルを導入する。第 11.1.3 節の構造解析で紹介した塑性ヒンジは、ここで説明するすべり線が点（断面）に局所化したものだが、それについては後述する。降伏条件の一つである Tresca のモデルでは、最大せん断応力によって転位が移動して蓄積することによって塑性変形になると考えていると解釈できる。この転位の移動による塑性変形を「すべり線」上の変形の蓄積としてモデル化するのである。ちょうど図 11.16 の稠密面をすべり線で表現したと考えればよい。どういう意味で「すべり線」なのかについては第 11.5.2 (4) 節の変位増分場で説明する。あるいは、すべり線上に塑性変形が蓄積されるイメージについては第 12.5.4 (4) 節の単結晶モデルの説明と図も参照すると、少しは理解が進むかもしれない。

基礎理論は平面ひずみ状態を対象としているので、つり合い式は

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{21,2} + X_1 = 0, \quad \sigma_{12,1} + \sigma_{22,2} + X_2 = 0 \quad (11.165a, b)$$

となる。ここに X は体積力である。材料は弾性の無い⁴⁵剛・完全塑性体とし、硬化も無く降伏応力が一定だとする。また降伏条件は Mises のそれに従うものとする。このように問題を設定すると、材料の降伏応力を終局状態の応力レベルだとみなしているように捉えられるので、ちょうど鋼構造の許容応力設計法の終局状態のように感じられるかもしれないが、実際には例えば部材のある箇所の全断面が降伏する状態を終局と捉えるので、許容応力設計法よりは終局に近い状態の設計法に対応していると考えていい。ここで弾性成分の無い塑性的平面ひずみ状態を

$$\dot{\epsilon}_{j3} = \dot{\epsilon}_{j3}^p = 0, \quad j = 1, 2, 3 \quad (11.166)$$

と定義し、これに流れ則の式 (11.31b) を代入すると

$$0 = \dot{\epsilon}_{33} = \dot{\epsilon}_{33}^p = \lambda_{PR} \sigma'_{33} \rightarrow \sigma'_{33} = 0 \rightarrow \sigma_{33} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (11.167a, b, c)$$

という関係が成立することになる。この式と弾性の平面ひずみの式 (3.177) とを比べると、一見して $\nu = 1/2$ にしたように見えるのは興味深い。なぜなら塑性変形には体積変形が無い ($\nu = 1/2$ の弾性特性と同じだ) からだ。この条件式 (11.167c) が成立していれば、平均応力（負の静水圧）と $\bar{\sigma}$ は

$$-p \equiv \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} + \sigma_{22}), \quad \bar{\sigma}^2 \equiv J_2 = \frac{1}{4} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{12})^2 \quad (11.168a, b)$$

になる。これを Mises の降伏条件に代入して

$$\frac{1}{4} (\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{12})^2 = \tau_Y^2 \quad (11.169)$$

を得る。少し注意して欲しいが、この塑性的平面ひずみ状態の降伏条件式からは、純せん断では $|\sigma_{12}| = \tau_Y$ になっているのに対し、1 軸引張では $|\sigma_{11}| = 2\tau_Y$ になるので

$$\sigma_Y = 2\tau_Y \quad (\text{塑性的平面ひずみ状態の Mises}) \quad (11.170)$$

となり、二つの降伏応力が Tresca の関係式 (11.59) の方と同じ関係になる。次の項でわかるように、実は上式の Mises の降伏条件は Tresca の条件と本質的には同じなのである。

⁴⁵ それなのに応力は存在する。ある応力状態における瞬間（接線）的な（終局）応力状態を対象としていると考えればよい。

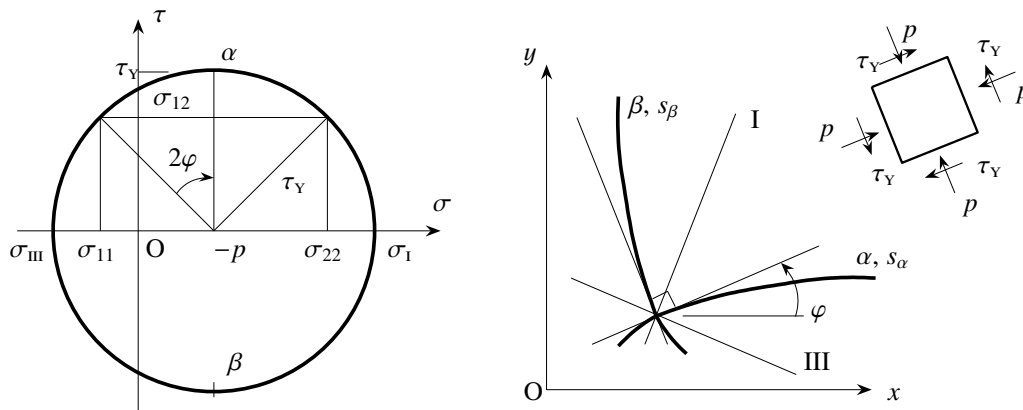


図 11.47 降伏条件を満足する Mohr の応力円と、二つのすべり線と最大せん断応力軸・主軸

(2) 静力学的許容場

対象とする問題に対して、つり合い式 (11.165) と降伏条件式 (11.169) および境界条件を満足する解を求めよう。ただし、例えば有限要素法で応力分布を求めようとしているわけではないので、物体の中に降伏している領域を仮定せざるを得ない。したがってその仮定した降伏領域に依存した終局強度しか求められないので、複数の降伏領域のパターンを仮定し、得られる複数の解の中から適切なものを探し出す必要がある。あるいはその解は下界かもしれないが、それについては第 11.5.4 節で説明する。また多くの読者は既に気付いていると思うが、この手法では必ずみ変位関係つまり運動学的な支配方程式を全く考慮していない。だから仮定する塑性領域に依存した解しか求められないわけだが、有限要素法等で運動学的な支配方程式も考慮しながら解析するよりは比較的容易に解の候補を求めることができるメリットがあるのだ。このつり合い式と降伏条件だけを満足するような場（真の解の部分集合）を静力学的許容場と呼んでいる。弾性の場合の同様の場は第 3.5.1 節で説明したので参照して欲しい。

さて

$$\sigma_{11} = -p - \tau_Y \sin 2\varphi, \quad \sigma_{22} = -p + \tau_Y \sin 2\varphi, \quad \sigma_{12} = \tau_Y \cos 2\varphi \quad (11.171a, b, c)$$

という応力場は降伏条件式 (11.169) を満足する。 p は式 (11.168a) で定義した静水圧である。図 11.47 の左側には、降伏条件を満足する応力の組み合わせが作る Mohr の応力円を描いたので、この図と式 (11.171) を比べればその意味が理解できるだろう。半径が降伏応力 τ_Y である。円の上部に α で示した最大せん断応力までの向きが 2φ なので、ここの応力状態は図の右側に示したようなものに相当する。つまり α 線という曲線が x_1 軸と φ の角度を持って伸びているが、その方向は図の右上に描いた応力状態図でもわかるように最大せん断応力が作用している面の接線方向になっている。同様に β 線もそれと直交するもう一つの最大せん断応力が作用する面の接線方向である。この二つの線の向きのせん断応力が最大値 τ_Y になってすべり変形が可能になっている状態を降伏状態だと定義し、それを一種の終局状態と考えるのだ。この二つの線（平面ひずみ状態の面）をすべり線と呼ぶが、「すべり線」と呼ぶ理由は後ろの第 11.5.2 (4) 節で説明する。また Mohr の応力円からは、右図の I, III と書いた二つの方向が最大主応力 σ_1 および最小主応力 σ_{III} の方向⁴⁶になっていることもわかる。さらに右上の図から明らかなように、 s_α - s_β 座標系では

$$\sigma_{\alpha\alpha} = \sigma_{\beta\beta} = -p, \quad \sigma_{\alpha\beta} = \tau_Y \quad (\alpha, \beta \text{ については総和をとらない}) \quad (11.172a, b)$$

という応力状態にある。 s_α, s_β 方向成分を表すのに下添え字 α, β を用いているが、この節ではギリシャ文字の添え字に対しては総和規約を適用しないことにするので注意して欲しい。

⁴⁶ 平面問題は 3 次元問題であり、その平面外方向の主応力は式 (11.167) からわかるように中間主応力 σ_{II} になる。

式 (11.171) の応力場は降伏条件を満足しているだけでつり合い式はまだ満たしていない。これが静力学的許容場であるためにはつり合い式 (11.165) を満足する必要があるので代入すると

$$-\frac{\partial p}{\partial x_1} - 2\tau_Y \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - 2\tau_Y \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + X_1 = 0, \quad -2\tau_Y \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} - \frac{\partial p}{\partial x_2} + 2\tau_Y \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + X_2 = 0 \quad (11.173a, b)$$

を得る。α線方向とβ線方向の座標を s_α, s_β 軸としたから

$$\frac{\partial}{\partial x_1} = \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s_\alpha} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial s_\beta}, \quad \frac{\partial}{\partial x_2} = \sin \varphi \frac{\partial}{\partial s_\alpha} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial s_\beta}$$

という座標変換ができるので、こちらの座標系におけるつり合い式に変換すると

$$\frac{\partial p}{\partial s_\alpha} + 2\tau_Y \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} = X_1 \cos \varphi + X_2 \sin \varphi, \quad \frac{\partial p}{\partial s_\beta} - 2\tau_Y \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta} = -X_1 \sin \varphi + X_2 \cos \varphi \quad (11.174a, b)$$

という関係が成立する。もし分布外力 \mathbf{X} が無いときには、この式は

$$\alpha \text{ 線に沿っては } p + 2\tau_Y \varphi = \text{一定}, \quad \beta \text{ 線に沿っては } -p + 2\tau_Y \varphi = \text{一定} \quad (11.175a, b)$$

であることを意味する。これは **Hencky** の定理と呼ばれていて、静力学的許容なだけの解である。この解を用いて終局強度を求めることができる。

(3) 例 — どのようにして終局強度を求めるか

図 11.48 に示したように、中央に $2h$ の幅を残してスリットが入った幅 $2a$ の板を上下に T で引張る問題を対象とする。図の左側には、数学的亀裂周りの弾性解で算定した相当応力が Mises の降伏条件の初期降伏応力を超える（降伏関数が $f > 0$ となるので本来は許されない）領域を描いた。このような弾性解や実験観察等を踏まえて、例えば図 11.48 の右側の図のような塑性域を仮定する。かなり大胆な（いい加減な）仮定だ。

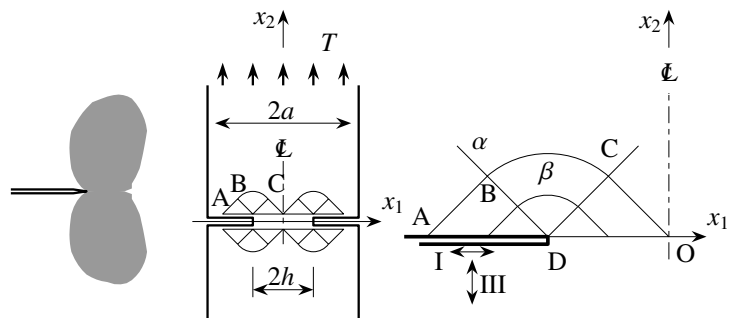


図 11.48 スリットの入った板を引張った場合の終局状態の例

DA に沿って: スリット表面は自由表面なので $\sigma_{22} = 0, \sigma_{12} = 0$ である。したがって、降伏条件式 (11.169) から $\sigma_{11} = \pm 2\tau_Y$ のどちらかである。しかし DA 方向が圧縮である可能性が無いことを踏まえると、その DA 方向は最大主応力方向になると考えていいから、ここは正の符号の方が正しくなり $\sigma_{11} = 2\tau_Y$ となる。DA 方向が最大主応力方向なので、最大せん断力の α線方向は斜め左上向きになるので

$$p = -\frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} = -\tau_Y, \quad \varphi = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3}{4}\pi \quad (11.176a, b)$$

を得る。

DO 上: この DO 線上の応力成分 σ_{22} が求められれば、この構造が支えられる最大の T を求めることができるはずだ。そこで、まず $\triangle ADB$ 内はβ線が右上 45 度方向に直線になっていて、扇形の DBC 内は点 D を中心とする円弧状にβ線がつながっていると考え、最終的に $\triangle DCO$ 内のβ線は右下 45 度方向への直線につながると仮定する。したがって $\triangle DCO$ 内の φ は $\frac{\pi}{4}$ になるが、これもかなり大雑把な仮定である。

さて式 (11.175) は β 線に沿って $(-p + 2\tau_Y\varphi)$ の値が一定であることを示している。したがって、DA 上の β 線上のその値と DO 上の対応する値とは、 β 線をたどれば一定のままなので

$$(-p + 2\tau_Y\varphi)|_{\text{DA}} = (-p + 2\tau_Y\varphi)|_{\text{DO}}$$

という等号が成立する。この左辺に式 (11.176) を代入し、右辺の φ を $\frac{\pi}{4}$ とすることによって DO 上では

$$p|_{\text{DO}} = \frac{\pi\tau_Y}{2} - \tau_Y - \frac{3\pi\tau_Y}{2} = -(1 + \pi)\tau_Y$$

と求められる。これを式 (11.171) に代入すれば

$$\sigma_{22}|_{\text{DO}} = (-p + \tau_Y \sin 2\varphi)|_{\text{DO}} = (1 + \pi)\tau_Y + \tau_Y = (2 + \pi)\tau_Y = \frac{2 + \pi}{2}\sigma_Y \approx 2.57\sigma_Y$$

となる。ここでは式 (11.170) の関係 $\sigma_Y = 2\tau_Y$ を用いた。したがって、ここで仮定した降伏パターンで迎える終局状態では、上式の応力 $2.57\sigma_Y$ が幅 $2h$ の部分に生じていることになる。 σ_Y ではなくその 2.57 倍にまで達することになるが、これは仮定した降伏パターンで得られる下界と捉えるべきである。応力集中等を念頭に置くとかなり大きいように感じるが、応力集中はノッチ先端のみだろうし延性破壊過程の塑性変形の伸展は徐々に生じるからこのような値を予測すると考えればいい。最終的にその総抵抗力が外力 $T \times 2a$ とつり合うので

$$T_{\max} \times 2a = (2 + \pi)\tau_Y \times 2h \quad \rightarrow \quad T_{\max} = \frac{(2 + \pi)\tau_Y h}{a} = \frac{(2 + \pi)\sigma_Y h}{2a}$$

が最大荷重となる。

もちろん、仮定するすべり線のパターンに依存して得られる解はそれぞれ異なる。また静力学的許容場の中だけの解であるから、厳密解ではない。一般には、次の極限解析の節で説明するように、こういったアプローチによる最大荷重は下界を与える。またパターンを仮定する作業にはかなりの経験や実験観察の知識が必要である。しかも、必ずしも連続したすべり線を仮定できるとは限らず、不連続なすべり線を仮定せざるを得ない場合もあるが、そういった詳細については別途文献 [105, 126] を参考にして欲しい。

(4) 対応する変位増分場

α 線・ β 線が「すべり線」と呼ばれる理由を示すために、また終局状態でどのような変形が発生しようとするのかを求めるために、前項の静力学的許容場がどのような増分変形場（運動場）に対応しているのかを求めておこう。座標の x_i 方向の変位増分（速度）を v_i と記すことにし、その α 線・ β 線方向の速度を v_α, v_β とすると、座標変換則から

$$v_1 = v_\alpha \cos \varphi - v_\beta \sin \varphi, \quad v_2 = v_\alpha \sin \varphi + v_\beta \cos \varphi \quad (11.177a, b)$$

という関係にある。応力場は式 (11.172) だったから、流れ則から

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} = \dot{\epsilon}_{\alpha\alpha}^p = \lambda_{\text{PR}} \sigma'_{\alpha\alpha} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{\beta\beta} = \dot{\epsilon}_{\beta\beta}^p = \lambda_{\text{PR}} \sigma'_{\beta\beta} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{\alpha\beta} = \dot{\epsilon}_{\alpha\beta}^p = \lambda_{\text{PR}} \sigma_{\alpha\beta} = \lambda_{\text{PR}} \tau_Y \neq 0 \quad (11.178a, b, c)$$

となる。ここでもギリシャ文字の添え字については総和をとらない。プライムは偏差成分を示しており、剛・完全塑性体なので塑性ひずみ増分がそのまま適合ひずみ（総ひずみ）増分に一致する。この式はすべり線に沿って伸び縮みが無い上にその法線方向には膨張もしないことを示しており、すべり線に沿った純粋な局所的な増分せん断場であることがわかる。せん断変形のみがこの線に沿って不連続になろうとすると考えてもいい。この最初の二つの式で表される条件を x_1 - x_2 座標系のひずみとの座標変換則を用いて表し、さらに式 (11.22) のひ

ずみと速度の関係式を用いると、それぞれ

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} &= \cos^2 \varphi \dot{\epsilon}_{11} + 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\epsilon}_{12} + \sin^2 \varphi \dot{\epsilon}_{22} = \cos \varphi \frac{\partial v_1}{\partial s_\alpha} + \sin \varphi \frac{\partial v_2}{\partial s_\alpha} = 0, \\ \dot{\epsilon}_{\beta\beta} &= -\sin \varphi \frac{\partial v_1}{\partial s_\beta} + \cos \varphi \frac{\partial v_2}{\partial s_\beta} = 0\end{aligned}$$

となり、式(11.177)の座標変換則を代入することによって

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} - v_\beta \frac{\partial \varphi}{\partial s_\alpha} &= 0 \\ \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} + v_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial s_\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{cases} \alpha \text{ 線に沿って} & dv_\alpha - v_\beta d\varphi = 0 \\ \beta \text{ 線に沿って} & dv_\beta + v_\alpha d\varphi = 0 \end{cases} \quad (11.179)$$

という関係が成立する。この関係式を **Geiringer** の式と呼ぶ。ひずみと速度の関係を用いたが、あくまでも静力学的許容場に対応する速度場を求めているに過ぎず、連続体としての解と考えてはいけない。

ちなみに、式(11.173)の形のつり合い式は波動方程式と同じく放物型の偏微分方程式に分類され、二つの不連続線あるいは wavefront を持つ。その不連続線を微分方程式の特性曲線とも呼ぶが、その曲線は

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \tan \varphi, \quad \frac{dx_2}{dx_1} = -\cot \varphi$$

と求められ、これは α 線・ β 線に他ならない。すなわち、この曲線に沿って速度(変位増分)に不連続が可能ながここで対象としている場であり、その二つの特性曲線つまり不連続線がすべり線になっているのだ。

前述の例の場合： 前節の例にこの Geiringer の式を用いてみよう。崩壊の瞬間に、CO 線の外側は弾性のまま上方に速度 v で伸びようとしているものとし、DO 部分は境界条件として動かないものとする。この条件を適用して、仮定した α 線・ β 線に沿って Geiringer の式を追跡すると、例えば DA 部分の斜め左下方向を正とする速度 v_β が $-\frac{3}{\sqrt{2}}v < 0$ となり、スリット部分が開こうとしていることがわかる。詳細は別途文献 [105, 126] を参考にして欲しい。

(5) 内部摩擦角のある材料の場合

地盤材料等のように内部摩擦角がある材料の場合には第 11.4.2 節で示した **Mohr-Coulomb** の破壊規準で終局状態を規定することが多い。粘着力を c として内部摩擦角を ϕ としたとき、その破壊規準は

$$\tau_n - p_n \tan \phi = c \quad (11.180)$$

で与えられる。ここに τ_n は、法線ベクトルを $\mathbf{n} = [\cos \chi \quad \sin \chi \quad 0]^T$ とする最大せん断応力面上のせん断応力であり、 p_n はその面の法線方向の「圧縮」直応力 $p_n = -\sigma_n$ である。内部摩擦角の ϕ と α 線の向きの φ とを混同しないこと。

Mises の降伏条件は使わないのだが、図 11.47 の Mohr の応力円を用いて応力状態を表現することはできる。そのために

$$q = \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{12})^2} \quad (11.181)$$

と置くと

$$\sigma_{11} = -p + q \cos 2\Psi, \quad \sigma_{22} = -p - q \cos 2\Psi, \quad \sigma_{12} = q \sin 2\Psi \quad (11.182a, b, c)$$

という関係は成立する。ただし、 p は式(11.168a)で定義した静水圧である。また Ψ は最大主応力方向であり、図 11.47 の $\varphi + \frac{\pi}{4}$ に相当する。式(11.180)の左辺を最大にするような面 (\mathbf{n}) の向きは

$$\chi = \Psi \pm \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} \right) \quad (11.183)$$

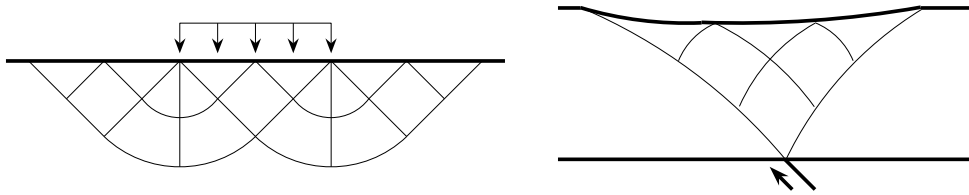


図 11.49 すべり線の例

で与えられる。したがって破壊する状態においては、式 (11.182) と式 (11.168b) (11.181) を用いて破壊規準の式 (11.180) を書き直すと

$$q - p \sin \phi = c \cos \phi \quad (11.184)$$

になる。一方、式 (11.182) をつり合い式 (11.165) に代入し、その特性曲線 (不連続線) を求めると

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \tan \left(\Psi - \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \phi \right), \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = \tan \left(\Psi + \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi \right) \quad (11.185a, b)$$

となる。この 2 本が α 線と β 線である。内部摩擦角の影響でこの 2 本は直交しなくなっている。以上の関係をすべてつり合い式に代入すると、静力学的許容場は

$$\cot \phi dq + 2q d\Psi = \left\{ X_1 \sin \left(\Psi + \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi \right) - X_2 \cos \left(\Psi + \frac{1}{4} \pi + \frac{1}{2} \phi \right) \right\} ds_\alpha, \quad (11.186a)$$

$$\cot \phi dq - 2q d\Psi = \left\{ -X_1 \sin \left(\Psi - \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \phi \right) + X_2 \cos \left(\Psi - \frac{1}{4} \pi - \frac{1}{2} \phi \right) \right\} ds_\beta \quad (11.186b)$$

を満足し、これを **Kötter** の式と呼ぶ。 ϕ が零のときには式 (11.174) の Hencky の式に一致する。

さらに、すべり線上で内部摩擦角が無い場合と同様に純粋なせん断変形しか生じない場合には、式 (11.179) の Geiringer の式に相当する関係は

$$\cos \phi \frac{\partial v_\alpha}{\partial s_\alpha} - (v_\beta - v_\alpha \sin \phi) \frac{\partial \Psi}{\partial s_\alpha} - \Psi \sin \phi = 0, \quad \cos \phi \frac{\partial v_\beta}{\partial s_\beta} + (v_\alpha - v_\beta \sin \phi) \frac{\partial \Psi}{\partial s_\beta} + \Psi \sin \phi = 0 \quad (11.187a, b)$$

となる。しかし、砂や岩のような材料の場合にはすべり線上でせん断のみならず膨張 (ダイレタンシー) も生じるのが普通である。つまり、例えばすべり線上の塑性的な変形速度の接線方向成分と垂直成分の比がダイレタンシー角度 ψ をなし、 $\tan \psi$ で表されるとする。こういった場合の上式に相当する関係式も求められているが、さらに、このすべり線理論に対応する 3 次元の構成則を求めると、それは第 11.4.3 節で示した非共軸の塑性モデルの特別な場合に相当することもわかっている。つまり式 (11.150) のパラメータ H, h_1, α, β は

$$H = 0, \quad h_1 = \frac{\bar{\sigma} (\alpha\beta - 1)}{\alpha - \beta} = -\frac{\bar{\sigma} \cos \psi}{\sin(\phi - \psi)}, \quad \alpha = \sin \phi, \quad \beta = \frac{\sin \psi}{\cos(\phi - \psi)}$$

という関係になる。等方硬化を含めていないから $H = 0$ となっていると思われる。興味深いのは h_1 が負になっている [64] ことである。詳細については文献 [62, 63, 64, 87] を参照⁴⁷のこと。

土木分野における具体例を図 11.49 に示した。左は古典的な問題であるが、押し込み問題と呼ばれるものである。例えば直接基礎直下の抵抗力の評価のモデルと考えればいい。図示したのは著名な Prandtl のすべり線パターンであるが、他のパターン [38] も提案されている。もちろん数値解析 [154] でも似たようなパターンが現れる。右に示したのは、活断層直上の堆積砂地盤に発生するずれ変形と地表の変形をシミュレーションしたものの例である。活断層の角度にもよるが、図のような主副の二つのすべりが発生する [124, 154] ことがわかっている。例えば発電タービンを格納する施設は、タービンの安全稼働の観点からその床の傾きがある限度内に規制されるらしい。そのような地表面の変形の予測にもすべり線理論が使える。

⁴⁷ 要約は文献 [75] に示した。

11.5.3 変形の局所化予測

(1) 引張試験片のせん断帯発生

式 (11.178) のすべり線が局所化した変形を定義 [38] していると考えてみよう。というのも、せん断変形が局所化したすべり線はその線に沿って伸びが無いような不連続線だと定義できていたからだ。つまり式 (11.178) から、 $\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} = 0$ あるいは $\dot{\epsilon}_{\beta\beta} = 0$ となるような線が「せん断変形の局所帯 (せん断帯)」だとみなすのである。そこで

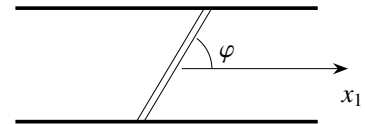


図 11.50 引張試験片のせん断帯

図 11.50 のように座標軸を設定し、具体的に x_1 方向に長い円柱状の引張試験片がその方向に σ_0 で一様に引張られているとする。そのときに発生するせん断帯が x_1 軸から φ 傾いた α 方向に伸びるものとする。弾性変形は微小で無視できるとし、この節のひずみは塑性ひずみ成分のみとする。すると、上述の条件は前節と同様に

$$\dot{\epsilon}_{\alpha\alpha} = \cos^2 \varphi \dot{\epsilon}_{11} + 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\epsilon}_{12} + \sin^2 \varphi \dot{\epsilon}_{22} = 0, \tag{11.188a}$$

$$\dot{\epsilon}_{\beta\beta} = \sin^2 \varphi \dot{\epsilon}_{11} - 2 \sin \varphi \cos \varphi \dot{\epsilon}_{12} + \cos^2 \varphi \dot{\epsilon}_{22} = 0 \tag{11.188b}$$

となる。応力状態は $\sigma_{11} = \sigma_0$ だけで他の成分は零なので、偏差応力を計算して流れ則に代入すると

$$\dot{\epsilon}_{11} = \lambda_{PR} \frac{2}{3} \sigma_0, \quad \dot{\epsilon}_{22} = -\lambda_{PR} \frac{1}{3} \sigma_0, \quad \dot{\epsilon}_{12} = 0$$

というひずみ増分が生じていることになる。これを上式 (11.188) に代入すると

$$\tan \varphi = \sqrt{2}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \varphi = 54.7, 35.3 \text{度} \tag{11.189}$$

という角度を得る。巨視的な最大せん断応力の向き (45 度) になっていないことは興味深い。このようなせん断帯が多数発生しながら試験片の断面が細くなっていく (絞り) と考えられている。実は Hill は文献 [38] で、これを平面ひずみ状態のせん断帯の向きと述べているが、それは上式 (11.188) が (塑性的) 平面ひずみ状態で得られていると捉えるからである。ここでは式 (11.188) は x_1 - x_2 面内にすべり線が出る 3 次元問題の単なる座標変換則だと捉えた解が Hill の解になると考えた。

では、式 (11.167) のような塑性的平面ひずみが成立する場合を対象にして、上述と同様の 1 軸応力状態にあるとすると

$$\sigma_{11} = \sigma_0, \quad \sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{33} = \frac{1}{2} \sigma_0$$

となる。これを流れ則に代入すれば

$$\dot{\epsilon}_{11} = \lambda_{PR} \frac{1}{2} \sigma_0, \quad \dot{\epsilon}_{22} = -\lambda_{PR} \frac{1}{2} \sigma_0, \quad \dot{\epsilon}_{12} = 0$$

というひずみ増分が生じていることになる。よって上述のすべり線の定義式 (11.188) からは

$$\tan \varphi = \pm 1 \rightarrow \varphi = \pm 45 \text{度} \tag{11.190}$$

という解を得る。この応力状態で敢えて x_1 - x_3 面内で同様の基準で向きを求めると、 $\sigma'_{33} = 0$ なので

$$\dot{\epsilon}_{33} = 0, \quad \dot{\epsilon}_{13} = 0 \rightarrow \sin^2 \varphi = 0 \quad \cos^2 \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0, 90 \text{度} \tag{11.191a, b, c}$$

という解も得る。これを示したのが図 11.51 である。完全塑性体と簡単なすべり線の定義に基づいた予測ではあるが、何となくもっともらしいところがある。

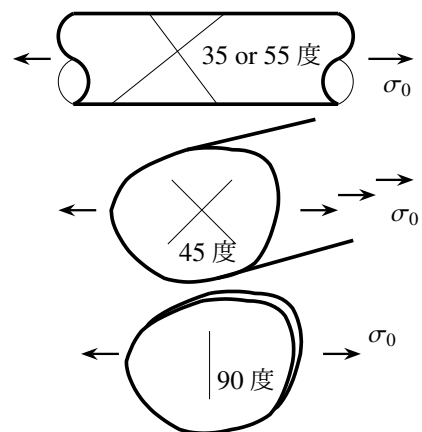


図 11.51 せん断帯の向き

(2) 塑性的な膨張がある場合

では、地盤材料のような塑性的な膨張がある材料のせん断帯発生についても同様の解析が可能だろうか。試しに第 11.4.2 節で紹介した塑性モデルを用いてみる。式 (11.136a) の流れ則を用いて式 (11.167) の塑性的平面ひずみ条件に代入すると

$$0 = \dot{\epsilon}_{33}^p = \lambda \left(\frac{\sigma'_{33}}{2\bar{\sigma}} + \beta \right) \rightarrow \sigma'_{33} = -2\beta\bar{\sigma} \quad (11.192a, b)$$

となる。 $\sigma'_{11} > \sigma'_{22}$ と仮定し

$$t \equiv \frac{2\sigma_{12}}{\sigma'_{11} - \sigma'_{22}} \quad (11.193)$$

と定義 [49] すると

$$\frac{\sigma'_{11}}{\bar{\sigma}} = \beta + \sqrt{\frac{1-3\beta^2}{1+t^2}}, \quad \frac{\sigma'_{22}}{\bar{\sigma}} = \beta - \sqrt{\frac{1-3\beta^2}{1+t^2}}, \quad \frac{\sigma_{12}}{\bar{\sigma}} = t \sqrt{\frac{1-3\beta^2}{1+t^2}} \quad (11.194a, b, c)$$

と式 (11.192b) で表される偏差応力成分は $\bar{\sigma}$ の定義式を常に満足する。 $\beta \equiv 0$ の場合が、前節の平面ひずみの場合の応力状態に一致する。

ダイレタンシーが生じているので、すべり線上でも単純なすべりではなく、すべり線の法線方向への膨張も同時に起こると考えられる。しかしここでは、近似的に前節の式 (11.188) のせん断帯の発生規準が成立するものとして、その向きを調べてみよう。ただし 2 軸載荷状態を考えると $t \equiv 0$ とする。式 (11.193) (11.194) を式 (11.188) に代入すると

$$\tan^2 \varphi = \frac{\sqrt{1-3\beta^2} \pm 3\beta}{\sqrt{1-3\beta^2} \mp 3\beta} \quad (11.195)$$

となる。表 11.8 がその結果である。45 度を挟み 90 度ずれた二つの方向が存在するようになる。単結晶金属の平面ひずみ引張試験でも、必ずしも載荷方向から 45 度の向きにすべり線が出るとは限らないという実験結果 [4] もある。また、砂や粘土の 3 軸試験において発生するせん断帯の向きは、どちらかというと載荷方向から 45 度よりも小さい向きになる実験結果 [198] もあり、この表に示した角度の片方がそれに相当しているように見える。ところで前節では 1 軸載荷状態のようにして算定していたが、この節の誘導からも明らかのように、2 軸載荷の応力比に依存せずせん断帯の向きが一意に決まる結果になったことは興味深い、というよりも、どこか変である。

表 11.8 β と φ (度)

β	$\varphi, 90 - \varphi$
0	45
0.001	45.09
0.0033	45.28
0.01	45.86
0.033	47.85
0.05	49.33
0.06	50.21
0.08	52.01
0.1	53.87

11.5.4 極限解析

(1) 上下界定理

前述のように終局状態とそこに至るまでの進行性破壊を伴う過程の予測はとても難しいので、せめて外力レベルの上下界が予測できれば、それは設計の初期段階では有益である。前節ではすべり線という崩壊メカニズムが発生した瞬間の外力の最大値を静力学的許容場で求めたが、実はそれは下界を与えるのだ。この節では同様のメカニズムを許容する上界の方を求める方法を示し、安全率の範囲を評価する手法を説明しよう。なおここで説明する手法は保有水平耐力の評価法の基礎的な考え方である。対象とする材料は弾・完全塑性体とし、Mises の降伏条件

$$f(\sigma'_{ij}) \equiv \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} - \tau_Y^2, \quad f = 0 \quad (11.196a, b)$$

に従うものとする。またひずみ増分の加算則

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) \quad (11.197)$$

が成立するものとする。ここに \mathbf{v} は変位増分（速度）である。弾性成分は増分型の Hooke の法則式 (11.42) を Poisson 比を用いて書き直した

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = \frac{1}{2\mu} \left(\dot{\sigma}_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \dot{\sigma}_{kk} \right) \quad (11.198)$$

を満足し、塑性成分は Prandtl-Reuss の流れ則を満足し

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \lambda_{PR} \sigma'_{ij}, \quad \dot{\epsilon}_{kk}^p = 0 \quad (11.199a, b)$$

のように体積変形は発生しないものとする。さらに、崩壊時には弾性的な体積変形も生じないと仮定する。

$$\text{仮定: 崩壊時には } \dot{\epsilon}_{kk}^e = 0 \quad (11.200)$$

微小変形理論なので、つり合い式は応力そのものおよびその増分についても同じ形で表されるので

$$\sigma_{ji,j} + X_i = 0, \quad \dot{\sigma}_{ji,j} + \dot{X}_i = 0 \quad (11.201a, b)$$

となる。ここに \mathbf{X} は体積力である。境界条件は、表面のうちの S_1 の部分で変位が規定されており、 S_2 の部分で外力とその増分が

$$n_j \sigma_{ji} = F_i, \quad n_j \dot{\sigma}_{ji} = \dot{F}_i \quad (11.202a, b)$$

で与えられるものとする。ここに、 \mathbf{n} は境界表面の外向き法線単位ベクトルであり、 \mathbf{F} は表面外力である。

定義: 崩壊（塑性崩壊）とは、次の条件を同時に満足する状態である。

$$\dot{F}_i = 0, \quad \dot{X}_i = 0, \quad \dot{\epsilon}^p > 0 \quad (11.203a, b, c)$$

ここに $\dot{\epsilon}^p$ は式 (11.27) で定義した相当塑性ひずみ増分である。

つまり、崩壊の瞬間には外力の変化が無いまま非可逆な塑性ひずみ増分のみが発生し続けるとするのである。ちょうど弾性の分岐座屈が、外力の変化が無いまま異なる変形パターンへと分岐できる瞬間なのに似ている。このとき

定理: 崩壊時には

$$\dot{\sigma}_{ij} = 0 \quad (11.204)$$

が成立する。

証明: 次のような積分⁴⁸を考えると、式 (11.197)~(11.200) を用いれば

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V \dot{\sigma}_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p) dV = \int_V \dot{\sigma}'_{ij} (\dot{\epsilon}_{ij}^e + \dot{\epsilon}_{ij}^p) dV = \int_V \dot{\sigma}'_{ij} \left(\frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}'_{ij} + \lambda_{PR} \dot{\sigma}'_{ij} \right) dV$$

となる。 σ' は偏差応力である。一方、Mises の降伏条件の整合条件からは $\dot{f} = \sigma'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} = 0$ なので、上式の被積分関数の第 2 項は零である。したがって $\mu > 0$ である以上

$$\int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} dV \geq 0 \quad (11.205)$$

⁴⁸ 物理的な意味は考え難いが、本質的には式 (11.60) の Drucker の安全基準に相当する積分量である。

という性質を持つことになる。一方式 (11.197) と Gauss の発散定理を用いれば、この式の左辺は

$$\begin{aligned} \int_V \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV &= \int_V \dot{\sigma}_{ij} \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) dV = \int_V \dot{\sigma}_{ij} v_{j,i} dV \\ &= \int_V n_j \dot{\sigma}_{ij} v_i dS - \int_V (\dot{\sigma}_{j,i,j}) v_i dV = \int_V \dot{F}_i dS - \int_V (\dot{\sigma}_{j,i,j}) v_i dV \end{aligned}$$

とも表すことができるが、式 (11.201) のつり合い式と式 (11.203) の崩壊の定義を用いると上式の積分値は零になる。したがって正定値である式 (11.205) の左辺は零でしかあり得ず、結局

$$\int_V \frac{1}{2\mu} \dot{\sigma}'_{ij} \dot{\sigma}'_{ij} dV = 0 \quad (11.206)$$

が成立する。これは 2 次形式であり、 μ は正の定数であることから、物体内では崩壊時に

$$\dot{\sigma}'_{ij} = 0 \quad (11.207)$$

が成立する。また、式 (11.200) と増分型の Hooke の法則式 (11.42)) から

$$\dot{\sigma}_{kk} = 0 \quad (11.208)$$

も成立するので、この定理は証明できた。☐

したがって、式 (11.198) (11.200) (11.207) から

系: 崩壊時には

$$\dot{\epsilon}_{ij}^e = 0 \quad (11.209)$$

が成立する。

つまり、崩壊時には弾性変形は一切生じないことになる。構造力学的に少しい加減な表現をしておくと、崩壊時には塑性変形が数箇所集中し、それ以外の箇所では弾性除荷⁴⁹のためにほとんど変形が無くなったまま構造全体が壊れると考えればよい。

そこで二つの場を定義する。一つは静力学的許容場で

定義: 静力学的許容場 σ_{ij}^0 は次式を満たすものとする。

$$\begin{aligned} 1) \quad & \sigma_{j,i,j}^0 + m_s X_i = 0 \quad \text{in } V \\ 2) \quad & f(\sigma_{ij}^0) \leq 0 \quad \text{in } V \\ 3) \quad & n_j \sigma_{ji}^0 = m_s F_i \quad \text{on } S_2 \end{aligned} \quad (11.210)$$

ここに外力 \mathbf{X} , \mathbf{F} は一種の設計荷重のようなものと考え、それに乘じた係数 m_s は安全率のようなもの、あるいは崩壊荷重と設計荷重の比のようなものである。もう一つは運動学的許容場で

定義: 運動学的許容場 v_i^* は次式を満たすものとする。

$$\begin{aligned} 1) \quad & \dot{\epsilon}_{ij}^* = \frac{1}{2} (v_{i,j}^* + v_{j,i}^*) \quad \text{in } V \\ 2) \quad & v_{k,k}^* = 0 \quad \text{in } V \\ 3) \quad & v_i^* = 0 \quad \text{on } S_1 \\ 4) \quad & \int_V X_i v_i^* dV > 0, \quad \int_{S_2} F_i v_i^* dS > 0 \end{aligned} \quad (11.211)$$

⁴⁹ だから $\dot{\epsilon}_{ij}^e < 0$ ではないかと思うのだが。

このとき、安全率は

$$m_k = \frac{\int_V \tau_Y \dot{\epsilon}^{*P} dV + \int_L \tau_Y \langle v_s^* \rangle dS}{\int_V X_i v_i^* dV + \int_{S_2} F_i v_i^* dS} \quad (11.212)$$

で与えられる。ここに $\dot{\epsilon}^{*P}$ は運動学的許容場における相当塑性ひずみ増分の

$$\dot{\epsilon}^{*P} \equiv \sqrt{2 \dot{\epsilon}_{ij}^{*P} \dot{\epsilon}_{ij}^{*P}}$$

であり、 L は物体内のすべり線（面）の集合である。さらに $\langle v_s^* \rangle$ は、そのすべり線上の「ずれ」量、つまりその線上の接線方向のすべりの向きの速度の不連続量である。

この二つの場を考えたとき

定理: 真の崩壊荷重が設計荷重の m 倍の mX, mF だとすると

$$m_s \leq m \leq m_k \quad (11.213)$$

が成立する。

これが上下界定理と呼ばれるものである。つまり有限要素法等を用いず、不完全だが力学的に意味のある二つの許容場と前節のすべりのメカニズムとを用いて、安全率の範囲が求められる。この範囲が狭ければ有限要素解析等は設計の初期段階には不要になるだろう。

証明 ($m_s \leq m$): 式 (11.60) の Drucker の公準の一つの形式として、正解の応力場 σ と静力学的許容場 σ^0 の間には

$$\int_V \dot{\epsilon}_{ij}^P (\sigma'_{ij} - \sigma^0_{ij}) dV \geq 0 \quad (11.214)$$

が成立する。弾性も塑性も体積変形は崩壊時には生じていないことと式 (11.197) を用いると

$$\int_V \dot{\epsilon}_{ij}^P (\sigma'_{ij} - \sigma^0_{ij}) dV = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma^0_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij}^P dV = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma^0_{ij}) (\dot{\epsilon}_{ij} - \dot{\epsilon}_{ij}^E) dV$$

となる。これに式 (11.209) を考慮して弾性ひずみ増分を消去し、さらに式 (11.197) を代入すると

$$= \int_V (\sigma_{ij} - \sigma^0_{ij}) \dot{\epsilon}_{ij} dV = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma^0_{ij}) \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i}) dV = \int_V (\sigma_{ij} - \sigma^0_{ij}) v_{i,j} dV$$

となるので、Gauss の発散定理を用いた上でつり合い式を考慮すると、結局式 (11.214) は

$$\begin{aligned} \int_V \dot{\epsilon}_{ij}^P (\sigma'_{ij} - \sigma^0_{ij}) dV &= \int_{S_2} (m F_i v_i - m_s F_i v_i) dS + \int_V (m X_i v_i - m_s X_i v_i) dV \\ &= (m - m_s) \left(\int_V X_i v_i dV + \int_{S_2} F_i v_i dS \right) \geq 0 \end{aligned}$$

となる。崩壊時には外力は仕事しようとするため、 $\int_V X_i v_i dV > 0$ 、 $\int_{S_2} F_i v_i dS > 0$ であることから $m \geq m_s$ が証明できた。□

証明 ($m \leq m_k$): 上の証明の式 (11.214) からの 3 行と同様の演算を次の積分に対してすると

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{*P} dV = \dots = \Rightarrow \dots = \int_V \sigma_{ij} v_{i,j}^* dV$$

となる。ここに σ は崩壊時の真の応力である。物体内に速度の不連続線 L が存在することを考えて Gauss の発散定理を用いると

$$= \int_V m X_i v_i^* dV + \int_{S_2} n_j \sigma_{ji} v_i^* dS + \int_{L^+} n_j^+ \sigma_{ji} v_i^{*+} dS + \int_{L^-} n_j^- \sigma_{ji} v_i^{*-} dS$$

となる。ここに L^+ と L^- はすべり線 L を挟む物体の 2 面であり、当然 $\mathbf{n} = \mathbf{n}^+ = -\mathbf{n}^-$ なので

$$= \int_V m X_i v_i^* dV + \int_{S_2} m F_i v_i^* dS - \int_L n_j \sigma_{ji} (v_i^{*-} - v_i^{*+}) dS$$

となるが、線 L の法線方向の速度は連続しており、不連続なのは線 L の接線方向の速度成分である。またその接線方向の応力は、すべり線理論から降伏応力に達しているの、結局

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{*P} dV = \int_V m X_i v_i^* dV + \int_{S_2} m F_i v_i^* dS - \int_L \tau_Y \langle v_s^* \rangle dS \quad (11.215)$$

となる。一方、この左辺は

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{*P} dV = \int_V \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{*P} dV$$

である。もし運動学的許容場の塑性ひずみ増分が正解の応力場と共軸であれば、塑性ひずみ増分と応力の共軸性（流れ則）の特性を表す式 (11.35) が成立するが、この二つの場は一致していないので、最低限 $\sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{*P} \leq \bar{\sigma} \dot{\epsilon}^{*P}$ でなければならず、したがって

$$\leq \int_V \bar{\sigma} \dot{\epsilon}^{*P} dV$$

を得る。さらにこの応力は領域内の少なくとも部分的には降伏条件を満足しているの、さらに最右辺には

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^{*P} dV \leq \int_V \bar{\sigma} \dot{\epsilon}^{*P} dV \leq \int_V \tau_Y \dot{\epsilon}^{*P} dV$$

の不等号が成立する。この式の最左辺を式 (11.215) の右辺で置き換えれば、最右辺との間に

$$\int_V m X_i v_i^* dV + \int_{S_2} m F_i v_i^* dS - \int_L \tau_Y \langle v_s^* \rangle dS \leq \int_V \tau_Y \dot{\epsilon}^{*P} dV$$

が成り立つことから

$$m \left(\int_V X_i v_i^* dV + \int_{S_2} F_i v_i^* dS \right) \leq \int_V \tau_Y \dot{\epsilon}^{*P} dV + \int_L \tau_Y \langle v_s^* \rangle dS$$

を得る。式 (11.211) で運動学的許容場がする外力仕事は正と定義したので、式 (11.212) の定義を用いると、この式から $m \leq m_k$ が証明できた。あちこち怪しいが・・・

(2) 例 — どのような予測ができるのか

例えば図 11.52 のようなノッチのある板の引張強度を調べよう。 m_s に対しては、図の中央にあるようにノッチ周辺の材料は無視して、A, B, B', C の領域で占める材料で近似する。そしてこの領域に不連続線を含むすべり線 α, β 線を描くことができ、その一つの解が $\psi \approx 21.5$ 度で

$$q = 2\tau_Y (1 + \sin \psi), \quad m_s T = 2\tau_Y (1 - \sin \psi)$$

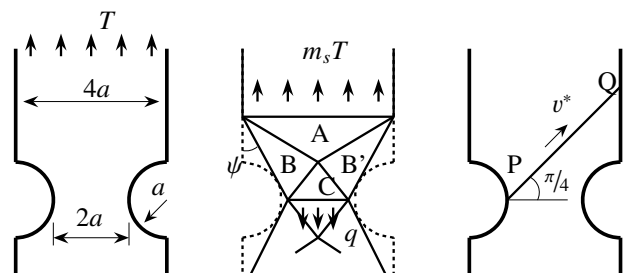


図 11.52 ノッチのある板の引張

と求めることができる。したがって、力のつり合いより

$$4a m_s T = 2 \left(2a - \frac{a}{\cos \psi} \right) q \rightarrow m_s \approx 1.26 \frac{\tau_Y}{T}$$

となる。詳細は文献を参照のこと。

一方 m_k については、右側の図にあるように PQ (α すべり線) に沿って v^* の不連続速度が生じるとした上で、それ以外の部分は剛体のままと考える。そういう速度場は運動学的許容場の一つになっているので、これを公式 (11.212) に代入すると

$$m_k = \frac{\int_P^Q \tau_Y v^* dS}{\int_{S_2} T (v^*/\sqrt{2}) dS} = \frac{3\sqrt{2}a\tau_Y v^*}{2\sqrt{2}aT v^*} = 1.5 \frac{\tau_Y}{T}$$

と算定できる。したがって、上下界を

$$1.26 \frac{\tau_Y}{T} \leq m \leq 1.5 \frac{\tau_Y}{T} \rightarrow 0.63 \sigma_Y \leq mT \leq 0.75 \sigma_Y$$

のように得る。ノッチ間が一様に (そんなことはあり得ないが) $q = \sigma_Y$ になって崩壊すると考えると $mT = 0.5 \sigma_Y$ になるから、それと比較するとこの結果は面白い。その他の例は文献 [126] 等を参照のこと。

(3) 構造力学への応用

ここで誘導された手法を梁や平板に当てはめよう。平面問題の場合は、奥行き z 方向に一様に広がった降伏状態にある「面」を x - y 面内のすべり線と呼んでいた。これに対し構造部材の場合には、ある断面がすべて降伏した場合にそこを「集中的な (奥行きや長さの無くなった) すべり線」としてモデル化するのである。そしてそのような断面は塑性ヒンジになったと称される。梁で説明しよう。梁は、材料が弾・完全塑性体であっても根本原理としての Bernoulli-Euler の仮定は成立しているものとする。したがってひずみは常に線形分布をする。梁には曲げのみが作用していると考えているので、曲げによって生じた応力が作る軸力が零になるように中立軸が定義されていると考えてもいい。そこで演習問題 4-1 の 3 番で扱った逆三角形断面を例にして、断面が降伏していく様を示そう。

曲げが作用すると、図 11.53 の (a) に示したように中立軸がやや上方 ($z_c = h/3$) にあるため、先に降伏するのは断面下端である。この状態の抵抗モーメント M_Y を降伏モーメントと呼ぶ。さらに曲げを作用させると、弾・完全塑性体なので図の (b) に示したように、

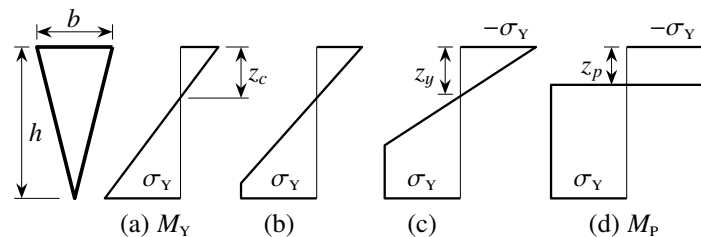


図 11.53 全塑性モーメント

断面下方は σ_Y の部分の領域が拡がると同時に、軸力が零になるように応力零の軸はやや上方に移動していく。さらに曲げが進むと断面上端も降伏して図の (c) のようになる。このとき $z_y = (3 - \sqrt{3}) h/4$ である。さらに極端な状態にまで曲げが進み、断面内には弾性部分がなくなるような極限を考えたのが図の (d) であり、これをこの断面の終局状態と考える。このとき $z_p = (\sqrt{2} - 1) h/\sqrt{2}$ であり、この状態の抵抗モーメント M_p を全塑性モーメントと呼ぶ。これ以上の外力にはもう抵抗ができなくなるので、この断面はヒンジになったのと同じなので折れ曲がるしかなくなると考えるのである。この三角形断面の場合には

$$M_p = Z_p \sigma_Y, \quad Z_p = \frac{(\sqrt{2} - 1) b h^2}{3\sqrt{2}} \tag{11.216a, b}$$

となる。この断面係数 Z_p は塑性断面係数と呼ばれている。幅が b の長方形断面の場合は $Z_p = bh^2/4$ である。種々の断面の塑性断面係数は文献 [157] を参照のこと。

矩形の平板の例： 図 11.54 の厚さ $2h$ で $2a \times 2a$ の平板が 4 辺共単純支持され、等分布荷重 q が載っている場合を例にしよう。最初に静力学的許容場を考える。 m_s 倍の荷重をかけた場合の平板の曲げに関するつり合い式は式 (8.21)、つまり

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + m_s q = 0 \quad (a)$$

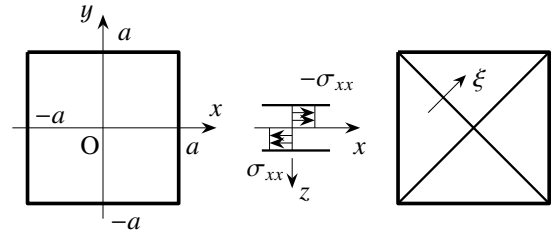


図 11.54 矩形の平板

で与えられる。また降伏条件が曲げモーメントで書かれている方が望ましいので、図の中央にあるように、全塑性モーメントのときの応力分布を想定して、板厚中心面を境に一樣な応力分布を仮定して、式 (8.12) の定義を用いると

$$\sigma_{xx} = \frac{M_{xx}}{h^2}, \quad \sigma_{yy} = \frac{M_{yy}}{h^2}, \quad \sigma_{xy} = \frac{M_{xy}}{h^2} \quad (b)$$

と近似できる。これを平面応力状態の Mises の降伏条件に代入すると

$$\frac{1}{3} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy}) + \sigma_{xy}^2 = \tau_Y^2 \quad \rightarrow \quad M_{xx}^2 + M_{yy}^2 - M_{xx}M_{yy} + 3M_{xy}^2 = 3\tau_Y^2 h^4 \quad (c)$$

のように近似できる。まず式 (a) のつり合い式と境界条件の両方を満足するモーメントの解の一つは

$$M_{xx} = c(a^2 - x^2), \quad M_{yy} = c(a^2 - y^2), \quad M_{xy} = 0, \quad c = -\frac{1}{4} m_s q \quad (d)$$

である。この式 (d) のモーメント分布は板の中央で最大になるので、その中央で降伏条件が満足されているものとすればいいので、式 (c) に代入すると

$$3\tau_Y^2 h^4 = (ca^2)^2 + (cb^2)^2 - (ca^2)(ca^2) = a^4 c^2 \quad \rightarrow \quad c = \pm \frac{\sqrt{3}\tau_Y h^2}{a^2}$$

を得る。この c を前の式 (d) の c と等置することによって安全率 m_s が

$$m_s = \frac{4\sqrt{3}\tau_Y h^2}{qa^2}$$

のように求められる。

一方運動学的許容場としては、たわみと曲率の関係と境界条件とを満足するたわみ増分 w^* を

$$\dot{w}^* = c(a - x) \quad (x > 0, -x < y < x), \quad \dot{w}^* = c(a - y) \quad (y > 0, -y < x < y)$$

と仮定してみよう。つまり図の右端に示したように、四隅から伸びる \times 印の対角線上にのみ塑性ヒンジが発生し、そのまま逆さまの三角屋根状にたわむ⁵⁰と考えるのである。このたわみ増分に対しては、塑性ヒンジの部分以外は除荷された状態になっているので、ひずみは零だと考える。あるいは、上で定義したたわみからは曲率（たわみの 2 階微係数）が零なのでひずみが無いと考えてもいい。したがって、式 (11.212) の m_k の分子の第 1 項は無くなることから

$$m_k = \frac{\int_L (M_{\xi\xi})_p \left\langle \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial \xi} \right\rangle ds}{\int_{-a}^a \int_{-a}^a q \dot{w}^* dx dy} \quad (e)$$

⁵⁰ 川井忠彦先生の「新しい離散化モデル（川井モデル・剛体バネモデル [53]）」はこの図のような崩壊モード等からの発想と開発だったのでないだろうかと、西野文雄先生は推量しておられた。やはり発明や発見の基本には多くの知識の蓄積が必須なんだろうなあ。

と定義し直せばいい。\$L\$ は \$\times\$ 印の塑性ヒンジの線の部分に対応し、その積分は、その線に沿った座標 \$s\$ に対して適用するものとする。また \$\langle \rangle\$ はヒンジ線をまたぐ不連続量だが、仮定したたわみ増分から \$\left\langle \frac{\partial \dot{w}^*}{\partial \xi} \right\rangle = \sqrt{2}c\$ であることと、式 (b) から \$(M_{\xi\xi})_p = h^2 \sigma_Y\$ と置けばいいので

$$(\text{分子}) = 4 \times \left\{ (h^2 \sigma_Y) \sqrt{2}c \times \sqrt{2}a \right\} = 16 \tau_Y c a h^2$$

と算定できる。ここでは式 (11.170) の関係 \$\sigma_Y = 2 \tau_Y\$ を用いた。一方、分母は

$$(\text{分母}) = 8q \int_0^a c(a-x) \int_0^x dy dx = \frac{4qca^3}{3}$$

でいい。この2式を上式 (e) に代入すると

$$m_k = \frac{12 \tau_Y h^2}{qa^2}$$

となる。したがって上下界が

$$\frac{4\sqrt{3}\tau_Y h^2}{qa^2} \leq m \leq \frac{12\tau_Y h^2}{qa^2}$$

という範囲で抑えられた⁵¹ことになる。

不静定梁の例: 次に、集中せん断外力 \$S\$ と集中モーメント \$C\$ が作用し、分布荷重 \$q\$ が作用している梁の場合を考えよう。まず静力学的許容場は

$$\begin{aligned} 1) M_0''(x) + m_s q &= 0, & 2) M_0 &\leq M_p \\ 3) \text{集中荷重が載った点で } n_i M_0' &= m_s S \quad \text{あるいは} \quad n_i M_0 &= m_s C \end{aligned} \quad (11.217)$$

という曲げモーメントの場 \$M_0(x)\$ である。ここにプライムは \$x\$ に関する微分を表し、\$M_p\$ は式 (11.216a) で定義される全塑性モーメントである。\$n_i\$ は式 (4.26) で定義された記号である。一方運動学的許容場は

$$\begin{aligned} 1) \dot{k} &= -\dot{w}'''(x), & 2) \text{幾何学的境界条件が与えられた箇所では } \dot{w}^* &= 0, \quad \text{あるいは} \quad \dot{\theta}^* \equiv -\dot{w}' = 0, \\ 3) \int q \dot{w}^* dx &> 0, & \text{および、集中外力の載荷点で } \dot{\theta}^* C &> 0, \quad \dot{w}^* S > 0 \end{aligned} \quad (11.218)$$

というたわみ増分の場 \$\dot{w}^*\$ である。\$\dot{\theta}^*\$ は運動学的許容な (負の) 増分たわみ角である。このとき式 (11.212) の安全率 \$m_k\$ は

$$m_k = \frac{\sum_{\text{塑性ヒンジすべて}} M_p \langle \dot{\theta}^* \rangle}{\int q \dot{w}^* dx + (\dot{\theta}^* C + \dot{w}^* S) \Big|_{\text{集中外力の載荷点}}} = \frac{U}{V} \quad (11.219)$$

で与えられる。式 (11.212) の分子の第1項が無いのは、前述の板や次の例で示すように、すべり線つまり塑性ヒンジを挿入した箇所以外はすべて除荷されて弾性状態 (正確には無応力状態) になっていると考えるからである。分子の \$U\$ は塑性ヒンジの箇所で運動学的許容場とメカニズムがする仕事増分であり、分母の \$V\$ は運動学的許容場と外力がする仕事増分である。

例として図 11.55 に示した長さ \$\ell\$ の一様な1次不静定梁を考えよう。集中荷重はスパン中央に作用している。曲げモーメント図から明らかのように、荷重を増やしていけば、まず固定端が \$-M_p\$ に達してそこに塑性ヒンジが発生するだろう。しかしこの段階ではまだ静定構造 (単純支持梁に準じた構造) なので、安定で崩壊には至らない。さらに荷重を増やすことによって、次にはスパン中央の曲げモーメントが \$M_p\$ に達し、そこにも塑性ヒンジが発生する。これで不安定になり塑性崩壊に至ると考えるのである。

⁵¹ 板は平面応力状態なので式 (11.170) の関係 \$\sigma_Y = 2 \tau_Y\$ を用いることには抵抗があるかもしれない。そこで3次元の場合の式 (11.28) の関係 \$\sigma_Y = \sqrt{3} \tau_Y\$ の方を用いると上界は \$m_k = 6\sqrt{3}\tau_Y h^2 / qa^2\$ になる。

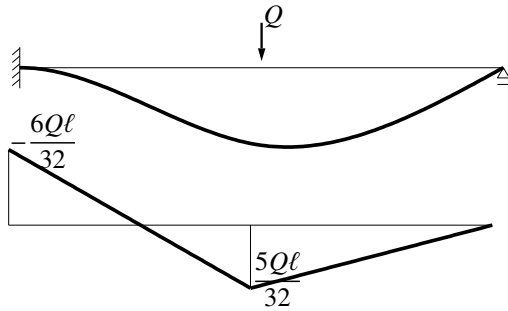


図 11.55 1 次不静定梁の崩壊

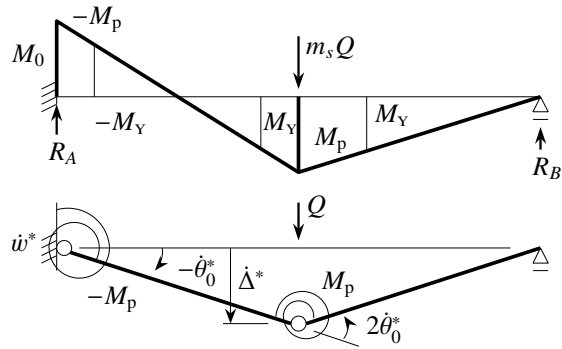


図 11.56 崩壊時の二つの状態

静力学的許容場は、左端とスパン中央の曲げモーメントが M_p に達して力がつり合っている状態である。これは図 11.56 の M_0 のモーメント図のようになり、つり合いをとると

$$R_A + R_B = m_s Q, \quad M_p = \frac{\ell}{2} m_s Q - \ell R_B, \quad \frac{M_p}{\ell/2} = R_B$$

でいい。三番目の式は、モーメント図のスパン中央より右側の傾きが右端のせん断力に等しいというものである。これから

$$R_A = \frac{4M_p}{\ell}, \quad R_B = \frac{2M_p}{\ell}, \quad M_p = \frac{\ell}{6} m_s Q$$

となるので

$$m_s = \frac{6M_p}{\ell Q} \tag{11.220}$$

と求められる。このとき、どのようにたわむかについては問わないのが静力学的許容場である。降伏条件とつり合い式・力の境界条件のみを満たした解の持つ安全率だ。

次に運動学的許容場は、 M_0 の曲げモーメント図に対応したたわみ状態から、図 11.56 の下の図のようなたわみ状態に突然変化する場として考えればいい。つまり、左端とスパン中央は塑性ヒンジになるものの、 M_p の抵抗を局部的に持って（図ではそこに回転バネを挿入して示した）いると考えるのである。ヒンジ部以外はすべて除荷してまっすぐになると考えるのでそこには曲げモーメントは分布しない。運動学的許容場は力のつり合いを問わない一方で、図示したような折れ線状のたわみへの増分場だと考えればいいので、左端とスパン中央に許容場の不連続量がそれぞれ $\langle \dot{\theta}^* \rangle = -\dot{\theta}_0^*$ 、 $\langle \dot{\theta}^* \rangle = 2\dot{\theta}_0^*$ だけ発生する。これからメカニズムの仕事増分は $U = (-M_p)(-\dot{\theta}_0^*) + M_p 2\dot{\theta}_0^* = 3M_p \dot{\theta}_0^*$ であり、外力の仕事増分が $V = Q \dot{\Delta}^*$ となる。一方、幾何学的な関係から $\dot{\theta}_0^* = \frac{\dot{\Delta}^*}{\ell/2}$ が成立するので

$$m_k = \frac{U}{V} = \frac{3M_p \dot{\theta}_0^*}{Q \dot{\Delta}^*} = \frac{6M_p}{\ell Q} \tag{11.221}$$

と求められる。以上の解析から安全率の上下界を

$$m = m_s = m_k = \frac{6M_p}{\ell Q} \tag{11.222}$$

のように得る。すなわち上下界が一致するので「真の」解が求められたと解釈されるが、本当かな？

演習問題 11-6

8. 図 11.53 に示した三角形断面の z_y, z_p および塑性断面係数 Z_p を求めよ。

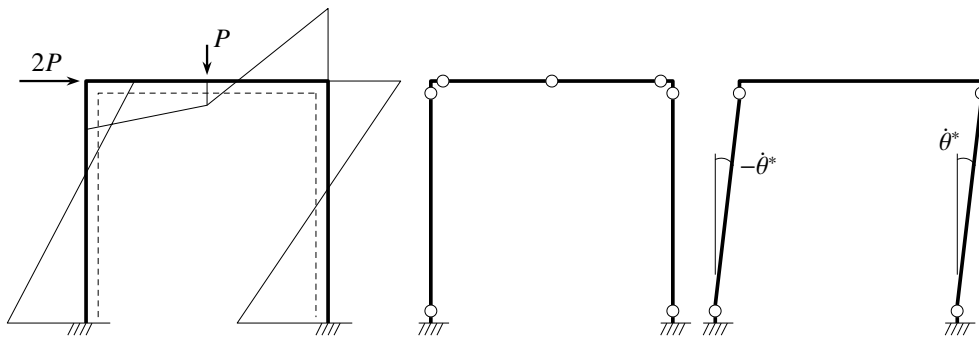


図 11.57 門形ラーメンの崩壊

(4) 簡便法

梁の例のように上下界が一致するのは（我々には）変に思われる。というのも、上界は連続体としてのつり合いが破られる瞬間だからである。しかし梁や柱の場合は、運動学的許容場の中でつり合いと降伏条件を満足する静力学的許容場を探すことが比較的容易なのだ。そこで構造力学分野における極限解析では、運動学的許容場がつり合いと降伏条件を満たす崩壊モード（塑性ヒンジの配置）を複数探し出し、その中で最小の上界を与える解を求める手法を用いることが多い。門形ラーメンで例示したのが図 11.57 である。梁も柱も長さは ℓ で断面も材料も一様とし、図の左端のような境界条件・荷重条件とする。同じ図に示した曲げモーメント分布から、塑性ヒンジが発生する可能性が高いのは中央の図に示した 7 箇所であることがわかる。このラーメンは 3 次の不静定なので塑性ヒンジが 4 箇所に発生した時点で塑性崩壊する。そこで塑性ヒンジの場所を種々の組み合わせで仮定し、そのときに曲げモーメント図が正しく成立するかどうか（つり合いを満足するかどうか、静力学的許容場かどうか）を確認した上で上界定理で m_k を求める。そのようにして求められた m_k のうち、最も小さい数値を与えるメカニズムが求めたい崩壊モードということになる。それが右端の図のモード⁵²であり、このとき $m_k = \frac{2M_p}{P\ell}$ になる。具体的な求め方やその他の例については文献 [105] 等を参照のこと。

11.5.5 終局状態の選択は正しいか？ — 進行性破壊

(1) いくつかの梁の例

崩壊までの現実的な構成則のモデル化の考え方については後述するが、その基礎データとして、前節の梁のように上下界が一致する例をいくつか取り扱っておこう。まず図 11.13 の両端単純支持梁の 3 点曲げに上下界定理を適用する。この場合は図 11.58 のようなメカニズムを考えればいいので、まずつり合いから下界が

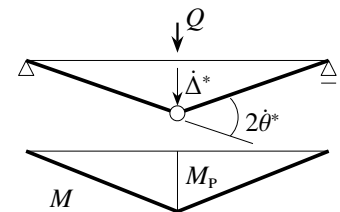


図 11.58 両端単純支持梁の曲げ

$$\frac{M_p}{\ell/2} = \frac{m_s Q}{2} \rightarrow m_s = \frac{4M_p}{\ell Q}$$

と求められる。一方、図示したように同じメカニズムで増分たわみ場を仮定すると、それぞれの仕事は

$$U = 2M_p \dot{\theta}^* = \frac{4M_p \dot{\Delta}^*}{\ell}, \quad V = Q \dot{\Delta}^*, \quad \dot{\Delta}^* = \frac{\ell}{2} \dot{\theta}^*$$

となるので（‘0’ の添え字は省略した）上界が

$$m_k = \frac{U}{V} = \frac{4M_p}{\ell Q} \rightarrow m^{ss} \equiv m_s = m_k = \frac{4M_p}{\ell Q}, \quad Q_{ult} = m^{ss} Q = \frac{4M_p}{\ell} \tag{11.223}$$

⁵² 社会基盤構造としては相応しくない設計であるが⁵。呵呵。

と求められ、この場合も下界に一致する。しかもこの終局荷重 Q_{ult} の値は、近似の全ひずみ理論で履歴を追跡して求めた終局荷重の式 (11.21) の P_p とも一致する。つまり、構造系の場合には運動学的許容場と静力学的許容場の両方を同時に満足するような場を求めることが比較的容易（ただし連続体としての正解ではない）なので、このように上下界が一致するが、読者はそれが真実だと信じていることができるだろうか。あるいはもっと現実的に、ある断面が降伏したあと全塑性モーメントに達するまで、その断面や材料には一切局所的な変形や損傷が生じないということには疑問を感じないだろうか。それについてはあとでコメントしよう。

では荷重が等分布の場合はどうだろう。図 11.59 のように対称系である上に、曲げモーメントが放物線分布であることに注意すればいいだけだから、力のつり合いからは

$$-R = -\frac{m_s q \ell}{2} = -\frac{4M_p}{\ell} \quad \rightarrow \quad m_s = \frac{8M_p}{q \ell^2}$$

を得る。また運動学的許容場からは

$$U = 2M_p \dot{\theta}^* = \frac{4M_p \dot{\Delta}^*}{\ell}, \quad V = q \frac{\ell}{2} \dot{\Delta}^*, \quad \dot{\Delta}^* = \frac{\ell}{2} \dot{\theta}^*$$

と求められるので

$$m_k = \frac{U}{V} = \frac{8M_p}{q \ell^2} \quad \rightarrow \quad m_q^{ss} \equiv m_s = m_k = \frac{8M_p}{q \ell^2} \quad (11.224)$$

のようになり、この場合も上下界が一致する。

最後に文献 [108] にある両端固定梁に等分布荷重が作用した場合を対象としよう。この場合も図 11.60 のように考えればいい。まず、対称系で曲げモーメントが放物線分布なので、つり合いから

$$-R = -\frac{m_s q \ell}{2} = -\frac{8M_p}{\ell} \quad \rightarrow \quad m_s = \frac{16M_p}{q \ell^2}$$

を得る。また運動学的許容場からは

$$U = 4M_p \dot{\theta}^* = \frac{8M_p \dot{\Delta}^*}{\ell}, \quad V = q \frac{\ell}{2} \dot{\Delta}^*, \quad \dot{\Delta}^* = \frac{\ell}{2} \dot{\theta}^*$$

となることから

$$m_k = \frac{U}{V} = \frac{16M_p}{q \ell^2} \quad \rightarrow \quad m = m_s = m_k = \frac{16M_p}{q \ell^2} \quad (11.225)$$

のように求められ、また上下界が一致する。

(2) 脆性材料でも全塑性モーメント M_p まで抵抗できるのか?

梁で上下界が一致することはともかく、骨組の場合であっても複数のメカニズムを考えて上界の最小値を求めることによって、複雑な数値計算を経ずに全塑性モーメント M_p で断面設計ができて寸法の第一候補を決定できるのは便利である。ただ、降伏モーメント M_Y を越えた载荷レベルでも図 11.53 のような理想的な応力分布を維持し続けることができるかどうかは疑問だろう。たとえ静定の鋼構造の場合でも、断面が変形したり局部座屈のような現象が起きるかもしれない。さらに、特にコンクリートのような脆性材料を用いた構造系では、図 11.55 や図 11.60 のような不静定

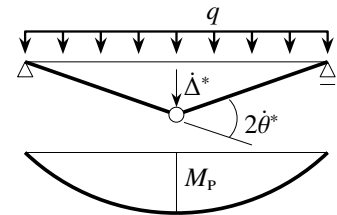


図 11.59 分布荷重の場合

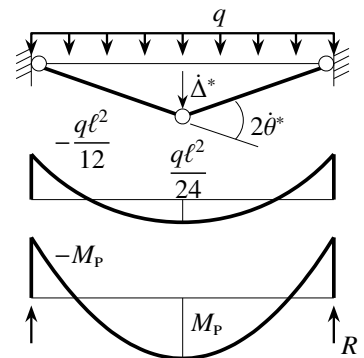


図 11.60 両端固定梁の場合



写真 11.2 脆性材料の破壊形態

構造系で、ある1箇所が先行して全塑性モーメント状態に至ったあと、他の断面が全塑性モーメント状態に至るまでの間、その先行した断面にさらなる損傷が発生しないでいられるかどうかについては、疑問を持つ読者の方が多いと思うのだが、どうだろう。写真 11.2 は 2011 年 3 月 11 日 14 時 46 分のマグニチュード 9 最大震度 7 という東北地方太平洋沖地震で受けた被害の一つである。発生箇所は、インセットに示した写真 S.1 の建物⁵³の 2 階の屋上つまり 3 階床面の柱基部に付した赤丸の位置である。この写真は被災後 3 日目の状況なので余震による損傷も加わってはいるが、直後とあまり違いは無く、さらに実は 4 隅共にこれと同等以上の被害を受けた。脆性材料のコンクリートがほとんど抜け落ちて鉄筋のみになっている。こういう断面欠損の『事実』を目にすると、全断面が降伏するまで断面が変形せず、そのあともその全塑性モーメントを「維持」して抵抗しているという前提がとても『真実』だとは思えないのではないだろうか。

例えば図 11.55 の 1 次不静定梁が鋼でできている場合を例にして定性的な考察をしよう。その終局荷重は式 (11.222) のように求めることができ、その m の値は

$$m_p = \frac{6M_p}{\ell Q} \quad (11.226)$$

となっている。そこで左端が降伏したあとの状況を検討してみよう。簡単のために、この節では矩形断面梁を対象として

$$M_p = \frac{3}{2} M_Y \quad (11.227)$$

という関係があるものとする。まず左端が初期降伏するのは曲げモーメント図から

$$\frac{6m_Y Q \ell}{32} = M_Y \rightarrow m_Y = \frac{32M_p}{9\ell Q}$$

のときだ。そのあと左端が全塑性モーメントに達したあと、中央が初期降伏するのは曲げモーメント図から

$$M_Y = \frac{\ell m_0 Q}{4} - \frac{1}{2} M_p \rightarrow m_0 = \frac{14M_p}{3\ell Q}$$

のときである。式 (11.226) と比較しても明らかなように $m_Y < m_0 < m_p$ なので、図 11.61 の右上がりの曲線のように終局状態まで荷重は単調に増加することになる。しかしそれは、左端に亀裂が生じないまま局部座屈等もせずに全断面が健全なまま全塑性モーメントを維持できることを前提としている。

ここで写真 11.2 のような状況を想像すると、この梁の左端の材料は降伏モーメントに達したあとは次第に大きな損傷を受け、断面欠損が生じる可能性は低くはないだろう。それを極端な状況としてモデル化すると、終局状態までには左端の抵抗モーメントは零になってしまっているかもしれない。つまりその終局状態は両端単純支持梁の終局状態と一致することになる。したがって、終局状態の m の値は式 (11.223) の m^{ss} になると考えてもいいかもしれない。そう考えると図 11.61 に A で示した履歴のように、左端が M_p には達したものの、そこが次第に損傷を受けて抵抗も小さくなり、結局 m_p には達することなく m^{ss} の荷重レベルにまで落ちてしまうことも予想される。この m^{ss} のレベル⁵⁴を残留強度と呼ぶことにする。

ではこの例で、 m_p, m_0, m_Y, m^{ss} のどのレベルで設計を行うべきだろうか。

- 現行の鋼の許容応力設計法は m_Y を規準値と考えていることに相当する。
- 鋼のように靱性の高い材料の場合、高品質鋼の比較的厚板を用いておけば、果たして m_p のレベルに近づいてもまだ抵抗できることを期待できる。そういう梁の断面をコンパクト断面と呼び [121]、それに対し

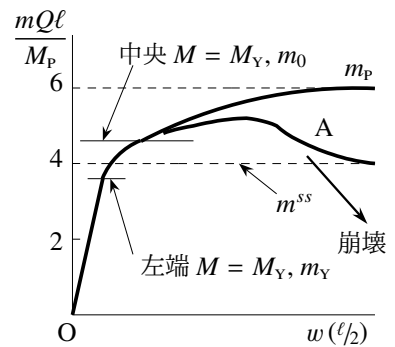


図 11.61 低靱性材料：1 次不静定梁

⁵³ 東北大学工学部の三つの棟（俗称を流用して電気系・材料系・建設系）が損傷して改築された。この地震災害で、津波以外の地震動そのものによる被害で最も大きなものと考えられている。改築後は基礎に免震装置が設置された。

⁵⁴ もちろん、この中央断面でも損傷が進んで m^{ss} の状態が保持できるとは限らない。図 11.61 の「崩壊」方向への履歴を懸念。

て図 11.61 の A の履歴をたどるような断面をノンコンパクト断面と分類していただろう。前者の場合、現行の m_Y に対して 1.7 の安全率を確保するとすると、終局荷重レベルの m_p に対して 2.9 の安全率を保証したことになる。これは俗に言われる「土木構造の安全率は 3」というものに匹敵する。

- しかし多分、 m_p では危険だと考える読者の方が多いかもしれない。
- ただ残留強度の m^{ss} が m_Y より大きいので、あまり問題は感じないかもしれない。
- では安全性確保のために m^{ss} で設計するのが好ましいだろうか。ひょっとしたら、それではコストがかかり過ぎて経済性を損なう可能性もある。というのも、残留強度に至る前にピーク強度が存在するからである。

だからといって、やはり残留強度で設計すべきだと断言できるだろうか。著者にとってはとても難しい問題だ。いわゆる「想定」という低級な議論をしないためには、この章で示した 3 次元の弾塑性モデル等を用いて、第 12 章で説明する有限変形理論の枠組で、大規模な数値解析によって終局挙動を確認しておくことが最も重要⁵⁵ だろう。ただし、その場合も材料モデルという観点からはかなりの困難が伴うが、それについては後述する。

念のために図 11.60 の両端固定梁に等分布荷重が載った場合も検討しておこう。終局状態の m は式 (11.225) から

$$m_p = \frac{16M_p}{q\ell^2}$$

というレベルである。矩形断面の式 (11.227) を用いると、両端で M_Y になる荷重レベルは

$$\frac{m_Y q \ell^2}{12} = M_Y \quad \rightarrow \quad m_Y = \frac{8M_p}{q\ell^2}$$

である。この場合には、両端単純支持梁の式 (11.224) の m_q^{ss} に一致している。ただ m_p が m_Y の 2 倍もあるため、 m_Y に対して 1.7 の安全率を設定した場合、それは m_p に対して 3.4 の安全率を確保したことになる。さらに両端が全塑性モーメントに達したあとに中央断面が降伏モーメントに達するのは、曲げモーメントが放物線分布になることに注意すれば

$$m_0 = \frac{40M_p}{3q\ell^2}$$

のときである。断面欠損等が一切生じない場合は図 11.62 の右上がりの曲線のような挙動をする。しかしこの場合も、もし材料の脆性等によって断面欠損等の損傷が生じる場合には、同じ図の A の履歴のように m_p には達しないかもしれない。あるいは B の履歴のように、左端が M_p に達しない上に中央断面も M_Y (m_0) に達することなく崩壊する可能性もある。ただ現行の鋼構造の設計規準のように、 m_Y を用いて安全確保することは適切であると考えてもよさそうだ。鋼はある程度の靱性を保有し続けられるので、降伏後のピーク荷重のような存在を期待できるから、経済性はともかく安全性については m_Y で設計する現行規準⁵⁶ が適切だと断定できそうだ。しかしコンクリート等のような脆性材料を含む構造の場合には、やはり非線形解析によるシミュレーションや多くの実験的裏付けが必要になるのだろう。

演習問題 11-7

9. 図 11.61, 11.62 の結果を確認せよ。

⁵⁵ シミュレーションが最も相応しいアプローチだと言うつもりは全く無い。可能なら実験もたくさんするべきである。

⁵⁶ 2017 年当時。

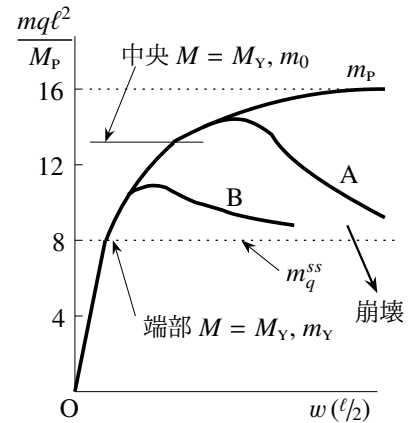


図 11.62 低靱性材料：両端固定

(3) じゃ、そんな非線形解析が可能ですか？

非線形の数値解析はとても重要だが、その結果はあくまでも用いたモデルに基づく数値的な確認であって、事実を 100% 説明できるとは限らないことには十分注意する必要がある。つまり図 11.62 の A や B の履歴が実験結果だったとき、それを果たして数値解析で精度よく予測できるだろうかという問題があるのだ。例えば写真 11.2 の柱基部のように鉄筋が現れるまでの挙動に対し、コンクリート材料の部分にどのような構成モデルを数理的に構築できるか想像して欲しい。例えば、その履歴において材料が次第に劣化していく進行性破壊を適切に予測できないといけない。そして変形が大きくなると、ある段階で部分的には連続体ではなくなるのだが、実はこの写真のように構造全体はまだ崩壊せず、被災者の避難等が可能だけの強度上の余裕を保持している⁵⁷かもしれない。あるいはそういった余裕（冗長性）を持つように設計されなければならない。ということは、その劣化や破壊によって材料中に発生して成長する微視的な亀裂や空隙等の発生規準を降伏条件のように定義し、同時にその損傷の成長の発展則を流れ則のように定義しなければならないことになるのだ。コンクリートや砂や岩のように極めて複雑な微視構造を持つ材料に対してそういうモデルを構築することは、人間にはほぼ不可能だと思いませんか。そういう状況で社会基盤構造を設計・建設して社会生活の安全を確保しなければならないことを、我々土木関係者は十分に肝に銘じておくべきだろう。

さて、数多くの実験に基づいて損傷が次第に変化するような材料挙動を計測し、その curve-fitting によって構築した巨視的な構成則は、その実験条件の範囲内でしか適用できない可能性があるのは明らかだ。だから、まず損傷や劣化のモデルには可能な限り物理的・化学的な微視的なモデルを適切に仮定した上で、巨視的な構成則を数理的に構築する必要がある。このような空隙や亀裂等の欠陥の発生と成長については、現象論的ではあるが損傷理論というものが用いられることもあるので、それを少しだけ紹介しておこう。「現象論的」と記したのは図 11.63 に模式的に示したように、離散的に存在する空隙や亀裂を実際の欠陥として取り扱うのではなく、それを考慮した平均的な連続体として近似するから⁵⁸である。

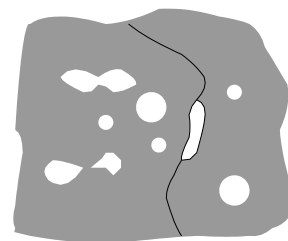


図 11.63 空隙・亀裂・界面剥離

例えば空隙が体積比率で f だけ存在すると、それに対して実際の材料（母材と呼ぶ）の体積比率は $(1 - f)$ になる。この母材の Young 率が E_M だとすると、この空隙込みの平均的な Young 率 \bar{E} は、最も簡単な Voigt モデル（単なる体積平均：図 I.2）では、空隙の Young 率が零なので

$$\bar{E} = f [(空隙の Young 率)] + (1 - f) E_M = (1 - f) E_M \quad (11.228)$$

になることは理解できると思う。そこでその原因はともかく「損傷」という巨視的なパラメータを D とし、それが材料中で何らかのモデルで発生して変化するとしたとき、その材料の巨視的な Young 率を

$$\bar{E} = (1 - D) E_M \quad (11.229)$$

として取り扱うことは、そこそ物理的に意味のある数理モデルだと感じられる。ただし、 D の発生規準を降伏条件のようにして規定し、その発展則（変化の法則）を流れ則のように規定する必要がある。これが損傷を考慮した最も簡単な理論であろう。例えば界面亀裂や空隙は転位（塑性変形）の蓄積の結果だろうから、損傷の発展則は塑性の流れ則のような履歴依存の増分式になるかもしれないし、その損傷の driving force も物理的

⁵⁷ だから全員避難できた。第 1 著者も 6 階から生還したのだが、実はこの建物は 1978 年の宮城県沖地震で耐震壁が大きな損傷を受けていた。あるとき某先生から当時の阿部博之総長への進言があって急遽予算措置が行われ、その改修が実施されたために 2011 年には冗長性を持っていたのだが、今度は逆に柱が破壊されたとも考えられる。改修技術もかなり難しいのだ。

⁵⁸ 著者以外がどういう定義で用いているのかはあまり明確ではないが、この文書ではそういう定義をしたというだけである。

考察を通して適切に導入する必要がある。しかし複合材料の平均化についての多くの研究結果からは、このような弾性係数あるいは接線剛性の Voigt 平均の精度が必ずしもいいとは限らないことはよく知られている。

そこで付録 I を眺めながら概念的な比較をすると、例えば体積比率 f の非均質体の Young 率を E_1 としたとき、少なくとも f が小さい（非均質体の比率が少ない）場合の平均 Young 率は上述の Voigt 平均ではなく

$$\bar{E} = \left\{ \frac{f}{E_1} + \frac{1-f}{E_M} \right\}^{-1} \quad (11.230)$$

で定義される Reuss モデルの方が実測値に近いことがある。またそれ以外の種々の平均化手法との比較を総合すると、非均質体の比率が大きいときには Voigt 平均の方が近似度がいいこともある。また剛性の近代的な平均化手法では、剛性ではなく応力 [あるいは／および] ひずみの Voigt 平均

$$\bar{\sigma} = f \sigma_1 + (1-f) \sigma_M, \quad \bar{\epsilon} = f \epsilon_1 + (1-f) \epsilon_M \quad (11.231a, b)$$

や Reuss 平均が用いられ、実測値を比較的良好に近似できる場合があることもわかっている。つまり材料中のある一部に損傷が生じたことによってその部分の強度（だって損傷したってことは非可逆的変形が生じたんだから剛性が下がると考えるのはちょっと変だろう）が下がり、間接的に見かけの平均剛性が下がるというモデルに相当する。このように考えると、損傷を用いて剛性を弱めるモデルがいいのか、あるいは損傷によって強度（応力に対応する）が小さくなるモデルが適切か、あるいはその両方を同時に考慮しなければならないのかといった選択を検討する必要があるようだ。

そこで母材の初期降伏引張応力を σ_Y とすると、空隙には降伏応力は存在しないから式 (11.228) と同じように考えて、空隙を考慮した巨視的な Mises の降伏関数 ϕ を

$$\phi \equiv \bar{\sigma} - (1-f) \sigma_Y \quad \text{あるいは} \quad \phi \equiv \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2 - (1-f)^2 \quad (11.232a, b)$$

とすれば平均強度の単純なモデルの一つになる。ここに $\bar{\sigma}$ は式 (11.29) で定義した相当応力であり、 f は空隙の体積比率である。例えば有限要素法で数値解析をする場合、このようにモデル化すれば個々の（変形に伴って生じたり無くなったりする）空隙を要素分割せずに連続体として捉えることができ、そのようにして算定される応力を式 (11.232) に代入すれば空隙を考慮した降伏を考慮することができる。もちろん応力集中等が考慮されているとは限らないので、これに微視的な考察を組み込む工夫等 [51] も行われている。ただこの最も単純な降伏関数のモデルには、空隙がどういう力 (driving force) で発生するかという物理が組み込まれていないが、それについては例えば **Gurson モデル** [29, 99] というのがある。そのモデルの降伏関数は

$$\phi \equiv \left(\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_Y} \right)^2 + 2 q_1 f \cosh \left(\frac{3 q_2 \sigma_{AVE}}{2 \sigma_Y} \right) - (1 + q_3 f^2) \quad (11.233)$$

と表される。ここに σ_{AVE} は式 (3.42) で定義した平均応力で負の静水圧である。平均応力が含まれているのは、空隙がそういった等方な引張圧力 σ_{AVE} を driving force として発生したり成長したりするという物理的観察を根拠としているからだ。空隙成長による損傷はせん断応力やせん断変形による亀裂や転位移動等による非可逆現象ではないので、相当応力や相当塑性ひずみを用いてモデル化するのは物理的ではないと考えたのだ。 $q_1 \sim q_3$ は Tvergaard が定義した材料パラメータで、ある設定した空隙配置の微視的な領域を有限要素解析した結果を用いて Gurson モデルを改訂するために導入されたもので、Gurson モデルでは三つとも 1 である。この式 (11.233) で $q_i = 1$ ($i = 1, 2, 3$) と置いて $\sigma_{AVE} = 0$ としたものが式 (11.232) に一致する。つまり式 (11.232) に driving force 等を導入して一般化したのが Gurson モデルなのだ。実験による curve-fitting に比べると物理的に考察されていることが明らかだ。また有限要素法を併用して導入した q_1 等のパラメータで、微視的な挙動をさらに考慮している点も、単純な実験結果による経験的なモデル化よりも優れている。あとは、空隙が発生する規準と

空隙が成長・合体する発展則を物理的考察でモデル化できれば、構造中に変形と共に拡がっていく損傷を考慮しながら弾塑性数値解析が可能になる。ただそれでもなお、局所的な応力集中や亀裂先端の特異性はあまり考慮できていない。また製造過程で界面に生じる可能性のある析出物等の微視的な初期不整等も考慮されていない。

鋼の場合にはこういった損傷は考慮する必要が無いと思うかもしれないが、微視的に弾塑性挙動を観察すると、結晶粒の大きさに依存した亀裂発生等で微視的な損傷が生じる可能性もある。複合材料のように人為的な微視構造を導入した材料でもその異種材料界面等に空隙や亀裂が発生する。付録Eに書いた破壊力学によれば、亀裂先端の応力の特異性は亀裂長さの平方根に深く関係していることがわかっているから、こういった亀裂等を含む材料モデルには、単結晶粒や砂粒子・繊維の寸法のような長さの平方根⁵⁹が含まれることも数理的考察からは容易に予想できる。そのような微視的な長さを特性長さと呼んで構成則に導入することもある。いずれにしても、常に事実の裏に潜む物理を洞察することが最も重要な姿勢である。ただし

- モデル化において事実を考慮した物理学等の数的手法を用いた結果、たとえその数値解析結果が実験結果を $\pm 30\%$ 程度の誤差でしか予測できなくても、任意の境界条件下で使えるなら遜色の無いモデルだと自慢していい。いわゆるフィン・チューニング [100] を適用したようなモデルよりはるかに優れている。
- 実験結果に合わせるために、数少ない要素試験（材料試験）法だけでは同定できないような数多くの材料パラメータを導入しても力学的には意味が無い。要素試験を境界値問題として数値解析してその結果が試験結果と整合するように材料パラメータを同定せざるを得ないのも仕方が無いだろうが、汎用性の観点からは力学的にも問題があると感じる。
- 次元を持った定数を多数導入したモデルはあくまでも、何らかの傾向を定量化しただけの経験式でしかなく、力学モデルとしてはほとんど取るに足らない。ある限定された条件下のみで近似的に使える蓄積された事実を見かけ上の数式にして設計を便利にただけなので、適用範囲等使い方には十分注意しなければならない。
- 弾性と塑性は同時に生じるがそのメカニズムは異なる。ただしその複数のメカニズムが共存できているところが、古典的なモデル（および第 11.4 節や第 12.5.4 節で紹介しているモデル）が優れている点なのだ。複数の複雑な特性を複数の異なるメカニズムでモデル化したとき、それがどのように一つの材料の中で共存して同時に生じているのかを示すことができないとしたら、そのモデルはあまり意味が無いだろう。

と著者は感じている。若手の読者には面白い理論やモデルを柔らかい脳の中でどんどん構築していただき、工学の発展に貢献して欲しい。

⁵⁹ 力学理論中に長さの平方根が存在すると一般的には理論を無次元表示できなくなる。コンクリート構造や地盤や岩盤等は、寸法比率が同じであっても 10 cm 程度の対象と 1 m 程度の対象とはお互いに異なる挙動を示すことがある。これを寸法効果と呼ぶが、そういった効果を表現するためには特性長さが必要である。特性長さを含む理論も一般には無次元化できない。悩ましいのは、導入した特性長さに敏感な結果を生じるモデルは物理的には適切ではないとされていることだ。そりゃそうだろうねえ。鈍感なパラメータとモデルを物理的考察で探ることが必須である。



写真 11.3 山王川橋梁 福島県 会津鉄道 1941(?) 年竣工 (和知聡氏撮影)



‘Theodore:’ 第 1 著者が留学してすぐに見つけた下宿で first name を名乗ったとき、発音が難しいので ‘Ted’ にしようと大家さんから提案⁶⁰され、そのあともずっと使った。その家の台所には東京工業大学の森勉先生の名刺が貼ってあったが、森先生はもちろん ‘Ben’ だ。これは公式にもそうらしい。



写真 11.4 黒之瀬戸大橋 — 八代海からの潮流で渦が現れることがある

⁶⁰ あの熊の映画よりずーっと昔の話である。

第 12 章

有限変形理論を直感で噛み砕く

12.1 有限変形って？

「有限変形」は英語の ‘finite deformation’ の訳であるが、これは ‘infinitesimal deformation’ つまり「微小変形」に対峙させたものであり、いわゆる「大変形」に相当すると習った。「限りが有る」という意味ではない。多分、「大変形」という日本語にすると ‘large deformation’ と捉えられてしまい、材料の非線形性も必ず伴うような印象を与えてしまうので、それと区別したとも推測される。この章は、材料の抵抗則が線形か非線形かによらず、変位や変形（ひずみ）の大きさに制限を設けない場合¹の定式化、つまり幾何学的な非線形性を保持した定式化について解説する。ところで、弾性座屈のように変位は大きくても変形（ひずみ）が大きいとは限らない場合もあるし、逆に、変形が大きい（非線形になる）場合に必ずしも変位が大きくなるとは限らない。このようなことから判断して、変位と変形は厳密に区別すべきであることには留意して欲しい。ただし、この章のタイトルを「有限変形」としているが、変位の大きさにも制限を設けないものとする。さて、この章のほとんどの記述では数学的表現の正確さを保持しようとしているため、初学者は特に、京谷孝史先生が述べている [129] ように数学と物理学の区別あるいは対応を常に考えながら勉強する必要がある。著者もこれは苦手なので、苦悩を伴う表現をあちこちに用いざるを得なくなっている。しかし読者は、出てくる式の記号や表現に惑わされず、またその美しさの方に気を引かれることなく、常に物理的な意味を頭の中に思い描き続けることが重要だ。著者の体験からの助言だが、ここを読み進む前に、例えば付録 C の特に Bernoulli-Euler 梁理論の定式化の方を勉強すると、テンソル量の扱いについてちょっとだけ「直感」が冴えるかもしれない。なお記号は、できるだけ標準的なものを用いたが、どうしても変更したいものについては通常とはかなり異なるものを用いている。さらに、二つの異なる階数を持つ異なるテンソル量に対して同じ記号を用いていることがあるが、文脈（式脈）を読み取って区別して欲しい。

ここでは、文献 [25] とそれを用いた西野文雄先生の「応用弾性学」の講義ノート（1975 年頃）が基本にあって、それに加えて Northwestern 大学の Nemat-Nasser 先生の ‘Continuum Mechanics’ の講義ノート（1980 年頃）と文献 [72] を参考にした。実は、このお二人の講義内容は、現在我が国で教えられている有限変形理論とは若干異なる角度からそれを眺めているようなものになっていると感じている。どちらかという物理的な観点²から説明をしていただいた印象が強い。そのため、この章の内容は、既に有限変形理論を習得している読者には違和感を覚えるものになっている可能性が高い。なお簡単のために、極力「テンソル」という言葉を使っていない。また、直角座標系における取り扱いに限定するので共変成分と反変成分の区別をしていない。というよ

¹ ケーブル等は微小ひずみで弾性のまま巨視的には大きく変位・変形する。

² 研究発表会の討論や講演会で使える便利な質問に ‘What is the physical meaning?’ というのがある。特に中身がさっぱりわからないときに使えるが、中身がわかっていて暗に批判するときにも使える。呵呵。

りも、適当に使っているのので、特に大文字添え字の成分を持つテンソル量についてはその物理的な意味について十分な注意が必要である。正確なテンソル演算については付録 D を参照して欲しい。さらに、時刻（配置）を関数の引数 (argument) に明記する必要が無い箇所ではそれを省略した。

記号: テンソルの積では、外積以外で左辺・右辺共に同じ階数同士の演算では簡単のために

$$A = B \cdot C = BC \quad (A_{ij} = B_{ik} C_{kj}), \quad D = S : Q = SQ \quad (D_{ijkl} = S_{ijmn} Q_{mnkl})$$

のように積の記号は省略し、そうでない場合には以下のような積の記号を用いる。

$$\begin{aligned} s &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \quad (s = u_j v_j), & \mathbf{u} &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{B} \quad (u_i = A_{ij} v_j = w_j B_{ji}), & \mathbf{w} &= \mathbf{u} \times \mathbf{v} \quad (w_i = e_{ijk} u_j v_k), \\ t &= \mathbf{A} : \mathbf{B} \quad (t = A_{ij} B_{ij}), & \mathbf{A} &= \mathbf{D} : \mathbf{B} \quad (A_{ij} = D_{ijkl} B_{kl}), \\ \mathbf{A} &= \mathbf{v} \otimes \mathbf{w} \quad (A_{ij} = v_i w_j), & \mathbf{Q} &= \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \quad (Q_{ijkl} = A_{ij} B_{kl}) \end{aligned}$$

また、行列として扱う場合には括弧を用いる。

$$(\mathbf{A}) = (\mathbf{B})(\mathbf{C}) \quad (\mathbf{A} = \mathbf{BC}, A_{ij} = B_{ik} C_{kj})$$

12.2 ひずみとひずみ速度

12.2.1 変形とひずみ

(1) 運動と変形勾配

第 11 章の塑性論で用いたのと同様に時刻のような単調増加する履歴パラメータ t を定義する。実際の運動や粘性等を対象とする場合を除けば、 t を時刻と捉える必要は無い。その $t = 0$ を初期状態、その状態における物体の状況を初期配置と呼ぶ³ことにし、その物体が移動し変形して観察している状態の $t = t$ に至った状況を現配置と呼ぶ。物体の状況とは関係無く、空間に固定した直角座標を定義

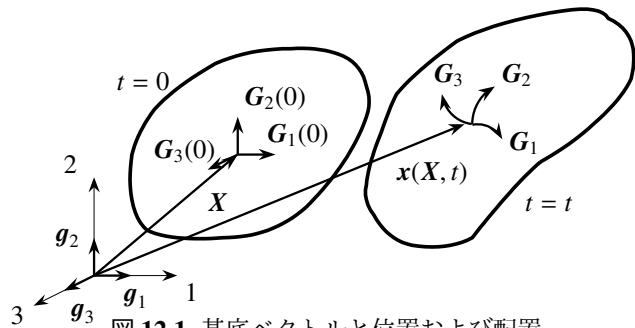


図 12.1 基底ベクトルと位置および配置

し、その単位の基底ベクトルを \mathbf{g}_i ($i = 1, 2, 3$) とする。その基底ベクトルを初期配置において物体に貼り付けた座標を埋め込み座標と呼ぶことにし、その基底を埋め込み基底ベクトルと呼ぶが、そのベクトルは物体に糊付けされているため、その変形に追従して変化する。現配置におけるその基底ベクトルを $\mathbf{G}_I(t)$ ($I = 1, 2, 3$) とする。 $\mathbf{G}_I(0) = \mathbf{g}_i$ ($I = i$) である。もちろん、図 12.1 でも誇張したように、埋め込み座標は一般には曲線座標であり直交系でもなく、現配置の基底ベクトル \mathbf{G}_I は単位直交基底にならないことには十分注意する必要がある。したがって埋め込み基底で定義されるテンソルの場合は、その成分の扱いにおいて共変・反変成分の区別を正確に実施することや、テンソル成分そのものは必ずしも物理的な量になっているとは限らない⁴ことにも注意をして欲しい。この \mathbf{G}_I の定義が曖昧なまま以下に読み進むことはやめておいた方がいい。怪我をします。極座標系

³ 本当はこの配置を基準配置と呼ぶことが多いのかもしれないが、この文書で最も重要な updated Lagrange 的アプローチ (p.625) を説明するために、常に初期配置と称することにした。多くの読者はこれを基準配置と呼ぶ方がいいかもしれない。またその 'updated' に対応させて一般には、初期配置を基準配置とした普通の Lagrange 的アプローチを 'total Lagrange' 的と称するが、この文書では簡単のために 'total' を付けていない。Euler 的アプローチは現配置の観測点で諸量を定義して記述する手法なので、便宜的な表現をすると、現配置を基準配置としたようなものに相当する。

⁴ 例えば、ひずみ尺度のテンソル成分が無次元ではなかったり、応力のテンソル成分が非対称でかつ成分同士が直交しなかったりする。

の例を付録Dに示しておいた。一般的な定義とは異なりこの文書では、あるテンソル量が定義される（測定され「始めた」）配置を**基準配置**と呼ぶことにする。

初期配置 $t = 0$ における物体中の個々の点の位置 $\mathbf{X} = X_I \mathbf{g}_I$ でその点（物質点）に「名前」を付けることにする。ここで大文字の下添え字は、初期配置における点の関数、つまり \mathbf{X} の関数として取り扱う場合に必要に応じて用いることにするが、その定義は $\mathbf{g}_I = \mathbf{g}_i$, $\mathbf{X}_I = \mathbf{X}_i$ ($I = i$) である。さてその点が現配置 $t = t$ において位置 $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t) = x_i(\mathbf{X}, t) \mathbf{g}_i$ にあるものとする。初期配置で名前を付けた点の現在の位置なので \mathbf{X} と t の関数とみなしてある。以下しばらく時刻（履歴）変数 t を省略するが、最後まで勉強して復習するときには適宜自分で補ってみること。逆に言えば、現配置に位置 \mathbf{x} にある点の初期配置における位置は、 $\mathbf{X}(\mathbf{x})$ のように現配置における位置の関数とみなすこともできる。少々わかり難いとは思いますが、単なる逆関係である。また、この現配置の「位置ベクトル」を空間固定座標と同じ記号の \mathbf{x} で表すことには、最初はとまどいがあると思うが慣れて欲しい。頭の中で「現時点の位置ベクトル」だと思っている内に慣れると思う。さて、いま着目した点の変位 \mathbf{u} はこの二つの位置の差で定義できるので

$$\mathbf{u} = U_I(\mathbf{X}) \mathbf{g}_I = u_i(\mathbf{x}) \mathbf{g}_i \equiv \mathbf{x} - \mathbf{X}, \quad U_I(\mathbf{X}) \equiv x_i(\mathbf{X}) - X_I, \quad u_i(\mathbf{x}) \equiv x_i - X_I(\mathbf{x}), \quad (I = i) \quad (12.1a, b, c)$$

と書く⁵ことができる。最後の表現は、後述の式(12.15)のような逆関係が唯一に存在する⁶ことから用いることができる。この変位で物体の**運動**⁷を表現することができる。

(2) 変形とひずみの定義

では変形はどのように定義しようか。例えば任意の微分線要素の長さや角度の変化等でそれは定義できそう。そこでまず各配置における微分線要素ベクトルを成分で表すと

$$d\mathbf{X} = dX_I \mathbf{g}_I, \quad d\mathbf{x} = dx_i \mathbf{g}_i$$

となる。この第2式に偏微分の連鎖律を用いると

$$d\mathbf{x} = F_{iJ}(\mathbf{X}) dX_J \mathbf{g}_i, \quad F_{iJ}(\mathbf{X}) \equiv \frac{\partial x_i(\mathbf{X})}{\partial X_J} = x_{i,J} \quad (12.2a, b)$$

という量を定義できる。ここに \mathbf{F} は、その物理的な意味はともかく、**変形勾配**と呼ばれる。また添え字のコンマはそれに続く添え字に対応する変数による（共変）微分を表す。式(12.1)の変位をこれに代入すると、この変形勾配は

$$F_{iJ} = (X_I + U_I)_{,J} = \delta_{IJ} + U_{I,J}, \quad (I = i) \quad (12.3)$$

と書くこともできる。ここに δ_{IJ} は Kronecker のデルタである。ちなみに、上述の埋め込み座標の現配置の基底ベクトル \mathbf{G}_I は初期配置の $d\mathbf{X}$ に貼り付けたベクトルだから、空間固定の基底ベクトルと

$$d\mathbf{x} = dx_j \mathbf{g}_j = x_{jI} dX_I \mathbf{g}_j = F_{jI} \mathbf{g}_j dX_I = \mathbf{G}_I dX_I \quad \rightarrow \quad \mathbf{G}_I = F_{jI} \mathbf{g}_j \quad (12.4)$$

という関係にある。あるいはこの式が埋め込み基底ベクトル \mathbf{G}_I の定義だと考えてもいい。

さて変形を表すために、現配置におけるこの微分線要素の長さ ds を求めておこう。すなわち

$$(ds)^2 = d\mathbf{x} \cdot d\mathbf{x} = (F_{iJ} dX_J \mathbf{g}_i) \cdot (F_{iK} dX_K \mathbf{g}_i) = F_{iJ} F_{iK} dX_J dX_K \quad (12.5)$$

⁵ 直角座標でない場合は $\mathbf{u} = U^I(\mathbf{X}) \mathbf{g}_I = U_I(\mathbf{X}) \mathbf{g}^I$ のように、共変・反変成分を区別する必要がある。付録Dを参照のこと。

⁶ 塑性のような履歴依存の変形がある場合でもそうなんだろうか。

⁷ 「運動」は 'kinematics' の直訳であり、動的な要素を重視した概念ではない。またその運動の原因や力のつり合いとも無関係の概念である。これに対して 'dynamics' は動力学のことであり、静的つり合い 'statics' を含んでいる。

となることから、新しい量 $C(X)$ を

$$(ds)^2 = C_{IJ} dX_I dX_J, \quad C_{IJ}(X) \equiv F_{kI} F_{kJ} = x_{k,I} x_{k,J}, \quad C = \mathbf{F}^T \mathbf{F}, \quad (C) \equiv (F)^T (F), \quad C_{IJ} = C_{JI} \quad (12.6a, b, c, d, e)$$

と定義する。この $C(X)$ は右 **Cauchy-Green** 変形テンソルと呼ばれている。これに対し、上式 (12.5) の微分要素が初期配置において持っていた長さも同様に

$$(dS)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = \delta_{JK} dX_J dX_K \quad (12.7)$$

と表すことができるので、その長さ (の 2 乗) の変化で変形を定義することが可能である。そのような変形の尺度として、**Green** のひずみ $E(X)$ を

$$2 E_{IJ} dX_I dX_J \equiv (ds)^2 - (dS)^2 \quad (12.8)$$

と定義することにすると、これに式 (12.5) を代入して式 (12.6) を使えば

$$\mathbf{E}(X) \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}), \quad E_{IJ}(X) = \frac{1}{2} (C_{IJ} - \delta_{IJ}) = \frac{1}{2} (F_{kI} F_{kJ} - \delta_{IJ}), \quad E_{IJ} = E_{JI} \quad (12.9a, b, c)$$

という関係が成立する。ただし、 \mathbf{I} は 2 階の単位テンソル (成分が Kronecker のデルタに⁸なる) である。あるいは式 (12.4) を用いて

$$E_{IJ} = \frac{1}{2} (\mathbf{G}_I \cdot \mathbf{G}_J - \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j) \quad (12.10)$$

と定義⁹しておく、物理的な意味が少しは明らかになるかもしれない。つまり、以上の誘導では微分線要素の長さ (ノルム) のみの変化に着目しているように見えるが、この式 (12.10) から Green のひずみ $E(X)$ は、物体に糊付けされた基底ベクトル同士の「内積」を通して変形前後の「角度変形」特性も表現できていることを示している。さらに式 (12.3) の変位表示の変形勾配を代入すれば

$$\begin{aligned} E_{IJ} &= \frac{1}{2} \{(\delta_{KI} + U_{K,I})(\delta_{KJ} + U_{K,J}) - \delta_{IJ}\} = \frac{1}{2} \{\delta_{IJ} + U_{I,J} + U_{J,I} + U_{K,I} U_{K,J} - \delta_{IJ}\} \\ &= \frac{1}{2} (U_{I,J} + U_{J,I} + U_{K,I} U_{K,J}) \end{aligned} \quad (12.11)$$

という関係¹⁰になる。有限変形を追跡しているので変位勾配の 2 次項が存在する。この非線形項を無視すれば、微小変形理論のひずみの式 (3.6) を得る。このひずみは、初期配置において物体に名前を付けた点を追跡するという考え方、つまり初期に \mathbf{X} にあった物質点が移動した \mathbf{x} の位置で幾何学的・力学的にどのような特性を持っているのかを記述する、いわゆる **Lagrange** 的記述で表現したひずみである。ちょうど、ひずみゲージを物体に貼り付けてそれを追跡した場合に得られるひずみに相当する。ただし、例えば $E_{11} = \frac{1}{2} (|\mathbf{G}_1|^2 - |\mathbf{g}_1|^2)$ 等は長さの 2 乗を用いた尺度になっているから、一般的なひずみゲージの測定値がこの Green のひずみ成分であるわけではない。

ときどき使われるらしいが、変形の尺度にはならない 'elongation' という量がある。

$$\text{elongation} \equiv \frac{(d\mathbf{x} - d\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X}}{d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X}}$$

と定義されるので、簡単に書くと

$$(\text{elongation})_{iJ} = F_{iJ} - \delta_{iJ} = u_{i,J} = U_{I,J} \quad (12.12)$$

⁸ 直角座標でない場合は計量テンソルでなければならない、本来は Kronecker のデルタ (テンソル成分ではなく単なる記号である) を成分とするものをテンソルと呼ぶのはあまりよろしくない。しかし、直感で噛み砕くためにとりあえず直角座標でアプローチしている。

⁹ これは任意の座標系で成立する。

¹⁰ 直角座標でない場合は $E_{IJ} = \frac{1}{2} (U_{I|J} + U_{J|I} + U^K|_I U_{K|J})$ のように、共変・反変成分を区別する必要がある。コンマの代わりにこの脚注で用いた '|' も共変微分を表す。付録 D を参照して欲しい。

つまり変位勾配である。これはもちろん剛体的な回転も含んでしまうので、変形の正確な尺度にはならない。

最後に、現配置における微分体積要素 dv は、埋め込んだ基底ベクトルを用いれば

$$dv \equiv \mathbf{G}_1 \cdot (\mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_3) dV, \quad dV \equiv dX_1 dX_2 dX_3$$

で定義できるから、式 (12.4) を代入して整理すると

$$\frac{dv}{dV} \equiv F_{j1} F_{k2} F_{l3} \mathbf{g}_j \cdot (\mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_l) = F_{j1} F_{k2} F_{l3} \mathbf{g}_j \cdot e_{ikl} \mathbf{g}_i = F_{j1} F_{k2} F_{l3} \delta_{ji} e_{ikl} = F_{j1} F_{k2} F_{l3} e_{jkl} = \det(F_{iJ})$$

となる。ここに e_{ijk} は式 (D.15) で定義した交代記号（テンソル成分ではない）である。つまり

$$\frac{dv}{dV} = J \equiv \det(F_{iJ}) = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_J}\right) = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{IJK} F_{iI} F_{jJ} F_{kK} \quad (12.13)$$

と表すこともできる。この J は **Jacobian** と呼ばれている。初期配置と現配置における密度をそれぞれ ρ_0, ρ とすると、質量保存則から

$$\rho_0 dV = \rho dv \quad \rightarrow \quad J = \frac{\rho_0}{\rho} \quad (12.14)$$

という関係も成立する。したがって、普通の力学を対象とする限りは J は正定値の非零で有界であることから、変形勾配を行列にした場合にはその逆行列が唯一に存在する。したがって、これもわかり難いと思うが、現配置の位置が関数として

$$\mathbf{x} = \mathbf{f}(\mathbf{X}, t), \quad F_{iJ} = \frac{\partial x_i}{\partial X_J}$$

と関係付けられる場合に、唯一にその逆の

$$\mathbf{X} = \mathbf{f}^{-1}(\mathbf{x}, t), \quad (F^{-1})_{Ij} = \frac{\partial X_I}{\partial x_j} \quad (12.15a, b)$$

という関係が定義できる¹¹ことになる。 (F) は 3×3 の行列なので、その逆行列は

$$(F^{-1})_{Ij} = \frac{1}{2J} e_{IMN} e_{jmn} F_{Mm} F_{Nn}$$

のようにして求めることができる。この $(\frac{1}{2} e_{IMN} e_{jmn} F_{Mm} F_{Nn})$ は行列 (F) の余因子行列である。

(3) 実質的な変形成分と回転成分

前節で求めた変形勾配や変位勾配には、実際に物体が歪んでいる成分のみならず、単に回転した成分も含まれていることには注意しなければいけない。一方、変形テンソル \mathbf{C} やひずみテンソル \mathbf{E} には、材料の抵抗に深く関係する「歪み」そのものがきちんと定義されていることが期待される。そこで、変形勾配に含まれるかもしれない回転成分 \mathbf{R} 等を定義してみたい。一般的な回転を行列 (R) で表現したときに

$$(R)^{-1} = (R)^T, \quad \det(R) = +1 \quad (12.16a, b)$$

のような特性で定義したとしても特に違和感はないと思う。ちょうど座標変換行列（正規直交行列）のようなものだ。そこで、変形勾配を

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U}, \quad F_{iJ} = R_{iK} U_{KJ}, \quad R_{iK} R_{jK} = \delta_{ij}, \quad R_{iM} R_{iN} = \delta_{MN}, \quad U_{KJ} = U_{JK} \quad (12.17a, b, c, d, e)$$

¹¹ 本当かな? 変形履歴に依存する非可逆な塑性変形があったら?

のように分解することを試みよう。このような分解が可能なることを極分解の定理と呼び、テンソル $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ は対称テンソルであることがわかっている。つまり \mathbf{F} から \mathbf{R} を取り除いた成分の \mathbf{U} がいわゆる「歪み」つまり実質的な変形成分だと期待できる。これを式 (12.6) の変形テンソル \mathbf{C} に代入すると

$$C_{IJ} = F_{kl} F_{kj} = (R_{kM} U_{MI})(R_{kL} U_{LJ}) = U_{MI} U_{LJ} R_{kM} R_{kL} = U_{MI} U_{LJ} \delta_{ML} = U_{LI} U_{LJ}, \quad (12.18a)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}, \quad (\mathbf{C}) = (\mathbf{F})^T (\mathbf{F}) = (\mathbf{U})^T (\mathbf{U}) \quad (12.18b, c)$$

という関係が得られる。すなわち変形テンソル \mathbf{C} には回転成分は含まれていないことが明らかだ。したがって、式 (12.9) の Green のひずみテンソル \mathbf{E} にも回転成分は含まれていない。この \mathbf{U} は右ストレッチテンソルと呼ばれる。その主値がいわゆる伸びである。二つの重要なテンソル \mathbf{R} と \mathbf{U} の具体的な求め方は後述する。

そこで、微小変形理論の枠組の中でひずみに主方向があったように、この伸び \mathbf{U} にも主方向 $\mathbf{N}^{(l)}$ と主ストレッチ $\Lambda_{(l)}$ があって、行列表示したときに

$$(\mathbf{U}) = (\mathbf{N}) [\Lambda] (\mathbf{N})^T, \quad [\Lambda] \equiv \begin{pmatrix} \Lambda_{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_{(3)} \end{pmatrix}, \quad (12.19a, b)$$

$$(\mathbf{N}) \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{N}^{(1)} & \mathbf{N}^{(2)} & \mathbf{N}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{N})^{-1} = (\mathbf{N})^T \quad (12.19c, d)$$

と表現できるはずだ。この $\mathbf{N}^{(l)}$ は単位ベクトルにすることができる。また鉤括弧の $[\cdot]$ は対角行列であることを示す。行列 (\mathbf{U}) は正定値実対称行列であることから、主値は正の実数であり、主方向はお互いに直交するように選ぶことができる。これを式 (12.18) に代入すれば、行列表示で

$$(\mathbf{C}) = (\mathbf{F})^T (\mathbf{F}) = (\mathbf{U})^T (\mathbf{U}) = \left\{ (\mathbf{N}) [\Lambda]^T (\mathbf{N})^T \right\} \left\{ (\mathbf{N}) [\Lambda] (\mathbf{N})^T \right\} = (\mathbf{N}) [\Lambda^2] (\mathbf{N})^T \quad (12.20)$$

となる。 $[\Lambda]$ は対角行列なので $[\Lambda^2]$ は対角成分が $\Lambda_{(l)}^2$ の行列である。このことから

- 変形テンソル \mathbf{C} の主方向を $\mathbf{N}^{(N)}$ とし
- 変形テンソル \mathbf{C} の主値を $\Lambda_{(N)}^2$ としたとき

右ストレッチテンソル \mathbf{U} はそれと同じ主方向を持ち、その主値は $\Lambda_{(N)}$ になる。行列で書くと

$$(\mathbf{U}) = (\mathbf{C})^{1/2}, \quad (\mathbf{C}) = (\mathbf{U})^2 \quad (12.21a, b)$$

となり、直接表記および行列表示にすると

$$\mathbf{U} = \sum_{N=1}^3 \Lambda_{(N)} \mathbf{N}^{(N)} \otimes \mathbf{N}^{(N)}, \quad (\mathbf{U}) = (\mathbf{N}) [\Lambda] (\mathbf{N})^T, \quad (12.22a, b)$$

$$\mathbf{C} = \sum_{N=1}^3 \Lambda_{(N)}^2 \mathbf{N}^{(N)} \otimes \mathbf{N}^{(N)}, \quad (\mathbf{C}) = (\mathbf{N}) [\Lambda^2] (\mathbf{N})^T \quad (12.22c, d)$$

というスペクトル表示が可能になる。式 (12.21) のような、テンソルおよび行列の平方根や 2 乗というのは、式 (12.22) のような関係にあるテンソルおよび行列であることを意味する。実際にストレッチテンソルと回転成分を計算するには

1. 変形テンソルで構成した行列 (\mathbf{C}) の固有値解析をしてその主方向と主値を求め
2. その主値の平方根と主方向を用いて式 (12.22b) から (\mathbf{U}) を求め

3. 最後に式 (12.17) から

$$(F) = (R)(U) \rightarrow (R) = (F)(U)^{-1}$$

のようにして回転成分を求める

ことになる。ちなみに、Green のひずみもスペクトル表示すると

$$\mathbf{E} = \sum_{N=1}^3 \frac{1}{2} (\Lambda_{(N)}^2 - 1) \mathbf{N}^{(N)} \otimes \mathbf{N}^{(N)}, \quad (E) = (N) \left[\frac{1}{2} (\Lambda^2 - 1) \right] (N)^T \quad (12.23a, b)$$

となる。右ストレッチテンソル \mathbf{U} に比べると、変形テンソル \mathbf{C} や Green のひずみテンソル \mathbf{E} には伸び Λ の 2 乗が含まれることから、その物理的な意味はあまり明確ではなかったのだ。特に式 (12.10) を見ると、例えば E_{11} と E_{22} は必ずしも直交していない 2 方向の伸びの 2 乗になっているし、 E_{12} は \mathbf{G}_1 と \mathbf{G}_2 の長さの伸びも含んでしまっている。これでは、この \mathbf{E} をそのまま構成則に用いることには大きな抵抗を感じざるを得ない。つまり何らかの物理成分、例えば

$$\sqrt{1 + 2E_{11}} - 1, \quad \frac{E_{12}}{\sqrt{1 + 2E_{11}} \sqrt{1 + 2E_{22}}} \quad (12.24a, b)$$

のような成分の方がいいように感じるがどうだろう。この考察の意味が理解できない読者には、ここでちょっと立ち止まってもう一度最初から復習することを強く勧めたい。

(4) Euler 的な諸量

回転を定義するとき、式 (12.17) とは逆の順序にしてもいいだろう。つまり

$$\mathbf{F} = \mathbf{v} \mathbf{R}, \quad F_{ij} = v_{ik} R_{kj}, \quad v_{ik} = v_{ki} \quad (12.25a, b, c)$$

のようにも極分解できる。これを式 (12.6) の変形テンソル \mathbf{C} に代入すると

$$C_{IJ} = F_{kl} F_{kj} = (v_{kl} R_{ll})(v_{km} R_{mj}) = R_{ll} v_{kl} v_{km} R_{mj} = R_{ll} b_{lm} R_{mj}, \quad b_{lm} \equiv v_{kl} v_{km} = v_{lk} v_{mk} \quad (12.26a, b)$$

という関係が得られる。あるいは上式に左右から回転を乗ずると

$$R_{il} C_{IJ} R_{jJ} = R_{il} R_{ll} b_{lm} R_{mj} R_{jJ} = \delta_{il} b_{lm} \delta_{mj} = b_{ij}$$

となることから、 \mathbf{b} も実質的な変形成分である可能性がある。

そこで、式 (12.7) の dS を式 (12.15) の逆関係を用いて表すと

$$(dS)^2 = d\mathbf{X} \cdot d\mathbf{X} = X_{I,j} dx_j \mathbf{g}_I \cdot X_{J,k} dx_k \mathbf{g}_J = X_{I,j} X_{I,k} dx_j dx_k = (F_{jl} F_{kl})^{-1} dx_j dx_k \quad (12.27)$$

となるので、この $F_{jl} F_{kl}$ の部分に極分解式 (12.25) を代入すると

$$F_{jl} F_{kl} = (v_{jl} R_{ll})(v_{km} R_{ml}) = R_{ll} v_{jl} v_{km} R_{ml} = v_{jl} v_{km} \delta_{lm} = v_{jl} v_{kl} = b_{jk}$$

のように、式 (12.26) で定義した b_{jk} になっていることがわかる。すなわち

$$\mathbf{b} \equiv \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{v} \mathbf{v}^T, \quad b_{jk} \equiv F_{jl} F_{kl} = v_{jl} v_{kl}, \quad (dS)^2 = (b_{jk})^{-1} dx_j dx_k, \quad b_{jk} = b_{kj} \quad (12.28a, b, c, d)$$

という関係が求められる。この $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ は $\mathbf{C}(\mathbf{X})$ と対峙させて左 **Cauchy-Green** 変形テンソルと呼ばれ、 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ も $\mathbf{U}(\mathbf{X})$ に対峙させて左ストレッチテンソルと呼ばれている。面白いことに、 \mathbf{v} と \mathbf{U} の主値 (固有値) 同士は同

じになるので、式 (12.22) と同様、次のようなスペクトル表示¹²ができる。

$$\mathbf{v} = \sum_{n=1}^3 \Lambda_{(n)} \mathbf{n}^{(n)} \otimes \mathbf{n}^{(n)}, \quad (\mathbf{v}) = (\mathbf{n}) [\Lambda] (\mathbf{n})^T, \quad (12.29a, b)$$

$$\mathbf{b} = \sum_{n=1}^3 \Lambda_{(n)}^2 \mathbf{n}^{(n)} \otimes \mathbf{n}^{(n)}, \quad (\mathbf{b}) = (\mathbf{n}) [\Lambda^2] (\mathbf{n})^T \quad (12.29c, d)$$

ただし

$$\Lambda_{(n)} = \Lambda_{(N)}, \quad (\mathbf{n}) \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{n}^{(1)} & \mathbf{n}^{(2)} & \mathbf{n}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (\mathbf{n})^{-1} = (\mathbf{n})^T \quad (12.30a, b, c)$$

であり、主方向の $\mathbf{n}^{(n)}$ と $\mathbf{N}^{(N)}$ の間には

$$\mathbf{n}^{(n)} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{N}^{(N)}, \quad n_i^{(n)} = R_{ij} N_j^{(N)}, \quad (\mathbf{n}) = (\mathbf{R}) (\mathbf{N}) \quad (12.31a, b, c)$$

という関係が成立する。つまり、主方向 $\mathbf{n}^{(n)}$ は、現配置において空間固定座標のどの方向に主に伸びているのかを表すベクトルであり、これに対して主方向 $\mathbf{N}^{(N)}$ は、その現配置で主に伸びている方向が初期配置にどちらを向いていたか（材料に貼り付けた埋め込み座標で表現した主に伸びている方向）を示している。ところで、その定義から \mathbf{v} と \mathbf{U} の間には

$$(\mathbf{F}) = (\mathbf{R}) (\mathbf{U}) = (\mathbf{v}) (\mathbf{R}) \rightarrow (\mathbf{v}) = (\mathbf{R}) (\mathbf{U}) (\mathbf{R})^T, \quad v_{ij} = R_{iK} U_{KL} R_{jL} \quad (12.32a, b)$$

という関係が成り立つ。

最後に式 (12.8) の Green のひずみに対峙させたひずみ $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ を

$$2 e_{ij} dx_i dx_j \equiv (ds)^2 - (dS)^2$$

と定義すると、これに式 (12.27) を代入して、さらに変位を用いた関係

$$X_{J,k} = \delta_{Jk} - u_{j,k}(\mathbf{x})$$

を代入して整理すると

$$e_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - b_{ij}) = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i} - u_{k,i} u_{k,j}) \quad (12.33)$$

という関係を得る。このひずみ $\mathbf{e}(\mathbf{x})$ を **Almansi** のひずみと呼ぶ。注意しないとイケないのは、変位を現配置の「位置」 \mathbf{x} の関数として取り扱っていることと、空間固定座標で微分をしている（添え字のコンマの次の文字が小文字になっている）ことの二つだ。これは、初期配置で名前を付けた点を追跡するという記述ではなく、空間のある場所を観察しているときに、その観察点で何が起きているかということを観察する手法、いわゆる **Euler** 的記述による記述になっている。例えば透明な壁を持つ水路の中の流体の運動を、その水槽の壁面に付けた印の場所で定点カメラによって観察する場合のように、モニターしている観察点で起きている現象を対象とする場合には、この Euler 的記述の方が便利である。固体の場合も、非接触型の変位計やひずみ計を用いて現象を観測するなら Euler 的な観察をしていることになるが、たいていの固体は履歴依存の変形をするので一般的には Euler 的な手法はあまり馴染まない。流体の場合も、流体と一緒に運動するマーカーを投げ入れてそれ（流跡線）を追跡する場合には Lagrange 的な方法を用いて何かを測定していることになる。

最も簡単な例で物理的な意味を確かめておこう。図 12.2 の左に示した運動は 3 軸方向へのストレッチ Λ_i と x_1 - x_2 面内の回転のみの簡単な運動なので、少し考えれば

$$(\mathbf{F}) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial X_J} \right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \cos \alpha & -\Lambda_2 \sin \alpha & 0 \\ \Lambda_1 \sin \alpha & \Lambda_2 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix} \quad (12.34)$$

¹² \mathbf{b} と \mathbf{v} は回転との関係をどう捉えるかが \mathbf{C} , \mathbf{U} と異なるだけなので一般には大文字 \mathbf{B} , \mathbf{V} で表されるが、 \mathbf{b} と \mathbf{v} は空間固定座標の関数であり、現配置で定義される主方向 $\mathbf{n}^{(n)}$ でスペクトル分解されるので、この文書では小文字で表記した上でこの節で説明した。

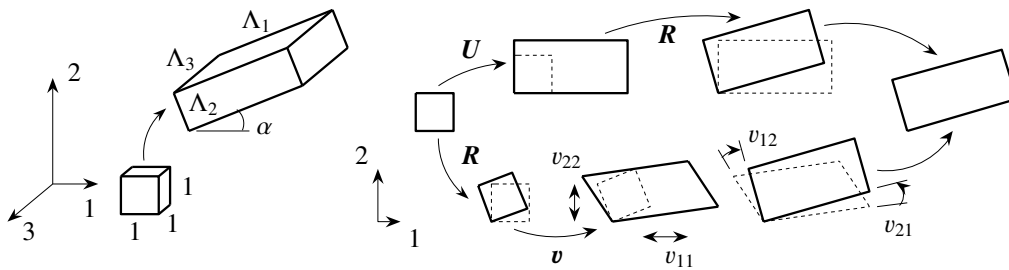


図 12.2 簡単な例で比べるストレッチテンソル

となることがわかる。つまり

$$(R) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (U) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix} \quad (12.35a, b)$$

という極分解ができることを示している。(U)は対角行列であるから、特に固有値解析をするまでもなく、主値は $\Lambda_{(N)} = \Lambda_N$ であり、それぞれの主方向は

$$N^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad N^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12.36a, b, c)$$

と求められる。つまり、初期配置における材料の x_i 方向に主ストレッチが生じている、あるいは材料に埋め込んだ座標の $\frac{G_i}{|G|}$ 方向に（この例では直交基底になるので）主に伸びていると考えればいい。これを式(12.31)に代入すれば

$$n^{(1)} = \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \\ 0 \end{pmatrix}, \quad n^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (12.37a, b, c)$$

を得る。これは図からも明らかのように、三つの伸び Λ_i が現配置で生じている方向を空間固定座標系から見たのが $n^{(n)}$ であるということがわかる。この主方向と三つの主値を式(12.29)に代入するか、あるいは二つのストレッチ間の関係式(12.32)を用いれば、左ストレッチテンソルが

$$(v) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \cos^2 \alpha + \Lambda_2 \sin^2 \alpha & (\Lambda_1 - \Lambda_2) \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2) \sin \alpha \cos \alpha & \Lambda_1 \sin^2 \alpha + \Lambda_2 \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix}$$

と求められる。この2種類のストレッチテンソルの物理的な意味を図 12.2 の右に示しておいた。先に回転させるか、あとで回転させるかの違いで、2種類のストレッチテンソルが定義されていることがわかる。つまり、先に回転させた物体の基底 g_i の系の「方向」の成分を持つ実質的な変形が v になっている。

ついでに Green のひずみを求めておこう。式(12.34)から変位勾配は

$$(U_{I,J}) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \cos \alpha - 1 & -\Lambda_2 \sin \alpha & 0 \\ \Lambda_1 \sin \alpha & \Lambda_2 \cos \alpha - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 - 1 \end{pmatrix}$$

となるので、式(12.11)に代入すれば、せん断ひずみ成分は零になり

$$E_{11} = \frac{1}{2}(\Lambda_1^2 - 1), \quad E_{22} = \frac{1}{2}(\Lambda_2^2 - 1), \quad E_{33} = \frac{1}{2}(\Lambda_3^2 - 1) \quad (12.38a, b, c)$$

と求めることができる。もちろん、式 (12.23) のスペクトル表示に式 (12.35b) の主ストレッチと式 (12.36) の Lagrange 的主方向を代入しても、同じ表現を得る。式 (12.23) のスペクトル表示からもわかるように、伸びの 2 乗に関係付けられているので物理的な意味はわかり難い。ただし、どちらの向きあるいはどの座標軸における変形であるかについては、この例はわかり易い。つまり、式 (12.23) に用いた基底 \mathbf{N} の通り、材料に貼り付けた x_i 方向の伸び、すなわち埋め込み基底を単位量にした $\frac{\mathbf{G}_I}{|\mathbf{G}_I|}$ 方向の伸びに関係した量になっている。ちょうど物体に貼り付けたひずみゲージの測定値のように、物体の上で測定しているひずみになっている。したがって、特に内部に微視構造を持つ異方性材料の構成則には、このような Lagrange 的な尺度の方が適していることがわかる。実は、第 C.2 節で定式化した Bernoulli-Euler 梁の定式化では、Green のひずみを用いて非常に美しい理論が構築できているのだが、それは、Green のひずみテンソルの成分そのものではなく、それに対応した物理的な成分が用いられているからなのだ。さらに仮想仕事の原理を通して、数学的にも物理的にも説得力のある理論になっている。これについては、後述の応力の物理成分の節でも簡単に解説しよう。

(5) ひずみの物理的な意味 — ひずみって何だ?

前節では単なる幾何学的な考察を通して理論的な変形の尺度とひずみや回転を定義した。しかし、実際に材料そのものが直に感じる（材料はしゃべらないので、我々が直感的・物理的¹³に合理的だと感ずる）実質的な「歪み」、つまり「ひずみ」はどう定義するのがいいのだろうか。少なくともそれは、変形テンソル \mathbf{C} でも Green のひずみテンソル \mathbf{E} でもなさそう。そこで図 12.3 にあるように、 1×1 の正方形が回転成分を持たないまま、 γ の角度変化と 2 辺が同じ比率で伸びて a になっている状態を対象として、いくつかわきを定義してみよう。まず、この変形状態は

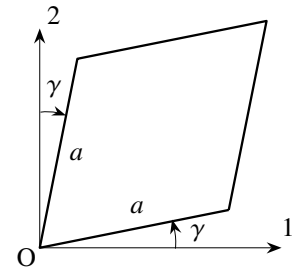


図 12.3 純せん断と 2 軸方向への等引張

$$(F_{IJ}) = (U_{IJ}) = (v_{ij}) = \begin{pmatrix} a \cos \gamma & a \sin \gamma & 0 \\ a \sin \gamma & a \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix} \quad (12.39)$$

となることは容易にわかると思う。 a と γ を独立した変形指標とした純せん断状態なので、かなり限定的な純せん断状態になっていることには注意が必要だ。ただし、 Λ_3 は図には無いが、 x_3 方向の伸びである。回転成分を除去した変形状態なので、 $\mathbf{R} = \mathbf{I}$ であり、変形勾配と二つのストレッチテンソルには違いが無い。このとき主値と主方向を求めるために \mathbf{U} の固有値解析をすると

$$\det \begin{pmatrix} a \cos \gamma - \Lambda & a \sin \gamma & 0 \\ a \sin \gamma & a \cos \gamma - \Lambda & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 - \Lambda \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \{(a \cos \gamma - \Lambda)^2 - a^2 \sin^2 \gamma\} (\Lambda_3 - \Lambda) = 0$$

となるので、これを解くと、主ストレッチが

$$\Lambda_{(1)} = a (\cos \gamma + \sin \gamma), \quad \Lambda_{(2)} = a (\cos \gamma - \sin \gamma), \quad \Lambda_{(3)} = \Lambda_3 \quad (12.40a, b, c)$$

と求められ、対応する主方向は

$$\mathbf{N}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{N}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}^{(n)} = \mathbf{N}^{(N)} \quad (12.41a, b, c, d)$$

¹³ 数学的には、お互いの関係がわかっている量ならどれでも構わないのだが、材料の抵抗を表す構成則に用いる変形の尺度は物理的な観点からしか定義できないでしょ。

である。すなわち、 x_1 軸から反時計回りの 45 度方向に伸び $\Lambda_{(1)}$ が生じ、時計回りの 45 度方向に伸び $\Lambda_{(2)}$ が生じている。そしてこの二つの長さ $\Lambda_{(1)}, \Lambda_{(2)}$ は、取りも直さずこのひし形の対角線の長さに等しい。このようにストレッチ Λ と角度変化 γ は幾何学的・物理的に非常にわかり易い変形量なので、右ストレッチテンソル U は物理的なひずみを表現していると考えられる。

伸び: まず伸びについては、よく引張試験の標点間距離で定義される $\left(\frac{\text{今の長さ} - \text{元の長さ}}{\text{元の長さ}}\right)$ という定義は、誰にでも受け入れられるのではないだろうか。つまり、その伸びひずみ ϵ^E を、この図の例では

$$\epsilon^E \equiv a - 1 \quad (12.42)$$

と定義すれば、これが辺の伸びになるだろう。この定義は $\gamma = 0$ のときの主ストレッチから元の長さ 1 を引いた、いわゆる伸びになっている。ただこれを用いると、引張の 100% の伸びは長さが元の 2 倍 $a = 2$ なので $\epsilon^E = 1$ になる一方で、半分の長さに縮む $a = 1/2$ のときは $\epsilon^E = -0.5$ になって少しわかり難い。そこで、構成則の研究でよく使われる対数ひずみ ϵ^L を

$$\epsilon^L \equiv \ln(a) \quad (12.43)$$

のように定義してみよう。こうすると、伸びの $\epsilon^L = 1$ が $a = e \approx 2.72$ で、縮みの $\epsilon^L = -1$ が $a = 1/e \approx 1/2.72 = 0.368$ となる。対数に自然対数を用いているので数字の上では、長さが 2.72 倍で 100% の伸びになり、 $1/2.72$ に縮んだときに 100% の縮みになっているが ϵ^E よりはわかり易い。逆に考えると、長さが倍か半分になったときの対数ひずみは $\pm \ln 2 = \pm 63.3\%$ である。もし底が 2 の対数 $\log_2(a)$ を用いれば、長さが倍になるのが伸びの 100% のひずみであり、長さが半分になるのが縮みの 100% の変形なので、直感的に受け入れられるような気もするが、縮みはちょっとだけ気になるかなあ。

さて近年の多くの研究で、テンソルとしては **Green** のひずみがよく用いられているひずみの尺度の一つのようであるが、その物理的な意味はよくわからない。これに対して、ここで導入した伸びひずみや対数ひずみはわかり易い変形の尺度ではないだろうか。そこで、上述のように U が物理的にはわかり易いので、式 (12.42) (12.43) を見ながら

$$\mathbf{E}^E(\mathbf{X}) \equiv \mathbf{U} - \mathbf{I}, \quad \mathbf{E}^L(\mathbf{X}) \equiv \ln(\mathbf{U}) \quad (12.44a, b)$$

で、伸びひずみテンソルと対数ひずみテンソルを定義しておこう。この伸びひずみ $\mathbf{E}^E(\mathbf{X})$ は、変形の尺度には相応しくないとした変位勾配 ('elongation') の式 (12.12) に似ているが、 U で定義することによって回転成分は除去されている。スペクトル表示すると

$$\mathbf{E}^E(\mathbf{X}) = \sum_{N=1}^3 (\Lambda_{(N)} - 1) \mathbf{N}^{(N)} \otimes \mathbf{N}^{(N)}, \quad (\mathbf{E}^E) = (\mathbf{N}) [\Lambda - 1] (\mathbf{N})^T \quad (12.45a, b)$$

と書くことができる。このひずみは **Biot** のひずみテンソルと呼ばれることもある。また、対数ひずみテンソル $\mathbf{E}^L(\mathbf{X})$ は スペクトル表示を用いて

$$\mathbf{E}^L(\mathbf{X}) = \sum_{N=1}^3 \ln(\Lambda_{(N)}) \mathbf{N}^{(N)} \otimes \mathbf{N}^{(N)}, \quad (\mathbf{E}^L) = (\mathbf{N}) [\ln \Lambda] (\mathbf{N})^T \quad (12.46a, b)$$

で定義できる。式 (12.39) (12.40) (12.41) を用いて、この二つのひずみを x_1 - x_2 面内成分だけを求めておくと

$$E_{11}^E = E_{22}^E = a \cos \gamma - 1, \quad E_{12}^E = a \sin \gamma, \quad (12.47a, b)$$

$$E_{11}^L = E_{22}^L = \frac{1}{2} \ln \left\{ a^2 (\cos^2 \gamma - \sin^2 \gamma) \right\} = \frac{1}{2} \ln(\Lambda_{(1)} \Lambda_{(2)}), \quad E_{12}^L = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{\cos \gamma + \sin \gamma}{\cos \gamma - \sin \gamma} \right) \quad (12.47c, d)$$

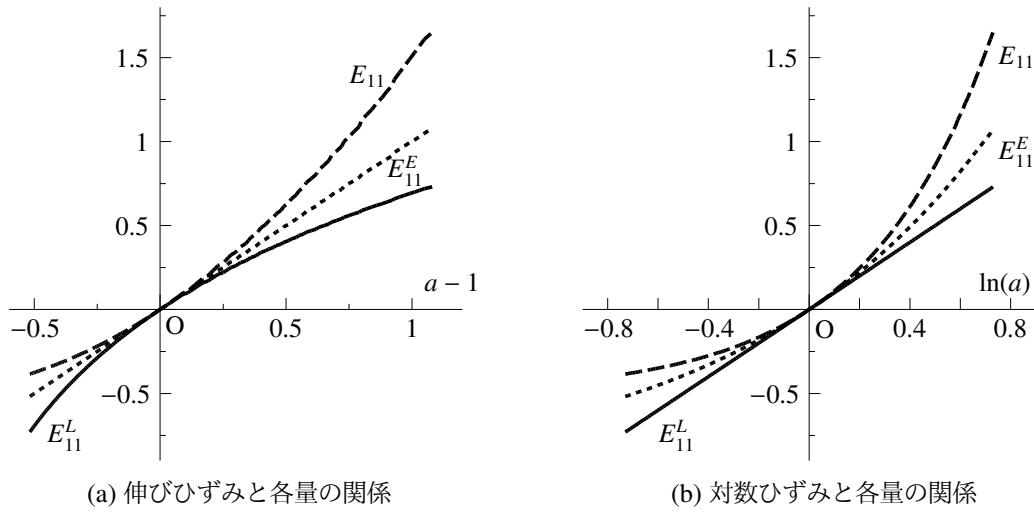


図 12.4 伸びについてのひずみは何かいいか?

となる。伸びひずみのせん断成分 E_{12}^E には伸び a が含まれ、軸方向の伸び成分 E_{11}^E 等には逆に角度変化 γ も含まれてしまっている。これに対し対数ひずみの場合は、まずせん断成分 E_{12}^L は角度変化のみで表され、軸方向の伸び成分 E_{11}^L 等もストレッチのみで表されている。一方、前節の Lagrange 的記述で定義した式 (12.9) の Green のひずみ E は

$$E_{11} = E_{22} = \frac{1}{2}(a^2 - 1), \quad E_{12} = a^2 \sin \gamma \cos \gamma \quad (12.48a, b)$$

となる。Lagrange 的記述では最もよく用いられると思われるひずみだが、伸びの $E_{11} = 1$ は $a = \sqrt{3} \approx 1.73$ になり、半分の長さに縮む $a = 1/2$ は $E_{11} = -3/8 = -0.375$ である。また元々変形前後の長さの 2 乗の変化で定義したひずみであることから、伸び a の 2 乗が含まれる上に、上記の伸びひずみと同様に、純せん断状態でもせん断ひずみ成分 E_{12} に伸び a が含まれてしまっている。

前節の例も含め、図 12.2, 12.3 の例で実際に求めたひずみの成分式 (12.35) (12.38) (12.39) (12.47) (12.48) を幾何学的に解釈してみると

ストレッチ U : 空間固定基底 g_i を回転させた $R \cdot g_i$ を直交基底とする座標系で計測した「伸び」と角度変化に相当する。

伸びひずみ E^E : 空間固定基底 g_i を回転させた $R \cdot g_i$ を直交基底とする座標系で計測した「伸びひずみ」と角度変化に相当する。

対数ひずみ E^L : 簡単な変形状態の表現を見る限り、伸びと角度変化を別々に表すことができそうな尺度であり、いわゆる材料の要素試験結果を反映させて構成モデルを構築する場合に使い易い尺度だと考えられる。また後述するが、この変化率もとても重要な尺度である。

Green のひずみ E : 埋め込み基底を単位量にした $\frac{G_I}{|G_I|}$ を基底とする曲線座標系で計測した、「何らか」の「伸びひずみ」と角度変化に相当する。「何らか」と書いたのは、実は一番わかり難い量だからだ。具体的な物理的な意味についてはこの例で得られる次の二つの図で各自考えて欲しいが、次の節で示すようなある種の変化率はとても重要な概念である。

と考えればいだろう。すべて数学的に誘導されたひずみであり、必ずしも材料試験で測定できるひずみになっているとは限らないことには注意すべきだ。前述のように、特に固体を対象とする場合には、その物体にひずみゲージを貼り付けて測定することがある。これはまさに Lagrange 的な量を測定していることから、この四つ

すべてが変形の尺度としては相応しいものと考えて問題はなさそうだ。ただし Green のひずみの場合は、この例からもわかるように、その成分の物理的な意味は非常にわかり難い。

図 12.4 には、横軸に辺の伸びひずみ $(a - 1)$ を用いた場合と、対数ひずみ $\ln(a)$ を用いた場合の、3 種類のひずみテンソルの 11 成分を比較した。ただし、 E_{11}^E と E_{11}^L は式 (12.47) で $\gamma = 0$ のときの値を用いている。横軸はどちらも長さが倍か半分になるまでの範囲で描いてみた。もちろん図 12.4 (a) では、定義が横軸と同じ E^E が直線関係にあり、図 12.4 (b) でも、定義が横軸と同じ E^L が直線関係になっている。当然ではあるが、ひずみが微小でありさえすれば、どの尺度を用いても、少なくとも工学的には差異は生じない。実際に 2 倍の伸びを超えるような弾性変形問題を対象とする場合にどの尺度が望ましいかについての判断はかなり難しい。

角度変化: 図 12.5 には、横軸には角度変化 γ を π で割ったものを用いて、3 種類のせん断ひずみテンソル成分を比較した。ただし、 E_{12}^E と E_{12} は式 (12.47) (12.48) で $a = 1$ のときの値を用いている。これも当然ではあるが、ひずみが微小でありさえすれば、どの尺度を用いても、少なくとも工学的には差異は生じない。しかし、対数ひずみ E_{12}^L だけが角度の増加に伴って急速に無限大に近づくような挙動をしており、奇妙に思える。しかし本当にそうだろうか。この横軸は実は $|\gamma| < \pi/4$ の範囲で描いてあるのだが、 γ が $\pm\pi/4$ に近づくということは物体が消滅することを意味する。それは質量保存則からは許容できる状態ではない。したがって、 $\gamma \rightarrow \pm\pi/4$ でせん断ひずみの尺度そのものが無限大になるのは都合がいい。またこの対数ひずみは式 (12.47) でも示したように、せん断を純粋に角度変化 γ のみで表現できているので優れた尺度の一つだと考えていざらう。これに対し伸びひずみ E_{12}^E と Green のひずみ E_{12} は、 $\gamma \simeq \pm\pi/4$ の状態で有界な値を保持している。だからこの二つは有限変形を記述するには相応しくない! と言えるだろうか。上述のようにこの 2 種類のせん断ひずみ成分には辺の伸び a が含まれており、実はこの図では $a = 1$ と固定していることから不適切とも思える結果が図示されたに過ぎないのだ。実際には構成則を介して、 γ の増大に伴って a や Λ_3 も無限大にならざるを得ず、このせん断ひずみ成分も無限大になることになる。つまり逆に言うと、もし構成則に使いたいなら、伸びひずみと Green のひずみのせん断成分には伸び a が含まれているのが当たり前だったということの意味するのだ。これは、式 (12.23) のすぐ下に書いたコメントとは矛盾しているので注意が必要である。

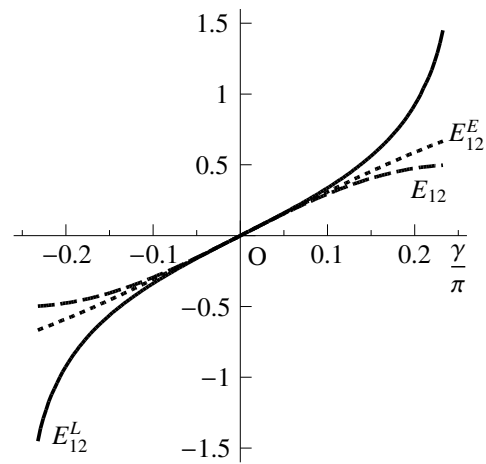


図 12.5 せん断についてのひずみは何がいいか?

ひずみの変化率あるいは速度: では伸びの対数ひずみの考察に戻ろう。式 (12.43) のスカラーで定義した対数ひずみを一般化した対数ひずみの定義式 (12.46) を見ながら、この変化率を計算してみよう。次の節で議論する「ひずみ速度」を少しここで求めてみようというのだ。簡単のために x_1 方向にのみ Λ_1 が生じている状況を対象としてみると、対数ひずみは $\ln \Lambda_1$ でいい。この変化率は

$$\dot{E}_{11}^L = \frac{\partial (\ln \Lambda_1)}{\partial t} = \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \quad (*)$$

と書くことができる。簡単のために時間微分を上付きドットで表した。この Λ_1 は初期配置の長さに対する現配置の長さの比だから、初期配置の長さを L_0 として現配置の長さを L と置くと

$$\dot{E}_{11}^L = \frac{\dot{L}}{L_0} \frac{L_0}{L} = \frac{\dot{L}}{L}$$

となる。つまり対数ひずみの変化率は、現配置を基準配置としたときの瞬間的な Lagrange 的な長さの変化率を示していることになる。これはちょうど、現配置を時々刻々初期配置と捉えて定式化する updated Lagrange 的記述 (p.625) において最も使い易い変形の尺度になりそうだ。また、変形が大きくなった場合に多くの材料が示す塑性の基本的なモデルでは、流れ則という発展則で材料特性を表すことになっているが、この流れ則は現配置の応力状態で瞬間的にのみ定義されている。また発展則は増分式あるいは全微分表現で定義され、一般には積分不可能である。この 2 点を踏まえると、塑性の発展則では updated Lagrange 的な増分を規定していて、それが望ましいのだ。このような観点でひずみの定義を考察すると、ここで定義した対数ひずみは、特に、塑性を伴う有限変形問題では最も相応しい尺度の代表だとも考えられる。また実験実測の観点から見ても、初期配置を覚えておかななくてもいいので測定し易い指標になっているが、残念ながら、ひずみゲージが測定している量と一対一に対応しているわけではない。また、瞬間的にはいつも空間固定座標方向の成分で表現しようとすることから、材料の内部微視構造が幾何学的に変化するような材料では、逆に使い難い尺度になる可能性もある。いいものはなかなか簡単には手に入らないということだ。

さて、Green のひずみの場合はどうだろう。同じように 1 軸方向の変形しか無い状態における Green のひずみの変化率を求めてみよう。式 (12.2) (12.6) (12.9) を用いると

$$\dot{E}_{IJ} = \frac{1}{2} (\dot{F}_{kl} F_{kJ} + F_{kl} \dot{F}_{kJ})$$

となるが、速度 \boldsymbol{v} を

$$\boldsymbol{v} = \dot{x}_i \boldsymbol{g}_i = V_I(\boldsymbol{X}) \boldsymbol{g}_I = v_i(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{g}_i$$

と成分表示をすると

$$\dot{F}_{kl} = \dot{x}_{k,I} = V_{K,I} = v_{k,I} = v_{k,j} F_{jI}$$

と書くことができる。これを上式に代入して整理すると

$$\dot{E}_{IJ} = d_{ij} F_{iI} F_{jJ}, \quad d_{ij} \equiv \frac{1}{2} (v_{i,j} + v_{j,i})$$

という関係を得る。この \boldsymbol{d} は次の節で定義する変形速度である。この式に、1 方向にのみ伸びている状況では $F_{11} = \Lambda_1$ となっていることを代入し、式 (12.38) の Green のひずみ成分 E_{11} が $E_{11} = \frac{1}{2} (\Lambda_1^2 - 1)$ であることを用いてその変化率をとると

$$\dot{E}_{IJ} = d_{ij} F_{iI} F_{jJ} \quad \rightarrow \quad \dot{E}_{11} = \Lambda_1 \dot{\Lambda}_1 = d_{11} \Lambda_1 \dot{\Lambda}_1$$

という関係が求められる。つまり、概念的には上式 (*) と比較すれば

$$\frac{\dot{E}_{11}}{\Lambda_1^2} \sim d_{11} = \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \Rightarrow \dot{E}_{11}^L$$

のように、変形速度つまり Green のひずみの変化率は対数ひずみの時間変化率と同じような尺度であることがわかる。構成則で対数ひずみを直接扱うには、変位との関係で常に極分解を介さなければならない難点があるが、増分で構成則を表さざるを得ない塑性を含めた構成則においては、この変形速度を用いて増分理論を定式化しておけば、それは結局、対数ひずみで物体の変形を表現しようとしていることになることが、この簡単な例からわかる。そのため、塑性を含む構成則の研究においては updated Lagrange 的記述が必然であり、かつ構成則を増分で表すというのは、有限変形におけるひずみの物理的な定義の観点からも必然なのだろう。ただし、もしどうしても Lagrange 的記述で構成則を表現する必要があるとすれば、著者の気持ちとしては、ある適切に定義された応力 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})$ を用いて ($\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})$ は後述の Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x})$ とは限らない)

$$\sigma_{IJ}(\boldsymbol{X}) = C_{IJKL} E_{KL}^L(\boldsymbol{X}), \quad \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{C} : \boldsymbol{E}^L(\boldsymbol{X})$$

が望ましいような気がする。ここに \mathbf{C} は何らかの材料の抵抗を定義する 4 階の材料パラメータテンソルであるが、一般には定数とは限らない。定数パラメータの場合のいくつかの例は第 12.5.3 節に示す。

演習問題 12-1

1. Nemat-Nasser 先生の連続体力学の講義ノートには多くの楽しい演習問題が並んでいるが、多分それをここにコピーするわけにはいかないと思われる。残念である。ただその中から中間試験にも出された興味深い問題を一つだけ紹介しておく。それは theorem of Kelvin and Tait の証明問題: 「任意の変形状態には向きが変わらない軸が少なくとも一つ存在する」ことを示せであった。証明の一例を下に示す。

証明: ある点 \mathbf{X} にあるベクトル $d\mathbf{X}^K$ が点 \mathbf{x} に移動して変形し $d\mathbf{x}^k$ になったとする。この変形した微分要素を \mathbf{X} の位置に剛体併進移動させるとそれは $g_k^K d\mathbf{x}^k$ になる。これが元のベクトル $d\mathbf{X}^K$ と平行であるためには

$$g_k^K d\mathbf{x}^k = g_k^K x^k|_L d\mathbf{X}^L = (A + 1) d\mathbf{X}^K \quad (a)$$

であればいいはずだ。ここに $(A + 1)$ は実数であって欲しい比例定数である。 $g_k^K \equiv \mathbf{g}^K \cdot \mathbf{G}_k$ 等は計量テンソルであり、 $x^k|_L$ は共変微係数である。そこで

$$x^k|_L = g^{kl} g_l^M (g_{ML} + U_{ML})$$

という関係を式 (a) の左辺に代入すると

$$g_k^K x^k|_L = g_k^K g^{kl} g_l^M (g_{ML} + U_{ML}) = g^{KM} (g_{ML} + U_{ML}) = g_L^K + U^K|_L$$

となる。 $g_{ML} \equiv \mathbf{g}_M \cdot \mathbf{g}_L$ 等も計量テンソルである。したがって式 (a) は

$$(g_L^K + U^K|_L) d\mathbf{X}^L = d\mathbf{X}^K + U^K|_L d\mathbf{X}^L = (A + 1) d\mathbf{X}^K$$

となるので、これから

$$(U^K|_L - A \delta_L^K) d\mathbf{X}^L = 0 \quad (b)$$

を得る。 δ_L^K は Kronecker のデルタである。この式 (b) が成立するためには、ある実数 A に対して括弧の係数が零になればいいので

$$\det(U^K|_L - A \delta_L^K) = 0$$

が成立すればいいことになり、つまり変位勾配 $(U^K|_L)$ の固有値の少なくとも一つが実数になるのであれば証明できたことになる。対象は 3 次元問題なのでこの式は A の 3 次方程式になり、それは必ず少なくとも一つの実根を持つことから、この証明が終わる。さて、正しいかな?

12.2.2 変形と運動の変化率

(1) ひずみ速度

有限変形する材料のほとんどが示すだろう塑性の流れ則は、第 11 章で説明したようにひずみの増分あるいは変化率・速度で定義されている。したがって、有限変形の枠組の中でもひずみ増分を適切に定義する必要がある。しかもそのひずみ増分は、ある現配置における瞬間的な増分で表されることから、まず Euler 的な変化率¹⁴をここでは求めておこう。ある物質点 \mathbf{X} が現配置 \mathbf{x} で持っている速度 $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ は

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = V_I(\mathbf{X}, t) \mathbf{g}_I \equiv \frac{\partial x_i(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \mathbf{g}_I = \dot{x}_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_I = \dot{x}_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_i = v_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_i = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (12.49)$$

¹⁴ 実に変形の変化率のほとんどは updated Lagrange 的な量であるような気がする。

で定義できる。上付きドットは時間（配置あるいは変形履歴）による微分を表す。したがって変形勾配の変化率は

$$\dot{F}_{iJ} = \dot{x}_{i,J} = v_{i,J} = v_{i,k} x_{k,J}, \quad \dot{F} = \mathbf{l} \mathbf{F}, \quad l_{ik} \equiv v_{i,k} \quad (12.50a, b, c)$$

と書くことができる。ここに $\mathbf{l}(\mathbf{x})$ は速度勾配と呼ばれ

$$\mathbf{l} = \dot{F} \mathbf{F}^{-1}, \quad (l) = (\dot{F})(F)^{-1} = (\partial v) \quad (12.51a, b)$$

という関係がある。

次に、式(12.9)の Green のひずみの変化率は

$$\begin{aligned} \dot{E}_{IJ} &= \frac{1}{2} (\dot{F}_{kI} F_{kJ} + F_{kI} \dot{F}_{kJ}) = \frac{1}{2} (l_{km} F_{mI} F_{kJ} + F_{kI} l_{km} F_{mJ}) \\ &= \frac{1}{2} (l_{km} F_{mI} F_{kJ} + l_{mk} F_{mI} F_{kJ}) = \frac{1}{2} (l_{mk} + l_{km}) F_{mI} F_{kJ} \end{aligned}$$

となることから

$$\dot{E}_{IJ} = d_{mk} F_{mI} F_{kJ}, \quad d_{mk} \equiv \frac{1}{2} (l_{mk} + l_{km}) = \frac{1}{2} (v_{m,k} + v_{k,m}), \quad (12.52a, b)$$

$$\dot{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{d} \mathbf{F}, \quad (\dot{E}) = (\mathbf{F})^T (\mathbf{d}) (\mathbf{F}), \quad \mathbf{d} = \frac{1}{2} (\mathbf{l} + \mathbf{l}^T), \quad (\mathbf{d}) = \frac{1}{2} \{(\mathbf{l}) + (\mathbf{l})^T\} \quad (12.52c, d, e, f)$$

と表すことができる。この $\mathbf{d}(\mathbf{x})$ は変形速度と呼ばれる。速度勾配には回転速度成分を含むが、変形速度には変形勾配つまり回転成分が式(12.52c)のように左右から乗じられて回転を除去しているため、変形速度はひずみ速度の代表的な量であることがわかる。これはちょうど式(3.6)で定義した微小変形理論のひずみの速度版のように見えることから、この増分で表した定式化を微小変形理論のものだと誤解する人もいるので注意しなければならない。上式の各量は現配置 \mathbf{x} で定義されている上に、微分も空間固定座標あるいは現位置でとられている（添え字のコンマの次の文字が小文字である）ことに注意すべきである。詳細は後述するが、少し乱暴に、例えば d_{11} を具体的に書くと

$$d_{11} = \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} \simeq \frac{\Delta \dot{x}_1}{\Delta x_1} = \frac{(\Delta x_1)'}{\Delta x_1} = \{\ln(\Delta x_1)\}'$$

と解釈できることから、前節の最後に解説したように、変形速度は対数ひずみの変化率に相当していることがわかる。正確な対数ひずみ速度はあとで定義する。

(2) 回転速度 (スピン)

これに対しスピンを定義する。まず前節の極分解の定理式(12.17)で定義した回転 \mathbf{R} が運動に含まれる回転成分を表しているため、その時間変化率でスピンを定義することができる。つまり

$$\dot{\mathbf{R}} = \boldsymbol{\omega}^R \mathbf{R}, \quad \dot{R}_{iJ} = \omega_{ik}^R R_{kJ}, \quad (\dot{R}) = (\boldsymbol{\omega}^R)(R) \quad (12.53a, b, c)$$

のような $\boldsymbol{\omega}^R(\mathbf{x})$ はスピンの尺度の代表である。あるいは変形の主方向の変化、つまり \mathbf{U} や \mathbf{v} の主方向の $\mathbf{N}^{(I)}$ や $\mathbf{n}^{(i)}$ の変化率で

$$\dot{\mathbf{N}}^{(I)} = \boldsymbol{\Omega}^L \cdot \mathbf{N}^{(I)}, \quad \dot{N}_J^{(I)} = \Omega_{JK}^L N_K^{(I)}, \quad (\dot{N}) = (\boldsymbol{\Omega}^L)(N), \quad (12.54a, b, c)$$

$$\dot{\mathbf{n}}^{(i)} = \boldsymbol{\omega}^E \cdot \mathbf{n}^{(i)}, \quad \dot{n}_j^{(i)} = \omega_{jk}^E n_k^{(i)}, \quad (\dot{n}) = (\boldsymbol{\omega}^E)(n) \quad (12.54d, e, f)$$

のような $\boldsymbol{\Omega}^L(\mathbf{X})$ や $\boldsymbol{\omega}^E(\mathbf{x})$ でスピン¹⁵を定義 [72] することもできる。このように定義すると、式(12.31)から

$$(\dot{n}) = (\dot{R})(N) + (R)(\dot{N}) = (\boldsymbol{\omega}^R)(R)(N) + (R)(\boldsymbol{\Omega}^L)(N) = (\boldsymbol{\omega}^E)(n) = (\boldsymbol{\omega}^E)(R)(N)$$

¹⁵ $N_K^{(I)} N_K^{(J)} = \delta^{IJ}$, $n_k^{(i)} n_k^{(j)} = \delta^{ij}$ と定義している (δ^{IJ} と δ^{ij} も Kronecker のデルタ) ことからスピンの反対称性 $\Omega_{MN}^L = -\Omega_{NM}^L$, $\omega_{mn}^E = -\omega_{nm}^E$ を示すことができる。

となることから、右から $(N)^T(R)^T$ を乗じて

$$(\omega^E) = (\omega^R) + (R)(\Omega^L)(R)^T, \quad \omega_{ij}^E = \omega_{ij}^R + R_{iM} R_{jN} \Omega_{MN}^L \quad (12.55a, b)$$

というお互いの間の関係を得る。

しかしここでは、上式(12.52)の変形速度に対応したスピンも定義しておこう。つまり現配置で考えることに限定すれば、それは通常の回転ベクトル ω の成分¹⁶として考えればいいので、交代記号を用いて

$$\omega \equiv \frac{1}{2} \partial \times v \quad \rightarrow \quad \omega_i \equiv \frac{1}{2} e_{ijk} \partial_j v_k = \frac{1}{2} e_{ijk} v_{k,j} = -e_{ijk} \frac{1}{2} (v_{j,k} - v_{k,j})$$

でも回転が定義できる。ただし、この式中の下線の付いた指標には総和規約を適用しない。この回転ベクトルの成分から類推して

$$w_{ij} \equiv \frac{1}{2} (l_{ij} - l_{ji}) = \frac{1}{2} (v_{i,j} - v_{j,i}), \quad (w) = \frac{1}{2} \{ (l) - (l)^T \} \quad \rightarrow \quad \omega_i = -\frac{1}{2} e_{ijk} w_{jk} \quad (12.56a, b, c)$$

によって最も基本的なスピンを定義することができる。このスピン $w(x)$ の定義については、添え字の順番が逆になっている文献もあるので注意すること。このように定義しておけば、速度勾配との間には

$$l_{ij} = d_{ij} + w_{ij}, \quad l = d + w, \quad (l) = (d) + (w) \quad (12.57a, b, c)$$

という関係が成り立つので、変形速度 d とスピン w はそれぞれ速度勾配 l の対称成分と反対称成分である。他のスピンとの関係は後述する。

(3) 体積変化率

さて、式(12.13)の体積変化の変化率も求めておこう。単に時間微分をとることによって

$$\begin{aligned} j &= \frac{\partial (\frac{1}{6} e_{ijk} e_{IJK} F_{iI} F_{jJ} F_{kK})}{\partial t} = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{IJK} (\dot{F}_{iI} F_{jJ} F_{kK} + F_{iI} \dot{F}_{jJ} F_{kK} + F_{iI} F_{jJ} \dot{F}_{kK}) \\ &= \frac{1}{6} (e_{ijk} e_{IJK} v_{i,m} F_{mI} F_{jJ} F_{kK} + \dots) = \frac{1}{6} (v_{i,m} e_{ijk} e_{mjk} J + \dots) = \frac{1}{6} (v_{i,m} 2\delta_{im} J + \dots) \\ &= \frac{1}{6} (2v_{i,i} J + 2v_{i,i} J + 2v_{i,i} J) = J v_{i,i} \end{aligned}$$

となるので

$$j = J d_{kk} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{dv}{dV} \right)' = \frac{dv}{dV} d_{kk} \quad (12.58)$$

という関係がある。これから密度の変化則を求めるために、質量保存則の式(12.14)の時間微分をとり、上式(12.58)を代入すると

$$\dot{\rho}_0 = 0 = \dot{\rho} J + \rho \dot{J} = \dot{\rho} J + \rho d_{kk} J \quad \rightarrow \quad \dot{\rho} + \rho d_{kk} = 0 \quad (12.59)$$

となる。質量保存則のもう一つの表現である。ちなみにこのことから、完全流体のように体積が変化できない材料の非圧縮性の条件は

$$j = 0 \quad \rightarrow \quad d_{kk} = 0 \quad (12.60)$$

となり、流体力学の世界ではなぜかこれが連続の式と呼ばれている。

¹⁶ あるいは角速度とか渦度と呼ばれる。

(4) 加速度と物質微分

最後に、運動方程式に現れる慣性項の加速度を定義しておこう。加速度 $\mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$ は速度の変化率だから単純に

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}, t) \equiv \dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x}, t) = a_i(\mathbf{x}, t) \mathbf{g}_i \quad (12.61)$$

であることには間違い無いが、慣性項に使われる加速度は物体のある「物質点」 \mathbf{X} が持っている加速度でなければならない。つまり \mathbf{X} の関数として定義された速度の変化率でなければならないのだ。上の式に書いたように、 \mathbf{a} は「場所」 \mathbf{x} の関数として取り扱うものの、この位置 \mathbf{x} そのものも、ある物体の「物質点」と時間の関数つまり $\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$ になるため、いわゆる連鎖律によって、次のような演算が必要になる。

$$a_i(\mathbf{x}, t) = \dot{v}_i(\mathbf{x}, t) = \dot{v}_i(\mathbf{x}(\mathbf{X}, t), t) = \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial v_i(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + v_{i,j}(\mathbf{x}, t) v_j(\mathbf{x}, t) \quad (12.62)$$

つまり上付きのドットは、実はある物体の「物質点」を追跡した場合の時間変化率の算定になっており

$$\frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\mathcal{D}v_i}{\mathcal{D}t} = \dot{v}_i \equiv \frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (12.63)$$

の微分操作を物質微分と呼び、その変化率を物質導関数と呼んでいる。この第 2 項は流体力学（水理学）で習う Navier-Stokes の式にも現れる重要な項で移流項と呼ばれている。このように、Euler 的な量の Lagrange 的な時間変化率を算定する場合には注意が必要である。この節の始めに Euler 的な記述と書いたが、確かに「場所」 \mathbf{x} の関数としての量を取り扱ってはいるものの、実際には連続体の力学なので、実は物体の「物質点」 \mathbf{X} を追跡していることには常に注意が必要だ。だから Lagrange 的な加速度 $\mathbf{A}(\mathbf{X}, t)$ は単純に

$$\mathbf{A}(\mathbf{X}, t) \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial \mathbf{V}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} = \dot{\mathbf{V}}(\mathbf{X}, t) \quad (12.64)$$

で定義される。具体的な例でわかり易いのは向心力である。Euler 的な場合はコップの中にある水の回転で求めた式 (3.164a) のように移流項から向心力が求められていたのに対し、Lagrange 的な場合は式 (9.14) のように物体に貼り付けた基底ベクトルの変化が向心力を生んでいるように見える。

(5) 例で確かめる変形と運動の変化率の定義間の違い

直交伸び運動の例： 最初は図 12.2 の例で変化率を求めてみよう。式 (12.35a) の \mathbf{R} の時間微分と式 (12.37) の $\mathbf{n}^{(n)}$ の時間微分とから

$$\left(\omega^R \right) = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \left(\omega^E \right) = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と両方が一致する。したがって式 (12.55) に代入すれば $\boldsymbol{\Omega}^L = 0$ を得るが、それは式 (12.36) の $\mathbf{N}^{(N)}$ が定数であることから求められる。この例は、例えば初期配置において x_1, x_2 方向に直交する繊維の向きを合わせた布だと想定すると、変形して全体は α だけ回転しているが、布にとってはそれぞれの繊維がお互いに直交したまま、その繊維方向にだけ伸び縮みさせられているだけだ。つまり、材料そのものは変形の向きが変わったようには感じないのである。このように、この $\boldsymbol{\Omega}^L$ は物体と一緒に回転している立場から見た変形状態のスピンだから、この例では零になっているのだ。

次に式 (12.34) の変形勾配 \mathbf{F} を時間微分することによって、速度勾配が

$$\left(l \right) = \begin{pmatrix} \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \cos^2 \alpha + \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} \sin^2 \alpha & -\dot{\alpha} + \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \dot{\alpha} + \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \sin^2 \alpha + \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} \end{pmatrix}$$

と求められる。これを式 (12.52) に代入すれば変形速度は

$$(d) = \begin{pmatrix} \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \cos^2 \alpha + \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} \sin^2 \alpha & \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} \sin \alpha \cos \alpha & 0 \\ \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \sin \alpha \cos \alpha - \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} \sin \alpha \cos \alpha & \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} \sin^2 \alpha + \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} \cos^2 \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} \end{pmatrix}$$

となるが、実はこれを眺め直すと

$$(d) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (n) [(\ln \Lambda) \cdot] (n)^T$$

という関係にあることがわかる。つまり Euler 的（否、後述の updated Lagrange 的）に見た、ある場所の対数ひずみ速度に相当するのだ。つまり、Euler 的な主方向（図 12.2 の変形後の直方体の各辺の方向）に対数ひずみ速度で単純に伸び変形しつつある状態であることがわかる。一方、式 (12.56) に速度勾配を代入すれば

$$(w) = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

と求められる。これは先に求めた ω^R, ω^E に一致する。どちらに近いスピンなのかについては後述する。物理的には $\dot{\alpha}$ の速度で回転していることが明らかである。

非回転運動の例： 次に図 12.3 の例で計算しておこう。まず、これは非回転運動であることは明らかだから

$$\omega^R = \mathbf{0}, \quad \omega^E = \mathbf{0}, \quad \Omega^L = \mathbf{0}$$

となる。次に式 (12.34) の変形勾配 F を時間微分することによって速度勾配が求められ、それを式 (12.52) に代入すれば変形速度が求められる。この例では回転していないので、それは一致し

$$(l) = (d) = \begin{pmatrix} \frac{\dot{a}}{a} - \dot{\gamma} \tan 2\gamma & \frac{\dot{\gamma}}{\cos 2\gamma} & 0 \\ \frac{\dot{\gamma}}{\cos 2\gamma} & \frac{\dot{a}}{a} - \dot{\gamma} \tan 2\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} \end{pmatrix}$$

と求められる。伸び縮みを主に表す対角項にも角度の変化速度 $\dot{\gamma}$ が含まれるので、物理的にはわかり難く見えるが、実はこの場合も式 (12.40) の主ストレッチと式 (12.41) の主方向を用いると、前例と同様

$$(d) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (n) [(\ln \Lambda) \cdot] (n)^T$$

という関係を得ることができる。やはり変形速度は対数ひずみ速度に相当している。

一般的な運動の例: 以上の 2 例では, 材料が感じる変形の主方向に変化が無い ($\dot{\Omega}^L = 0$) 特殊な例だったので, もう少し一般化して

$$(R) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (N) = \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad [\Lambda] = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix}$$

という変形を考えてみよう。これは, 材料にとっての変形の主方向が時々刻々変化 (γ) しながら, 伸び縮み (Λ_I) と剛体的な回転 (α) を伴う一般的な運動である。簡単のために x_3 軸に関する項をすべて省略する。前節までの各関係式や定義に代入していくと, 以下のような結果が得られる。

$$(U) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \cos^2 \gamma + \Lambda_2 \sin^2 \gamma & (\Lambda_1 - \Lambda_2) \sin \gamma \cos \gamma \\ (\Lambda_1 - \Lambda_2) \sin \gamma \cos \gamma & \Lambda_1 \sin^2 \gamma + \Lambda_2 \cos^2 \gamma \end{pmatrix}, \quad (n) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma + \alpha) & -\sin(\gamma + \alpha) \\ \sin(\gamma + \alpha) & \cos(\gamma + \alpha) \end{pmatrix}$$

であり, スピンはそれぞれ

$$(\omega^R) = \dot{\alpha} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\omega^E) = (\dot{\gamma} + \dot{\alpha}) \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\Omega^L) = \dot{\gamma} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となる。材料が感じる歪みの向きが変化する回転成分が Ω^L であり, 歪みとは関係無く剛体的に回転する成分が ω^R になっている。これを用いて

$$(F) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \cos \gamma \cos(\gamma + \alpha) + \Lambda_2 \sin \gamma \sin(\gamma + \alpha) & \Lambda_1 \sin \gamma \cos(\gamma + \alpha) - \Lambda_2 \cos \gamma \sin(\gamma + \alpha) \\ \Lambda_1 \cos \gamma \sin(\gamma + \alpha) - \Lambda_2 \sin \gamma \cos(\gamma + \alpha) & \Lambda_1 \sin \gamma \sin(\gamma + \alpha) + \Lambda_2 \cos \gamma \cos(\gamma + \alpha) \end{pmatrix}$$

を得る。この時間微分等を用いれば

$$\begin{aligned} (d) &= (n) [(\ln \Lambda) \cdot] (n)^T - \frac{\dot{\gamma} (\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)}{2\Lambda_1 \Lambda_2} \begin{pmatrix} \sin 2(\gamma + \alpha) & -\cos 2(\gamma + \alpha) \\ -\cos 2(\gamma + \alpha) & -\sin 2(\gamma + \alpha) \end{pmatrix} \\ &= (n) [(\ln \Lambda) \cdot] (n)^T - \frac{\dot{\gamma} (\Lambda_1^2 - \Lambda_2^2)}{2\Lambda_1 \Lambda_2} (n) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} (n)^T \\ (w) &= (\omega^R) - \frac{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2}{2\Lambda_1 \Lambda_2} (\Omega^L) \end{aligned}$$

と求められる。いずれも第 2 項が $\dot{\gamma}$, つまり材料にとっての力の主方向の変化率に関連した項である。これは, 大きなせん断変形 ($\Lambda_1 - \Lambda_2$) が存在する場の, それぞれせん断変形の変化率とスピン成分なのだ。特に変形速度の第 2 項は跡が零になるので体積変化を伴わない成分である。また非対角項しか存在せず, ($\Lambda_1 - \Lambda_2$) のせん断変形に変化率 $\dot{\gamma}$ が乗算されていることから, せん断変形速度成分になっていることもわかる。ただし, スピンの第 2 項は比較的変形が小さい段階, つまり $\Lambda_1 \rightarrow 1 + \epsilon_1, \Lambda_2 \rightarrow 1 + \epsilon_2$ の近似をすると

$$\frac{(\Lambda_1 - \Lambda_2)^2}{2\Lambda_1 \Lambda_2} \rightarrow \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{2}$$

のように, 第 1 項に比べて無視できる 2 次項になる。したがって, スピンの場合は第 1 項が物理的には主要な意味を与えてくれると考えていいだろう。結局, 極分解したときの回転 R の変化率 ω^R が主なスピンであると考えられる。

(6) 変形と運動の変化率の物理的な意味 — 変形速度って何だ?

少しわかり難いかもしれないが, 厳密に物理的な意味を明らかにしてみよう。スペクトル表示を用いると便利なので行列計算を行う。式 (12.17) の変形勾配を時間微分すると

$$(\dot{F}) = (\dot{R})(U) + (R)(\dot{U}) = (\omega^R)(F) + (R)(\dot{U})$$

となる。これを式 (12.51) に代入して式 (12.17) を用いて整理すると

$$(l) = (\omega^R) + (R)(\dot{U})(U)^{-1}(R)^T \quad (*)$$

を得る。一方、式 (12.22b) の U のスペクトル表示を用いて整理すると

$$\begin{aligned} (\dot{U})(U)^{-1} &= \left((\Omega^L)(N)[\Lambda](N)^T + (N)[\dot{\Lambda}](N)^T + (N)[\Lambda](N)^T(\Omega^L)^T \right) (N) \left[\frac{1}{\Lambda} \right] (N)^T \\ &= (\Omega^L) + (N) \left[\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right] (N)^T + (U)(\Omega^L)^T(U)^{-1} \end{aligned}$$

となるので、これを上式 (*) に代入して式 (12.17) (12.31) を考慮すると

$$(l) = (\omega^R) + (R)(\Omega^L)(R)^T + (n) \left[\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right] (n)^T - (F)(\Omega^L)(F)^{-1}$$

と表現できることがわかる。速度勾配の表現のままでは、特に最後の項はまだ少しわかり難い。

最終的に、これを式 (12.52) に代入すれば、変形速度は

$$(d) = (d^L) + (d^{EV}), \quad d = d^L + d^{EV} \quad (12.65a, b)$$

と分解して表すことができる。この第1項の d^L は

$$(d^L) \equiv (n) \left[\frac{\dot{\Lambda}}{\Lambda} \right] (n)^T = (n) [(\ln \Lambda)] (n)^T \quad (12.66)$$

で定義される、対数ひずみ速度 d^L である。また第2項の d^{EV} は

$$(d^{EV}) \equiv -\frac{1}{2} \left[(F)(\Omega^L)(F)^{-1} + \left((F)(\Omega^L)(F)^{-1} \right)^T \right] \quad (12.67)$$

となるが、さらに式 (12.25) を用いて Euler 的表現にして式 (12.55) を用いると

$$(d^{EV}) \equiv -\frac{1}{2} \left[(v)((\omega^E) - (\omega^R))(v)^{-1} + \left((v)((\omega^E) - (\omega^R))(v)^{-1} \right)^T \right] \quad (12.68)$$

のように対称テンソルとして定義されるが、これが、前節の最後の例で現れた主軸の回転に伴って大きなせん断ひずみが生み出すせん断変形速度である。

ところで、この式 (12.65) の跡を求めると、式 (12.58) の体積変化の表現から

$$\text{tr}(\text{左辺}) = d_{kk} = \frac{J}{J}, \quad \text{tr}(\text{右辺第1項}) = \text{tr}(d^L) = \frac{\dot{\Lambda}_1}{\Lambda_1} + \frac{\dot{\Lambda}_2}{\Lambda_2} + \frac{\dot{\Lambda}_3}{\Lambda_3} = \frac{(\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3)'}{\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3} = \frac{J}{J}$$

であることから、第2項の跡は零

$$\text{tr}(\text{右辺第2項}) = \text{tr}(d^{EV}) = 0$$

になる。つまり、第1項の対数ひずみ速度 d^L は非回転変形速度成分（体積変化速度）であり、第2項 d^{EV} は等体積変形速度成分（せん断変形速度）になっていて、物理的にはとてもわかり易い。ただ注意して欲しいのは、対数ひずみ速度は対数ひずみ E^L の変化率ではないことだ。つまり、式 (12.46) の変化率を求めたとき

$$(\dot{E}^L) = (\Omega^L)(E^L) + (N)[(\ln \Lambda)](N)^T + (E^L)(\Omega^L)^T \neq (d^L) \quad (12.69)$$

になっていることには十分注意する必要がある。

一方スピンは、式 (12.56) に式 (*) を代入すれば

$$(w) = (\omega^R) + \left\{ (R)(\Omega^L)(R)^T - \frac{1}{2} \left[(F)(\Omega^L)(F)^{-1} + \left((F)^{-1} \right)^T (\Omega^L)(F)^T \right] \right\} \quad (12.70)$$

と求められる。前節の最後の例でもわかるように、中括弧でくくった第 2 項が主軸のスピン $\boldsymbol{\Omega}^L$ に伴って大きなせん断ひずみが生み出すスピンに相当する。ちなみに、スピンの右辺の最初の 2 項は式 (12.55) の関係を用いればまとめることができ

$$(\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega}^E) - \frac{1}{2} \left[(F)(\boldsymbol{\Omega}^L)(F)^{-1} - ((F)(\boldsymbol{\Omega}^L)(F)^{-1})^T \right] \quad (12.71)$$

あるいは、式 (12.68) の誘導と同様

$$(\boldsymbol{\omega}) = (\boldsymbol{\omega}^E) - \frac{1}{2} \left[(v)((\boldsymbol{\omega}^E) - (\boldsymbol{\omega}^R))(v)^{-1} - ((v)((\boldsymbol{\omega}^E) - (\boldsymbol{\omega}^R))(v)^{-1})^T \right] \quad (12.72)$$

のような反対称テンソルとして表されるが、前節の例からもわかるように、比較的変形が小さい場合の主要項は $\boldsymbol{\omega}^R$ になるので、式 (12.70) の表現に留めておいた ($\boldsymbol{\omega}^E$ は用いない) 方がいいだろう。

演習問題 12-2

2. 第 12.2.2 (5) 節で用いた三つの例のひずみとその変化率を自ら求めてみよ。手を動かさないままこれ以下を読むと怪我をしますよ。

12.2.3 弾性ひずみ速度と塑性ひずみ速度

(1) 加算則と乗算則

さて異なるメカニズムの変形が、例えば塑性変形が生じたあと弾性変形が生じるような 2 段階の変形が初期配置から追跡できたとして、よく

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^e \boldsymbol{F}^p$$

という記述がなされる。ここに、上添え字の ‘e’ は弾性変形による成分を、‘p’ は塑性変形の成分を示している。つまり、ある仮想的な中間配置を定義して全体の変形勾配を、塑性変形が発生したあとにその非適合変形を補うために弾性変形が発生すると考えているのである。これはよく乗算則 (乗算分解)¹⁷と呼ばれている。しかし、これは単なる偏微分の連鎖律に過ぎない。物理的に例えば流れ則は積分できないこと等を考えると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(0)} \equiv \boldsymbol{X}(t=0), \quad \boldsymbol{x}^{(n)} \equiv \boldsymbol{x}(t), \quad \boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_m^e \boldsymbol{F}_j^p \cdots \boldsymbol{F}_4^e \boldsymbol{F}_3^p \boldsymbol{F}_2^e \boldsymbol{F}_1^e, \\ \boldsymbol{x}^{(0)}(t=0) \xrightarrow{\text{弾性}} \boldsymbol{x}^{(1)}(t=\Delta t) \xrightarrow{\text{弾性}} \cdots \boldsymbol{x}^{(k)}(t=k\Delta t) \xrightarrow{\text{塑性}} \boldsymbol{x}^{(k+1)}(t=(k+1)\Delta t) \xrightarrow{\text{弾性}} \cdots \\ \cdots \boldsymbol{x}^{(n-1)}(t=(n-1)\Delta t) \xrightarrow{\text{塑性}} \boldsymbol{x}^{(n)}(t=n\Delta t) \xrightarrow{\text{弾性}} \boldsymbol{\xi}(t+\Delta t) \end{aligned}$$

のように位置が時々刻々更新したと考える方が一般的で素直だろう。したがって変形勾配は、連鎖律により

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial X_N} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_m} \frac{\partial x_m}{\partial X_N}, \quad \frac{\partial x_m}{\partial X_N} = \prod_{k=n}^1 \frac{\partial x_{i_k}^{(k)}}{\partial x_{j_k}^{(k-1)}}, \quad i_n = m, \quad j_1 = N, \quad j_k = i_{k-1}$$

のように、時々刻々の乗算則になる。 \prod' にプライムを付けたのは、 k を n から 1 ずつ減ずることを意味している。このような順番で変形が起きたとすれば

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}, t + \Delta t) = \boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X}, t), t + \Delta t)$$

のように考えればいいので、最終的な変形勾配は単純な連鎖律で

$$\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial X_J} = \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial X_J}, \quad \xi_{\alpha,J} = \xi_{\alpha,k} x_{k,J}$$

¹⁷ Asaro [4] の論文を元にしたようで、Asaro は結晶金属の弾塑性変形概念について乗算則で説明しているが、実際にはこの節のような加算則の説明をしているだけだと思うのだが。

のような乗算で表現できる。

この変化率を、最終的な現配置 $t = t + \Delta t$ でとると

$$\dot{\xi}_{\alpha,J} = \dot{\xi}_{\alpha,\beta} \xi_{\beta,k} x_{k,J} + \xi_{\alpha,l} \dot{x}_{l,k} x_{k,J}$$

となる¹⁸ので、これを用いて最終的な速度勾配 $l_{\alpha\eta}(t + \Delta t)$ を算定すると

$$l_{\alpha\eta} \equiv \dot{\xi}_{\alpha,J} X_{J,\eta} = \dot{\xi}_{\alpha,\beta} \xi_{\beta,k} x_{k,J} X_{J,\eta} + \xi_{\alpha,l} \dot{x}_{l,k} x_{k,J} X_{J,\eta} = \dot{\xi}_{\alpha,\eta} + \xi_{\alpha,k} \dot{x}_{k,l} \xi_{\eta,l}^{-1}$$

という関係を得る。現配置の瞬間的な変形率（後述第 12.4 節の updated Lagrange 的な量）を考えているので、添え字には大文字が現れていないことに注意して欲しい。第 2 項の $\dot{x}_{k,l}$ が配置 $t = t$ で定義されているのに対し、左辺の速度勾配は現配置の $t = t + \Delta t$ で定義されているので、第 2 項にはその補正 $\xi_{\alpha,k}$ と $\xi_{\eta,l}^{-1}$ が必要になる。ただ塑性論の特性により、変形履歴ステップ Δt は十分小さくとらざるを得ないことから、そのステップが弾性変形であろうと塑性変形であろうと、この補正の $\xi_{\alpha,k}$ と $\xi_{\eta,l}^{-1}$ はほとんど Kronecker のデルタになり、 $\xi_{\alpha,k} \approx \delta_{\alpha k}$ 、 $\xi_{\eta,l}^{-1} \approx \delta_{\eta l}$ と考えてよく、したがって近似的に加算則（加算分解）の

$$l_{\alpha\eta} \approx \dot{\xi}_{\alpha,\eta} + \dot{x}_{\alpha,\eta}$$

ができると考え [127] でもいい。これが加算則が近似であるという立場からの解釈である。

あるいは上式の第 2 項を第 1 項と同じ配置 $t = t + \Delta t$ で

$$\dot{x}_{\alpha,\eta}^M \equiv \xi_{\alpha,k} \dot{x}_{k,l} \xi_{\eta,l}^{-1} \rightarrow l_{\alpha\eta} = \dot{\xi}_{\alpha,\eta} + \dot{x}_{\alpha,\eta}^M$$

と定義し直した上で、加算則が厳密に成立する [4, 71] と考えるのも素直だろう。というのも、加算される二つの量はいずれも同じ配置で定義されていなければならないからだ。実際、材料試験の様子を考えてみると、[弾性 | 塑性] 変形だけを測定したあと

に、別の変形として [塑性 | 弾性] 変形成分を測定しているわけではない。ある荷重増分に対して d がどのように変化するのか測定しつつ、右辺のどちらかの量を例えば除荷のような手段で弾性成分を測定するといった、同じ配置からの観察で同時に測定（発生）している。つまり、上の式に現れる量のうち試験で測定しているのは $\dot{\xi}_{\alpha,\eta}$ と $\dot{x}_{\alpha,\eta}^M$ だと考えるのは素直だろう。だから加算則も厳密に成立すると理解しても構わない。材料の身になって考えてみると、例えば図 12.6 のように、転位が試験片の表面に出た瞬間、中央の図に示したように引張試験の載荷軸にずれ（非適合）が生じようとする。そのとき前節最後の例の記号と使うと、この塑性的なずれを、さらなる塑性的な回転と弾性的な回転を合わせた $\dot{\alpha}$ で回転させ、また材料中の主軸も $\dot{\gamma}$ で回転させると同時にそれに見合う弾塑性的なせん断変形も生じさせた上で、載荷軸のずれを解消して一番右の状態（適合な変形状態）に落ち着く。そしてこの二つのメカニズムが、転位が表面および結晶粒子界面に達する度に時々刻々生じている。そして通常、この弾性的な変形と塑性的な変形の $\dot{\xi}_{\alpha,\eta}$ と $\dot{x}_{\alpha,\eta}^M$ は同時に起き、測定される。したがって、弾塑性理論では変形速度もスピンも弾性成分と塑性成分の加算で

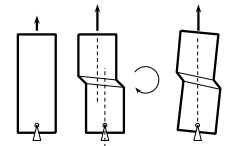


図 12.6 塑性と弾性

$$d(x) = d^e(x) + d^p(x), \quad w(x) = w^e(x) + w^p(x) \tag{12.73a, b}$$

が成立するとしている。ただもちろん第 11.2.3 節や第 11.3.3 節で示したように流れ則は積分不可能であることから、有限変形の場合にはどのようなひずみ尺度 ϵ を用いたとしても

$$\epsilon(x) \neq \epsilon^e(x) + \epsilon^p(x), \quad \epsilon(X) \neq \epsilon^e(X) + \epsilon^p(X) \tag{12.74a, b}$$

であることには十分注意する必要がある。構成則が増分理論で定義されている場合には、実際の数値解析でも、求められた速度 v から現配置の位置ベクトルを求めるだけで十分であり、何らかのひずみ尺度そのものを求める必要は生じない。

¹⁸ 流れ則が積分できないことは、ここでは知らなかったことにする。

(2) 極端な比較

一例として第 3.4.4 節で検討した熱ひずみを対象にしてみよう。無限体の中の半径 a_0 の球（円柱）領域の温度を 0°C から $T^\circ\text{C}$ に変化させたとき、球と周りの無限体の間の圧力が 0 から p になって半径が a になったとする。このとき、自由空間に球を置いて温度を変化させて半径が a_T^s になったとすると、それに対する変形勾配は

$$F_T^s \equiv \frac{a_T^s}{a_0} = 1 + \alpha T$$

となる。ここに α は線膨張係数である。次に、この球に圧力 p を作用させて変形を小さくして半径が最終的な a になったとすると、これに対する変形勾配は

$$F_p^s \equiv \frac{a}{a_T^s} = 1 + \frac{p}{\bar{K}^s}$$

である。ここに \bar{K}^s は圧力 p に対する見かけの剛性である。したがって乗算則を用いて総変形勾配は

$$F^s \equiv \frac{a}{a_0} = F_p^s \times F_T^s = \left(1 + \frac{p}{\bar{K}^s}\right)(1 + \alpha T)$$

と求められる。一方、周りの無限体に作用させた p による変形勾配は

$$F \equiv \frac{a}{a_0} = 1 + \frac{p}{\bar{K}}$$

となる。ここに \bar{K} も見かけの剛性である。球と周りの物体が元の連続体に戻る（整合する）ためには

$$F = F^s$$

を満足しなければならないので、上の 3 式をこれに代入して整理すると

$$\frac{p}{\bar{K}} = \frac{\alpha T}{1 - \frac{\bar{K}}{\bar{K}^s}(1 + \alpha T)}$$

が必要な反力になる。したがって最終的な半径は

$$\frac{a}{a_0} = \frac{1 + \alpha T}{1 - \frac{\bar{K}}{\bar{K}^s - \bar{K}} \alpha T} \quad (12.75)$$

と求められる。

これに対し、前節でも説明したように弾性変形と非弾性変形はお互いを補償しながら同時に生じていると考えるのが素直だと考えれば、結局加算則でモデル化すればいい。つまりこの問題の場合は、微小な増分の \dot{T} と \dot{p} に対して接線的なモデルを考えればいい。まず温度変化に対する非弾性ひずみ速度 \dot{e}_T^s は

$$\dot{e}_T^s = \alpha \dot{T}$$

である。一方、圧力による弾性ひずみ速度 \dot{e}_p^s は

$$\dot{e}_p^s = \frac{\dot{p}}{\bar{K}^s} \quad (*)$$

となる。したがって、加算則を用いて総ひずみ速度 \dot{e}^s は

$$\dot{e}^s \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \dot{e}_T^s + \dot{e}_p^s = \alpha \dot{T} + \frac{\dot{p}}{\bar{K}^s}$$

と求められる。一方、周りの無限体が圧力で変化するひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ は弾性ひずみなので

$$\dot{\epsilon} \equiv \frac{\dot{a}}{a} = \frac{\dot{p}}{\bar{K}}$$

である。したがって、無限体が時々刻々連続体であり続ける（整合）条件は

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^s$$

と表されるので、これから

$$\dot{p} = \frac{\bar{K} \bar{K}^s}{\bar{K}^s - \bar{K}} \alpha \dot{T}$$

という関係が成り立たなければならない。以上を連立させれば、半径の変化率は温度変化だけで表されて

$$\frac{\dot{a}}{a} = \frac{\bar{K}^s}{\bar{K}^s - \bar{K}} \alpha \dot{T}$$

となるから、これを積分して

$$\frac{a}{a_0} = \exp\left(\frac{\bar{K}^s}{\bar{K}^s - \bar{K}} \alpha T\right) \tag{12.76}$$

が球の半径である。もちろん、式(12.75) (12.76) を Taylor 展開すると第 1 次項はどちらも同じ

$$\frac{a}{a_0} = 1 + \frac{\bar{K}^s}{\bar{K}^s - \bar{K}} \alpha T$$

になって一致する。

図 12.7 には、式(3.221) が成立すると考えたときの平面ひずみ状態の解をプロットした。線膨張係数 α はせいぜい 10^{-5} 程度なので、 $10,000^\circ\text{C}$ の温度変化があったとしても、それはこの横軸で $\alpha T \sim 0.1$ 程度に留まるので両モデル間には工学的な差異は無い。また有限変形の枠組で扱う場合の力学的モデルは本来非線形になるだろうし、ここの材料パラメータも定数とは限らないので、以上はかなり乱暴で極端な比較であることは否めない。特徴の解析的な比較のために $T \rightarrow +\infty$ の極限をとると、加算則の場合には半径が無限大になり、これは直感的には受け入れられそうもない。ちなみに、後述する各種応力速度で定義した超弾性モデルも用いた場合は式(*) を $\dot{\epsilon}_p^s = \frac{\dot{p}}{(\bar{K}^s - \zeta p)}$ で置き換えて近似できるので、式(12.76) も

$$\alpha T = \ln \frac{a}{a_0} + \frac{1}{\zeta} \ln \left[1 - \zeta \frac{\bar{K}}{\bar{K}^s} \ln \frac{a}{a_0} \right]$$

と書き換えられる。ここに、Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を用いた場合は $\zeta = 1$ で、Oldroyd 応力速度の場合は $\zeta = -2/3$ 、Truesdell 応力速度の場合は $\zeta = 1/3$ であるが、数値上は $\sigma_{ij} d_{kk}$ の項が及ぼす影響はほとんどない。一方、乗算則の場合は有界な極限

$$\frac{a}{a_0} \rightarrow \frac{\bar{K} - \bar{K}^s}{\bar{K}} < \infty$$

を持ち、平面ひずみ状態で $\nu = 1/3$ の場合は $\frac{a}{a_0} \rightarrow 4$ と $p \rightarrow 3\mu$ になるので工学的には全く意味は無いが、ある特性が有界か否かという特徴の違いは、工学的な観点からであっても非常に興味深い差異である。有限変形の枠組の中の材料モデルの構築ではとても慎重な態度が必要なことを、この極端な例は物語っているのかもしれない。

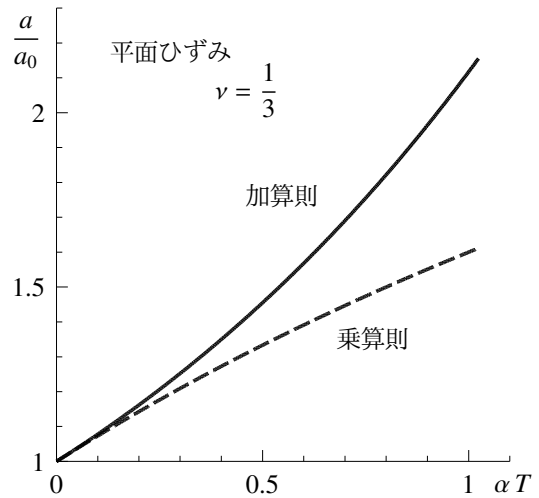


図 12.7 乗算則と加算則

12.3 応力とつり合い式および応力速度

12.3.1 基本的な応力とつり合い式

(1) Cauchy 応力と nominal 応力

前節で扱った種々の変形は幾何学的に明確に定義できる量ではあったが、材料の抵抗という物理的特性をわかり易く表す適切な尺度を有限変形の枠組で選ぶことがかなり難しいこともわかった。実は応力の定義にも同様の困難が伴う。そもそも応力が必要になる一つの理由は、Newton の法則つまりつり合い式を力で書いた方がわかり易いからだ。材料は本質的には「変形して」抵抗するのだが、その「変形」を使って「つり合い」を考えるよりも、それに対応した「抵抗力」でつり合いを考えた方がわかり易いというわけだ。もう一つの理由は、材料の抵抗の仕方つまり構成則を「抵抗力」と「変形」の関係で定義するという手法が、ちょうどバネの抵抗則と同じようになってわかり易くなるからだ。いずれにしても応力は外乱と変形の間を取り持つ数学的な量・概念¹⁹だから、使い易いように好きに自由に定義すればいいのだが、作用外力に対して材料は変形した現配置において抵抗しているのだから、Euler 的な応力でつり合いを表すのが素直だと思われる。しかし構成則の方は、ある物質点がどのような履歴を経て抵抗してきたかということをも表せないといけないから、逆に Lagrange 的な応力を定義しておいた方がいいようにも感じられる。どっちがいいだろうか。そこでここではまず代表的な二つの応力を定義し、その間の関係を求めておこう。

応力は、物体内に仮想的に定義した面に生じている抵抗力を、その面の面積で割った圧力のような量だ。しかし問題は、どの配置でその面と面積を定義するのか、さらにどの物質点に着目しているのか、そしてどの座標系でその成分を捉えようとしているのか、という点でそれぞれ複数の選択が可能になることだ。そこでまず、現配置において単位面積を定義して、その面に生じている抵抗力を、空間固定座標方向の応力として定義しよう。これは Euler 的な応力の定義になり、これはちょうど微小変形理論の式 (3.19) と図 3.9 で定義した応力と同じ定義になる。つまり図 12.8 の上に示したような配置 $t = t$ の微分面積 da に発生した抵抗力ベクトル $d\mathbf{f}$ で表面力ベクトル \mathbf{t} を

$$\mathbf{t} = t_i \mathbf{g}_i = \frac{d\mathbf{f}}{da} \quad (12.77)$$

と定義する。そして、この表面力ベクトルの空間固定基底ベクトル方向成分を、その抵抗力が発生している面の法線ベクトル \mathbf{m} を用いて

$$\mathbf{t} = \mathbf{m} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad t_i = m_j \sigma_{ji} \quad \rightarrow \quad df_i = m_j \sigma_{ji}(\mathbf{x}) da \quad (12.78)$$

のように **Cauchy 応力** (真応力) $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x})$ を定義する。実はこの定義はとてもわかり難いはずだ。法線方向から力への射影が応力になっているからだ。幾何学的・物理的に理解するためには、微小変形理論の図 3.9 の方がいい。それをカッコよく式にしたのが上の定義だと考えておいた方が健康的だ。なお、添え字の定義は図 3.10 および式 (3.19) と同じ²⁰である。

一方、鋼の引張試験で応力ひずみ曲線を描くときのように、試験機で測定した荷重を初期配置で測定した断面積で割って定義した応力も便利かつ必要かもしれない。そういった Lagrange 的な応力は、図 12.8 の下に示したように、初期配置で dA だった面が現配置の位置に移動して、そこに $d\mathbf{f}$ が発生して抵抗しているとみなせ

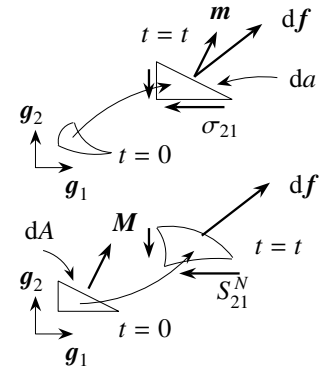


図 12.8 応力の定義

¹⁹ だって応力を直接は測定できないでしょ。応力って数学的概念に過ぎないわけだし。

²⁰ 特に有限変形の教科書では、これが逆のものの方が多いような印象を持っているので十分注意すること。

ばいい。df が発生している「物質点」は上の Cauchy 応力を定義した「場所」と同じにしたが、面積を初期配置に戻って定義し直したと考えればいい。つまり式 (12.78) に対応させて

$$df_i = M_J S_{ji}^N dA \quad (12.79)$$

のように **nominal** 応力 $S^N(X)$ が定義²¹できる。ここに M は、初期配置における面 dA の法線ベクトルである。つまり現配置で生じている表面力を初期配置の単位面積で定義した空間固定座標方向の応力になっている。もう少し詳しい物理的な意味はあとでまとめて説明する。

さてここで、初期配置の面積と現配置の面積との対応を求めておこう。初期配置の微分面積 dA は

$$dA \equiv dX \times \Delta X = e_{IJK} dX_J \Delta X_K g_I = dA M_I g_I \quad (12.80)$$

と定義できる。ここに e_{IJK} は式 (D.15) で定義した交代記号である。一方、現配置の微分面積 da も同様に

$$da \equiv dx \times \Delta x = e_{ijk} dx_j \Delta x_k g_i = da m_i g_i \quad (12.81)$$

と定義できるが、この二つは同じ物質点近傍の面積だとしたので、変形勾配を用いると

$$da m_i g_i = e_{ijk} x_{j,J} x_{k,K} dX_J \Delta X_K g_i = e_{ijk} x_{j,J} x_{k,K} dX_J \Delta X_K (\delta_{im} g_m) = e_{ijk} x_{j,J} x_{k,K} dX_J \Delta X_K (x_{i,L} X_{L,m}) g_m$$

と関係付けられる。最後の式の括弧の中は δ_{im} を故意にこのように置き換えてある。すると、式 (12.13) の Jacobian を用いて

$$\begin{aligned} da m_i g_i &= (e_{ijk} x_{i,L} x_{j,J} x_{k,K}) X_{L,m} dX_J \Delta X_K g_m = e_{LJK} J X_{L,m} dX_J \Delta X_K g_m \\ &= J X_{L,m} (e_{LJK} dX_J \Delta X_K) g_m = J X_{L,m} (dA M_L) g_m = J X_{L,i} dA M_L g_i \end{aligned}$$

という関係が得られるので、変形前後の面積は

$$m_i da = J X_{L,i} M_L dA, \quad M_I dA = \frac{1}{J} x_{k,I} m_k da \quad (12.82a, b)$$

という関係にあることがわかる。この式 (12.82) を式 (12.78) に代入し、式 (12.79) と等置すれば

$$df_i = m_j \sigma_{ji} da = J X_{L,j} M_L dA \sigma_{ji} = M_L (J X_{L,j} \sigma_{ji}) dA = M_L S_{Li}^N dA$$

となるから、二つの応力間の関係が

$$S_{ij}^N = J X_{L,i} \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \frac{1}{J} x_{i,I} S_{Ij}^N, \quad S^N = J F^{-1} \sigma, \quad \sigma = \frac{1}{J} F S^N, \quad (12.83a, b, c, d)$$

$$\text{あるいは } S_{ij}^N = \frac{\rho_0}{\rho} X_{L,i} \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} x_{i,I} S_{Ij}^N \quad (12.83e, f)$$

のように求められる。テンソルの直接表記と称して、よく

$$\sigma = \sigma_{ij} g_i \otimes g_j, \quad S^N = S_{ij}^N G_I \otimes g_j \quad (12.84a, b)$$

と書かれることがあるが、応力成分の最初の添え字が面積の法線を定義する基底ベクトルを表して²²おり、二つ目の添え字が応力の向きを定義する基底ベクトルを表している。

²¹ ほとんどすべての文献 (例えば [61]) では、この **nominal** 応力を第 1 Piola-Kirchhoff 応力と呼んでいる。実際、文献 [72] の定義とその著者による 1980 年頃の講義ノートの中の定義も逆になっているが、ここでは、この二つの応力が最初に定義された文献を明示している文献 [72] の方の定義を用いた。nominal 応力という呼び方は文献 [37] にあるらしく、後述の第 1 Piola-Kirchhoff 応力を定義して命名したのは文献 [97, 98] となっている。多くの読者は、この **nominal** 応力を第 1 Piola-Kirchhoff 応力と呼んだ方がいいかもしれないが、注意して欲しいのは添え字の意味で、この文書では二つ目の添え字が応力の向きを表すように定義してある。

²² この添え字の意味も、文献あるいは大学・学派によって逆なものも多いので注意すること。特に **nominal** 応力のように非対称 (後述) なテンソルの場合には、その物理的な意味を考えるとときやつり合い式を求めるときに特に注意が必要である。

(2) つり合い式と境界条件

Cauchy 応力で表したつり合い式 (運動方程式) は, 微小変形理論のそれと同じになるのは明らかだから, 式 (3.22) と同じく

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \boldsymbol{\pi} = \rho \dot{\mathbf{v}}, \quad \sigma_{ji,j} + \rho \pi_i = \rho \dot{v}_i \quad (12.85a, b)$$

である。ここに $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x})$ は単位質量当たりの分布外力であり, $\dot{\mathbf{v}}(\mathbf{x})$ は加速度で, 式 (12.62) で表されるように移流項が含まれていることを忘れてはいけない。また境界条件は, 物体境界面の法線ベクトルを \mathbf{m} とすると

$$u_i = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad m_j \sigma_{ji} = t_i \quad (12.86)$$

と表される。ここに $\mathbf{t}(\mathbf{x})$ は現配置における単位面積当たりの表面外力である。また, モーメントのつり合いも微小変形理論のそれと同じく

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \quad (12.87)$$

となるから, Cauchy 応力は対称テンソルである。

さて, 運動量保存則は

$$\frac{d(\text{運動エネルギー})}{dt} + \frac{d(\text{内部エネルギー})}{dt} = (\text{外力の仕事率}) + (\text{加えられた熱変化})$$

となるだろうから, e を単位質量当たりの内部エネルギー率とすると, これは

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_v \left(\frac{1}{2} \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \rho e \right) dv \right\} = \int_v \rho \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{v} dv + \int_s \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} ds + \int_v \rho \dot{h} dv - \int_s \mathbf{m} \cdot \dot{\mathbf{q}} ds \quad (12.88)$$

と表すことができる。ここに, $h(\mathbf{x})$ は物体内の熱源からの分布熱量であり, $\mathbf{q}(\mathbf{x})$ は現配置における表面外向きの熱流である。熱成分を無視した場合, 式 (12.14) の質量保存則 ($\rho v = \text{const.}$) を念頭に置けば, 最初の 2 項は単純に物質微分でき

$$\int_v \rho \{v_i \dot{v}_i + \dot{e}\} dv = \int_v \rho \pi_i v_i dv + \int_s t_i v_i ds$$

となる。これに式 (12.85) のつり合い式を代入して分布外力 $\boldsymbol{\pi}$ を消去し, Gauss の発散定理を用いたあと, 式 (12.86) の境界条件を代入すれば \mathbf{t} が無くなり, 最終的に

$$\int_v (\sigma_{ji} v_{i,j} - \rho \dot{e}) dv = 0$$

となる。これより単位質量当たりの内部エネルギー率は

$$\rho \dot{e} = \sigma_{ji} v_{i,j} = \frac{1}{2} (\sigma_{ji} v_{i,j} + \sigma_{ij} v_{j,i})$$

と書くこともできるので, モーメントのつり合い式 (12.87) を用いて結局

$$\dot{e} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d_{ji} = \dot{w} \quad (12.89)$$

と表すことができる。ここに \mathbf{d} は変形速度であり, 右辺 \dot{w} は応力の仕事率である。熱成分が含まれる場合も同様に定式化でき

$$\dot{e} = \dot{w} + \dot{h} - \frac{1}{\rho} \dot{q}_{i,i} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d_{ji} + \dot{h} - \frac{1}{\rho} \dot{q}_{i,i} \quad (12.90)$$

となり, 応力の仕事率と熱の仕事率成分の和になる。式 (12.89) から, Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ は変形速度 \mathbf{d} と「対」になっていることがわかる。この情報は, 構成則を与えるときに参考になる重要なものである。

あるいは Lagrange 的に見直すと、熱成分を無視した式 (12.88) は

$$\frac{d}{dt} \left\{ \int_V \left(\frac{1}{2} \rho_0 \mathbf{V} \cdot \mathbf{V} + \rho_0 e \right) dV \right\} = \int_V \rho_0 \boldsymbol{\pi} \cdot \mathbf{V} dV + \int_S \mathbf{T} \cdot \mathbf{V} dS \quad (12.91)$$

と書くことができる。ここに \mathbf{T} は変形前の単位面積当たりの初期配置を基準配置とする表面力であるが、向きは空間固定基底ベクトルで規定されるものとする。また分布外力には $\boldsymbol{\pi}$ を用いているが、正確には $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{X})$ つまり物質点 \mathbf{X} の関数である。一方 nominal 応力の定義式 (12.79) から容易に類推できるように、法線ベクトル \mathbf{M} を持つ物体表面の力の境界条件は式 (12.86) と同様

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{S}^N = \mathbf{T}, \quad M_J S_{Ji}^N = T_i \quad (12.92a, b)$$

と与えることができる。この式 (12.92) を式 (12.91) に代入して Gauss の発散定理を用いると、結局

$$\int_V V_i \{ \rho_0 \dot{V}_i - S_{Ji,J}^N - \rho_0 \pi_i \} dV + \int_V (\rho_0 \dot{e} - S_{Ji}^N V_{i,J}) dV = 0$$

となる。これから nominal 応力を用いた Lagrange 的なつり合い式は

$$\nabla_{\mathbf{X}} \cdot \mathbf{S}^N + \rho_0 \boldsymbol{\pi} = \rho_0 \dot{\mathbf{V}}, \quad S_{Ji,J}^N + \rho_0 \pi_i = \rho_0 \dot{V}_i \quad (12.93a, b)$$

と表すことができ、応力の仕事率が

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho_0} S_{Ij}^N V_{j,I} = \frac{1}{\rho_0} S_{Ij}^N v_{j,I} \quad (12.94)$$

と表される。したがって、nominal 応力 \mathbf{S}^N は変形速度 \mathbf{d} とではなく速度勾配 $v_{j,I}$ と「対」になっていることがわかる。式 (12.93) のつり合い式は、式 (12.85) の Cauchy 応力で表したのものによく似ているが、微分を物体の「物質点」 \mathbf{X} で行っているように、全く異なる観点から見たつり合い式であることにも注意すること。

また、式 (12.83) の関係を Cauchy 応力のモーメントのつり合い式 (12.87) に代入すれば、nominal 応力のモーメントのつり合いは

$$x_{i,I} S_{Jj}^N = x_{j,I} S_{Ii}^N \quad (12.95)$$

としか表すことができないので、nominal 応力 \mathbf{S}^N は非対称テンソルであることがわかる。そこで念のために、第 3.3.5 節と同じ演算をして、静的なモーメントのつり合いをとっておこう。全外力のモーメントのつり合いは

$$\int_S \mathbf{x} \times \mathbf{T} dS + \int_V \mathbf{x} \times \rho_0 \boldsymbol{\pi} dV = \mathbf{0}$$

となる。上式第 1 項の \mathbf{T} に境界条件式 (12.92) を代入すると

$$0 = \int_S e_{ijk} x_j M_L S_{Lk}^N dS + \int_V e_{ijk} x_j \rho_0 \pi_k dV$$

となるので、Gauss の発散定理を用いれば

$$= \int_V e_{ijk} \frac{\partial}{\partial X_L} (x_j S_{Lk}^N) dV + \int_V e_{ijk} x_j \rho_0 \pi_k dV$$

すなわち

$$= \int_V e_{ijk} \left(x_{j,L} S_{Lk}^N + x_j \frac{\partial S_{Lk}^N}{\partial X_L} \right) dV + \int_V e_{ijk} x_j \rho_0 \pi_k dV$$

となる。これに、慣性項を無視したつり合い式 (12.93) を代入すると、結局、第 1 項の被積分関数の第 1 項以外は無くなって

$$= \int_V e_{ijk} (x_{j,L} S_{Li}^N) dV = \int_V \left(\frac{1}{2} e_{ijk} x_{j,L} S_{Li}^N + \frac{1}{2} e_{ijk} x_{j,L} S_{Li}^N \right) dV = \int_V \frac{1}{2} e_{ijk} (x_{j,L} S_{Li}^N - x_{i,L} S_{Lj}^N) dV$$

となることから、被積分関数にモーメントのつり合い式 (12.95) を得ることができた。

12.3.2 その他の応力とつり合い式

(1) Kirchhoff 応力

あといくつか重要な応力を定義しておこう。まず **Kirchhoff 応力** $\tau^K(\mathbf{x})$ は、応力の仕事率の表現で

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d_{ji} = \frac{1}{\rho_0} \tau_{ij}^K d_{ji} \quad (12.96)$$

という関係で定義される。つまり

$$\tau_{ij}^K(\mathbf{x}) \equiv \frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{ij} \quad (12.97)$$

である。ただし基準配置が現配置であることに注意すること。少し奇妙な応力で、使い方はよくわからない。

これによく似た応力テンソルで初期配置を基準配置とする Lagrange 的な応力を定義するために仕事率を書き直しておこう。変形速度を定義した式 (12.52) から

$$\dot{E}_{IJ} = d_{ij} F_{iI} F_{jJ}, \quad d_{ij} = X_{I,i} X_{J,j} \dot{E}_{IJ} \quad (12.98a, b)$$

という関係を得るので、これを応力の仕事率の表現式 (12.89) に代入すると

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d_{ji} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} X_{I,i} X_{J,j} \dot{E}_{IJ} = \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{ij} X_{I,i} X_{J,j} \right) \dot{E}_{IJ}$$

と書くこともできる。この括弧の中の量を応力テンソル $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ として定義すれば、結局

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho_0} S_{IJ} \dot{E}_{IJ} \quad (12.99)$$

のように応力の仕事率を表現できる。この $\mathbf{S}(\mathbf{X})$ は第 2 **Piola-Kirchhoff 応力** と呼ばれ

$$\mathbf{S}(\mathbf{X}) = S_{IJ} \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{G}_J, \quad S_{IJ} \equiv \frac{\rho_0}{\rho} X_{I,i} X_{J,j} \sigma_{ij}, \quad \sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} x_{i,I} x_{j,J} S_{IJ} \quad (12.100a, b, c)$$

と定義される。構成則を第 2 Piola-Kirchhoff 応力を用いて与える場合には Green のひずみと関連付けることが望ましいことを、応力の仕事率の式 (12.99) の「組」は示唆している。注意しないといけないのは、もはや \mathbf{G}_I は単位直交基底ではなくなっていることである。したがって、ちょうど第 D.4 節で示す極座標系の例にあるように、物理的な成分とテンソル成分 S_{IJ} との違いを明確にしておくことが重要だ。また同じ理由で、第 2 Piola-Kirchhoff 応力と nominal 応力では共変成分と反変成分を区別する必要があるが、この章の議論で特にそれが必要になることは無いので、以下でも下添え字を用いている。

さて、式 (12.100) に式 (12.83) の nominal 応力と Cauchy 応力の関係を代入すれば

$$S_{Ij}^N = x_{j,J} S_{IJ}, \quad S_{IJ} = S_{Ij}^N X_{J,j} \quad (12.101a, b)$$

という関係にあることがわかる。これと式 (12.100) を見比べながら、もう一つ応力テンソル $\mathbf{T}^R(\mathbf{X})$ を

$$T_{ij}^R = x_{i,K} S_{KJ}, \quad S_{KJ} = X_{K,i} T_{ij}^R \quad (12.102a, b)$$

と定義する。この $\mathbf{T}^R(\mathbf{X})$ は第 1 **Piola-Kirchhoff 応力** と呼ばれる。したがって、他の応力とは

$$\sigma_{ij} = \frac{\rho}{\rho_0} x_{i,I} x_{j,J} S_{IJ} = \frac{\rho}{\rho_0} x_{i,I} S_{IJ}^N = \frac{\rho}{\rho_0} x_{i,I} x_{j,J} \underline{S}_{IJ} = \frac{\rho}{\rho_0} \underline{T}_{ij}^R x_{j,J} \quad (12.103)$$

という関係にある。ちょうど nominal 応力の「転置」のように見えるが、物理的な意味は異なるので注意が必要である。

最後に、第2 Piola-Kirchhoff 応力で表したつり合い式は、nominal 応力との関係式 (12.101) を式 (12.93) に代入することによって

$$(x_{i,K} S_{JK})_{,J} + \rho_0 \pi_i = \rho_0 \dot{V}_i \quad (12.104)$$

となる。注意しなければいけないのは、このつり合い式は式 (12.93) と同様、微分を物体の「物質点」毎に行っていること（微分のコンマの次の添え字が大文字）である。したがって分布外力も $\pi(\mathbf{X})$ と考えた方がいい。しかし、そのつり合いは空間固定基底の \mathbf{g}_i 方向で表示してあることにも注意すべきである。第2 Piola-Kirchhoff 応力が \mathbf{G}_K 方向の力であることから、一種の座標変換（正規直交とは限らない）にも相当する変形勾配 $(x_{i,K})$ が乗じられた成分でつり合いを表現しているのだ。

(2) 第2 Piola-Kirchhoff 応力と Green のひずみの物理的な意味

第 C.2 節で定式化した Bernoulli-Euler 梁の有限変位の枠組のつり合い式では、第2 Piola-Kirchhoff 応力が用いられ、幾何学的にも非常にわかり易い理論が構築されている。そのモデルを用いて第2 Piola-Kirchhoff 応力と Green のひずみの物理的な意味を説明しよう。まず式 (12.106) のペアと同様、仮想仕事式が式 (C.21) の

$$\int_V S_{11} \delta E_{11} dV = \int_V \sigma \delta e dV = \int_V (\text{第2 Piola-Kirchhoff 応力の物理成分}) \delta (\text{Green のひずみの物理成分}) dV$$
 のようになり、梁の断面変形は無いので、式 (C.22) で定義し直した第2 Piola-Kirchhoff 応力の物理成分

$$\sigma = \sqrt{g} S_{11}$$

と、式 (C.19) で定義される Green のひずみの物理成分としての伸び

$$e = \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 = \sqrt{g} - 1 = \epsilon - x_3 \kappa$$

の積で、内部仮想仕事が算定できる。この σ は Cauchy 応力ではない。 S_{11} が \mathbf{G}_1 方向の応力成分であり、基底ベクトルは単位ではなく $|\mathbf{G}_1| = \sqrt{g}$ であることがわかれば

$$S_{11} \mathbf{G}_1 = \sigma \frac{\mathbf{G}_1}{|\mathbf{G}_1|}$$

と置くことができることから、テンソル成分の S_{11} が持つ物理的に意味のある成分としての値を σ が持っていることが明らかだ。また変形前に単位量だった梁の軸方向の基底ベクトル \mathbf{g}_1 が伸びて、変形後に \mathbf{G}_1 になっていることから、 $|\mathbf{G}_1| = \sqrt{g}$ が軸線の伸びであることも明らかだ。つまり、 e は Green のひずみテンソル成分 E_{xx} の物理的な成分であり、上式の定義は式 (12.24a) と同じで、実はそれは式 (12.44a) の伸びひずみテンソル \mathbf{E}^E の成分にも一致する。そして梁の構成則は上記の仮想仕事式の組を念頭に置いて

$$\sigma = E e, \quad (\text{第2 Piola-Kirchhoff 応力の物理成分}) = (\text{材料パラメータ}) \times (\text{Green ひずみの物理成分})$$

とモデル化することによって、とても美しい理論が構築できているのだ。

さらにつり合い式 (C.27) は、少し書き換えると

$$\frac{d}{dX} \left[\begin{array}{cc} \cos \theta(X) & \sin \theta(X) \\ -\sin \theta(X) & \cos \theta(X) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} N(X) \\ V(X) \end{array} \right] + \left[\begin{array}{c} p(X) \\ q(X) \end{array} \right] = \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right]$$

となる。軸力 N はたわんで θ だけ回転した軸線方向の力であり、せん断力 V はそれに直交した方向の力である。つまり内力は \mathbf{G}_K 方向の力である。しかし外力 p と q は空間固定座標の \mathbf{g}_i 方向で定義されているため、たわみ角 θ で定義できる座標変換行列を断面力に乗じて空間固定座標方向に変換したつり合い式になっているのである。この座標変換行列の部分が上式 (12.104) の $(x_{i,K})$ の項に相当する。そして微分は物質点座標 X でとっており、外力 p も q も物質点座標（変形前の座標） X の関数として定義されていることに注意すること。

(3) Biot 応力

最後に、式 (12.44a) の伸びひずみあるいは Biot のひずみ \mathbf{E}^E と組になる応力 [72] を定義しておく。式 (12.9) (12.18) (12.44a) から

$$\dot{E}_{IJ} = \frac{1}{2} (\dot{U}_{KI} U_{KJ} + U_{KI} \dot{U}_{KJ})$$

となることを式 (12.99) に代入し、式 (12.44a) の定義から $\dot{\mathbf{E}}^E = \dot{\mathbf{U}}$ であることを念頭に置いて、 \mathbf{S} と \mathbf{U} が対称テンソルであることを用いて、最終的に $\dot{\mathbf{E}}^E$ と組になる応力が対称テンソルになるように注意して演算すると

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho_0} S_{IJ} \dot{E}_{JI} = \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{2} (S_{JK} U_{KI} + U_{JK} S_{KI}) \dot{E}_{JI}^E$$

を得る。この表現から新しい応力テンソル $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ を

$$\mathbf{T} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{S}\mathbf{U} + \mathbf{U}\mathbf{S}), \quad T_{IJ} \equiv \frac{1}{2} (S_{IK} U_{KJ} + U_{IK} S_{KJ}) \quad (12.105a, b)$$

と定義できる。この $\mathbf{T}(\mathbf{X})$ は **Biot 応力** と呼ばれる。念のために、応力の仕事率の組み合わせをまとめると

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d_{ji} = \frac{1}{\rho_0} \tau_{ij}^K d_{ji} = \frac{1}{\rho_0} S_{Ij}^N v_{j,I} = \frac{1}{\rho_0} S_{IJ} \dot{E}_{JI} = \frac{1}{\rho_0} T_{IJ} \dot{E}_{JI}^E \quad (12.106)$$

となる。このような組を、応力とひずみの共役な組と呼ぶことがある。

ところで上では対称な応力テンソルとして定義したが、同じ演算で非対称の

$$T_{IJ}^{\text{NONSYM}} \equiv U_{IK} S_{KJ} \quad (12.107)$$

のようなテンソルとしても定義できる。これを式 (12.101) に代入すると、極分解の定理を用いることによって、nominal 応力との間に

$$S_{Ij}^N = T_{IK}^{\text{NONSYM}} R_{jK}$$

という関係が成り立つ。nominal 応力 \mathbf{S}^N が空間固定座標方向の成分を持つことを念頭に置くと、Biot 応力は、初期配置の単位面積当たりの埋め込み座標基底の現配置の単位基底方向成分であることがわかる。これが Biot 応力の物理的な意味である。

12.3.3 応力の物理的な意味

(1) 各応力の定義の違い

これまでの定義はやや数学的過ぎたので、図 12.9 を用いて物理的な意味を整理しておこう。

Cauchy 応力 (真応力) $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j$: 現配置の単位面積に発生した内力表面力ベクトル $\tilde{\mathbf{R}}$ の、その単位面積当たりの、空間固定座標の単位基底ベクトル方向の成分を持つ応力テンソル。その面は初期配置においては単位面積とは限らない。一番わかり易い応力テンソルではあるが実験による測定は困難である。

第 1 Piola-Kirchhoff 応力 $\mathbf{T}^R = T_{ij}^R \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}_j$: 現配置の単位面積に発生した内力表面力ベクトル $\tilde{\mathbf{R}}$ の、その単位面積当たりの応力の $\frac{\rho_0}{\rho}$ 倍である Kirchhoff 応力で、現配置における物体埋め込み座標の基底ベクトル方向の成分を持つ応力テンソル。その面は初期配置においては単位面積とは限らない。一番わかり難い応力テンソルである。 T_{11}^R と T_{12}^R は一般には直交しない方向の成分になる。

nominal 応力 $\mathbf{S}^N = S_{Ij}^N \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{g}_j$: 初期配置の単位面積を追跡して現配置に至った面に発生した内力表面力ベクトル \mathbf{R} の、その初期の単位面積当たりの、空間固定座標の単位基底ベクトル方向の成分を持つ応力テンソル

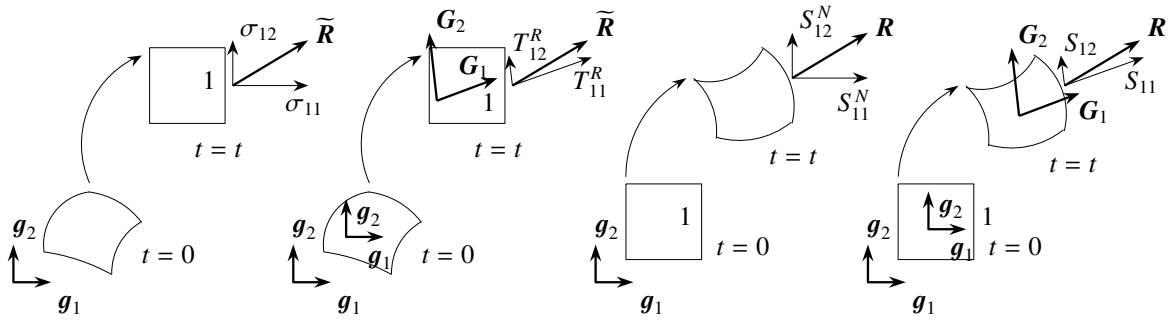


図 12.9 代表的な応力テンソル: Cauchy 応力と nominal 応力および 2 種類の Piola-Kirchhoff 応力

る。現配置の面は単位面積とは限らない。よく第 1 Piola-Kirchhoff 応力の転置テンソルとして認識されるが、物理的な意味が異なることには注意すべきである。updated Lagrange 的記述で最も重要な役割を持つ応力テンソルである。

第 2 Piola-Kirchhoff 応力 $S = S_{IJ} G_I \otimes G_J$: 初期配置の単位面積を追跡して現配置に至った面に発生した内力表面力ベクトル R の、その初期の単位面積当たりの、現配置における物体埋め込み座標の基底ベクトル方向の成分を持つ応力テンソル。現配置の面は単位面積とは限らない。Cauchy 応力と同様、一見わかり易い応力テンソルではあるが、物理的な意味が曖昧な数学的な量なので、そのまま構成則に用いるには困難が伴う。 S_{11} と S_{12} は一般には直交しない方向の成分になる。これも Lagrange 的および updated Lagrange 的記述で重要な役割を持つ応力テンソルである。

Biot 応力 $T \approx T_{IJ} G_I \otimes \bar{G}_J, \bar{G}_J \equiv \frac{G_J}{|G_J|}$ (no sum on J): 初期配置の単位面積を追跡して現配置に至った面に発生した内力表面ベクトルの、現配置における物体埋め込み座標の「単位」基底ベクトル方向の成分を持つ応力テンソルである。

(2) 例で確かめる各応力の違い

簡単な例として、図 12.2 つまり図 12.10 のように 3 方向にそれぞれストレッチ Λ_i ($i = 1, 2, 3$) だけが生じて x_1 - x_2 面内で α だけ剛体回転した状態で、 $\frac{G_1}{|G_1|}$ 方向にのみ内力表面力 R が発生しているものとする。直交する主ストレッチ方向を座標系にとって任意の変形状態を表現したと考えればいい。こうしておけば、どの応力テンソルでも、成分同士の直交性・平行性が成り立つので考え易い。一般に鋼の引張試験等のように初期状態の寸法を使って試験機で測定した反力から応力を定量化するので、初期状態で単位面積を持った面に初期の単位面積当たりの内力表面力 R が現配置において生じている状況を考える。この例では埋め込んだ G_1 方向にしか内力表面力が発生していないので、まず第 2 Piola-Kirchhoff 応力は簡単に誘導できる。ただ注意しないといけないのは、この成分は G_1 方向成分であることであり、その基底ベクトルと合わせて

$$R = R \frac{G_1}{|G_1|} = S_{11} G_1 \quad \rightarrow \quad S_{11} = \frac{R}{|G_1|}$$

とならなければならないことである。 G_1 が単位基底ベクトルではないから、ストレッチ $\Lambda_1 = |G_1|$ を用いて

$$S_{11}(X) = \frac{R}{\Lambda_1}, \quad \text{他の } S_{IJ} = 0 \tag{12.108a, b}$$

となる。 R は第 2 Piola-Kirchhoff 応力 S_{11} の物理成分と呼ばれることもあり、値も単位も実際の圧力である。

そして Biot 応力は式 (12.105) から

$$T_{11} = R, \quad \text{他の } T_{IJ} = 0$$

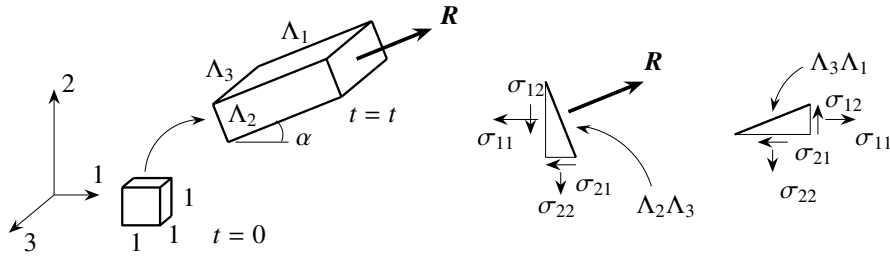


図 12.10 簡単な材料試験片における種々の応力の成分の違い

となり，Lagrange 的な物理的に意味のある応力であることがわかる。これに対し，nominal 応力は同じ面に発生した表面力の空間固定座標 \mathbf{g}_i 方向の成分であるから，単純に

$$S_{11}^N(\mathbf{X}) = R \cos \alpha, \quad S_{12}^N(\mathbf{X}) = R \sin \alpha, \quad S_{21}^N(\mathbf{X}) = 0, \quad S_{22}^N(\mathbf{X}) = 0 \quad (12.109a, b, c, d)$$

となる。

次に R を第 2 Piola-Kirchhoff 応力として扱いつつ，Cauchy 応力を求めてみよう。Cauchy 応力は現配置の単位面積当たりの応力だから，同図の右から 2 番目の図に示した面上のつり合いから

$$\sigma_{11} \Lambda_2 \Lambda_3 \cos \alpha + \sigma_{21} \Lambda_2 \Lambda_3 \sin \alpha = R \cos \alpha, \quad \sigma_{12} \Lambda_2 \Lambda_3 \cos \alpha + \sigma_{22} \Lambda_2 \Lambda_3 \sin \alpha = R \sin \alpha \quad (a)$$

という関係にある。Cauchy 応力は現配置における単位面積当たりの力であることと，初期単位面積で R を定義しているのが右辺には現配置の面積 $\Lambda_2 \Lambda_3$ が無いことに注意すること。ここが第 2 Piola-Kirchhoff 応力について最もわかり難いところ²³である。同様に一番右の図のつり合いから，上面が自由表面なので

$$\sigma_{11} \Lambda_3 \Lambda_1 \sin \alpha - \sigma_{21} \Lambda_3 \Lambda_1 \cos \alpha = 0, \quad \sigma_{12} \Lambda_3 \Lambda_1 \sin \alpha - \sigma_{22} \Lambda_3 \Lambda_1 \cos \alpha = 0$$

つまり

$$\sigma_{21} = \sigma_{11} \tan \alpha, \quad \sigma_{22} = \sigma_{12} \tan \alpha = \sigma_{11} \tan^2 \alpha$$

となるので，上の式 (a) に代入することによって Cauchy 応力が³

$$\sigma_{11}(\mathbf{x}) = \frac{R \cos^2 \alpha}{\Lambda_2 \Lambda_3}, \quad \sigma_{12}(\mathbf{x}) = \frac{R \sin \alpha \cos \alpha}{\Lambda_2 \Lambda_3}, \quad \sigma_{22}(\mathbf{x}) = \frac{R \sin^2 \alpha}{\Lambda_2 \Lambda_3} \quad (12.110a, b, c)$$

と算定できる。求めてしまえば当たり前だろう。というのも，右辺の $\frac{R}{\Lambda_2 \Lambda_3}$ が右の面に生じている Cauchy 応力の $\frac{\mathbf{G}_I}{|\mathbf{G}_I|}$ 方向成分なので，この式は単に座標変換式 (3.41) を示しているに過ぎないからだ。

最後に第 1 Piola-Kirchhoff 応力を求めてみよう。まず，質量保存則から

$$\text{質量} = \rho_0 dV_0 = \rho dV \quad \rightarrow \quad \rho_0 \times 1 = \rho \times \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \quad \rightarrow \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3} \quad (b)$$

だから，上式の Cauchy 応力に対する Kirchhoff 応力は，その定義式 (12.97) から

$$\tau_{11}^K = \frac{\rho_0}{\rho} \sigma_{11} = \Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 \sigma_{11} = R \Lambda_1 \cos^2 \alpha, \quad \tau_{12}^K = R \Lambda_1 \sin \alpha \cos \alpha, \quad \tau_{22}^K = R \Lambda_1 \sin^2 \alpha \quad (12.111a, b, c)$$

となる。これはあまりよくわからない成分である。次に，法線が \mathbf{g}_1 になる面の Kirchhoff 的 surface force $\tilde{\mathbf{f}}_1$ は

$$\tilde{\mathbf{f}}_1 = \tau_{11}^K \mathbf{g}_1 + \tau_{12}^K \mathbf{g}_2$$

²³ 著名な文献 [26] の解説もわかり難い。文献によっては，初期配置の単位面に R が生じているような図があった記憶があるが，ますますわかり難い。

であり、これを $\frac{\mathbf{G}_1}{|\mathbf{G}_1|}$ 方向成分 $\tilde{\tau}_{11}^K$ と $\frac{\mathbf{G}_2}{|\mathbf{G}_2|}$ 方向成分 $\tilde{\tau}_{12}^K$ に分解し直すと

$$\tilde{\mathbf{f}}_1 = \tau_{11}^K \mathbf{g}_1 + \tau_{12}^K \mathbf{g}_2 = \tilde{\tau}_{11}^K \frac{\mathbf{G}_1}{|\mathbf{G}_1|} + \tilde{\tau}_{12}^K \frac{\mathbf{G}_2}{|\mathbf{G}_2|}$$

と等置されなければならないので

$$\tilde{\tau}_{11}^K = \tau_{11}^K \cos \alpha + \tau_{12}^K \sin \alpha = R \Lambda_1 \cos \alpha, \quad \tilde{\tau}_{12}^K = \tau_{12}^K \cos \alpha - \tau_{11}^K \sin \alpha = 0$$

を得る。最後にこれを第 1 Piola-Kirchhoff 応力で表すと

$$\tilde{\mathbf{f}}_1 = \tau_{11}^K \mathbf{g}_1 + \tau_{12}^K \mathbf{g}_2 = \tilde{\tau}_{11}^K \frac{\mathbf{G}_1}{|\mathbf{G}_1|} + \tilde{\tau}_{12}^K \frac{\mathbf{G}_2}{|\mathbf{G}_2|} = T_{11}^R \mathbf{G}_1 + T_{12}^R \mathbf{G}_2$$

と等置されなければならないので、結局

$$T_{11}^R = \frac{\tilde{\tau}_{11}^K}{|\mathbf{G}_1|} = \frac{\tilde{\tau}_{11}^K}{\Lambda_1} = R \cos \alpha, \quad T_{12}^R = \frac{\tilde{\tau}_{12}^K}{\Lambda_2} = 0$$

と求められる。同じ演算を法線が \mathbf{g}_2 になる面の表面力に対して行くと

$$\tilde{\tau}_{21}^K = \tau_{21}^K \cos \alpha + \tau_{22}^K \sin \alpha = R \Lambda_1 \sin \alpha, \quad \tilde{\tau}_{22}^K = \tau_{22}^K \cos \alpha - \tau_{21}^K \sin \alpha = 0$$

でないといけないので

$$T_{21}^R = \frac{\tilde{\tau}_{21}^K}{|\mathbf{G}_1|} = \frac{\tilde{\tau}_{21}^K}{\Lambda_1} = R \sin \alpha, \quad T_{22}^R = \frac{\tilde{\tau}_{22}^K}{\Lambda_2} = 0$$

となる。以上の結果をまとめると

$$T_{11}^R(\mathbf{x}) = R \cos \alpha, \quad T_{12}^R(\mathbf{x}) = 0, \quad T_{21}^R(\mathbf{x}) = R \sin \alpha, \quad T_{22}^R(\mathbf{x}) = 0 \quad (12.112a, b, c, d)$$

と求められる。確かに nominal 応力成分と転置の関係にあるが、力の向きや発生している面が異なるから、値が転置の関係にあるだけのことだ。

さて以上では力学的・幾何学的に各応力テンソルの成分を求めてみたが、前節までの各種応力テンソル間の関係式から成分を誘導し、以上の結果が正しかったことを確かめておこう。この例は図 12.2 と同じく 3 軸方向へのストレッチと回転のみの簡単な運動なので、式 (12.34) と同様

$$\left(\frac{\partial x_i}{\partial X_j} \right) = \left(x_{i,j} \right) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \cos \alpha & -\Lambda_2 \sin \alpha & 0 \\ \Lambda_1 \sin \alpha & \Lambda_2 \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_3 \end{pmatrix}$$

となる。これを用い、Cauchy 応力と第 2 Piola-Kirchhoff 応力の関係式 (12.100) に式 (12.108) を代入して、再度 Cauchy 応力を求めてみよう。密度比が式 (b) であることに注意すれば

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \frac{\rho}{\rho_0} x_{1,1} x_{1,1} S_{11} = \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3} \Lambda_1^2 \cos^2 \alpha \frac{R}{\Lambda_1} = \frac{R \cos^2 \alpha}{\Lambda_2 \Lambda_3} \\ \sigma_{12} &= \frac{\rho}{\rho_0} x_{1,1} x_{2,1} S_{11} = \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3} \Lambda_1^2 \sin \alpha \cos \alpha \frac{R}{\Lambda_1} = \frac{R \sin \alpha \cos \alpha}{\Lambda_2 \Lambda_3} \\ \sigma_{22} &= \frac{\rho}{\rho_0} x_{2,1} x_{2,1} S_{11} = \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3} \Lambda_1^2 \sin^2 \alpha \frac{R}{\Lambda_1} = \frac{R \sin^2 \alpha}{\Lambda_2 \Lambda_3} \end{aligned}$$

となり、これは式 (12.110) に一致する。

次に、式 (12.108) の第 2 Piola-Kirchhoff 応力を式 (12.102) に代入して第 1 Piola-Kirchhoff 応力を求めてみると、零でない成分は

$$T_{11}^R = x_{1,1} S_{11} = \frac{R}{\Lambda_1} \Lambda_1 \cos \alpha = R \cos \alpha, \quad T_{21}^R = x_{2,1} S_{11} = R \sin \alpha$$

となり、これは式 (12.112) に一致する。また同様に、式 (12.79) で nominal 応力を求めてみると、零でない成分は

$$S_{11}^N = S_{11} x_{1,1} = \frac{R}{\Lambda_1} \Lambda_1 \cos \alpha = R \cos \alpha, \quad S_{12}^N = S_{11} x_{2,1} = R \sin \alpha$$

となり、これも式 (12.109) に一致する。ちなみに、微小変形の $\Lambda_i \simeq 1, \alpha \simeq 0$ の場合には、応力テンソル間の差異が無くなることも確認できる。

ところで鋼の引張試験結果を図示するとき、ロードセルの読みを試験片の初期状態の断面積で割った「応力」を公称応力と呼んで用いることがある。いわゆる「絞り」が発生するまでの間は真応力と工学的には差異が無いことが多い。ときどき、この公称応力が第 1 Piola-Kirchhoff 応力であると言われるようだが、図 12.11 のようにせん断帯 (Lüders 帯) が出たあとの若干回転した試験片の状況を考えると、公称応力は空間固定座標方向の応力であることがわかるので、どちらかと言えば nominal 応力の方²⁴に近いと考えざるを得ない。実際、公称応力は 'nominal stress' の訳²⁵である。ただ公称応力が 9 成分を持つ非対称応力テンソルだという認識は無いと捉え、この文書では公称応力という「日本語の名称」はあまり用いないことにした。

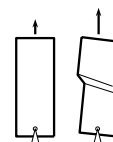


図 12.11 公称応力

演習問題 12-3

- 第 12.3.3 (2) 節で求めた各種応力を、物理的な意味を考えながら自ら求めてみよ。手を動かさずにわかったような気になっていると、この先できっと怪我をしますよ。

12.3.4 客観性を持つ応力速度

さて有限変形を許容するという事は、塑性変形も生じるのが一般的だと考えていだろう。そのとき履歴依存性を持つ流れ則を規定しなければならないことから、少なくとも変形 (ひずみ) は増分あるいは速度で表現できないといけなかった。それに対応した応力を算定するためのモデルは種々存在し得るのだが、一つの基礎的なモデルは、式 (12.73) の加算則が成立するとして何らかの応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})$ を定義して

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \{ \mathbf{d}(\mathbf{x}) - \mathbf{d}^p(\mathbf{x}) \}$$

のように弾性の構成則も増分で規定することだろう。第 11 章では弾性も含めた増分理論を展開し、流れ則が積分不可能な増分式でなければならないことも示した。そこで、材料と一緒に何らかの規則で回転した座標で定義される客観性を持つ応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ をいくつか定義しよう。

まず客観性という言葉の意味をやや文学的に説明しておく。極分解の定理で回転 \mathbf{R} を除去された変形勾配成分である変形テンソルが、材料が実際に感じている歪み成分^{ゆが}だった。そしてこれに対応した応力は、この歪み成分に相当する材料の抵抗力であり、材料の抵抗則を表現するための数学的概念だった。さらに変形速度にも、この回転 \mathbf{R} の速度 $\boldsymbol{\omega}^R$ が含まれていなかったことを思い出して欲しい。つまり変形速度は材料が実際に感じている歪み^{ゆが}の増分と考えていい。ということは、応力速度も材料の実質的な抵抗力増分を表現したものでなければならない。そう考えると、材料と一緒に回転しながら実質的な歪み増分に対応するような、まさに Lagrange 的な尺度の方を用いるのが適切だと思われる。例えば、材料に埋め込んだ座標系で定義された第 2 Piola-Kirchhoff 応力の変化率 $\dot{\mathbf{S}}$ がその候補だと考えられる。しかし後述の例のように、第 2 Piola-Kirchhoff 応力で初期配置から破壊までの有限変形を追跡できるモデルを作るのは困難だと予想される。また塑性は現配置からの

²⁴ 多くの文献にある定義なら第 1 Piola-Kirchhoff 応力の方が、そのような文献で第 1 Piola-Kirchhoff 応力を nominal 応力とは呼ばないことから、この文書つまり文献 [72] の定義の方が説得力がある・・・かな。

²⁵ 'engineering stress' や 'conventional stress' と呼ばれることもある。

接線的な抵抗則であることから、Lagrange 的な尺度の中でもどちらかと言うと第 12.4 節で説明する updated Lagrange 的な尺度を、その抵抗則には用いた方がいいと考えられる。

この現配置からの接線抵抗という考え方からは、Euler 的な Cauchy 応力や Kirchhoff 応力を用いた接線的な構成則で材料試験結果をモデル化の方が適切だろう。そこで Cauchy 応力の時間変化率が持つ特性を、回転している物体を対象として示してみよう。図 12.12 に示したのは、一定応力 σ_0 で抵抗している棒が速度 ω で回転している状態²⁶である。時刻 $t = 0$ に棒が水平だったとすると、この材料中の Cauchy 応力は座標変換の式 (3.41) から

$$\sigma_{11} = \sigma_0 \cos^2 \omega t, \quad \sigma_{22} = \sigma_0 \sin^2 \omega t, \quad \sigma_{12} = \frac{1}{2} \sigma_0 \sin 2\omega t \quad (12.113a, b, c)$$

になる。すると応力の変化率は

$$\dot{\sigma}_{11} = -\omega \sigma_0 \sin 2\omega t, \quad \dot{\sigma}_{22} = \omega \sigma_0 \sin 2\omega t, \quad \dot{\sigma}_{12} = \omega \sigma_0 \cos 2\omega t \quad (12.114a, b, c)$$

となり、いずれも零にはならない。しかし、材料は常に一定の応力で抵抗したままだから、構成則に使われるべき応力速度は零であり続けなければならないはずだ。というのも、材料は回っていることには気付いていたとしても、抵抗の仕方については何も変化を感じていないからだ。したがって、Cauchy 応力の単純な時間微分はそのままでは構成則に用いることができないことになる。初学者にはまずとても驚いて欲しいところだ。

そこで材料と一緒に運動する系から応力の変化率を観てみよう。まず材料に現配置で埋め込んだ座標を x'_i とし、時刻 $t = t$ にはこれが空間固定座標に一致しているものとする。つまり

$$x'_i(t) = x_i(t)$$

とする。ある微分線要素 dx_i の変化をこの埋め込み座標から眺めると

$$dx_i(t + \delta t) = dx_i(t) + \delta t dv_i(t) = (\delta_{ij} + \delta t v_{i,j}) dx_j(t)$$

とみなすことができるが、 $dx'_i(t)$ は材料に貼り付けてあるので

$$dx'_i(t) = dx_i(t) = dx'_i(t + \delta t)$$

が成立するので、上式は

$$dx_i(t + \delta t) = (\delta_{ij} + \delta t v_{i,j}) dx'_j(t + \delta t)$$

と書いてもいい。したがって、その逆関係から

$$dx'_i(t + \delta t) = (\delta_{ij} - \delta t v_{i,j}) dx_j(t + \delta t)$$

と求められる。つまりこの右辺の括弧は、時刻 $t = t + \delta t$ における空間固定座標系と埋め込み座標系との間の一種の座標変換行列になっている。ところで、あとで証明するが Cauchy 応力は

$$\sigma_{ij}(t + \delta t) = \sigma_{ij}(t) + \delta t \dot{\sigma}_{ij}(t)$$

のように更新できる。すると、埋め込み座標系で眺めた Cauchy 応力は、上の座標変換則を 2 階のテンソルに拡張して

$$\sigma'_{ij}(t + \delta t) = (\delta_{ik} - \delta t v_{i,k}) (\delta_{jl} - \delta t v_{j,l}) \sigma_{kl}(t + \delta t)$$

²⁶ これは文献 [26] の記述を用いて Nemat-Nasser 先生が説明してくれたもので、多くの文献にある数学的な考察に比べて第 1 著者にはとてもわかり易かったので、ここでも用いた。

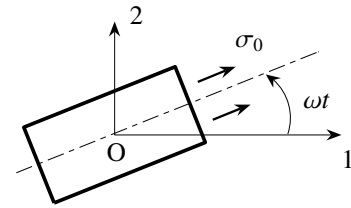


図 12.12 客観性を持つ応力速度

のように算出すればいいので、これに上式を代入して δt の 1 次項までを残すと

$$\sigma'_{ij}(t + \delta t) = \sigma_{ij}(t) + \delta t \left[\dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k} \sigma_{kj} - v_{j,k} \sigma_{ki} \right]$$

を得る。時刻 $t = t$ には $\sigma'_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t)$ なので、これから Cauchy 応力の埋め込み座標系で観た変化率を

$$\overset{\sqcup}{\sigma}_{ij} \equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\sigma'_{ij}(t + \delta t) - \sigma'_{ij}(t)}{\delta t} = \dot{\sigma}_{ij} - v_{i,k} \sigma_{kj} - v_{j,k} \sigma_{ki} = \dot{\sigma}_{ij} - l_{ik} \sigma_{kj} - l_{jk} \sigma_{ki} \quad (12.115)$$

と定義できる。この応力速度 $\overset{\sqcup}{\sigma}$ は **Oldroyd 応力速度** と呼ばれる。では、図 12.12 の回転する材料の例で算定してみよう。この図の運動は

$$v_{1,1} = 0, \quad v_{1,2} = -\omega, \quad v_{2,1} = \omega, \quad v_{2,2} = 0 \quad (12.116a, b, c, d)$$

だから、これと式 (12.113) (12.114) を式 (12.115) に代入すると、すべて

$$\overset{\sqcup}{\sigma}_{11} = 0, \quad \overset{\sqcup}{\sigma}_{22} = 0, \quad \overset{\sqcup}{\sigma}_{12} = 0$$

となるので、抵抗の仕方が何も変化していないと感じている材料の挙動を、この応力速度 $\overset{\sqcup}{\sigma}$ は表現できたことになる。そしてこのような応力速度が客観性を持つ応力速度と呼ばれる。

最もよく用いられている Jaumann の応力速度は、やはり材料と一緒に運動する座標系から定義した速度なのだが、変形しない（あるいは変形を無視した）埋め込み座標系で観察した速度である。したがってそれは、上式 (12.115) の速度勾配 l から変形速度成分 d を取り去ってスピン成分 w だけにした

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik} \sigma_{kj} - w_{jk} \sigma_{ki} \quad (12.117)$$

で定義される。これが Cauchy 応力の **Jaumann 速度** と呼ばれる応力速度であり、共回転応力速度あるいは単に Jaumann 応力速度とも呼ばれ、これも客観性を持つ応力速度である。ただこの速度は、大きく伸びながら 60 度以上の角変化を生じさせるような単純せん断において、正弦曲線のような応力ひずみ関係を予測 [57] してしまう（図 12.23 にも示した）等、使用には注意が必要である。このように客観性を持つ応力速度は、例えば Jaumann 応力速度に $(\sigma_{ij} d_{kk})$ や $(d_{ik} \sigma_{kj} + d_{jk} \sigma_{ki})$ を足したり引いたりして無数に定義（図 12.14）でき、構成則を構築するのに果たしてどれを用いたらいいのかの判断は難しい。著者の提案の一つを後述の数値解析の節に示した。ちなみに **Kirchhoff 応力の Jaumann 速度** $\overset{\nabla}{\tau}^K$ は

$$\overset{\nabla}{\tau}_{ij}^K \equiv \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} d_{kk} \quad (12.118)$$

と定義されている。正統的な客観性の証明はとても数学的過ぎることから割愛したので、興味のある読者は別途各種文献を眺めて欲しい。文献 [61] も比較的理解し易い。また、Cauchy 応力 σ と変形速度 d は客観性を持っているが、それ以外のほとんどの各種変形や変形率は客観性を持たないことには注意が必要である。

12.4 現配置を基準配置と捉えること

12.4.1 updated Lagrange 手法

固体の場合は変形履歴を記憶している物質点を追跡する Lagrange 的な挙動予測が重要である。しかし塑性等を念頭に置くと、物質点の現配置における増分的挙動を構成則で適切にモデル化する必要がある。つまり、変形履歴は適切に定義された応力とひずみに記憶される一方で、増分的挙動は現配置を瞬間的に基準配置と捉えた Lagrange 的な量で定義することが望ましいと考えられる。このように、現配置を瞬間的に基準配置とみなし

た **Lagrange** 的記述は **updated Lagrange** 的記述と呼んでいいだろう。変形履歴を考慮した上でそのような時間変化率を定義するためには、Lagrange 的なテンソル量の時間変化率を求めたあとに、現配置を瞬間的に基準配置とみなせばいい。具体的には例えば変形勾配の F を瞬間的に単位テンソル I に置き換える等とすればいいので

$$\lim_{0 \rightarrow t} F = I, \quad \lim_{0 \rightarrow t} J = 1, \quad \lim_{0 \rightarrow t} \rho_0 = \rho, \quad \dots \text{ etc.} \quad (12.119a, b, c)$$

のような操作をすることになる。この $\lim_{0 \rightarrow t}$ はこの文書独特の記号で、現配置を瞬間的に基準配置とみなす Lagrange 的な極限であることを意味する。

12.4.2 変形速度

まず対数ひずみ E^L の時間変化率の式 (12.69) を振り返ってみよう。それは対数ひずみ速度 d^L には一致していなかった。しかし、この updated Lagrange 的な極限式 (12.119) を用いると

$$\lim_{0 \rightarrow t} (E^L) = (0), \quad \lim_{0 \rightarrow t} (N) = (n) \rightarrow \lim_{0 \rightarrow t} (\dot{E}^L) = (n) [(\ln \Lambda) \cdot] (n)^T = (d^L) \quad (12.120)$$

のように両者は一致する。また、わかり難かった Green のひずみ E の時間変化率も式 (12.52) から

$$\lim_{0 \rightarrow t} (\dot{E}) = (d) \quad (12.121)$$

となり、updated Lagrange 的な Green のひずみ速度は変形速度そのものであることがわかる。固体の構成則はできるだけ Lagrange 的な尺度で表現するのが望ましいから、この \dot{E} の updated Lagrange 的な量つまり d がその尺度としては相応しいことが大いに期待できる。しかも d は客観的な変形尺度の一つである。具体的に、降伏関数が f である場合の Prandtl-Reuss の流れ則を有限変形の枠組に一般化したとき

$$d_{ij}^p = \lambda_{PR} \sigma'_{ij} \quad \text{あるいは} \quad d_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

と記すことに抵抗は無いと思う。

12.4.3 応力速度

Lagrange 的な代表的応力テンソルである第 2 Piola-Kirchhoff 応力は Green のひずみと共役関係にあり、この二つを用いた物理的な構成則を組み込んで定式化された弾性 Bernoulli-Euler 梁理論が物理的数学的に合理的で美しいことを第 C.2 節では示すことができた。そこで増分型構成則に用いることを念頭に置いて、Lagrange 的な第 2 Piola-Kirchhoff 応力の現配置を基準配置と捉えた時間変化率を求めておこう。まず $X_{I,k} x_{k,J} = \delta_{IJ}$ なので、この時間変化率は零である。したがって

$$0 = (X_{I,k} x_{k,J}) \cdot = \dot{X}_{I,k} x_{k,J} + X_{I,k} \dot{x}_{k,J} = (\dot{X}_{I,k} + X_{I,m} v_{m,k}) x_{k,J} \rightarrow \dot{X}_{I,j} = -X_{I,k} v_{k,j} \quad (*)$$

という関係がある。式 (12.100) で定義した第 2 Piola-Kirchhoff 応力の時間変化率を求めて式 (*) と式 (12.58) を考慮すれば

$$\dot{S}_{IJ} = J v_{k,k} \sigma_{ij} X_{I,i} X_{J,j} - J X_{I,k} v_{k,i} X_{J,j} \sigma_{ij} - J X_{J,k} v_{k,j} X_{I,i} \sigma_{ij} + J X_{I,i} X_{J,j} \dot{\sigma}_{ij} \quad (12.122)$$

という関係を得る。そこで、この変化率の updated Lagrange 的な速度を

$$\dot{s}_{ij} \equiv \lim_{0 \rightarrow t} \dot{S}_{IJ} = \dot{\sigma}_{ij} + v_{k,k} \sigma_{ij} - v_{i,k} \sigma_{kj} - v_{j,k} \sigma_{ik} \quad (12.123)$$

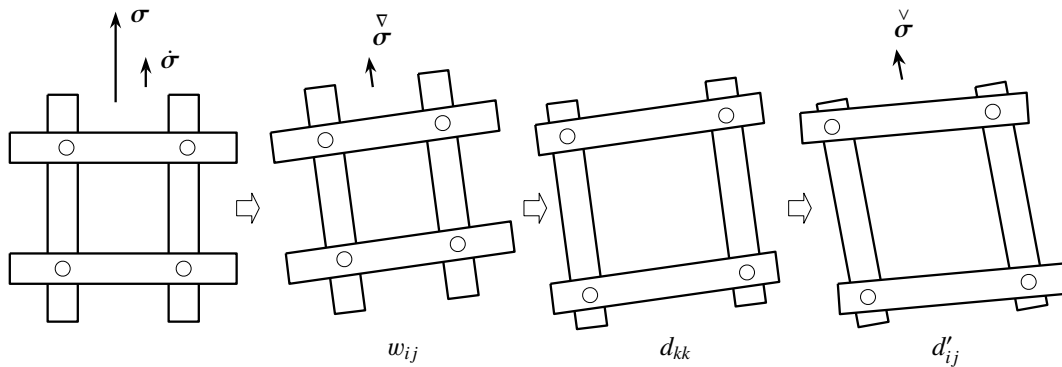


図 12.13 Truesdell 応力速度の分解と物理的な解釈

と定義しよう。図 12.12 の回転する材料の例を対象にすると、式 (12.113) (12.114) (12.116) を式 (12.123) に代入すればすべて

$$\dot{s}_{11} = 0, \quad \dot{s}_{22} = 0, \quad \dot{s}_{12} = 0$$

となり、客観性を持っていることがわかる。この応力速度 \dot{s} は **Truesdell 応力速度**とも呼ばれており、以後 $\overset{\vee}{\sigma}$ と表すことにして

$$\overset{\vee}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{s}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} + v_{k,k} \sigma_{ij} - v_{i,k} \sigma_{kj} - v_{j,k} \sigma_{ki} = \left(\overset{\vee}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} d_{kk} \right) - d_{ik} \sigma_{kj} - d_{jk} \sigma_{ki} \quad (12.124)$$

と定義²⁷される。最後の式の括弧の中は式 (12.118) の Kirchhoff 応力の Jaumann 速度である。また式 (12.115) の Oldroyd 応力速度とは

$$\overset{\vee}{\sigma}_{ij} = \overset{\cup}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} d_{kk} \quad (12.125)$$

という関係があるので、体積変化の無い変形状態や非圧縮性材料では、この二つの間に違いは無い。

ところで Truesdell 応力速度は、変形速度を等方成分と偏差成分に分解すると

$$\overset{\vee}{\sigma}_{ij} = \underbrace{\dot{\sigma}_{ij} - w_{ik} \sigma_{kj} - w_{jk} \sigma_{ki}}_{\overset{\vee}{\sigma}_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{3} \sigma_{ij} d_{kk} - d'_{ik} \sigma_{kj} - d'_{jk} \sigma_{ki}}_{\text{共歪み}} \quad (12.126)$$

のように分解表示することができる。これは図 12.13 のように解釈することができる。Truesdell 応力速度は、もともと第 2 Piola-Kirchhoff 応力の updated Lagrange 的な増分であり、材料（この図の 4 本の棒）に貼り付けられた座標で材料が感じることができる抵抗力の変化分である。一方 Cauchy 応力は空間固定座標で定義された応力であり必ずしも材料が感じる直接の抵抗力ではない。そのように捉えると、最初の 3 項が Cauchy 応力の Jaumann 速度でスピンの項だけを Cauchy 応力の物質微係数から除去 ($\mathbf{S} = S_{IJ} \mathbf{G}_I \otimes \mathbf{G}_J$ としたときの \mathbf{G}_I の剛体的な回転を除去) したものに相当し、左から 2 番目の図のように、剛体回転の影響を除去して材料が感じる抵抗力の増分を定義している。左から 3 番目の図のように第 4 項は、応力が生じている面積の材料の伸び縮みによる変化等を除去 (\mathbf{G}_I の伸び縮みの補正と、生じている面積も常に単位化する Cauchy 応力の面積を補正) するための項になっている。右端の図のように第 5, 6 項では、材料が歪もうとしている幾何学的な変化による

²⁷ 理由は忘れてしまったが、随分前の若手（つまり第 1 著者が若かった頃ということ）の力学研究集会で、この Truesdell 応力速度を構成則に用いるのが一番よさそうだという話を、著者がとても信頼しているある先生がなさった記憶がある。それ以来いろいろ考えを巡らしている。と思ったのだが、実は **Green-Naghdi 応力速度** (Cauchy 応力の Jaumann 速度の \mathbf{w} を ω^R で置換した速度) をお奨めしておられるという話もあとで聞いたので勘違いかもしれない。ただこの Green-Naghdi 応力速度の updated Lagrange 的な速度は Cauchy 応力の Jaumann 速度になってしまう。

応力の変化を除去 (\mathbf{G}_I が直交からずれる変化を補正) するための項である。それでもまだ物理的な意味は明確ではないので、梁の有限変位理論との比較を用いた説明を第 12.5.3 (3) 節でする。

次に、Biot 応力の時間変化率を求めておく。まず極分解の定理から $\dot{F}_{IJ} = \dot{R}_{iK} U_{KJ} + R_{iK} \dot{U}_{KJ}$ なので

$$\lim_{0 \rightarrow t} \dot{F}_{IJ} = l_{ij} = \lim_{0 \rightarrow t} \dot{R}_{iK} + \lim_{0 \rightarrow t} \dot{U}_{KJ}$$

となるが、式 (12.53) から $\lim_{0 \rightarrow t} \dot{R}_{iJ} = \lim_{0 \rightarrow t} \omega_{ij}^R$ であり、式 (12.70) より

$$\lim_{0 \rightarrow t} w_{ij} = \lim_{0 \rightarrow t} \omega_{ij}^R$$

となる。この 2 式から

$$\lim_{0 \rightarrow t} \dot{U}_{KJ} = l_{ij} - w_{ij} = d_{ij}$$

を得る。Biot 応力の時間変化率は式 (12.105) から

$$\dot{T}_{IJ} = \frac{1}{2} (\dot{S}_{IK} U_{KJ} + U_{IK} \dot{S}_{KJ} + S_{IK} \dot{U}_{KJ} + \dot{U}_{IK} S_{KJ})$$

と表されるので、上式のような極限操作をすることによって

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_{ij} \equiv \dot{t}_{ij} &\equiv \lim_{0 \rightarrow t} \dot{T}_{IJ} = \overset{\vee}{\sigma}_{ij} + \frac{1}{2} (\sigma_{ik} d_{kj} + d_{ik} \sigma_{kj}) \\ &= \overset{\vee}{\sigma}_{ij} + v_{k,k} \sigma_{ij} - \frac{1}{2} (\sigma_{ik} d_{kj} + d_{ik} \sigma_{kj}) = \overset{\nabla}{\tau}_{ij}^K - \frac{1}{2} (\sigma_{ik} d_{kj} + d_{ik} \sigma_{kj}) \end{aligned} \quad (12.127)$$

という応力速度を定義でき、これも客観的な応力速度である。図 12.14 に代表的な応力速度間の関係を示したが、前述のように $\pm(\sigma_{ij} d_{kk})$ や $\pm(d_{ik} \sigma_{kj} + d_{jk} \sigma_{ki})$ を加算した応力速度も客観性を持って [126] いる。図中左上の convected 応力速度 $\overset{\cup}{\sigma}$ は文献 [72] から引用した。

最後に、nominal 応力の時間変化率を求める。式 (12.83) の物質微分は式 (*) を考慮すれば

$$\dot{S}_{IJ}^N = J v_{k,k} \sigma_{mj} X_{I,m} - J X_{I,m} v_{m,k} \sigma_{kj} + J X_{I,m} \dot{\sigma}_{mj} \quad (12.128)$$

となる。ここで現配置を基準配置に一致させて得られる updated Lagrange 的な nominal 応力速度 \dot{n} は

$$\begin{aligned} \dot{n}_{ij} &\equiv \lim_{0 \rightarrow t} \dot{S}_{IJ}^N = \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} d_{kk} - v_{i,k} \sigma_{kj} \\ &= \overset{\vee}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} d_{kk} - d_{ik} \sigma_{kj} + w_{jk} \sigma_{ki} \end{aligned} \quad (12.129)$$

で定義できる。ただし、これは客観性を持っていないし、対称テンソルでもない。しかし、増分つり合い式を最も単純な形で表すことができ、変形の局所化等を考えるときにも最も重要な応力速度である。

12.4.4 増分つり合い式

増分で定義した弾塑性材料のつり合いを考えるときには、増分つり合い式を使う場合²⁸がある。そこで updated Lagrange 的な増分つり合い式を求めておこう。nominal 応力を用いた最も単純な Lagrange 的なつり合い式 (12.93) の慣性項を除いた項の時間変化率が

$$\dot{S}_{J_i, J}^N + \rho_0 \dot{\pi}_i = 0 \quad (12.130)$$

²⁸ 後述の増分 Newton-Raphson 法のように、応力を増分から求めてつり合いを考えるという方法もあるようだ。

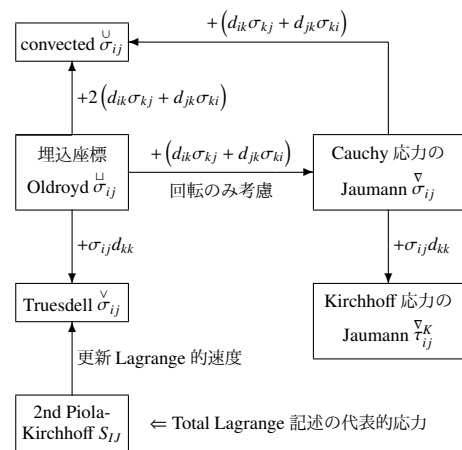


図 12.14 応力速度間の関係

となるので、これを現配置で定義し直した updated Lagrange 的な増分つり合い式は

$$\lim_{0 \rightarrow t} \left(\dot{S}_{ji,j}^N + \rho_0 \dot{\pi}_i = 0 \right) \rightarrow \dot{n}_{ji,j}(\mathbf{x}) + \rho \dot{\pi}_i(\mathbf{x}) = 0 \quad (12.131)$$

と表される。ここで $\dot{\mathbf{n}}$ が非対称な応力速度テンソルであることには十分注意する必要がある。さらにこれに対応する境界条件は式 (12.92) 等から

$$m_j \dot{n}_{ji} = \dot{i}_i, \quad \text{あるいは} \quad v_i = \text{与える} \quad (12.132)$$

と表される。

ところで、次のような Cauchy 応力を用いた増分つり合い式は成立しない。

$$\dot{\sigma}_{ji,j} + \rho \dot{\pi}_i \neq 0$$

nominal 応力速度と Cauchy 応力速度の関係式 (12.129) を式 (12.131) の増分つり合い式に代入すると

$$\dot{\sigma}_{ji,j} + \sigma_{ji,j} d_{kk} - v_{j,k} \sigma_{ki,j} + \rho \dot{\pi}_i = 0$$

となるので、Cauchy 応力を用いた増分つり合い式は

$$\dot{\sigma}_{ji,j} - v_{j,k} \sigma_{ki,j} + \rho \dot{\pi}_i + \sigma_{ji,j} d_{kk} = 0$$

あるいは、式 (12.85) の Cauchy 応力のつり合い式から慣性項を除外したものを代入すれば

$$\dot{\sigma}_{ji,j} - v_{j,k} \sigma_{ki,j} + \rho \dot{\pi}_i - \rho \pi_i d_{kk} = 0 \quad (12.133)$$

のように [151] 表されなければならない。これが Cauchy 応力を用いた増分つり合い式である。

12.4.5 応力の更新

増分計算をした場合の Cauchy 応力の更新は

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t) \quad (12.134)$$

で大丈夫²⁹だろうか。力ばかりでなく力が生じている面の変化も含んで定義されている Cauchy 応力を、このように単純に加算できるだろうか。まず、 $\sigma_{ij}(t)$ は時刻 $t = t$ における単位面積で定義された Cauchy 応力である。これを更新するには、同じく $t = t$ の単位面積当たりの増分応力を足す必要がある。それは前節の updated Lagrange 的な nominal 応力速度なので $\sigma_{ij}(t) + \dot{n}_{ij}(t)$ が時刻 $t = t$ の単位面積当たりの空間固定の基底ベクトル方向の、 $t = t + \Delta t$ における応力成分になる。そしてそれは、現配置 $t = t$ を基準配置として定義される nominal 応力の $t = t + \Delta t$ における応力なので、現配置を基準配置とした量間の和と等式が

$$S_{ij}^N(t + \Delta t; t) = \sigma_{ij}(t) + \dot{n}_{ij}(t)$$

と求められる。現配置を基準配置にした nominal 応力なので、引数のセミコロンの次に t と加筆し、添え字を小文字にした。これを式 (12.83) に代入すれば更新された Cauchy 応力が³

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \frac{\rho(t + \Delta t; t)}{\rho(t)} x_{i,k}(t + \Delta t) S_{kj}^N(t + \Delta t; t) = \frac{\rho(t + \Delta t; t)}{\rho(t)} (\delta_{ik} + v_{i,k}) (\sigma_{ij}(t) + \dot{n}_{ij}(t))$$

²⁹ 次元としては $\dot{\sigma}_{ij}(t) \Delta t$ と記すべきであるが、上付きドットの量を増分と捉えて略記している。

で算定できる。ここでも現配置を基準配置としているので $x_{i,k}$ の添え字を小文字にしてある。この式の各項に式 (12.117) (12.129) を代入すると

$$x_{i,k} S_{kj}^N = (\delta_{ik} + v_{i,k}) (\sigma_{kj} + \dot{\sigma}_{kj} + \sigma_{kj} d_{ll} - v_{k,l} \sigma_{lj}) = \sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} d_{kk}$$

であり

$$\frac{\rho(t + \Delta t; t)}{\rho(t)} = \left(\det(x_{i,j}(t + \Delta t)) \right)^{-1} = (1 + d_{kk})^{-1} = 1 - d_{kk}$$

を用いれば、最終的に

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = (1 - d_{kk}) (\sigma_{ij} + \dot{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} d_{kk}) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t)$$

となるので、式 (12.134) が証明できたことになる。もちろん速度（増分）の2次項はすべて無視できるものとしてあるので、小さくない増分ステップで計算する場合には

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \frac{1}{\det(\delta_{mn} + v_{m,n}(t))} \{ \delta_{ik} + v_{i,k}(t) \} \{ \sigma_{kj}(t) + \dot{\sigma}_{kj}(t) \} \quad (12.135)$$

を用いるべきである。ただし、数値的に対称成分になるとは限らないことには注意が必要だ。

さて、この関係式 (12.134) を元にして、再度 Cauchy 応力を用いた増分つり合い式を誘導しておこう。まず簡単のために、仮に時刻 t の空間固定座標の位置を $\xi_I(t)$ としておき、その Δt 後の位置を $x_i(t + \Delta t)$ とすると、形式的に式 (12.134) は

$$\sigma_{ji}^{\Delta t}(\mathbf{x}) = \sigma_{JI}(\boldsymbol{\xi}) + \dot{\sigma}_{JI}(\boldsymbol{\xi})$$

と書くことができる。上付きの Δt は $t = t + \Delta t$ の量を表している。また大文字の I 等は時刻 t における座標 $\boldsymbol{\xi}$ を参照しているものとする。これを微分すると

$$\sigma_{ji,j}^{\Delta t} = \sigma_{JI,j} + \dot{\sigma}_{JI,j} = \sigma_{JI,K} \xi_{K,j} + \dot{\sigma}_{JI,j} = \sigma_{JI,K} (\delta_{Kj} - v_{K,j}) + \dot{\sigma}_{JI,j} = \sigma_{JI,j} - \sigma_{JI,K} v_{K,j} + \dot{\sigma}_{JI,j}$$

となることから、時刻 $t + \Delta t$ におけるつり合い式は

$$\sigma_{ji,j}^{\Delta t} + \rho^{\Delta t} \pi_i^{\Delta t} = 0 = \sigma_{JI,j} - \sigma_{JI,K} v_{K,j} + \dot{\sigma}_{JI,j} + \rho^{\Delta t} \pi_i^{\Delta t}$$

となり、式 (12.85) を右辺第1項に代入して $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとり、大文字の添え字を小文字に直せば

$$\dot{\sigma}_{JI,j} - \sigma_{JI,K} v_{K,j} + (\rho^{\Delta t} \pi_i^{\Delta t} - \rho \pi_i) = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{\sigma}_{ji,j} - \sigma_{ji,k} v_{k,j} + (\rho \pi_i)' = 0$$

と表すことができる。ここで式 (12.59) の関係を用いると

$$(\rho \pi_i)' = \dot{\rho} \pi_i + \rho \dot{\pi}_i = -\rho \pi_i d_{kk} + \rho \dot{\pi}_i$$

という関係が成り立つので、すぐ上の式は

$$\dot{\sigma}_{ji,j} - v_{j,k} \sigma_{ki,j} + \rho \dot{\pi}_i - \rho \pi_i d_{kk} = 0$$

となり、結局式 (12.133) と一致する。

では、Kirchhoff 応力の更新を確認しておこう。式 (12.97) で、 $t = t + \Delta t$ としたときの Kirchhoff 応力に式 (12.134) の Cauchy 応力の更新を代入すると

$$\tau_{ij}^K(t + \Delta t) = \frac{\rho_0}{\rho(t + \Delta t)} \sigma_{ij}(t + \Delta t) = \frac{\rho_0}{\rho(t)} \frac{\rho(t)}{\rho(t + \Delta t)} \{ \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t) \}$$

となる。一方、式 (12.97) の物質微分から

$$\dot{\tau}_{ij}^K(t) = \frac{\rho_0}{\rho(t)} \left\{ \dot{\sigma}_{ij}(t) + \sigma_{ij}(t) d_{kk}(t) \right\}$$

であり、 $\frac{\rho(t)}{\rho(t+\Delta t)} = 1 + d_{kk}(t)$ と考えていいので、これを上式に代入して増分の 1 次項だけを残すと、結局

$$\tau_{ij}^K(t+\Delta t) = \frac{\rho_0}{\rho(t)} \{1 + d_{kk}(t)\} \left\{ \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t) \right\} = \frac{\rho_0}{\rho(t)} \left\{ \sigma_{ij}(t) + \sigma_{ij}(t) d_{kk}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t) \right\} = \tau_{ij}^K(t) + \dot{\tau}_{ij}^K(t)$$

を得る。うーん、任意の応力更新はいつも加算が成立するのかなあ。

12.5 有限変形の枠組で構成則を表すには

12.5.1 構成則に用いる応力とは、ひずみとは?

(1) 応力とひずみで定義した場合

応力は物体内部の抵抗力を表現した尺度であり、これとひずみの尺度との関係でその材料の抵抗則つまり構成則を記述することにしてあった。応力は単なる数学的力学的な概念であり、ひずみの尺度は純粋に幾何学的な量であるが、物体の抵抗力を表す応力を $\boldsymbol{\sigma}$ とし、それに対応する物体のひずみ尺度を $\boldsymbol{\epsilon}$ とすると、基本的な「線形弾性体」は例えば定数係数の 4 階のテンソル \mathbf{C} を用いて

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon}$$

で定義できそうだ。そして材料非線形性は、例えばひずみの非線形項をべき乗でモデル化すると、定数係数の 4 階のテンソル \mathbf{C}_{0i} や \mathbf{C}_{Ei} ($i = 1, 2, \dots$) を用いて

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_{01} : \boldsymbol{\epsilon} + \mathbf{C}_{E1} : \boldsymbol{\epsilon}^2 + \mathbf{C}_{02} : \boldsymbol{\epsilon}^3 + \dots$$

とできるだろう。あるいはもっと一般的に、材料パラメータ $\widetilde{\mathbf{C}}$ の応力やひずみへの依存性

$$\boldsymbol{\sigma} = \widetilde{\mathbf{C}}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon}) : \boldsymbol{\epsilon} = \text{もっと一般的に} = \mathbf{f}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\epsilon})$$

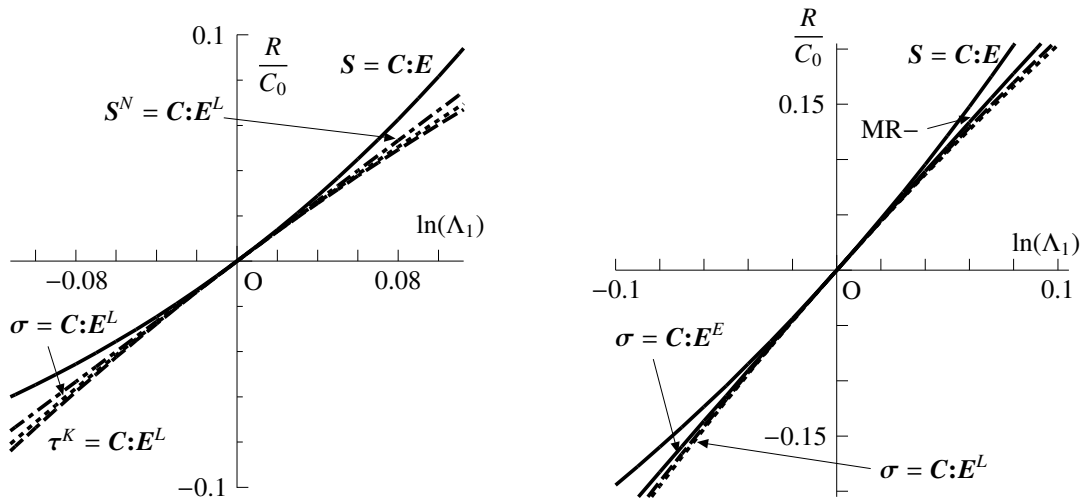
によって表現されなければならないと考えるべきだろう。ここに $\boldsymbol{\epsilon}^m$ は式 (12.22) のように

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{(k)} \mathbf{n}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)}, \quad \boldsymbol{\epsilon}^m = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{(k)}^m \mathbf{n}^{(k)} \otimes \mathbf{n}^{(k)}$$

で定義された 2 階のテンソルである。 $\epsilon_{(k)}$ は主ひずみであり、 $\mathbf{n}^{(k)}$ は主方向である。引張と圧縮であまり挙動に違いが無い材料の鋼やゴムの場合には \mathbf{C}_{Ei} は必要無いだろうが、コンクリートや地盤材料には \mathbf{C}_{Ei} も必須になりそうだ。

ここで問題は、いくつでも定義可能な応力テンソルやひずみテンソルのうちのどれをこの $\boldsymbol{\sigma}$ と $\boldsymbol{\epsilon}$ として用いるかということだ。もちろんそれぞれのテンソル間には明確な関係があるから、構成則にはどの応力テンソルを用いても構わないはずが、構成モデルそのものはできるだけ物理的な観点から構築したい。しかし、各応力テンソル間関係には変形の非線形成分（幾何学的な非線形成分）が含まれていることには注意が必要だ。同様に複数のひずみの尺度間関係にも高次の幾何学的非線形性が含まれる。最終的にはいくつかの単純な材料試験、例えば引張試験等で構成則を定める以外には手が無いようだ。

最も単純明快なのは、引張試験の外力あるいはそれを試験前の試験片の断面積で割ったいわゆる公称応力 R と、伸びひずみ例えば対数ひずみ $\ln \Lambda_1$ との関係から構成則を定める方法だろう。対数ひずみを用いる理由は、



(a) 対数ひずみと荷重の関係：圧縮性材料 (b) 対数ひずみと荷重の関係：非圧縮性材料

図 12.15 各応力とひずみに線形関係が成り立つ場合の ±10% までの変形と抵抗挙動

客観性を持つ変形速度 \mathbf{d} が実質的に対数ひずみ速度であることもあるが、伸びの 2 倍と縮みの半分とが正負の同じ値で表すことができることに直感的な素直さがあるからである。適切な σ と ϵ の組で種々の構成モデルを定義した上で引張試験結果をシミュレーションし、その $R = R(\ln \Lambda_1)$ の関係ができるだけ $\ln \Lambda_1$ に対して線形的な材料モデルが「線形弾性体」だと捉えるのが、直感的には良さそうに思うがどうだろう。つまり、荷重と変形の試験結果の関係において、応力とひずみの定義そのものに内在する変形の非線形性が原因で現れる見かけ上の非線形性はできるだけ小さい方がいいだろう。

応力とひずみの定義そのものに内在する非線形性の例を示すために、構成則を与えた場合の荷重変形関係を求めてみよう。以下簡単のために応力の主方向への 1 軸抵抗状態において、その同じ軸を主方向とするひずみが生じているとする。例えば Cauchy 応力 σ_1 と伸びひずみ E_1^E （を空間座標に変換したもの）との間に、定数係数 C を介して

$$\sigma_1(\mathbf{x}) = C E_1^E(\mathbf{x}) = C (\Lambda_1 - 1) \tag{*}$$

のような構成関係を持つ材料だとすると、それは

$$R = \Lambda_2 \Lambda_3 \sigma_1 = C \Lambda_2 \Lambda_3 (\Lambda_1 - 1)$$

という荷重変形関係を再現したことに相当する。 Λ_2 と Λ_3 は他の 2 主軸方向のストレッチである。つまり、上の式 (*) が材料の線形抵抗則だとすると、 R と $\ln \Lambda_1$ との間は非線形にならざるを得ないことを示している。もう一つの例として第 2 Piola-Kirchhoff 応力と対数ひずみか Green のひずみの間に同様に

$$S_1(\mathbf{X}) = C E_1^L(\mathbf{X}) = C \ln \{\Lambda_1(\mathbf{X})\}, \quad S_1 = C E_1(\mathbf{X}) = C \left\{ \frac{1}{2} (\Lambda_1^2 - 1) \right\}$$

という形式的な線形関係で構成則を定義したとすると、それはそれぞれ

$$R = \Lambda_1 S_1 = C \Lambda_1 \ln(\Lambda_1), \quad R = C \Lambda_1 \left\{ \frac{1}{2} (\Lambda_1^2 - 1) \right\}$$

という荷重変形関係を再現しようとしたことに相当する。これも R と $\ln \Lambda_1$ との間は非線形関係にならざるを得ない。このような非線形性は材料特性ではなく、応力とひずみの定義に内在する幾何学的非線形特性から生じたものであることには十分注意が必要なのだ。

算出の仕方については後述するが、 ±10% のひずみの範囲でいくつかのモデルによる荷重変形関係を示したのが図 12.15 である。材料特性を表す構成則だから、どちらかと言えば、物体に糊付けされた座標で記述する

Lagrange 的記述の分類に含まれる尺度を用いた方がよさそうだ。図 12.15 (a) では Lagrange 的な代表の第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green ひずみを用いた実線は、やや下に凸の荷重変形関係になっている。つまり引張では硬化し、圧縮では軟化する。これは例えば身近な材料である「消しゴム」の挙動とはずれているように感じる。ゴムは非圧縮性材料なので、図 12.15 (b) にはその例も示した。やはり第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green ひずみを用いた実線は線形からのずれも比較的大きく感じられる。つまり、応力とひずみの定義に含まれる非線形性の影響がこのくらいはあるということを確認した上で、構成則を構築する必要があるのだ。ただ、社会基盤構造で対象としている材料のほとんどは数%の変形レベルで壊れてしまうので、そのような材料に対しては、選択した尺度の違いが構成則に及ぼす影響はこの程度しか無いと考えていいことになる。

(2) 増分で定義した場合

あるいは塑性の概念を念頭に置くと、客観性を持つ updated Lagrange 的な応力速度を用いて、客観性を持つ変形速度との関係で構成モデルを定義するのが望ましいだろう。例えば弾性なら

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\mathbf{x}) : \mathbf{d}(\mathbf{x}) \quad \text{や} \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) : \mathbf{d}(\mathbf{x})$$

のように定義し、弾塑性なら

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}, \text{履歴}(\mathbf{X})) : \{\mathbf{d}(\mathbf{x}) - \mathbf{d}^p(\mathbf{x})\}$$

のように定義するのが望ましいと考えられる。 \mathbf{C} は最も単純には定数だ。客観性を持つ応力速度 $\dot{\boldsymbol{\sigma}}^*$ の選択については、いくつかの例をあとで示すが、そのうちのいくつかを用いて定数係数の弾性の場合を $\pm 10\%$ のひずみの範囲で図 12.16 に示した。この場合は updated-Lagrange 的な Truesdell 応力速度を用いたモデルの線形性が顕著だ。もっと大きな変形に対する特性については後述する。

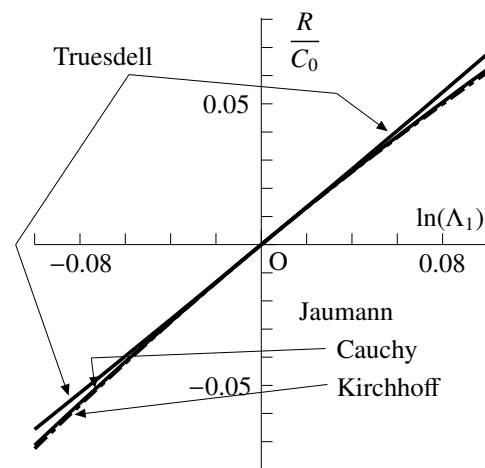


図 12.16 各応力速度と変形速度に線形関係が成り立つ場合の $\pm 10\%$ までの変形と抵抗挙動

12.5.2 超弾性と歪弾性

式 (3.65b) を一般化し、次のようなひずみエネルギー密度関数 ϕ を持つ弾性を超弾性と呼ぶ。

$$\dot{\phi} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d_{ji} = \frac{1}{\rho_0} S_{IJ} \dot{E}_{IJ}. \quad (12.136)$$

ここに、 ρ_0, ρ は変形前後の密度であり、右辺は応力の仕事率 \dot{w} で³⁰ある。これが成立する場合には

$$S_{IJ} = \frac{\partial(\rho_0 \phi)}{\partial E_{IJ}} \quad (12.137)$$

という構成関係が成立する。ただ $(\rho_0 \phi)$ が定数係数で \mathbf{E} の 2 次形式になるとは考え難いが、それは前節および次節の定数係数 \mathbf{C} を持つ $\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{E}$ の例に一致³¹する。もちろん、応力依存の任意の非線形パラメータを含む密度関数の形を仮定した上で実験による同定をすれば済むことではあるが、そこにはあまり物理は感じられないし、物理に基づかない curve-fitting に過ぎないと思わざるを得ない。また前節のような荷重変形関係の非線

³⁰ 内部エネルギー ϕ とのうちの応力の仕事率の表現は、それぞれの応力テンソルに対して式 (12.106) にまとめている。

³¹ 例からも明らかのように実用的な構成則にはならない。Hooke の等方弾性テンソルを \mathbf{C} に用いた材料を Saint Venant-Kirchhoff 材料と呼ぶ [12] らしい。この材料の名称には 'Saint' の次のハイフンを省略した。

形性を応力とひずみが持っていることも注意しないとイケない。つまり、物理的な意味があまり明確ではない Green のひずみの不変量のようなものを用いて、さらにその「ポテンシャル」(第1著者には理解不能)に相当する非線形のひずみエネルギー密度関数 $\phi(\mathbf{E})$ を定義するのは、天才³²以外には困難な仕事だろう。やはり物理的な観察と考察から直接応力とひずみ、あるいは応力速度とひずみ速度を結び付けるようなアプローチで構成モデルを定義する方がわかり易い。ただし、第 C.2 節で定式化した Bernoulli-Euler 梁の場合は、第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green ひずみのそれぞれの物理成分と Young 率を E を用いて

$$\rho_0 \phi \equiv \frac{1}{2} E e^2, \quad e \equiv \sqrt{1 + 2E_{11}} - 1 = \epsilon + x_3 \kappa$$

というエネルギー密度関数が定義でき、応力ひずみ関係は

$$\sigma \equiv \sqrt{g} S_{11} = \frac{\partial \{\rho_0 \phi(e)\}}{\partial e} = E e \quad \rightarrow \quad \phi(e) \equiv \frac{1}{2\rho_0} E e^2 \quad \rightarrow \quad S_{11} = \frac{\partial \{\rho_0 \phi(e)\}}{\partial E_{11}} = E \frac{e}{1+e} \quad (12.138a, b, c)$$

といった物理的な量同士の超弾性で表したことに相当して、それによって美しい理論が構築されている。ちなみに、Green のひずみそのものを用いて本来の超弾性として定義し直すと、この Bernoulli-Euler 梁の場合の超弾性モデルは

$$S_{11} = \frac{\partial \{\rho_0 \phi(E_{11})\}}{\partial E_{11}} = E \frac{e}{1+e} \quad \rightarrow \quad \rho_0 \phi(E_{11}) \equiv E (E_{11} - \sqrt{1 + 2E_{11}}) \quad \rightarrow \quad \phi(e) \equiv \frac{1}{2\rho_0} E (e^2 - 2) \quad (12.139a, b, c)$$

と定義したことに一致する。ポテンシャルが Green のひずみの 2 次形式になっていないところが興味深い。

ところで、ひずみエネルギー密度関数の代表例としては、よくゴムのような材料のモデルとして用いられる非圧縮性材料の Mooney-Rivlin モデルの

$$\phi = \frac{\mu}{2} (I_1 - 3) + \frac{\bar{\mu}}{2} (I_2 - 3) \quad (12.140)$$

という関数がある。ここに μ と $\bar{\mu}$ が材料パラメータであり、 I_1, I_2 は適切に選んだ変形の第 1, 2 不変量である。

例えば \mathbf{U} の主値を用いて

$$(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_2} \end{pmatrix}, \quad I_1 = U_{IJ} U_{IJ}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \{I_1^2 - (U_{KI} U_{KJ})(U_{LI} U_{LJ})\} \quad (12.141a, b, c)$$

と定義できる。あとで一つだけ nominal 応力を用いた例を示す。

これに対して歪弾性と呼ばれる材料は

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} d_{kl} \quad (12.142)$$

という同次式を満足するものとして定義される。弾性係数 C_{ijkl} は一般には応力の関数である。注意しないといけないのは、この弾性構成モデルは保存的ではなくエネルギー散逸が避けられないということ³³である。等方線

³² 秀才ではなく天才。Argonne 国立研究所の井口道生先生によると、Einstein は実験・実測の観察をモデル化したのではなく、「こうだったらいいなあ」と理論を作り上げるアプローチをとるらしく、誰にも真似できない天才の技だそう。我々凡人はやはり、物理的に意味のある量の観察から物理的な関係性にモデル化するのが精一杯だろう。

ついでに、井口先生から聞いた Fermi と Fano の話も書いておこう。Fano は Fermi の弟子で、あるとき(例えば X-Day としておく) PhD 研究の打ち合わせに訪れた Fano がその概要を話し終わると、Fermi は「いいねえ。じゃ、これこれをこういう風に考えて検討してみたらどうだろう。」‘Why don't you...?’ と指導。数週間後その結果を Fano が Fermi に報告し、それを踏まえた今後の方針を提案したところ、Fermi はまた「それはいいですね。だったらあの論文集の誰某の考え方を見てから」‘Why don't you...?’ と助言をした。このやり取りを 1 年くらい続けて Fano は PhD を取得した。師の Fermi 没後、奥様が彼の弟子達を自宅に招いたパーティがあった。Fano が Fermi の書斎に入ると机の上に Fermi の journal が置いてあったので、それをめくって X-Day の記述を見てみると、Fano がその日からの 1 年間に誘導した論理と定式化等が結論まですべて書かれていたという。

³³ 任意の応力状態で式 (12.142) が必ずしも積分可能ではないことから、載荷後除荷しても元には戻らない、あるいは変形を元に戻したときに残留応力が生じる。そのため、Jaumann 速度の定義で用いられているスピンの選択を議論した研究は多数ある(例えば文献 [31, 58, 59, 66] 等)が、あまり物理的な香りは感じられない。

形重弾性体の場合、応力に依存しない係数成分は式 (3.49b) の \mathbf{C} で表されるが、一般には

$$\begin{aligned} C_{ijkl} = & c_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + c_1 \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + c_2 \sigma_{ij} \delta_{kl} + c_3 \delta_{ij} \sigma_{kl} + c_4 (\sigma_{ik} \delta_{jl} + \delta_{ik} \sigma_{jl}) \\ & + c_5 \sigma_{im} \sigma_{mj} \delta_{kl} + c_6 \sigma_{ij} \sigma_{kl} + c_7 \delta_{ij} \sigma_{km} \sigma_{ml} + c_8 (\sigma_{im} \sigma_{mk} \delta_{jl} + \sigma_{jm} \sigma_{ml} \delta_{ik}) \\ & + c_9 \sigma_{im} \sigma_{mj} \sigma_{kl} + c_{10} \sigma_{ij} \sigma_{km} \sigma_{ml} + c_{11} \sigma_{im} \sigma_{mj} \sigma_{kn} \sigma_{nl} \end{aligned} \quad (12.143)$$

のように与えられ、 c_0 から c_{11} は応力の不変量の関数で与えられる係数 [127, 163] である。数学的にはこれでいいのだろうが、12 個ものパラメータが常に必要な物理モデルはとても適切だとは思えないと著者は感じている。そもそもパラメータを同定するための 12 種類の独立した実験設定が不可能だろう。

12.5.3 こんな弾性体って?

(1) 応力とひずみで定義した場合

適切な応力テンソル $\boldsymbol{\sigma}$ とそれに対応するひずみテンソル $\boldsymbol{\epsilon}$ をある直交異方性を持つ材料定数で結びつけた

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (12.144)$$

のようなモデルをいくつか考えてみよう。もちろん構成則を考えるときは、材料試験結果を見ながら上の式のようなモデルを構築することになるのだが、ここでは、もし上式のような構成則が成立する材料があったときに、有限変形の枠組の中でどのような引張試験結果に相当するのかわを示すのが目的だ。つまり応力やひずみの定義に内在する幾何学的非線形性の影響をここで明らかにしておこう。まず応力 $\boldsymbol{\sigma}$ の候補としては、第 2 Piola-Kirchhoff 応力 \mathbf{S} と Kirchhoff 応力 $\boldsymbol{\tau}^K$ に Cauchy 応力 $\boldsymbol{\sigma}$ 、さらに少し変ではあるが nominal 応力 \mathbf{S}^N を使ってみよう。対応するひずみ $\boldsymbol{\epsilon}$ は応力の仕事率の式 (12.106) にある組み合わせの

$$\dot{w} = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} d_{ji} = \frac{1}{\rho_0} \tau_{ij}^K d_{ji} = \frac{1}{\rho_0} S_{ij}^N \dot{F}_{ji} = \frac{1}{\rho_0} S_{IJ} \dot{E}_{JI} = \frac{1}{\rho_0} T_{IJ} \dot{E}_{JI}^E \quad (12.106) \text{再掲}$$

からの示唆で選択する。つまり第 2 Piola-Kirchhoff 応力は Green のひずみと、また Kirchhoff 応力と Cauchy 応力は対数ひずみと関係付けることを示唆しているので、ここでは

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} := \mathbf{S} \quad \text{に対しては} \quad \boldsymbol{\epsilon} := \mathbf{E}, \\ \boldsymbol{\sigma} := \boldsymbol{\tau}^K, \quad \boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{S}^N \quad \text{に対しては} \quad \boldsymbol{\epsilon} := \mathbf{E}^E, \quad \mathbf{E}^L \end{aligned}$$

という組み合わせ³⁴を用いるのだ。最も単純なモデルは、前節のひずみエネルギー密度関数 ϕ がひずみ尺度の 2 次形式になっているものだろうから、簡単のために円断面棒の引張試験を対象として直交 3 軸方向の一様応力・伸び状態をイメージして

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_0 & C_1 & C_1 \\ C_1 & C_0 & C_1 \\ C_1 & C_1 & C_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \end{Bmatrix} \quad (12.145)$$

とする。そして、 x_1 方向のロードセルの読みを試験片の変形前の断面積で割った公称応力が R で、同じ方向の伸びが $\Lambda_1 = \Lambda_L$ だったとしよう。応力と変形の状態は、上式 (12.145) で $\sigma_{22} = 0, \sigma_{33} = 0, \epsilon_{22} = \epsilon_{33}, \Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_T$ とすればいいので

$$\epsilon_{22} = -\frac{C_1}{C_0 + C_1} \epsilon_{11}, \quad \sigma_{11} = \frac{C_0(C_0 + C_1) - 2C_1^2}{C_0 + C_1} \epsilon_{11}$$

³⁴ 特に nominal 応力は非対称テンソルであるから、ここで用いる対称なひずみと線形関係で結び付けるのはおかしいが、例として 1 軸状態を対象とするので、それぞれの特徴を比較するために用いている。実際、式 (12.106) の応力の仕事率の表現の nominal 応力は変形勾配の変化 $\dot{\mathbf{F}}$ との積になるので、極分解定理を通して \mathbf{F} の実質的な変形成分の $\mathbf{U} = \mathbf{I} + \mathbf{E}^E$ つまり \mathbf{E}^E と関連付けることを示唆していると捉えた。

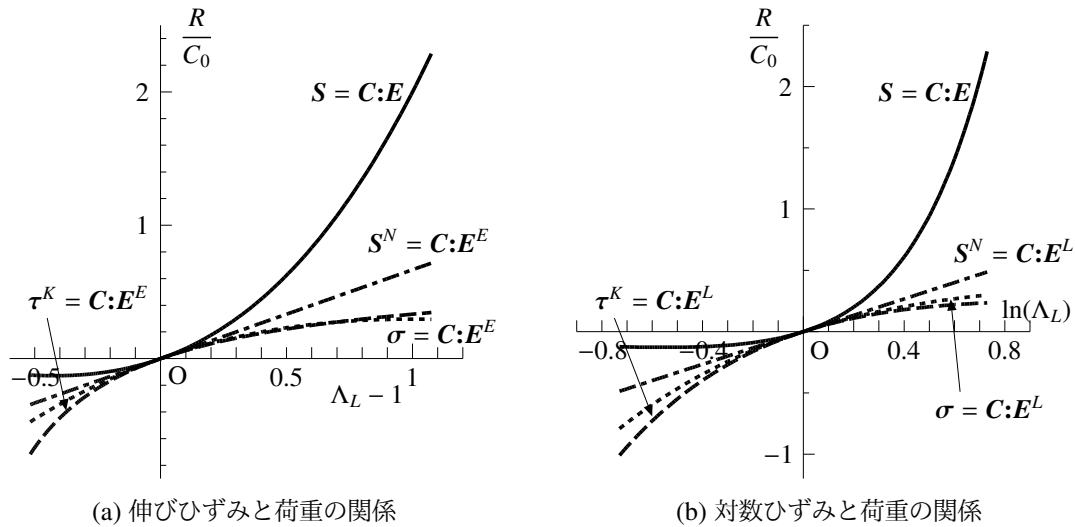


図 12.17 いくつかの応力で線形関係が成り立つ弾性体の場合

となる。各応力は、応力の物理的な意味を検討したときの例題の式 (12.108) (12.109) (12.110) (12.111) で回転成分 α を零にすればいいから、それぞれ

$$\sigma_{11} := S_{11} = \frac{R}{\Lambda_L}, \quad \sigma_{11} := \sigma_{11} = \frac{R}{\Lambda_T^2}, \quad \sigma_{11} := \tau_{11}^K = R \Lambda_L, \quad \sigma_{11} := S_{11}^N = R$$

と置き換えられる。ひずみは、Green のひずみを用いる場合は式 (12.23) から

$$\epsilon_{11} := \frac{1}{2} (\Lambda_L^2 - 1), \quad \Lambda_T^2 = 1 - \frac{C_1}{C_0 + C_1} (\Lambda_L^2 - 1)$$

となり、伸びひずみの場合は式 (12.44a) から

$$\epsilon_{11} := \Lambda_L - 1, \quad \Lambda_T = 1 - \frac{C_1}{C_0 + C_1} (\Lambda_L - 1)$$

対数ひずみの場合も式 (12.44b) から

$$\epsilon_{11} := \ln(\Lambda_L), \quad \ln \Lambda_T = -\frac{C_1}{C_0 + C_1} \ln \Lambda_L$$

と置き換えればいい。

これを用いて伸びひずみを横軸にとって荷重と変形の関係を表示したのが図 12.17 (a) で、対数ひずみを横軸にとったのが図 12.17 (b) である。ただし、簡単のため $c_1/c_0 = 1/2$ (微小変形理論における Hooke の法則の Poisson 比が $\nu = 1/3$ に相当する) とした。一番おかしな nominal 応力を用いた線形関係の材料モデルの場合には、荷重と変形の関係は線形になるが、そんな材料は多分存在しないだろう。それ以外は、応力ひずみ関係が定数係数で関係付けられているにもかかわらず、それぞれの応力やひずみの定義に内在する幾何学的な非線形性によって荷重と変形の関係は非線形性を示している。そして第 2 Piola-Kirchhoff 応力を用いた場合と、Cauchy 応力および Kirchhoff 応力の場合とは、大変形時にお互いに逆の応答特性を示している。つまり、第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green のひずみを用いた線形関係の材料は、引張るにつれて剛になり、圧縮すればするほど柔らかくなることを示している。引張側の応答はゴムのような非圧縮材料で経験するのと同じようには感ずるが、圧縮するほど柔らかくなる材料はあまり触ったことが無いように感じる。これは Saint Venant-Kirchhoff 材料と呼ばれ [12], 例えば圧縮状態の $\Lambda_L = \frac{1}{\sqrt{3}}$ で R はピークを持つ等実用的ではないとされている。もちろん前述したように、 $\pm 10\%$ の変形の範囲ではどの構成則を用いても違いはほとんど無い。

図 12.18 には、Cauchy 応力と Kirchhoff 応力を用いた結果だけを取り出した。この場合は上述の第 2 Piola-Kirchhoff 応力を用いた材料とは逆に、引張るほど柔らかくなり、圧縮すると剛になっている。圧縮側はやはり

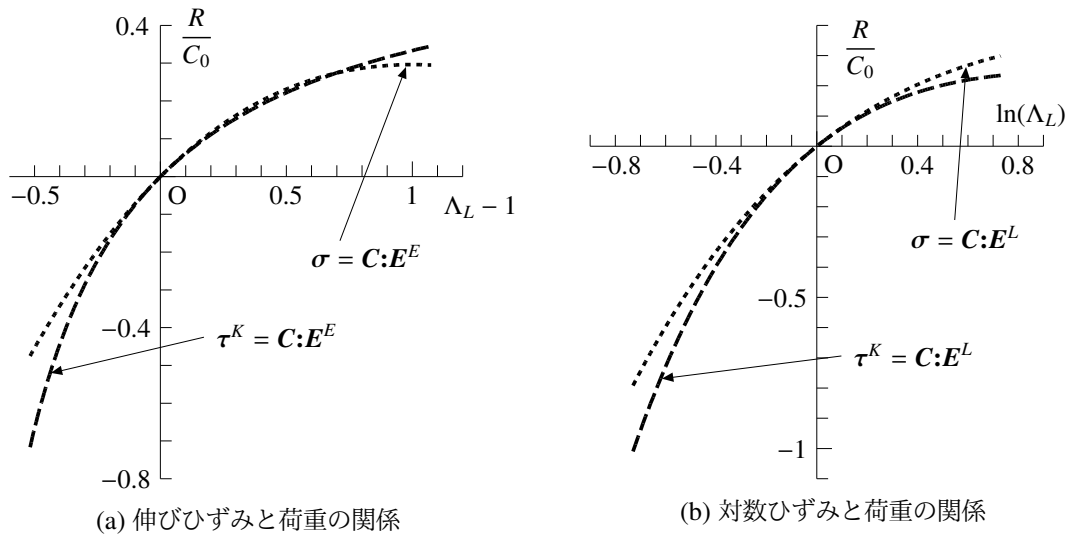


図 12.18 Cauchy 応力と Kirchhoff 応力で線形関係が成り立つ弾性体の場合

ゴム等で経験する挙動と同じように感じる。いずれにしても、このような定数係数を用いた線形関係で与えられる材料が身の回りには無いのは当然だが、この結果から、応力とひずみの定義に含まれる幾何学的非線形項の特性を理解しておいて欲しい。

次にゴムのような非圧縮性材料の例を試算しておこう。この場合には $C_1 = -C_0/2$ として

$$\begin{pmatrix} \sigma_L \\ \sigma_T \\ \sigma_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0 & -C_0/2 & -C_0/2 \\ -C_0/2 & C_0 & -C_0/2 \\ -C_0/2 & -C_0/2 & C_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_L \\ \epsilon_T \\ \epsilon_T \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p \\ p \\ p \end{pmatrix}$$

とすればいい。実はこれは、微小変形理論における式 (3.44) (3.45) の Hooke の法則を

$$\sigma'_{ij} = 2G \epsilon'_{ij}, \quad \sigma_{kk} = K \epsilon_{kk} \quad \rightarrow \quad \sigma'_{ij} = 2G \epsilon'_{ij}, \quad \sigma_{kk} = 3p$$

とみなしたモデルに相当するが、これは Poisson 比を $\nu = 1/2$ としたのではなく、もう一方の極限の $\nu = -1$ ($C_1/C_0 = \lambda/(\lambda+2\mu) = -1/2$) に相当する。微小変位理論の範囲では $\epsilon_{kk} = 0$ で非圧縮性を近似しているので、 $C_1 = 0$ の材料でも非圧縮性材料をモデル化できるが、有限変位理論の範囲の非圧縮性は $\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3 = 1$ なので、上式のような関係にしてみた。ただし、ここに p は平均応力 (負の静水圧) である。また非圧縮性材料の 1 軸状態なので

$$\Lambda_2 = \Lambda_3 = \Lambda_T = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_L}}, \quad \sigma_T = 0$$

の条件から、 p を Λ_L で表すことができる。 $\sigma := S$ の場合には $\epsilon := E$ を選択し、非圧縮性の場合には Cauchy 応力と Kirchhoff 応力は一致するので、 $\sigma := \sigma$ に対しては $\epsilon := E^E$ か E^L を選択した。結果的に

$$\begin{aligned} \sigma := S \text{ で } \epsilon := E \text{ のとき} \quad \frac{R}{C_0} &= \frac{3}{4} (\Lambda_L^3 - 1), \\ \sigma := \sigma \text{ で } \epsilon := E^E \text{ のとき} \quad \frac{R}{C_0} &= \frac{3}{2} (1 - \Lambda_L^{-3/2}), \quad \epsilon := E^L \text{ のとき} \quad \frac{R}{C_0} = \frac{9}{4} \frac{\ln(\Lambda_L)}{\Lambda_L} \end{aligned}$$

となる。これを示したのが図 12.19 である。全体的な特性の違いは圧縮性材料の場合と同様だが、荷重のレベルが 3 倍くらいにまで大きくなっている。

非圧縮性材料に対しては、ひずみエネルギー密度関数の例として挙げた式 (12.140) の Mooney-Rivlin モデルが有名である。これを一般化して

$$\phi = \frac{C_0}{2} (I_1 - 3) + C_1 (I_2 - 3) \tag{12.146}$$

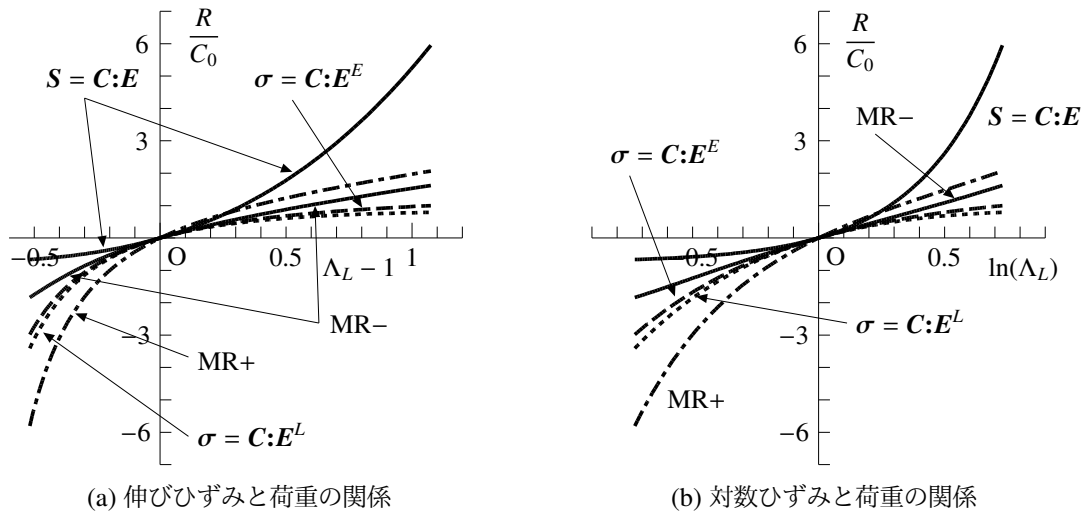


図 12.19 非圧縮性弾性体の場合

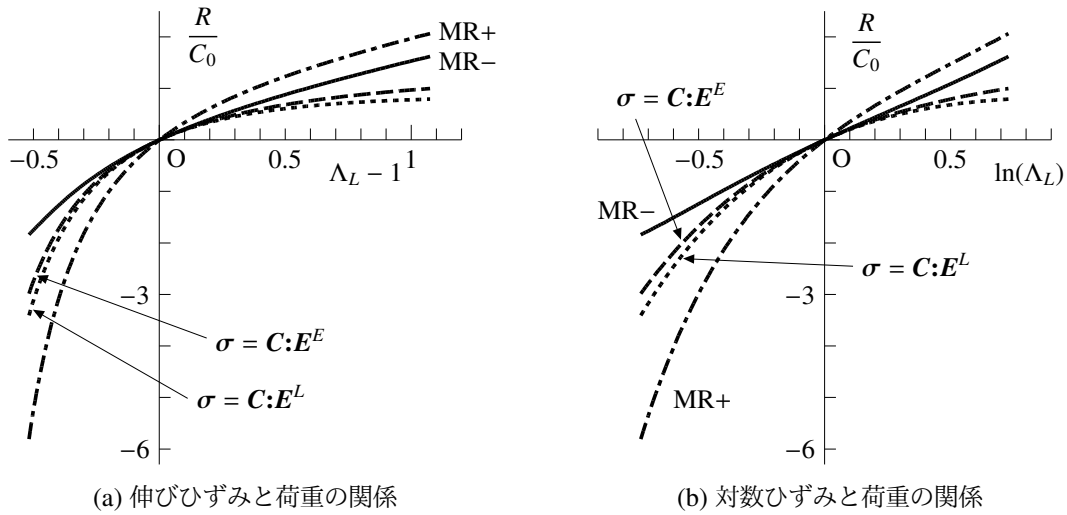


図 12.20 Cauchy 応力でモデル化した非圧縮性弾性体の場合

としてみよう。そして I_1, I_2 は変形テンソル C の第 1, 2 不変量とし

$$I_1 = F_{kJ} F_{kJ}, \quad I_2 = \frac{1}{2} \{ I_1^2 - (F_{kl} F_{kl})(F_{ll} F_{ll}) \}, \quad (F) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Lambda_1 \Lambda_2} \end{pmatrix} \quad (12.147a, b, c)$$

としておこう。そして nominal 応力が

$$S_{ij}^N = \frac{\partial \phi}{\partial x_{j,i}} - p X_{i,j} = C_0 x_{j,i} - 2C_1 \{ (x_{k,j} x_{k,j}) x_{j,i} - x_{j,k} x_{l,k} x_{l,i} \} + p X_{i,j} \quad (12.148)$$

と関係付けることができるものとする。ここに p は負の静水圧である。非圧縮性材料なので、これから Cauchy 応力は

$$\sigma_{ij} = x_{i,k} S_{k,j}^N = C_0 x_{j,i} x_{i,i} - 2C_1 \{ (x_{k,j} x_{k,j}) x_{j,i} x_{i,i} - x_{j,k} x_{l,k} x_{l,i} x_{i,i} \} + p \delta_{ij} \quad (12.149)$$

と表すことができる。そこで 1 軸載荷を想定して p を消去して Λ_2, Λ_3 を求めると、最終的に

$$\sigma_{11} = R \Lambda_L = \left(C_0 + 2C_1 \frac{1}{\Lambda_L} \right) \left(\Lambda_L^2 - \frac{1}{\Lambda_L} \right), \quad \Lambda_2 = \Lambda_3 = \frac{1}{\sqrt{\Lambda_L}}$$

という関係を得る。上の例の場合と $\Lambda_L = 1$ における勾配（剛性）を一致させようとする

$$\frac{C_1}{C_0} = -\frac{1}{8}$$

と負になってしまうが、その結果を同じ図 12.19 に並べた。図中 ‘MR-’ とあるのがその結果である。 C_1 が負になっているが、これは微小変形理論において Poisson 比を $\nu = -1/7$ とした場合に相当し、その材料は安定ではあるものの複合材料のような特殊な材料特性に相当してしまうので、数値をそのまま正、つまり

$$\frac{C_1}{C_0} = \frac{1}{8}$$

としたものも参考として ‘MR+’ として示しておいた。この場合も、第 2 Piola-Kirchhoff 応力を用いた場合の挙動だけが他と少し違っている。Mooney-Rivlin モデルはかなり非線形性の強い構成則に見えるが、荷重変形関係はほぼ線形になるのはとても興味深い。なお、Cauchy 応力を用いた結果だけを図 12.20 にまとめた。

(2) 増分で定義した場合

ある適切に定義された客観性を持つ速度応力 $\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x})$ を用いて、客観性を持つ変形速度との間にある直交異方性を持つ材料定数で結びつけた

$$\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}, \text{履歴}(\mathbf{X})) : \mathbf{d}(\mathbf{x}) \quad (12.150)$$

のような関係式で、構成則を定義することもできる。最も広く用いられているのは Cauchy 応力の Jaumann 速度と変形速度を弾性係数で関係付けるモデルだろう。つまり

$$\overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} : \mathbf{d} \quad (12.151)$$

となる。これは歪弾性の一種で、このモデルが保存的ではなくエネルギー散逸が避けられないということには注意する必要がある。再度、3 軸方向への载荷状態を対象にすればスピンはすべて零なので、上式は

$$\begin{Bmatrix} \dot{\sigma}_{11} \\ \dot{\sigma}_{22} \\ \dot{\sigma}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_0 & C_1 & C_1 \\ C_1 & C_0 & C_1 \\ C_1 & C_1 & C_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{11}^L \\ d_{22}^L \\ d_{33}^L \end{Bmatrix} \quad (12.152)$$

となる。右辺の \mathbf{d}^L は式 (12.66) で定義した対数ひずみ速度である。単純な载荷状態なので

$$(\mathbf{n}) = (\mathbf{N}) = (\mathbf{I}), \quad (\mathbf{d}^L) = [(\ln \Lambda)]$$

となる。ここに (\mathbf{I}) は単位行列である。したがって、式 (12.134) の Cauchy 応力の更新規則を考慮すると、上式 (12.152) は容易に積分できて、結局

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_0 & C_1 & C_1 \\ C_1 & C_0 & C_1 \\ C_1 & C_1 & C_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \ln \Lambda_1 \\ \ln \Lambda_2 \\ \ln \Lambda_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : \mathbf{E}^L$$

のように、Cauchy 応力と対数ひずみを線形関係で結び付けた前節のモデルの一つに一致する。したがって、引張試験の結果も前節の対応する結果と一致する。

あるいは式 (12.137) の超弾性のモデルから、 ϕ が明確に定義できる場合にはそれを物質微分して

$$\dot{S}_{IJ} = \left(\frac{\partial(\rho_0 \phi)}{\partial E_{IJ}} \right) \dot{E}_{IJ} = \left(\frac{\partial^2(\rho_0 \phi)}{\partial E_{IJ} \partial E_{KL}} \right) \dot{E}_{KL} \quad (*)$$

という増分関係も成立する。特に社会基盤構造に関係した材料の場合には、大変形を経験しつつある材料の真の初期状態を定義することは困難である。したがってある変形状態あるいは応力状態を仮の初期状態とするのだが、結局は各状態における増分関係（これからどうなるかとするのか）で構成則を定義する方が相応しいと考えられるので、固体の場合は updated Lagrange 的な構成則を定義してみよう。そこで上式(*)の updated Lagrange 的な極限をとって式 (12.121) (12.123) (12.124) を用いれば

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}(\rho, \sigma) d_{kl}, \quad \bar{C}_{ijkl}(\rho, \sigma) \equiv \lim_{0 \rightarrow t} \left(\frac{\partial^2 (\rho_0 \phi)}{\partial E_{IJ} \partial E_{KL}} \right) \quad (12.153a, b)$$

のように Truesdell 応力速度と変形速度の間の構成則が、超弾性とある種等価な増分構成則として成立する。最も基本的なモデルとして、この弾性係数 \bar{C} を定数係数の C で再定義して

$$\dot{\bar{\sigma}} = C : d \quad (12.154)$$

と関係付けた構成モデルも設定できる。この Truesdell 応力速度に近いもう一つの応力速度に Oldroyd 応力速度があるので、それを用いた

$$\dot{\underline{\sigma}} = C : d \quad (12.155)$$

という構成則も考えられる。

あるいは、Cauchy 応力ではなく、式 (12.118) の Kirchhoff 応力の Jaumann 速度と変形速度の間に

$$\dot{\bar{\tau}}^K = C : d \quad (12.156)$$

という線形関係があるとするモデルも可能だ。式 (12.154) の場合と、式 (12.155) や式 (12.156) の場合の3者の例を、Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合と比較しておこう。いずれのモデルも

$$\dot{\sigma}_{11} = (\alpha + \beta \sigma_{11}) \{\ln(\Lambda_L)\}' \rightarrow \frac{\dot{\sigma}_{11}}{\alpha + \beta \sigma_{11}} = \frac{\dot{\Lambda}_L}{\Lambda_L}$$

と表すことができるので積分できて

$$\sigma_{11} = \frac{R}{\Lambda_T^2} = \frac{\alpha}{\beta} (\Lambda_L^\beta - 1), \quad \ln \Lambda_T = -\frac{C_1}{C_0 + C_1} \ln \Lambda_L$$

を得る。ここに α と β は各モデル毎に

$$\alpha \equiv \frac{C_0(C_0 + C_1) - 2C_1^2}{C_0 + C_1}, \quad \beta \equiv \begin{cases} -\frac{C_0 - C_1}{C_0 + C_1} : \text{Kirchhoff 応力の Jaumann 速度} \\ \frac{C_0 + 3C_1}{C_0 + C_1} : \text{Truesdell 応力速度} \\ 2 : \text{Oldroyd 応力速度} \end{cases}$$

と定義される。

以上の四つのモデルで $c_1/c_0 = 1/2$ とした場合の結果を3本の実線と1本の一点鎖線で図 12.21 に示した。ただし Truesdell 応力速度の場合には $c_1/c_0 = 1/4, 2/3$ の場合も並べて破線で描いたが、これはそれぞれ微小変形理論の Poisson 比が $\nu = 0.2, 0.4$ の場合に相当する。細い実線が $c_1/c_0 = 1/2$ のときの Oldroyd 応力速度を用いた結果である。やはり応力速度の選択の違いによって引張試験の応答には大きな差が現れている。ところで、Truesdell 応力速度を用いた場合の結果は、縦軸の応力レベルや横軸の変形にあまり依存せず、その勾配がほぼ同じになっている。例えば鋼等の結晶金属材料を対象にすると、ほとんどの弾性変形成分は結晶格子そのものの歪みであろうし、それは応力レベルだけでなく、転位の移動による巨視的な非可逆変形のレベルに依存しない一

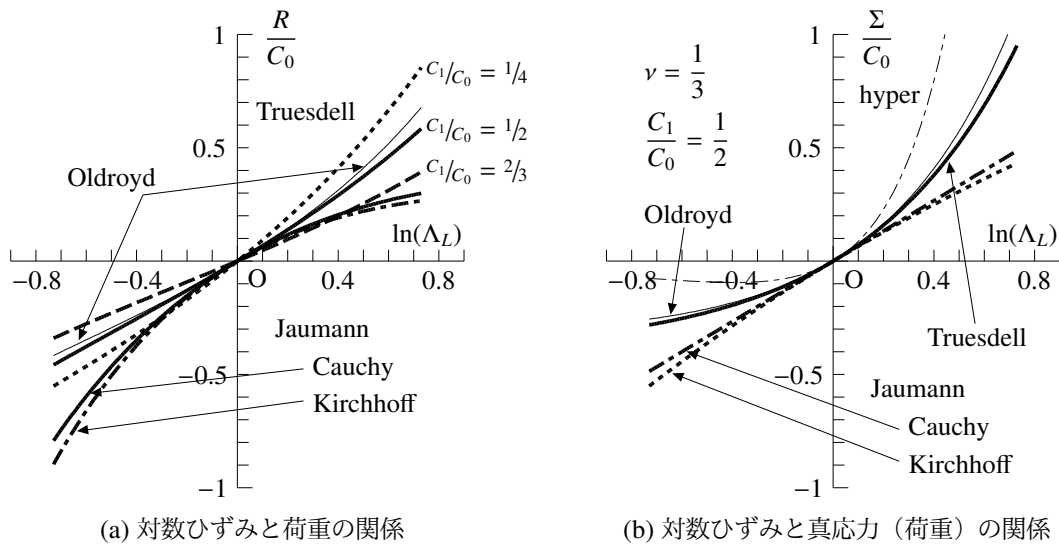


図 12.21 速度型で定義された弾性モデル

定の特徴と考えてよさそうだ。そういう考察に基づけば、結晶金属材料の弾性部分には Truesdell 応力速度を用いるのが相応しいかもしれないと思い、この例でも 3 種類の材料パラメータで図示してみた。

では、どのモデルが材料の抵抗則を適切に表しているだろう。そこで図 12.21 (b) には縦軸に真応力 $\Sigma \equiv \sigma_{11}$ を用いて表現した材料の抵抗則を示した。式からも明らかなように、Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた垂弾性は Cauchy 応力そのものと対数ひずみを線形に関係付けていたから、この抵抗曲線は直線になっている。図中の 'hyper' は、 $\mathbf{S} = \mathbf{C}:\mathbf{E}$ と置いた簡易な超弾性の場合（非実用的な Saint Venant-Kirchhoff 材料）の抵抗則だが、これは圧縮側の

$$\Lambda_L^2 = \frac{1}{2\nu} \left\{ (3 + 2\nu) - \sqrt{9 + 8\nu} \right\} \quad (12.157)$$

でピークを持ち、そのあとに明らかな軟化を示している。また

$$\Lambda_L^2 = \frac{1 + \nu}{\nu} \quad (12.158)$$

で真応力 Σ は無限大 (Λ_T が零) になる。例えば $\nu = 1/3$ の場合は 2 倍の長さ ($\Lambda_L = 2$) にはならないことになる。これに対し Truesdell 応力速度を用いた場合は、引張では Poisson 比の影響で断面積が小さくなり、圧縮では逆に大きくなることを反映しているようにも見える。

非圧縮性材料の速度型構成則の場合は、非圧縮性の条件が式 (12.60) で与えられるので

$$\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}:\mathbf{d} + \dot{p}\mathbf{I} \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \overset{\star}{\sigma}_{11} \\ \overset{\star}{\sigma}_{22} \\ \overset{\star}{\sigma}_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} C_0 & C_1 & C_1 \\ C_1 & C_0 & C_1 \\ C_1 & C_1 & C_0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{22} \\ d_{33} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \dot{p} \\ \dot{p} \\ \dot{p} \end{Bmatrix}, \quad d_{22} = d_{33} = -\frac{1}{2}d_{11}$$

のような関係でモデル化できる。1 軸状態を対象とするので、 $\overset{\star}{\sigma}_{22} = \overset{\star}{\sigma}_{33} = 0$ から \dot{p} を消去して、前節の場合と同様の演算を経て $\overset{\star}{\sigma}_{11}$ を求めると、Truesdell 応力速度の場合も

$$\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}} := \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} \quad \rightarrow \quad R = \frac{3}{4\Lambda_L} (C_0 - C_1) (\Lambda_L^2 - 1)$$

と積分でき、Cauchy 応力の Jaumann 速度の場合も

$$\overset{\star}{\boldsymbol{\sigma}} := \overset{\nabla}{\boldsymbol{\sigma}} \quad \rightarrow \quad R = \frac{3}{2\Lambda_L} (C_0 - C_1) \ln(\Lambda_L)$$

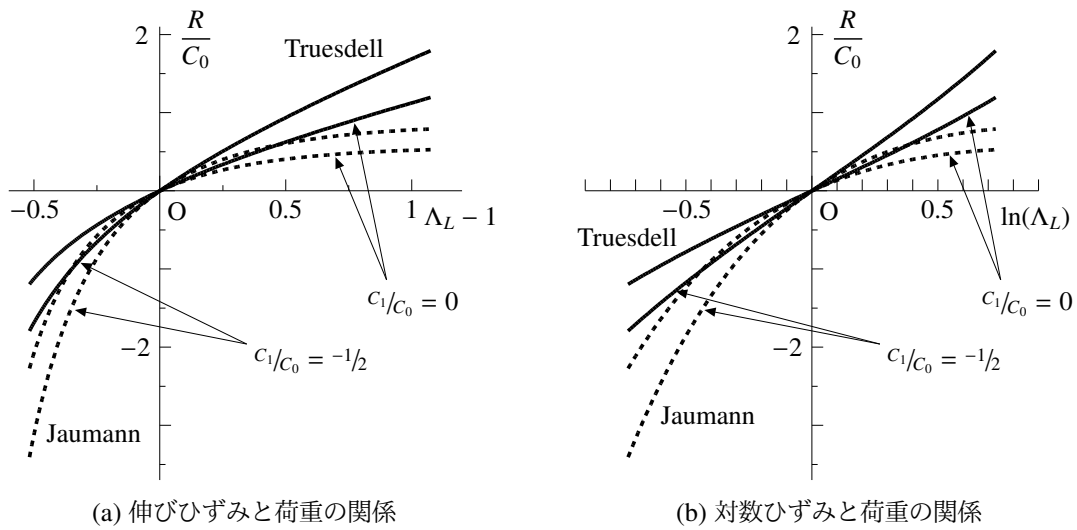


図 12.22 速度型で定義された非圧縮弾性モデル

のように積分できるが、後者は前節の結果と一致する。ちなみに $\Lambda_T^2 = 1/\Lambda_L$ である。前節と同様 $c_1/c_0 = -1/2$ にした場合 (Poisson 比 $\nu = -1$ 相当) と、非圧縮粘性流体のように微小変形理論における式 (3.44) (3.45) の Hooke の法則でせん断挙動を記述するひずみには偏差ひずみではなく全ひずみを用いて

$$\sigma'_{ij} = 2G \epsilon'_{ij}, \quad \sigma_{kk} = K \epsilon_{kk} \quad \rightarrow \quad \sigma'_{ij} = 2G \epsilon_{ij}, \quad \sigma_{kk} = 3p$$

とみなした場合 ($\nu = 1/2$ 相当), つまり $c_1/c_0 = 0$ の場合の結果を図 12.22 に示した。実線が Truesdell 応力速度を用いた場合で、破線が Cauchy 応力の Jaumann 速度の場合である。圧縮性材料モデルの場合とほぼ同様の傾向を示している。以上のいくつかの例で明らかのように、最も単純な定数係数の線形関係で構成則を定義しても、応力や応力速度およびひずみの定義に内在する非線形性によって、荷重変形関係は線形から大きくずれることには十分注意する必要がある。とても難しいとは思いますが、材料試験に現れる非線形性のうち、どれがこの定義に内在する幾何学的非線形性によるもので、どれが材料そのものの非線形性なのかをきちんと区別する必要がある。

実は Cauchy 応力の Jaumann 速度には有名な特性 [57] が報告されているので、それについて Truesdell 応力速度を用いた場合と比べておこう。図 12.23 に示したように高さと幅を保ったまま x_1 方向にせん断変形 γ を与える。この変位成分は $u_1 = X_2 \tan \gamma$ だけなので

$$(F) = \begin{pmatrix} 1 & \tan \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (F)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\tan \gamma \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。簡単のために 2×2 の部分のみを示す。高さや幅を保持しているため体積変化は無く $J = 1$ のままである。これから

$$(l) = \begin{pmatrix} 0 & (\tan \gamma) \cdot \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、変形速度とスピンは

$$(d) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 (\tan \gamma) \cdot \\ 1/2 (\tan \gamma) \cdot & 0 \end{pmatrix}, \quad (w) = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 (\tan \gamma) \cdot \\ -1/2 (\tan \gamma) \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

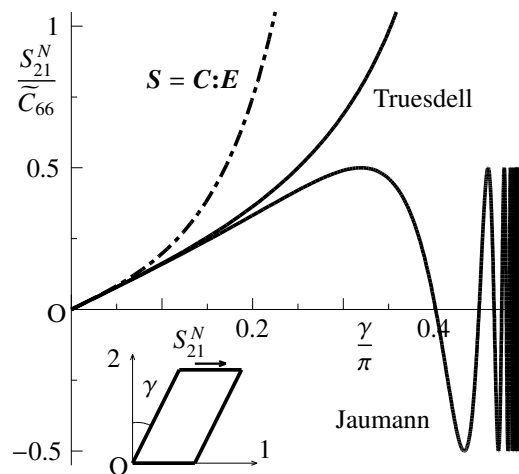


図 12.23 単純せん断

のようになる。ロードセル等で測定できる変形前の単位面積当たりの外力は式 (12.83) の nominal 応力で定義すればいいので、この変形の場合は

$$S_{11}^N = \sigma_{11} - \sigma_{12} \tan \gamma, \quad S_{21}^N = \sigma_{12}, \quad S_{12}^N = \sigma_{12} - \sigma_{22} \tan \gamma, \quad S_{22}^N = \sigma_{22} \quad (*)$$

という関係になる。面白いことに当たり前だが、この関係は自動的にモーメントのつり合い $S_{21}^N - S_{12}^N - S_{22}^N \tan \gamma = 0$ を満足している。

まず Jaumann 応力速度で³⁵構成則を定義する場合を考える。この変形の場合は式 (12.117) の定義から

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{11} = \dot{\sigma}_{11} - \sigma_{12} (\tan \gamma)'; \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}_{22} + \sigma_{12} (\tan \gamma)'; \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{12} + (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \frac{1}{2} (\tan \gamma)'$$

となる。これが \mathbf{d} との間に直交異方性を持つ定数係数の線形関係にある弾性体とし、変形速度は $d_{12} = d_{21}$ のみが非零だから

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{11} = 0, \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{22} = 0, \quad \overset{\nabla}{\sigma}_{12} = \widetilde{C}_{66} d_{12} = \frac{1}{2} \widetilde{C}_{66} (\tan \gamma)'$$

が成立する。 \widetilde{C}_{66} は式 (3.52) で定義したせん断接線係数で、微小変形理論の $2G$ に相当する。これから

$$\dot{\sigma}_{11} = \sigma_{12} (\tan \gamma)'; \quad \dot{\sigma}_{22} = -\sigma_{12} (\tan \gamma)'; \quad \dot{\sigma}_{12} = \frac{1}{2} \left\{ \widetilde{C}_{66} - (\sigma_{11} - \sigma_{22}) \right\} (\tan \gamma)'$$

となるので、まず

$$\dot{\sigma}_{11} + \dot{\sigma}_{22} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{11} + \sigma_{22} = 0$$

という関係と

$$\frac{\dot{\sigma}_{12}}{\dot{\sigma}_{11} - \dot{\sigma}_{22}} = \frac{\widetilde{C}_{66} - (\sigma_{11} - \sigma_{22})}{4 \sigma_{12}}$$

という関係が求められる。後者は積分できて

$$\left(\frac{2 \sigma_{12}}{\widetilde{C}_{66}} \right)^2 + \left(\frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\widetilde{C}_{66}} - 1 \right)^2 = 1$$

(楕円状の軌跡を描く) つまり

$$\frac{\sigma_{12}}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2} \sin \theta, \quad \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\widetilde{C}_{66}} = 1 - \cos \theta$$

と置いていいので、これを上の応力速度 $\dot{\sigma}_{12}$ の式

$$\left(\frac{\dot{\sigma}_{12}}{\widetilde{C}_{66}} \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{\widetilde{C}_{66}} \right) (\tan \gamma)'$$

に代入すれば

$$\frac{1}{2} \cos \theta (\tan \gamma)' = \frac{1}{2} (\sin \theta)' \quad \rightarrow \quad (\tan \gamma)' = \dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \theta = \tan \gamma$$

を得る。したがって、最終的に各応力成分は

$$\frac{\sigma_{12}}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2} \sin (\tan \gamma), \quad \frac{\sigma_{11}}{\widetilde{C}_{66}} = -\frac{\sigma_{22}}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2} \{ 1 - \cos (\tan \gamma) \}$$

と求められ、これを式 (*) に代入して外力を求めると

$$\begin{aligned} \frac{S_{21}^N}{\widetilde{C}_{66}} &= \frac{1}{2} \sin (\tan \gamma), \quad \frac{S_{12}^N}{\widetilde{C}_{66}} = \frac{1}{2} [\sin (\tan \gamma) + \tan \gamma \{ 1 - \cos (\tan \gamma) \}], \\ \frac{S_{11}^N}{\widetilde{C}_{66}} &= \frac{1}{2} [1 - \cos (\tan \gamma) - \tan \gamma \sin (\tan \gamma)], \quad \frac{S_{22}^N}{\widetilde{C}_{66}} = -\frac{1}{2} \{ 1 - \cos (\tan \gamma) \} \end{aligned}$$

³⁵ この例は体積変化が無いので、Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合と Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を用いた場合とは同じ結果になる。

となる。この最初の式を図 12.23 に示した。\$\gamma\$ が約 57.5 度で \$1/2\$ の最大値に達し、あとは \$\gamma \rightarrow \pi/2\$ に向けて無限に潰れて行く sine 曲線になる。これは直感的にもかなり奇妙な挙動になってしまっている。また消しゴムを潰してみても感じるように、\$S_{22}^N\$ 等が零にならない結果は正しいようにも感じるかもしれないが、実験を無理に行った場合には、平均的にはこれも零になるのではないだろうか。いずれにしても、Jaumann 応力速度の適用範囲は、角度 \$\gamma\$ でせいぜい 45 度くらいまでだろう。

次に、Truesdell 応力速度を用いて式 (12.154) のように構成則を定義する場合 [140] を考えよう。ここで対象とする変形には体積変化が無いので、構成則に Oldroyd 応力速度を用いた場合も同じ結果になる。式 (12.124) の定義から、この変形の場合は

$$\dot{\sigma}_{11} = \dot{\sigma}_{11} - 2\sigma_{12}(\tan \gamma); \quad \dot{\sigma}_{22} = \dot{\sigma}_{22}, \quad \dot{\sigma}_{12} = \dot{\sigma}_{12} - \sigma_{22}(\tan \gamma)$$

となる。これが \$\mathbf{d}\$ との間に直交異方性を持つ定数係数の線形関係にある弾性体とすると、結局

$$\dot{\sigma}_{11} = 2\sigma_{12}(\tan \gamma); \quad \dot{\sigma}_{22} = 0, \quad \dot{\sigma}_{12} = \left\{ \frac{1}{2} \tilde{C}_{66} + \sigma_{22} \right\} (\tan \gamma)$$

となる。これは容易に積分できて、最終的に各応力成分は

$$\frac{\sigma_{12}}{\tilde{C}_{66}} = \frac{1}{2} \tan \gamma, \quad \frac{\sigma_{11}}{\tilde{C}_{66}} = \frac{1}{2} \tan^2 \gamma, \quad \frac{\sigma_{22}}{\tilde{C}_{66}} = 0$$

と求められる。これを式 (*) に代入して外力を求めると

$$\frac{S_{21}^N}{\tilde{C}_{66}} = \frac{S_{12}^N}{\tilde{C}_{66}} = \frac{1}{2} \tan \gamma, \quad \frac{S_{11}^N}{\tilde{C}_{66}} = \frac{S_{22}^N}{\tilde{C}_{66}} = 0$$

といった、とても単純な結果になる。この最初の式も図 12.23 に示したが、当然なことに \$\gamma\$ が直角に近づくにつれて外力は無限大になる。ここで対象としているような変形を一様に起こす実験はほぼ不可能だが、消しゴムを潰してみたときに、平均的には \$S_{22}^N\$ が零になることにはあまり抵抗は感じないのではないだろうか。外力状態は純せん断状態と同じになっている。ただもちろん、図 12.23 の縦軸の単位面積当たりの外力は弾性係数レベルというとんでもなく大きな値に至ることには注意して欲しい。

最後に式 (12.100) の第 2 Piola-Kirchhoff 応力を求めてみると

$$S_{11} = \sigma_{11} - 2\sigma_{12} \tan \gamma = -\frac{1}{2} \tilde{C}_{66} \tan^2 \gamma, \quad S_{22} = \sigma_{22} = 0, \quad S_{12} = \sigma_{12} = \frac{1}{2} \tilde{C}_{66} \tan \gamma$$

となる。これに対応させて Green のひずみを求めると、式 (12.9) 等から

$$E_{11} = 0, \quad E_{22} = \frac{1}{2} \tan^2 \gamma, \quad E_{12} = \frac{1}{2} \tan \gamma$$

と求められる。もし、第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green のひずみを直交異方性の定数係数で関係付けた弾性体で、ここで「実験した」 Truesdell 応力速度を用いた構成則と等価なモデルにしようとする

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{C}_{11} & -\tilde{C}_{66} & 0 \\ -\tilde{C}_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{C}_{66} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{12} \end{Bmatrix}$$

という材料に相当することになる。面白いことに、これで定義できる材料が存在するとすればそれは不安定である。あるいは逆に、第 2 Piola-Kirchhoff 応力と Green のひずみを直交異方性の定数係数で関係付けた構成則 \$\mathbf{S} = \mathbf{C}:\mathbf{E}\$ に従う材料の場合には

$$S_{11}^N = \frac{1}{2} (C_1 + \tilde{C}_{66}) \tan^2 \gamma, \quad S_{22}^N = \frac{1}{2} C_0 \tan^2 \gamma, \quad S_{12}^N = \frac{1}{2} \tilde{C}_{66} \tan \gamma, \quad S_{21}^N = \frac{1}{2} \tilde{C}_{66} \tan \gamma + \frac{1}{2} C_0 \tan^3 \gamma$$

となる。簡単のために前節の例と同様、\$c_0/\tilde{C}_{66} = 2\$ (微小変形理論における Hooke の法則の Poisson 比が \$\nu = 1/3\$ に相当する) とした場合の結果も図 12.23 に示した。ここまでの例では、Saint Venant-Kirchhoff 材料が亜弾性材料に比べてかなり剛な挙動を示すというのが一つの特徴だ。

(3) Truesdell 応力速度の物理的意味

構成則には Lagrange 的記述が適するので、第 12.3.4 節では材料と共に変形して回転する Lagrange 的な座標系で客観的な Oldroyd 応力速度を誘導したが、その中のスピン成分のみを残したものとして Cauchy 応力の Jaumann 速度が定義でき、多くの研究ではその Jaumann 速度の方が用いられている。なぜ $\dot{\sigma}$ から回転成分だけを取り除いた成分でいいのだろうか。例えば立方晶の変形を念頭に置くと、弾塑性的に大きく変形したとしても、その直交する結晶面同士はほぼ直交性を保持しているだろうし、結晶間隔も弾性的に微小な伸び縮みしかしておらず、大きな変形は転位の移動による塑性変形で生じている。したがって材料の実質的な変形と関係付ける応力の変化つまり客観的な応力速度は結晶構造の回転成分だけを $\dot{\sigma}$ から取り除けばいいことがわかる。しかしもっと一般的な材料の場合に、例えば藁を直交方向に編んだむしろや縦糸横糸を編み込んだ布のような微視構造を持った材料の場合には、変形前に直交していた繊維同士は変形によってその直交性も失うことは容易に想像できる。そのような材料に対しても単に回転成分だけを取り除いた客観的な応力速度を用いて構成モデルを構築しても大丈夫だろうか。

そこで具体的に、変形速度成分の除去も含む Truesdell 応力速度の物理的な意味について考察してみたい。その Truesdell 応力速度は、式 (12.153) で示したような意味で第 2 Piola-Kirchhoff 応力との関係が深いので、第 12.3.2 (2) 節で示した第 2 Piola-Kirchhoff 応力を用いた有限変位理論の枠組の梁理論の特性に関連させて、その物理的な意味を説明する。ここでは変形速度の「除去」に関する部分を説明する必要があるので、第 C.3 節で定式化される Timoshenko 梁理論の方を用いる。というのも、この理論の枠組では変形後の梁軸と断面が直交せず γ だけせん断変形が生じて、それが上述の縦糸横糸の歪みに相当するからだ。そのせん断力の構成則は

$$V = Gk_T A \gamma + N \frac{\gamma}{1 + \epsilon}$$

と表される。 N は軸力で ϵ は軸の伸びひずみ、 k_T はせん断に関する補正係数 [17] であり、 A は断面積で G はせん断弾性係数である。このせん断変形 γ によって軸力 N とせん断力 V が直交しなくなるのだが、上式のせん断力の構成則の右辺第 1 項が材料そのものの抵抗則であり、第 2 項が梁軸と断面が直交しなくなることによって軸力が発生させる見かけのせん断抵抗なのだ。そしてこの第 2 項が Engesser の座屈公式 [95] にとってとても重要な項なのである。

このせん断力の構成式の物質微分をとると、増分構成則は左辺右辺を少し並び替えて

$$\dot{V} - N \left\{ \frac{1}{1 + \epsilon} \dot{\gamma} - \frac{\gamma}{(1 + \epsilon)^2} \dot{\epsilon} \right\} = Gk_T A \dot{\gamma} + EA \frac{\gamma}{1 + \epsilon} \dot{\epsilon}$$

と表現できる。左辺第 2 項が梁軸と断面がせん断変形で直交しない状態で軸力が及ぼすせん断力増分への影響で、右辺は材料そのものの増分抵抗則である。断面力には梁の剛体的な回転は含まれていないから、この左辺第 2 項は梁の剛体的な回転とは既に関係が無い客観量である。以下で行う比較を単純化するために、もし現配置においてせん断変形が発生しておらず梁軸と断面が直交 ($\gamma = 0$) していた場合に、さらに伸びひずみ ϵ が 1 に比べて無視できる程十分小さい場合には、上式は

$$\Delta (\text{実質的せん断弾性抵抗}) \equiv \dot{V} - N \dot{\gamma} = Gk_T A \dot{\gamma} \quad (12.159)$$

となる。この左辺第 2 項の変形速度の効果が消えていないことに注意して欲しい。

上述のような瞬間的な変形状態における接線的な Timoshenko 梁の構成則の場合は、 σ_{11} と σ_{13} だけが非零で、同時に $v_1 = v_1(x_1, x_3)$ で $v_3 = v_3(x_1)$ と考えていい。そこで、式 (12.159) と応力速度の関係を比較するために、例えば Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いて等方弾性を式 (12.151) で定義した場合には

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{13} - \sigma_{11} w_{31} = 2\mu d_{13}$$

のように左辺にはスピンのみしか残らず式 (12.159) とは整合しない。これに対し Truesdell 応力速度を用いて式 (12.154) で等方弾性を定義した場合には

$$\overset{\vee}{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{13} - \sigma_{11} v_{3,1} = 2\mu d_{13} \quad (12.160)$$

のように変形速度も左辺に残るので式 (12.159) の左辺と整合している。あるいは、Oldroyd 応力速度を用いた式 (12.155) の構成則の場合は

$$\overset{\cup}{\sigma}_{13} = \dot{\sigma}_{13} - \sigma_{11} v_{3,1} - \sigma_{13} v_{1,1} = 2\mu d_{13}$$

となるが、梁理論では一般に軸線の伸びひずみ ϵ は他のひずみに比べて 1 オーダー小さいことから、 $\epsilon \sim v_{1,1}$ も同様に他のひずみ速度より小さくなり、結局この式と式 (12.160) は本質的には同じである。このように応力が生じている現配置において、スピン項だけではなく変形速度項もうまく「除去」した応力速度を用いて弾性抵抗を定義することには、明確な力学的な意義が存在することがわかる。具体的に第 12.7.3 (1) 節では柱の座屈を対象とした数値解析を行って Engesser 公式等との定量的な比較をする。

(4) 増分仮想仕事と対称性

増分つり合い式 (12.131) は nominal 応力速度を用いて

$$\dot{n}_{ji,j} + \rho \dot{\pi}_i = 0$$

と表されていた。これと仮想速度場の内積で定義できる形式的な仮想仕事を現配置の体積 v に対して求め、式 (12.132) の境界条件を考慮すると、増分仮想仕事式は

$$- \int_v \delta v_i (\dot{n}_{ji,j} + \rho \dot{\pi}_i) dv = \int_v (\delta v_{i,j} \dot{n}_{ji} - \rho \delta v_i \dot{\pi}_i) dv - \int_s \delta v_i t_i ds = 0 \quad (12.161)$$

と表される。積分領域 s は現配置の表面を表す。なおこれは増分場と増分変位の内積なので物理的な仮想仕事ではないことには注意しておいて欲しい。一方どんな構成モデルであっても、式 (12.129) を用いれば nominal 応力速度で表した見かけ上の構成モデルは、速度勾配との間の

$$\dot{n}_{ji} = F_{jkl} v_{k,l}$$

という関係式で形式的には書き表すことができる。これを上の仮想仕事式に代入することによって、第 1 項の内力仮想仕事 $\delta U(v)$ は

$$\delta U(v) \equiv \int_v \delta v_{i,j} F_{jkl} v_{k,l} dv$$

と表現できる。したがって、もし構成則が

$$F_{jkl} = F_{lkj} \quad (12.162)$$

のような対称性を持っている場合には、内力仮想仕事は瞬間的 (updated Lagrange 的) には積分できて $U(v)$ が定義できる。つまり、真の構成則としては非保存的な歪弾性であるにもかかわらず、updated Lagrange 的には汎関数 $U(v)$ が定義できる構成モデルとして捉えることができる。

そこでまず Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いて等方弾性を式 (12.151) と係数

$$C_{ijkl} = \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (12.163)$$

で定義した場合には、nominal 応力速度と速度勾配の関係は

$$F_{ijkl} = C_{ijkl} + \sigma_{ij} \delta_{kl} + \frac{1}{2} \sigma_{li} \delta_{jk} - \frac{1}{2} \sigma_{ki} \delta_{jl} - \frac{1}{2} \sigma_{lj} \delta_{ik} - \frac{1}{2} \sigma_{kj} \delta_{il} \quad \rightarrow \quad F_{ijkl} \neq F_{lkji}$$

となるので、上述のような対称性の式 (12.162) が成立せず汎関数 $U(v)$ は定義できない。しかし実は Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を用いた式 (12.156) の歪弾性の場合には式 (12.162) の対称性が成立する。一方, Truesdell 応力速度を用いて同様に等方弾性を式 (12.154) で定義すると

$$F_{ijkl} = C_{ijkl} + \sigma_{li} \delta_{jk} \quad \rightarrow \quad F_{ijkl} = F_{lkji}$$

のように式 (12.162) の対称性が成立し、汎関数 $U(v)$ を定義できる。具体的な「接線剛性行列」は第 12.7.1 (3) 節で示す。この意味では、Kirchhoff 応力の Jaumann 速度や Truesdell 応力速度を用いた二つの歪弾性と、それ以外の二つの歪弾性との間には大きな違いが存在している。接線弾性係数 F_{ijkl} は初期応力が存在する材料の接線的な弾性係数とも解釈できるので、それが対称性を持つことによって汎関数 $U(v)$ が定義できるのは望ましいと考えられる。

演習問題 12-4

4. この第 12.5.3 節で描いた図の関係を自ら求めて図示してみよ。

12.5.4 弾塑性体の代表例 — 速度非依存塑性

(1) Prandtl-Reuss モデル

最も代表的な Mises の降伏条件を用いた関連 J_2 流れ則のモデルを用いた有限変形の枠組のなかの記述の仕方を説明する。塑性の特性から塑性ひずみは非常に小さい増分しか定義できないので、弾性成分もその小さい応力増分に対する変化で抵抗則を記述しておいた方が便利である。あるいは結晶金属を念頭に置けば、弾性ひずみは非常に小さいので増分でモデル化することには問題は無いだろう。このように増分を扱う場合には、変形速度とスピンは式 (12.73) のように弾性成分と塑性成分に加算分解できて

$$d(x) = d^e(x) + d^p(x), \quad w(x) = w^e(x) + w^p(x) \quad (12.164a, b)$$

が厳密に成立する。

弾性は等方の Hooke の法則を拡張したものとして超弾性の式 (12.137) を根拠にして、それを物質微分した増分モデルとして式 (12.154) のような Truesdell 応力速度を用いた updated Lagrange 的な歪弾性を設定できる。しかし多くの研究では、Truesdell 応力速度の代わりに Cauchy 応力の Jaumann 速度が用いられている。そこでここでも式 (12.154) の代わりに式 (12.151) を採用し、さらに変形速度の弾性成分と式 (12.163) の弾性係数を用いて

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} d_{kl}^e, \quad C_{ijkl} = \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \left(K - \frac{2\mu}{3} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (12.165a, b)$$

で歪弾性を表す。ここに K は体積弾性係数である。あるいはその逆関係は

$$d_{ij}^e = D_{ijkl} \overset{\nabla}{\sigma}_{kl}, \quad D_{ijkl} = \frac{1}{4\mu} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (12.166a, b)$$

と表される。Truesdell 応力速度を用いた例は第 12.6, 12.7 節で示す。

有限変形の枠組の Mises の降伏関数は

$$f \equiv \bar{\sigma} - \tau_Y(\bar{\epsilon}^p), \quad \bar{\epsilon}^p \equiv \int_{履歴} \sqrt{2 d_{ij}^p d_{ij}^p} dt \quad (12.167a, b)$$

で与えればいい。 $\bar{\sigma}$ は式 (11.23a) で定義した相当応力である。一方、流れ則も同様に

$$d_{ij}^p = \lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = \lambda \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} \quad (12.168)$$

で与えられる。さらに整合条件 ($\dot{f} = 0$) に式 (12.167a) を代入して

$$\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}} \dot{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma'_{ij}}{2H\bar{\sigma}} \dot{\sigma}_{ij}, \quad H \equiv \frac{\partial \tau_Y(\bar{\epsilon}^p)}{\partial \bar{\epsilon}^p} \quad (12.169a, b)$$

を得る。Mises の降伏条件は、材料中に方向性を持った微視的なメカニズムをモデル化したものではない。したがって材料と共に回転する観察者として流れ則を捉える必要は無く、また Cauchy 応力の更新は式 (12.134) のように Cauchy 応力の物質微係数の加算でいいことから、上式の整合条件も単純な物質微分で定義すればいいことになる。方向性を持つメカニズムの例は第 12.5.4 (4) 節に示した。これを式 (12.168) に代入して

$$d_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \dot{\sigma}_{kl} \quad (12.170)$$

のように塑性成分を表現できる。ここで、弾性の構成関係と対応させるために Cauchy 応力の物質微係数を Jaumann 速度に置き換える。右辺の応力と応力増分の積に式 (12.117) の Jaumann 速度を代入して、その中からスピンを含む項の一つ、例えば $\sigma'_{kl} w_{kj} \sigma_{jl}$ を取り出すと、Cauchy 応力の対称性から

$$\sigma'_{kl} w_{kj} \sigma_{jl} = \frac{1}{2} (\sigma'_{kl} w_{kj} \sigma_{jl} + \sigma'_{jl} w_{jk} \sigma_{kl}) = \frac{1}{2} (\sigma'_{kl} w_{kj} \sigma_{jl} - \sigma'_{jl} w_{kj} \sigma_{kl}) = \dots = 0$$

となることを容易に確認できる。したがって、上式 (12.169a) (12.170) の応力増分を Jaumann 速度で置き換えてもよく、結局

$$d_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \quad (12.171)$$

が塑性の構成則になる。

最終的に、式 (12.166) の弾性成分と式 (12.171) の塑性成分を式 (12.164) に代入すれば

$$d_{ij} = \left(D_{ijkl} + \frac{1}{H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{4\bar{\sigma}^2} \right) \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \quad (12.172)$$

という増分構成則が求められる。さらにその逆関係は

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \left(C_{ijkl} - \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} \right) d_{kl} \quad (12.173)$$

となる。載荷等の条件も式 (11.40) から

$$\text{弾性: } \lambda = 0 \quad \text{もし } f < 0 \quad (12.174a)$$

$$\text{除荷: } \lambda = 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \sigma'_{ij} \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} < 0 \quad (12.174b)$$

$$\text{中立載荷: } \lambda = 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \sigma'_{ij} \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = 0 \quad (12.174c)$$

$$\text{載荷: } \lambda > 0 \quad \text{もし } f = 0 \quad \text{かつ } \sigma'_{ij} \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} > 0 \quad (12.174d)$$

と書くことができる。

(2) 非関連流れ則

次に第 11.4.2 節で概説した一つの非関連流れ則 [74] を紹介しておこう。実はこちらが元で、第 11.4.2 節はその微小変形理論版である。まず降伏関数 f と塑性ポテンシャル g を

$$f \equiv \bar{\sigma} - F(I_1, \Delta^p, \bar{\epsilon}^p), \quad g \equiv \bar{\sigma} + G(I_1) \quad (12.175a, b)$$

と定義している。ここに $\bar{\sigma}$ は式 (11.23a) で定義した相当応力であり、 I_1 は式 (3.36) で定義した応力の第 1 不変量である。また塑性の体積ひずみとせん断ひずみはそれぞれ

$$\Delta^p \equiv \int_{\text{履歴}} \frac{\rho_0}{\rho} d_{kk}^p dt, \quad \bar{\epsilon}^p \equiv \int_{\text{履歴}} \sqrt{2 d_{ij}'^p d_{ij}'^p} dt \quad (12.176a, b)$$

と定義した。

上式 (12.175) の塑性ポテンシャルを、流れ則の式 (11.74a) に代入すると

$$d_{ij}^p = \lambda \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta \delta_{ij} \right\}, \quad \beta = \beta(I_1) \equiv \frac{\partial G(I_1)}{\partial I_1} \quad (12.177a, b)$$

という関係になる。次に整合条件は

$$\dot{f} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial F}{\partial I_1} \dot{I}_1 - \frac{\partial F}{\partial \Delta^p} \dot{\Delta}^p - \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}^p} \dot{\bar{\epsilon}}^p = 0$$

となることから、式 (11.37) (12.176) を考慮すれば

$$\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial F}{\partial I_1} \dot{\sigma}_{kk} = \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \Delta^p} d_{kk}^p + \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}^p} \sqrt{2 d_{ij}'^p d_{ij}'^p} \quad (12.178)$$

となる。これに式 (12.177) を代入して整理すると λ が

$$\lambda = \frac{1}{H} \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} - \frac{\partial F}{\partial I_1} \delta_{kl} \right) \dot{\sigma}_{kl}, \quad H \equiv 3 \frac{\rho_0}{\rho} \frac{\partial F}{\partial \Delta^p} \beta + \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}^p} \quad (12.179a, b)$$

と求められる。ここに H は硬化係数である。これを流れ則の式 (11.136) に代入し戻せば

$$d_{ij}^p = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta \delta_{ij} \right\} \left\{ \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha \delta_{kl} \right\} \dot{\sigma}_{kl}, \quad \alpha = \alpha(I_1, \Delta^p, \bar{\epsilon}^p) \equiv -\frac{\partial F(I_1, \Delta^p, \bar{\epsilon}^p)}{\partial I_1} \quad (12.180a, b)$$

のように塑性ひずみ増分を表現できる。ここでも式 (12.171) の誘導と同様に、Cauchy 応力の物質微係数を Jaumann 速度に置き換えることができるので、結局

$$d_{ij}^p = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta \delta_{ij} \right\} \left\{ \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha \delta_{kl} \right\} \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \quad (12.181)$$

を得る。

弾性は式 (12.166) の Hooke 則を満足するものとする、結局加算則の式 (12.164) から

$$d_{ij} = D_{ijkl} \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} + \frac{1}{H} \left(\frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta \delta_{ij} \right) \left(\frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha \delta_{kl} \right) \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \quad (12.182)$$

を得る。されにその逆関係は

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} d_{kl} - \frac{\left(\frac{\mu \sigma'_{ij}}{\bar{\sigma}} + 3K \beta \delta_{ij} \right) \left(\frac{\mu \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}} + 3K \alpha \delta_{kl} \right)}{H + \mu + 9K \alpha \beta} d_{kl} \quad (12.183)$$

となる。それぞれ、式 (11.141) と式 (11.142) の応力速度を Cauchy 応力の Jaumann 速度で置き換えたものと形式的に一致する。

(3) 非共軸モデル

やはり地盤や岩盤のように、いわゆる法線則が成立しない材料もある。一つのモデルとして第 11.4.3 節で紹介したもの [81] がある。流れ則に、応力との非共軸項、つまり応力増分との共軸項を加えて

$$d_{ij}^p = \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{1}{2h_1} \left(\overset{\nabla}{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \overset{\nabla}{\sigma}_{kl} \right) \quad (12.184)$$

と仮定している。降伏関数と塑性ポテンシャルは式 (12.175) と同じである。誘導は第 11.4.3 節に概説したので省略すると、塑性ひずみ増分が

$$d_{ij}^p = \frac{1}{H} \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta \delta_{ij} \right\} \left\{ \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha \delta_{kl} \right\} \bar{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2h_1} \left(\bar{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \bar{\sigma}_{kl} \right) \quad (12.185)$$

のような近似的関係として求められる。ここでも弾性は前節と同様、式 (12.166) の Hooke 則を満足するものとする、結局総ひずみ増分が

$$d_{ij} = \frac{1}{2\mu} \bar{\sigma}'_{ij} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3K} - \frac{1}{2\mu} \right) \delta_{ij} \bar{\sigma}'_{kk} + \frac{1}{H} \left\{ \frac{\sigma'_{ij}}{2\bar{\sigma}} + \beta \delta_{ij} \right\} \left\{ \frac{\sigma'_{kl}}{2\bar{\sigma}} + \alpha \delta_{kl} \right\} \bar{\sigma}_{kl} + \frac{1}{2h_1} \left(\bar{\sigma}'_{ij} - \frac{1}{2\bar{\sigma}^2} \sigma'_{ij} \sigma'_{kl} \bar{\sigma}_{kl} \right) \quad (12.186)$$

と表される。結局増分構成方程式は、式 (11.151) の応力速度とひずみ速度を Cauchy 応力の Jaumann 速度と変形速度で置き換えたものになる。

(4) すべり系を持つ単結晶モデル

もう少し微視的にも物理的なモデルの例として、金属単結晶中の転位の移動により生じる塑性変形を連続的に分布するすべりでモデル化した Asaro のモデル [3, 5] を紹介する。弾性は、結晶格子と共に弾性的に剛体回転した観察者から見た客観的な応力速度と変形速度の間に抵抗則を定義する。ただし、Cauchy 応力ではなく Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を増分変形の弾性成分だけを用いて

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} + \sigma_{ij} d_{kk}^e = C_{ijkl} d_{kl}^e \quad (12.187)$$

と定義する。ここに弾性関連の Jaumann 速度は

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} \equiv \dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}^e \sigma_{kj} - w_{jk}^e \sigma_{ki} \quad (12.188)$$

と定義し直してある。式 (12.126) に示したように、Truesdell 応力速度は剛体的な回転と伸び縮みおよび歪みによる Cauchy 応力の補正項を三つ、ちょうど弾性座屈の幾何剛性項のように持っているが、上式 (12.187) では、結晶格子の弾性抵抗増分に含まれる剛体的な回転と格子間隔の伸び縮みによる二つの補正だけを考慮した応力速度で定義している。したがって結晶格子がジグザグになる影響はほぼ無視できるものと考えている。

これに対し塑性変形は転位の移動によって結晶格子間隔 (Burgers ベクトル) 分だけのズレあるいはすべり変形が連続的に分布・蓄積する³⁶ものとしてモデル化する。つまり図 12.24 に示したように、単位法線ベクトルを n^α とする α すべり面上ですべり変形増分 $\dot{\gamma}^\alpha$ が生じようとしていると考えるのだ。もちろん $\dot{\gamma}^\alpha$ は非可逆的な変形³⁷と考え、単位方向ベクトル s^α と逆向きのすべり系も同時に存在するものとする。このとき、この α すべり系に生じるすべり増分によって

$$v_{i,j}^p = \dot{\gamma}^\alpha s_i^\alpha n_j^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N \quad (12.189)$$

のような塑性的な速度勾配成分が発生する。ここでは添え字 α は三つ現れていることからわかるように、その総和はとらない。 N は存在するすべり系の数であり、結晶構造によってこの向きと数は決まる。例えば面心

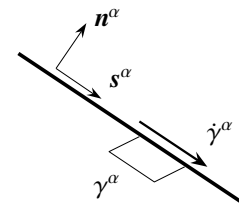


図 12.24 α すべり系

³⁶ 転位が移動することによって結晶格子にズレが生じることから、移動する転位が通過した面上にたかすべり変形が残ったようにモデル化している。

³⁷ 第 1 著者が学生するとき、電子顕微鏡の映像の中で転位線が同じところを行ったり来たりしているのを見たことがある。界面に達するまでは元に戻るのかな。

立方晶の図 11.16 を参照して欲しい。転位は止まっているときには何も変形を生じさせないが、それが移動することによって非可逆変形が生じるため、それが速度勾配場の発生でモデル化されている。したがって、変形速度とスピンの塑性成分は

$$d_{ij}^p = \sum_{\alpha} p_{ij}^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha}, \quad w_{ij}^p = \sum_{\alpha} \omega_{ij}^{\alpha} \dot{\gamma}^{\alpha} \quad (12.190a, b)$$

となる。以下、すべり系についての添え字について総和をとるときには総和記号 \sum_{α} で明示するが、それは N 個のすべり系のうちの滑動しようとしている（後述する载荷条件を満足する）すべり系に対してのみ総和をとるものとする。また

$$p_{ij}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2} (s_i^{\alpha} n_j^{\alpha} + n_i^{\alpha} s_j^{\alpha}), \quad \omega_{ij}^{\alpha} \equiv \frac{1}{2} (s_i^{\alpha} n_j^{\alpha} - n_i^{\alpha} s_j^{\alpha}) \quad (12.191a, b)$$

と定義されているが、ここも α については総和をとらない。転位が移動しても結晶格子は回転しないだろうから、この w^p は弾性的なスピンを補って適合させるために生じているものと解釈される。したがって、すべり面そのものの運動は格子の弾性的な回転に依存するだけなので

$$\dot{s}_i^{\alpha} = w_{ij}^e s_j^{\alpha}, \quad \dot{n}_i^{\alpha} = w_{ij}^e n_j^{\alpha} \quad (12.192a, b)$$

のような単純な回転運動しかしないものとする。これによって、二つのベクトル s^{α} と n^{α} は単位ベクトルのままになるのでわかり易い。

あとは降伏条件と流れ則を定義すれば、弾塑性構成則をモデル化できる。これは各すべり系における摩擦とすべりでモデル化するのが最も素直で単純である。つまり、ある α すべり系のすべり面上のせん断応力がある規準値 τ_Y^{α} に達したとき、つまり

$$\tau^{\alpha} \equiv \sigma_{ij} s_i^{\alpha} n_j^{\alpha} = \tau_Y^{\alpha} \quad (12.193)$$

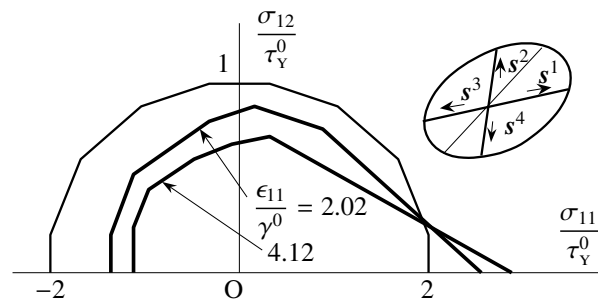


図 12.25 多結晶モデルの降伏曲面の模式図

を満足したときに転位が動き始めるものとし、 τ_Y^{α} は最大摩擦力に相当する材料パラメータである。また流れ則はそれに対応して、そのすべり面上の **Schmid** 則で与える。それは上式 (12.193) の変化則に相当し

$$\dot{\tau}^{\alpha} = \sum_{\beta} h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \quad (12.194)$$

とモデル化される。この $h^{\alpha\beta}$ は β 系のすべり増分によって α 系に生じるすべり抵抗力増分を与える材料パラメータで、動摩擦係数に相当する一種の硬化係数である。 $\alpha \neq \beta$ の成分の物理的な意味については文献を参照して欲しい。

式 (12.193) を物質微分すると

$$\dot{\tau}^{\alpha} = \dot{\sigma}_{ij} s_i^{\alpha} n_j^{\alpha} + \sigma \dot{s}_i^{\alpha} n_j^{\alpha} + \sigma s_i^{\alpha} \dot{n}_j^{\alpha}$$

となるので、すべり面の運動の式 (12.192) を代入して整理すると

$$\dot{\tau}^{\alpha} = \dot{\sigma}_{ij} s_i^{\alpha} n_j^{\alpha} + \sigma w_{ik}^e s_k^{\alpha} n_j^{\alpha} + \sigma s_i^{\alpha} w_{jk}^e n_k^{\alpha} = s_i^{\alpha} n_j^{\alpha} (\dot{\sigma}_{ij} - w_{ik}^e \sigma_{kj} - w_{jk}^e \sigma_{ki})$$

を得る。つまり式 (12.188) を参照すれば、この関係は

$$\dot{\tau}^{\alpha} = \dot{\sigma}_{ij} s_i^{\alpha} n_j^{\alpha}$$

と表すことができる。つまり結晶格子と一緒に回転しながら観察した流れ則になっていて、ここが式 (12.169) の Prandtl-Reuss モデルの整合条件とは異なる点である。この結果を、Cauchy 応力の対称性を損なわないように定義し直して式 (12.194) に代入すれば、流れ則が

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} p_{ij}^{\alpha} = \sum_{\beta} h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \quad (12.195)$$

と表される。同様に、降伏条件式 (12.193) も

$$\sigma_{ij} p_{ij}^{\alpha} = \tau_Y^{\alpha} \quad (12.196)$$

と書き直すことができる。したがって、ある α すべり系に対する荷重・除荷の条件は

$$\text{弾性: } \dot{\gamma}^{\alpha} = 0 \quad \text{もし} \quad \sigma_{ij} p_{ij}^{\alpha} < \tau_Y^{\alpha} \quad (12.197a)$$

$$\text{除荷: } \dot{\gamma}^{\alpha} = 0 \quad \text{もし} \quad \sigma_{ij} p_{ij}^{\alpha} = \tau_Y^{\alpha} \quad \text{かつ} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{ij} p_{ij}^{\alpha} < \sum_{\beta} h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \quad (12.197b)$$

$$\text{荷重: } \dot{\gamma}^{\alpha} \geq 0 \quad \text{もし} \quad \sigma_{ij} p_{ij}^{\alpha} = \tau_Y^{\alpha} \quad \text{かつ} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{ij} p_{ij}^{\alpha} = \sum_{\beta} h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta} \quad (12.197c)$$

のように規定すればいい。

さて、式 (12.195) の流れ則の左辺に式 (12.187) の弾性関係を代入し、変形速度の加算則の式 (12.164) をそれに適用すると

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} p_{ij}^{\alpha} = p_{ij}^{\alpha} (C_{ijkl} d_{kl} - \sigma_{ij} d_{kk} - C_{ijkl} d_{kl}^p + \sigma_{ij} d_{kk}^p)$$

を得る。これに式 (12.190a) の変形速度の塑性成分の運動学を代入すれば、結局式 (12.195) から

$$\overset{\circ}{\sigma}_{ij} p_{ij}^{\alpha} = p_{ij}^{\alpha} (C_{ijkl} d_{kl} - \sigma_{ij} d_{kk}) - \sum_{\beta} p_{ij}^{\alpha} (C_{ijkl} p_{kl}^{\beta} - \sigma_{ij} p_{kk}^{\beta}) \dot{\gamma}^{\beta} = \sum_{\beta} h^{\alpha\beta} \dot{\gamma}^{\beta}$$

という関係を得るので、荷重条件が満足されている場合には、この式からすべり増分が

$$\dot{\gamma}^{\alpha} = \sum_{\beta} M^{\alpha\beta} p_{ij}^{\beta} (C_{ijkl} - \sigma_{ij} \delta_{kl}) d_{kl} \quad (12.198)$$

と求められる。ここに $M^{\alpha\beta}$ は次の $N^{\alpha\beta}$ の逆行列である。

$$M^{\alpha\beta} \equiv (N^{\alpha\beta})^{-1}, \quad N^{\alpha\beta} \equiv h^{\alpha\beta} + p_{ij}^{\alpha} (C_{ijkl} - \sigma_{ij} \delta_{kl}) p_{kl}^{\beta} \quad (12.199a, b)$$

また、弾性の式 (12.187) に変形速度の加算則の式 (12.164) を利用すると

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} + \sigma_{ij} d_{kk} = C_{ijkl} d_{kl} - \sum_{\alpha} (C_{ijkl} p_{kl}^{\alpha} - \sigma_{ij} p_{kk}^{\alpha} + \omega_{ik}^{\alpha} \sigma_{kj} + \omega_{jk}^{\alpha} \sigma_{ki}) \dot{\gamma}^{\alpha} \quad (12.200)$$

を得る。この二つの式 (12.198) (12.200) から単結晶体の増分弾塑性構成則が

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} d_{kl} - \sigma_{ij} d_{kk} - \sum_{\alpha} \sum_{\beta} (C_{ijkl} p_{kl}^{\alpha} - \sigma_{ij} p_{kk}^{\alpha} + \omega_{ik}^{\alpha} \sigma_{kj} + \omega_{jk}^{\alpha} \sigma_{ki}) M^{\alpha\beta} p_{mn}^{\beta} (C_{mnpq} - \sigma_{mn} \delta_{pq}) d_{pq} \quad (12.201)$$

と求められる。

なお、このモデルの塑性変形はあくまでも転位の蓄積を連続体中に分布させたすべりでモデル化したものである。したがってこれを多結晶体のシミュレーションに用いて、応力集中等で粒界に塑性変形が集中したとしても、実際に界面で生じるであろう空隙や亀裂をモデル化できているとは限らない。そこでは、空隙の発生と

単結晶粒の剛体的な回転³⁸も生じていると考えられるが、それをこの Asaro のモデルで適切にシミュレーションできるとは限らないので注意が必要である。一つだけ平面ひずみ問題の多結晶金属モデルの例 [50] を示しておこう。図 12.25 のインセットにあるように単結晶粒を楕円形で近似し、各結晶粒には挟む角 70 度で二つのすべり線（したがって四つのすべり系 $\alpha = 1 \sim 4$ ）のみがあるとす。この結晶粒の向きが 0 度から 90 度までに 2 度刻みで 46 種類等間隔で（つまり一様なランダム性で）分布しているものとする。各結晶粒内の微視的な構成則はこの節で示したモデルで与えられるものとし、式 (12.193) の基準値 τ_Y^α が硬化を含まず

$$\tau_Y^\alpha = \tau_Y^0 = \text{const.}, \quad \gamma^0 \equiv \frac{\tau_Y^0}{\bar{\mu}}$$

と一定であるとする。さらに多結晶体としての平均挙動は、付録 I にある解析的な平均化手法を有限変形増分理論に拡張したものでモデル化した。上式の $\bar{\mu}$ は、その手法を用いて求められる多結晶体の平均的なせん断塑性係数であり、単結晶間の相互作用を解析的平均化手法で考慮できる。このモデルに対して x_1 軸方向への単調载荷によって変化する降伏曲面を模式的に³⁹示したのが図 12.25 である。初期にはほぼ等方で円状だった降伏曲面が、载荷に伴って载荷方向に尖っていき、応力状態の変化による移動硬化も現れている。また降伏曲面は、式 (12.193) で定義された全すべり系の降伏条件の中の最小条件から得られるので折れ線状になる。したがって降伏曲面に角点が生じるが、この角点では対応した二つのすべりが可能になるだけで、境界値問題の解としては唯一に塑性変形が決定できる（だろうと考えている）。鋼のように無数の単結晶粒の集合体である場合には、载荷方向以外の角点は無くなり滑らかな降伏面になると考えればよい。

12.6 非線形挙動の解析的予測の例

12.6.1 局所化条件

鋼の引張試験では降伏後に Lüders 帯と呼ばれる筋が観察される場合がある。多結晶体なので、結晶方位とは無関係な向きに生じる巨視的なすべり線とかせん断帯と捉えられている。これを解析的に予測する手法として文献 [39] のアプローチを紹介する。法線方向の単位ベクトルを \mathbf{v} とするある不連続面があり、その面上で局所的なすべりが生じているとすると、その不連続面を境に速度勾配には式 (12.189) と同様に

$$\langle v_{i,j} \rangle = g_i v_j \quad (12.202)$$

という不連続量 \mathbf{g} が生じる。この $\langle v_{i,j} \rangle$ は不連続面を挟む $v_{i,j}$ の不連続量を表す。しかしながら、連続体の枠組でこのような不連続現象をモデル化する場合には、ちょうど第 11.5.2 節のすべり線理論のように考えざるを得ず、上述の速度勾配の不連続は「生じようとしている」変形として捉えることになる。したがって連続体であり続ける以上は、この速度勾配の不連続面を境にした力の増分は連続していなければならないので、式 (12.132) の応力増分の境界条件を参考にして

$$\langle v_j \dot{n}_{ji} \rangle = 0 \quad (12.203)$$

が成立しなければならない。 $\dot{\mathbf{n}}$ は nominal 応力速度である。

前述したように、材料の構成モデルにかかわらず形式的には増分構成則を

$$\dot{n}_{ji} = F_{jkl} v_{k,l} \quad (12.204)$$

という関係式に変換できるので、これに式 (12.202) を代入したものを式 (12.203) に代入すれば、応力増分の連続条件が

$$\left(v_j F_{jkl} v_l \right) g_k = 0 \quad (12.205)$$

³⁸ 村外志夫先生の impotent eigenstrain がこれかな? 呵呵。

³⁹ 正確な図は文献 [50] を。

と表される。したがって、このような不連続 \mathbf{g} が生じ得るための必要条件が

$$\det(v_j F_{ijkl} v_l) = 0 \quad (12.206)$$

と求められ、これが変形の局所化の発生条件として知られている。なお、式(12.202)で表される局所化した変形は物体中に孤立して発生するような不連続面に相当している。したがって、構造部材の弾性座屈のような周期的な集中変形はあくまでも分散的な分岐解に相当していることから、厳密には局所変形とは呼ばない。文献[39]でも、一様な場の解から分散的な解への分岐の方が先に生じることが述べられているのだが、第12.7.3(2)節の数値解析例でも先行する分散的・周期的な変形が観察できる。

ところで、微小変形理論の枠組で紹介した Drucker の安定公準式(11.60)からは

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^p \geq 0$$

という条件が派生する。これに弾塑性接線構成則を代入すると

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p C_{ijkl}^{\text{ep}} \dot{\epsilon}_{kl} \geq 0, \quad \dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{\text{ep}} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (*)$$

を得る。もし、弾性ひずみが無視できるほど小さく、上式(12.202)のすべりが生じようとしているとすると

$$\dot{\epsilon}_{ij} \simeq \dot{\epsilon}_{ij}^p = \frac{1}{2} (g_i v_j + g_j v_i)$$

が成立するので、これを上式(*)に代入して整理すると

$$g_j (v_i C_{ijkl}^{\text{ep}} v_l) g_k \geq 0$$

が Drucker の安定材料の定義になる。この \mathbf{g} についての2次形式が正值である条件は

$$\det(v_i C_{ijkl}^{\text{ep}} v_l) \geq 0 \quad (**)$$

であり、この特異条件(等号の成立)が式(12.206)の局所化条件と整合するように見える。しかし、式(12.204)の \mathbf{F} は比例载荷であっても材料と応力等の関数 \mathbf{F} (材料, $\boldsymbol{\sigma}$, $\bar{\epsilon}^p, \dots$) であるのに対し、微小変形理論の \mathbf{C}^{ep} は比例载荷では材料定数にしか依存しない。したがって式(**)の等号成立は材料そのものの不安定に相当し、変形の局所化とは関係が無い。したがって、微小変形理論では一般に式(12.206)の局所化条件は成立しない。微小変位理論で座屈が予測できないのと同じである。

12.6.2 構成則の違いによる代表的な例

ここでは第12.5.4(1)節で説明した最も基本的な Prandtl-Reuss の弾塑性体に対して2種類の亜弾性でモデル化された材料の結果[104]を比較する。一つは Cauchy 応力の Jaumann 速度で等方弾性を定義した場合であり、もう一つは Truesdell 応力速度を用いた場合である。まず Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いて等方亜弾性を定義した場合には

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu d_{ij} + \lambda \delta_{ij} d_{kk} - \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} d_{kl} + w_{ik} \sigma_{kj} + w_{jk} \sigma_{ki} \quad (12.207)$$

となる。一方、亜弾性に Truesdell 応力速度を用いた場合には

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & 2\mu d_{ij} + \lambda \delta_{ij} d_{kk} - \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} d_{kl} \\ & + \frac{\mu}{\mu + H} \sigma'_{ij} d_{kk} - \frac{\mu}{2(\mu + H)} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{lm}}{\bar{\sigma}^2} (v_{l,k} \sigma_{km} + v_{m,k} \sigma_{kl}) + v_{i,k} \sigma_{kj} + v_{j,k} \sigma_{ki} - \sigma_{ij} d_{kk} \end{aligned} \quad (12.208)$$

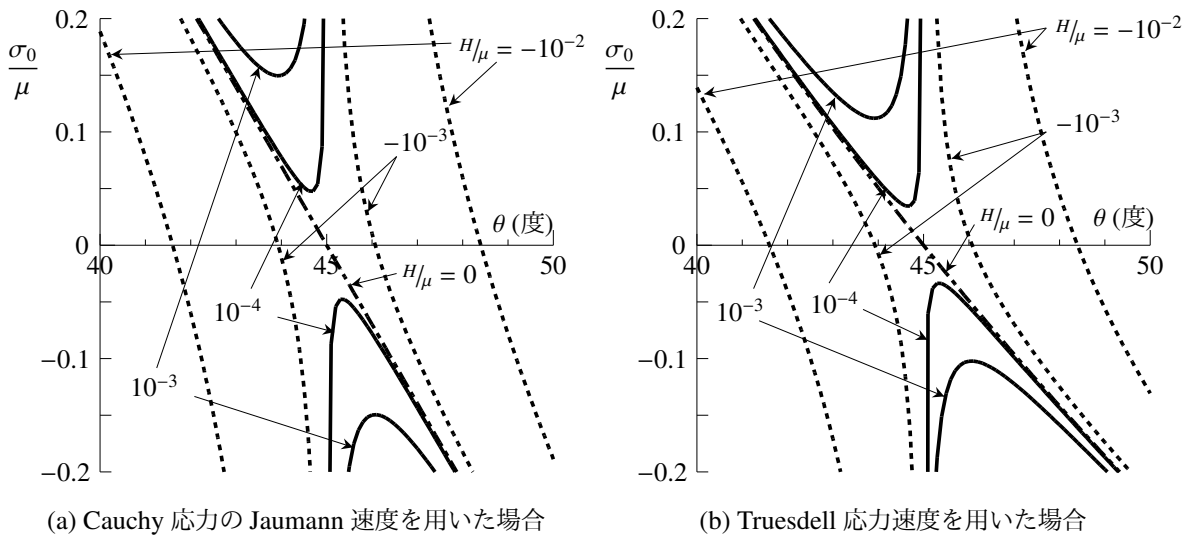


図 12.26 局所化発生応力と向き（塑性的平面ひずみ状態）

となる。両式の右辺第 4 項以降に応力速度による違いが含まれている。もちろん重弾性部分の違いは塑性部分にも影響を及ぼしており、例えば式 (12.208) の右辺第 5 項は引張で見かけのせん断抵抗を弱める効果を持つことがわかる。

さて、式 (12.207) (12.208) を用いて式 (12.206) の局所化条件を満足する応力と硬化係数の関係を求めよう。ただし文献でも対象としているように、いわゆる「塑性的平面ひずみ」状態、つまり、式 (12.168) の流れ則を満足する塑性ひずみ増分の x_3 方向成分が零になる状態を対象とする。したがって応力状態は

$$d_{33}^p = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma'_{33} = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_{33} = \frac{1}{2}(\sigma_{11} + \sigma_{22})$$

を満足しているものとする。この条件下で局所化が発生する可能性を図 12.26 に示した。引張試験を念頭に置いて、 x_1 軸方向の応力 $\sigma_{11} = \sigma_0$ のみの 1 軸状態を対象とした。縦軸が局所化発生応力レベルであり、横軸はその局所変形帯の向きである。図からも明らかなように、一点鎖線と点線で表した負または零の硬化係数の（軟化）状態なら、任意の応力状態で局所化が発生する可能性があり、その局所変形帯の向きがこの図から求められる。一方、正の硬化係数の硬化状態（図中の実線）では、ある限定された向きに、ある特定の応力レベルでしか局所化が発生しないことがわかる。しかも、この図に示したような硬化係数のオーダーを持つ材料の場合には、その局所化発生応力はせん断弾性係数の一桁小さいくらいの非常に大きな応力レベルになっていて、現実的な予測ができていないことが明らかである。これはよく知られた結論であり、独立した局所変形が発生するのは材料が軟化したかなりあとになるとされている。しかもその前に周期的な変形の集中が生じるとされている。結局この二つの図を見比べる限りは弾性構成則に用いる応力速度の選択による差はそれほど大きくない。

正の硬化状態で発生する可能性のある最小の局所化応力レベルと向きをまとめたのが図 12.27 である。比較のために convected 応力速度で弾性構成則を表した場合の結果も載せておいた。軟鋼のような零の硬化状態が存在する材料であれば、現実的な応力レベルで局所化が発生して、その帯の向きは载荷方向から 45 度方向だ。この角度は第 11.5.3 節の微小変形理論で予測された局所化の角度と一致する。しかし、ちょっとでも硬化がある場合の局所化発生応力レベルはとて大きくなる。その結果は、弾性を定義する構成則に用いる応力速度の選択で若干異なり、Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた材料モデルよりも Truesdell 応力速度を用いた方が比較的現実的な応力レベルにおける局所化を予測しているが、オーダー的にはそれほどの違いは無い。つまり、実験で観察される孤立した局所帯の発生をここで説明したような方法で予測することは困難であることを示し

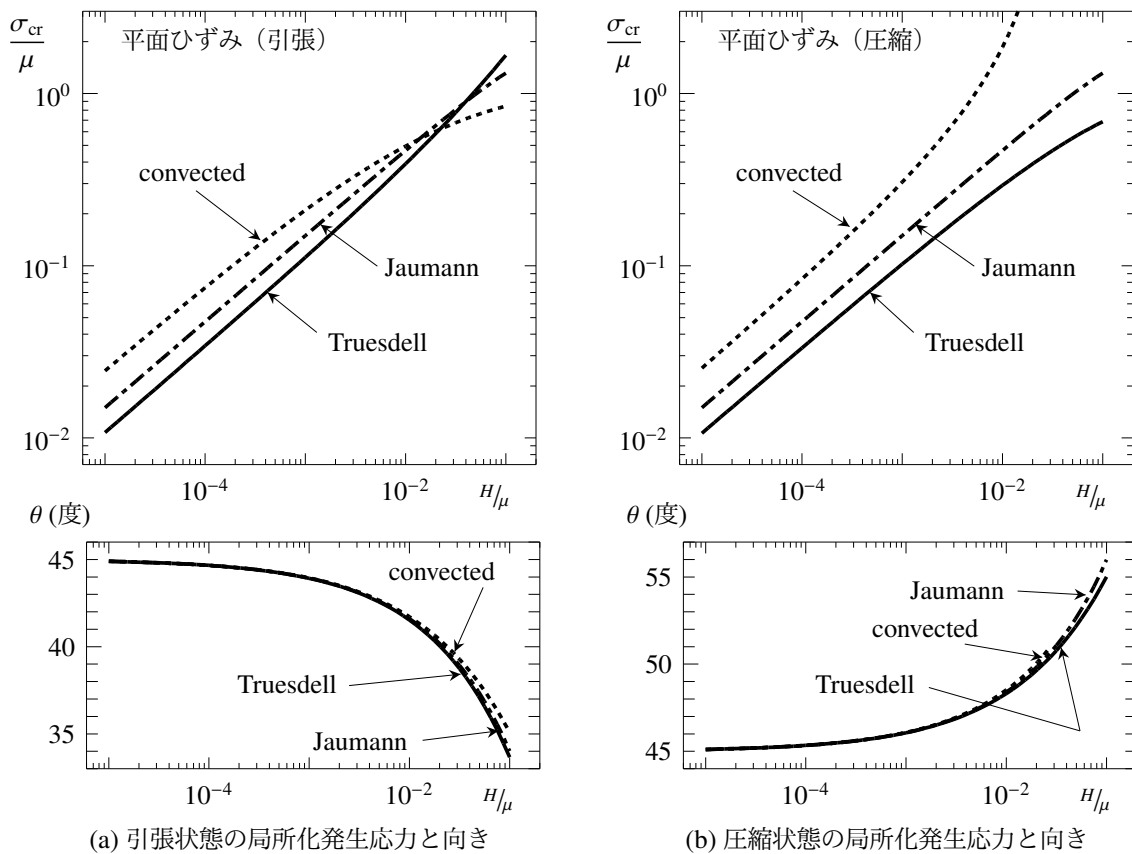


図 12.27 塑性的平面ひずみ状態で生じる局所化発生応力と向き

ている。文献 [49]では第 12.5.4(3) 節で概説した非共軸モデルを用いた場合の結果を示している。このモデルの弾塑性接線せん断剛性はかなり小さくできるので局所化発生応力レベルは現実的にはなるものの、本質的に持っている不安定な特性が局所化を誘発しているとも考えられる。

12.7 非線形挙動の数値的予測の例

12.7.1 updated Lagrange 的数値解析法

(1) 基礎方程式

多くの現実的な境界値問題に対しては数値的アプローチを使わざるを得ないだろう。そして非線形問題なので多くの研究者が繰り返し計算を必須としているようだが、ここでは敢えて単純な増分計算に基づく有限要素の定式化について簡単に説明しておく。基礎となる増分仮想仕事は式 (12.161) だが、これは現配置の Euler 的記述ではなく updated Lagrange 的記述である。各増分ステップにおける応力の更新は第 12.4.5 節で証明したように増分との単純な和

$$\sigma_{ij}(t + \Delta t) = \sigma_{ij}(t) + \dot{\sigma}_{ij}(t) \Delta t \tag{12.209}$$

で算定できる。また updated Lagrange 的記述をしているので物体の位置も増分毎に更新する必要があり、例えば有限要素の現配置における節点座標を $p_i(t)$ とすると、各ステップ毎に

$$p_i(t + \Delta t) = p_i(t) + v_i(t) \Delta t \tag{12.210}$$

で更新する必要がある。それを踏まえた有限要素による離散化を具体的に説明しておこう。

(2) 行列表記の増分内力仮想仕事項

コーディングのことを念頭に置いて各量を行列表記する。まず速度勾配ベクトルを行列表記で

$$\{\nabla v\} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ v_{1,1} & v_{2,2} & v_{3,3} & v_{3,2} & v_{2,3} & v_{1,3} & v_{3,1} & v_{2,1} & v_{1,2} \end{bmatrix}^T \quad (12.211)$$

の順番で定義することにする。そこで式 (12.161) の増分内力仮想仕事項における対応を念頭に置くと、nominal 応力速度ベクトルは

$$\{\dot{n}\} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \dot{n}_{11} & \dot{n}_{22} & \dot{n}_{33} & \dot{n}_{23} & \dot{n}_{32} & \dot{n}_{31} & \dot{n}_{13} & \dot{n}_{12} & \dot{n}_{21} \end{bmatrix}^T \quad (12.212)$$

の順番で定義する必要がある。せん断成分の順番が、速度勾配のそれと逆になっていることに注意すること。これより増分内力仮想仕事項は

$$\delta U(t) \equiv \int_v \delta v_{i,j} \dot{n}_{ji} dv = \int_v \delta \{\nabla v\}^T \{\dot{n}\} dv$$

と定義できる。積分領域の v は現配置の物体領域を表すので厳密には履歴の関数 $v(t)$ と記した方がいいが、ここは簡素化した。

速度勾配を、有限要素法の標準の手順で用いるような行列表記で速度と関係付けると

$$\{\nabla v\} = (S) \{v\}, \quad \{v\} \equiv \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}^T, \quad (12.213a, b)$$

$$(S) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \end{pmatrix}^T \quad (12.213c)$$

と表されるので、増分内力仮想仕事項は

$$\delta U(t) = \int_v \delta \{v\}^T (S)^T \{\dot{n}\} dv$$

となる。また、任意の歪弾性構成則は、応力速度間を用いれば形式的には

$$\dot{n}_{ij} = F_{ijkl} v_{k,l} \quad \rightarrow \quad \{\dot{n}\} = (F) \{\nabla v\} \quad (12.214)$$

と書くことができるので、結局、増分内力仮想仕事項は

$$\delta U(t) = \int_v \delta \{v\}^T (S)^T (F) (S) \{v\} dv \quad (12.215)$$

と表される。一般的には F が応力の関数であることに注意すること。

(3) 歪弾性の行列表記

応力増分: まず Cauchy 応力増分ベクトルを

$$\{\dot{\sigma}\} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \dot{\sigma}_{11} & \dot{\sigma}_{22} & \dot{\sigma}_{33} & \dot{\sigma}_{23} & \dot{\sigma}_{31} & \dot{\sigma}_{12} \end{bmatrix}^T \quad (12.216)$$

と定義して、応力増分と速度勾配の関係式を行列表記で

$$\{\dot{\sigma}\} = (G) \{\nabla v\} \quad (12.217)$$

と記す。速度勾配との関係式にしたことから (G) は正方行列ではなく 6×9 の行列である。

Cauchy 応力の Jaumann 速度で定義した場合: 式 (12.151) のように Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いて亜弾性を定義すると、応力増分は

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu d_{ij} + \lambda \delta_{ij} d_{kk} + w_{ik} \sigma_{kj} + w_{jk} \sigma_{ki}$$

と表される。したがって式 (12.217) の係数行列 (G) は

$$(G) \equiv \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & -\sigma_{23} & \sigma_{23} \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & \sigma_{23} & -\sigma_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \mu - \frac{1}{2}\sigma_{33} + \frac{1}{2}\sigma_{22} & \mu + \frac{1}{2}\sigma_{33} - \frac{1}{2}\sigma_{22} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2}\sigma_{13} & \frac{1}{2}\sigma_{13} \\ \sigma_{13} & -\sigma_{13} & -\sigma_{12} & \sigma_{12} \\ 0 & 0 & \sigma_{12} & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{13} & \sigma_{13} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{2}\sigma_{13} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} \\ \mu - \frac{1}{2}\sigma_{11} + \frac{1}{2}\sigma_{33} & \mu + \frac{1}{2}\sigma_{11} - \frac{1}{2}\sigma_{33} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & \frac{1}{2}\sigma_{23} \\ \frac{1}{2}\sigma_{23} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & \mu - \frac{1}{2}\sigma_{22} + \frac{1}{2}\sigma_{11} & \mu + \frac{1}{2}\sigma_{22} - \frac{1}{2}\sigma_{11} \end{pmatrix} \quad (12.218)$$

と定義される。初期状態（零応力状態）では通常の微小変形理論の Hooke の法則に一致する。

また、その構成則を nominal 応力速度で表すと

$$\dot{n}_{ij} = 2\mu d_{ij} + \lambda \delta_{ij} d_{kk} + \sigma_{ij} d_{kk} + w_{jk} \sigma_{ki} - d_{ik} \sigma_{kj}$$

となるので、行列表示した場合の式 (12.214) の係数 (F) は

$$(F) \equiv \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda + \sigma_{11} & \lambda + \sigma_{11} & 0 & 0 \\ \lambda + \sigma_{22} & \lambda + 2\mu & \lambda + \sigma_{22} & -\sigma_{23} & 0 \\ \lambda + \sigma_{33} & \lambda + \sigma_{33} & \lambda + 2\mu & 0 & -\sigma_{23} \\ \sigma_{23} & 0 & \sigma_{23} & \mu - \frac{1}{2}\sigma_{33} + \frac{1}{2}\sigma_{22} & \mu - \frac{1}{2}\sigma_{33} - \frac{1}{2}\sigma_{22} \\ \sigma_{23} & \sigma_{23} & 0 & \mu - \frac{1}{2}\sigma_{33} - \frac{1}{2}\sigma_{22} & \mu + \frac{1}{2}\sigma_{33} - \frac{1}{2}\sigma_{22} \\ \sigma_{13} & \sigma_{13} & 0 & -\frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} \\ 0 & \sigma_{13} & \sigma_{13} & \frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} \\ 0 & \sigma_{12} & \sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} & \frac{1}{2}\sigma_{13} \\ \sigma_{12} & 0 & \sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} \\ 0 & -\sigma_{13} & -\sigma_{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\sigma_{12} \\ -\sigma_{13} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} \\ -\frac{1}{2}\sigma_{12} & -\frac{1}{2}\sigma_{12} & \frac{1}{2}\sigma_{13} & -\frac{1}{2}\sigma_{13} \\ \mu - \frac{1}{2}\sigma_{11} + \frac{1}{2}\sigma_{33} & \mu - \frac{1}{2}\sigma_{11} - \frac{1}{2}\sigma_{33} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & \frac{1}{2}\sigma_{23} \\ \mu - \frac{1}{2}\sigma_{11} - \frac{1}{2}\sigma_{33} & \mu + \frac{1}{2}\sigma_{11} - \frac{1}{2}\sigma_{33} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} \\ -\frac{1}{2}\sigma_{23} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & \mu - \frac{1}{2}\sigma_{22} + \frac{1}{2}\sigma_{11} & \mu - \frac{1}{2}\sigma_{22} - \frac{1}{2}\sigma_{11} \\ \frac{1}{2}\sigma_{23} & -\frac{1}{2}\sigma_{23} & \mu - \frac{1}{2}\sigma_{22} - \frac{1}{2}\sigma_{11} & \mu + \frac{1}{2}\sigma_{22} - \frac{1}{2}\sigma_{11} \end{pmatrix} \quad (12.219)$$

となり、これが 9×9 の非対称行列になることには注意すること。ただし、初期状態（零応力状態）では通常の微小変形理論の Hooke の法則に一致する。汎用プログラムの多くは Cauchy 応力の Jaumann 速度で定義した亜弾性構成則を用いていると思われるが、接線剛性行列は非対称になっているのだろうか。

Truesdell 応力速度で定義した場合： 式 (12.154) のように Truesdell 応力速度を用いて亜弾性を定義すると

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu d_{ij} + \lambda \delta_{ij} d_{kk} - \sigma_{ij} d_{kk} + v_{i,k} \sigma_{kj} + v_{j,k} \sigma_{ki}$$

となるので、行列表示した場合の式 (12.217) の係数 (G) は

$$(G) \equiv \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + \sigma_{11} & \lambda - \sigma_{11} & \lambda - \sigma_{11} & 0 & 0 & 2\sigma_{13} & 0 & 0 & 2\sigma_{12} \\ \lambda - \sigma_{22} & \lambda + 2\mu + \sigma_{22} & \lambda - \sigma_{22} & 0 & 2\sigma_{23} & 0 & 0 & 2\sigma_{12} & 0 \\ \lambda - \sigma_{33} & \lambda - \sigma_{33} & \lambda + 2\mu + \sigma_{33} & 2\sigma_{23} & 0 & 0 & 2\sigma_{13} & 0 & 0 \\ -\sigma_{23} & 0 & 0 & \mu + \sigma_{22} & \mu + \sigma_{33} & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{13} & 0 \\ 0 & -\sigma_{13} & 0 & \sigma_{12} & 0 & \mu + \sigma_{33} & \mu + \sigma_{11} & 0 & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & -\sigma_{12} & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 & \mu + \sigma_{11} & \mu + \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (12.220)$$

で定義される。ただし、初期状態（零応力状態）では通常の微小変形理論の Hooke の法則に一致する。

最終的に nominal 応力速度で表した構成則は

$$\dot{n}_{ij} = \left\{ \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \sigma_{li} \delta_{jk} \right\} v_{k,l} = F_{ijkl} v_{k,l} \rightarrow F_{ijkl} = F_{lkji}$$

となり、 (ij) と (lk) が可換であるから、ここで定義した順番の式 (12.214) の行列表示係数 (F) は、次に示すような対称行列になる。

$$(F) \equiv \begin{pmatrix} \lambda + 2\mu + \sigma_{11} & \lambda & \lambda & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 & \sigma_{12} \\ \lambda & \lambda + 2\mu + \sigma_{22} & \lambda & 0 & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{12} & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu + \sigma_{33} & \sigma_{23} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{23} & \mu + \sigma_{22} & \mu & 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{23} & 0 & \mu & \mu + \sigma_{33} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 \\ \sigma_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu + \sigma_{33} & \mu & 0 & \sigma_{23} \\ 0 & 0 & \sigma_{13} & \sigma_{12} & 0 & \mu & \mu + \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{12} & 0 & 0 & \sigma_{13} & 0 & 0 & \mu + \sigma_{11} & \mu \\ \sigma_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{23} & 0 & \mu & \mu + \sigma_{22} \end{pmatrix} \quad (12.221)$$

これも、初期状態（零応力状態）では通常の微小変形理論の Hooke の法則に一致する。ちなみに Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を用いた亜弾性式 (12.156) の場合も上式に対応する抵抗係数は対称行列になる。

この結論からは、現配置において速度勾配で表した接線関係は、「瞬間 (updated Lagrange) 的には保存的」な弾性構成モデルになっていることがわかる。つまり、現配置の瞬間的弱形式が

$$\delta \Pi(t) \equiv \int_{v(t)} \delta \left\{ \nabla v \right\}^T (F(t)) \left\{ \nabla v \right\} dv - \int_{v(t)} \delta \left\{ v \right\}^T \left\{ \hat{\pi} \right\} \rho dv - \int_{s(t)} \delta \left\{ v \right\}^T \left\{ i \right\} ds = 0$$

のように対称行列 (F) を用いて定義できるので積分できて、対応する汎関数を

$$\Pi(t) \equiv \frac{1}{2} \int_{v(t)} \{\nabla v\}^T (F(t)) \{\nabla v\} dv - \int_{v(t)} \{v\}^T \{\dot{\pi}\} \rho dv - \int_{s(t)} \{v\}^T \{i\} ds$$

のように定義できる。第3項の積分領域 $s(t)$ は現配置の表面領域である。第2 Piola-Kirchhoff 応力を用いた超弾性の updated Lagrange 的記述の増分として Truesdell 応力速度を用いた重弾性構成則が定義できていることから、もしかしたら当たり前の（力学分野では自明の）帰結なのかもしれない。逆に前述した Cauchy 応力の Jaumann 速度で重弾性を定義した場合は、 (F) が非対称なので $\delta\Pi$ は積分できない。ただし、どちらの場合も物体領域 $v(t)$ や表面 $s(t)$ は時々刻々変化する上に、係数行列にも現配置の応力が含まれていることから、構成則そのものは「非保存的」のままであり、増分仮想仕事も履歴方向には可積ではない。

(4) 標準的離散化

有限要素法による離散化では標準的手法を用いなければならないので、有限要素近似で用いる区分的多項式で適切に定義した試行関数を $N(x_1, x_2, x_3)$ とすると、速度の有限要素近似は

$$\{v\} = \left(N(x_1, x_2, x_3) \right) \{\dot{p}\} \quad (12.222)$$

となる。ここに $\{\dot{p}\}$ は節点速度（多項式の種類によって異なるが増分変位等）ベクトルである。式(12.210)のように節点座標を時々刻々更新する必要があるため、ここでは定むずみの四節点四面体要素を用いることにする。この近似によって応力増分は式(12.213a)と式(12.217)から

$$\{\dot{\sigma}\} = (G)(S)(N)\{\dot{p}\} = (G)(B)\{\dot{p}\}, \quad (B) \equiv (S)(N) \quad (12.223a, b)$$

で計算でき、接線剛性行列は式(12.215)の増分内力仮想仕事項から

$$(k) = \int_v (N)^T (S)^T (F) (S) (N) dv = \int_v (B)^T (F) (B) dv \quad (12.224)$$

で算定できる。Cauchy 応力の Jaumann 速度を重弾性の定義に用いた場合の接線剛性行列は非対称だが、Truesdell 応力速度を用いた場合の行列は対称になる。一般には式(12.223b)の (B) も多項式を含む行列になるのだが、更新 Lagrange 的記述上の増分計算を念頭に置くと、節点座標を増分毎に更新する必要があるため、これは定数行列であることが望ましい。そうでない場合には、応力増分の算定を積分点等で解釈し直す等が必要になる。

分布外力増分と表面外力増分も標準的手順に沿って

$$\{\dot{h}\} \equiv \int_v (N)^T \{\dot{\pi}\} \rho dv, \quad \{\dot{f}\} \equiv \int_s (N)^T \{i\} ds \quad (12.225a, b)$$

で離散定義すれば、増分仮想仕事式から増分（接線）剛性方程式は

$$(k) \{\dot{p}\} = \{\dot{h}\} + \{\dot{f}\} \quad (12.226)$$

と表されるので、これを微小増分毎に時々刻々解いていけばいい。なお節点の座標値を $\{p\}$ と記すことにすると、増分解析する毎にその座標値を式(12.210)のように

$$\{p\}^{(t+\Delta t)} = \{p\}^{(t)} + \{\dot{p}\}^{(t)} \quad (12.227)$$

で更新する必要がある。同様に等価節点外力も

$$\{h\}^{(t+\Delta t)} = \{h\}^{(t)} + \{\dot{h}\}^{(t)}, \quad \{f\}^{(t+\Delta t)} = \{f\}^{(t)} + \{\dot{f}\}^{(t)} \quad (12.228a, b)$$

のように更新する。また各要素（積分点）の応力も，Cauchy 応力ベクトルも式 (12.209) のように

$$\{\sigma\} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma_{11} & \sigma_{22} & \sigma_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{31} & \sigma_{12} \end{bmatrix}^T \quad (12.229)$$

と定義しておけば

$$\{\sigma\}^{(t+\Delta t)} = \{\sigma\}^{(t)} + \{\dot{\sigma}\}^{(t)} \quad (12.230)$$

で更新する。

(5) 弾塑性接線係数等の行列表記

相当応力と相当塑性ひずみ：Prandtl-Reuss モデルの有限要素化を簡単に説明しておく。まず偏差応力ベクトルの 6×1 縦ベクトルの場合を

$$\{\sigma'\} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma'_{11} & \sigma'_{22} & \sigma'_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{31} & \sigma_{12} \end{bmatrix}^T \quad (12.231)$$

と定義して， 9×1 縦ベクトルの場合を

$$\{s\} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \sigma'_{11} & \sigma'_{22} & \sigma'_{33} & \sigma_{23} & \sigma_{23} & \sigma_{13} & \sigma_{13} & \sigma_{12} & \sigma_{12} \end{bmatrix}^T \quad (12.232)$$

と定義しておく。すると，それぞれ応力ベクトルとは

$$\{\sigma'\} = \begin{pmatrix} R \end{pmatrix} \{\sigma\} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{\sigma\} \quad (12.233)$$

および

$$\{s\} = \begin{pmatrix} T \end{pmatrix} \{\sigma\} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 & 0 & 0 \\ -1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \{\sigma\} \quad (12.234)$$

という関係になる。このベクトルを用いれば，相当応力（の 2 乗）は

$$\bar{\sigma}^2 \equiv \frac{1}{2} \sigma'_{ij} \sigma'_{ij} = \frac{1}{2} \{s\}^T \{s\} \quad (12.235)$$

と表すことができる。また相当塑性ひずみは，定義式 (12.167b) の物質微分の

$$\dot{\epsilon}^p \equiv \sqrt{2 d_{ij}^p d_{ij}^p} = \frac{1}{2H\bar{\sigma}} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}_{kl} = \frac{1}{2H\bar{\sigma}} \sigma'_{kl} \dot{\sigma}'_{kl} = \frac{1}{2H\bar{\sigma}} \{s\}^T \{\dot{s}\} \quad (12.236)$$

で算定した増分を累積させて計算すればいい。右辺の内積は、理論的には載荷状態の間は正になるはずである。偏差応力増分も、上の行列を用いて

$$\{ \dot{s} \} = (T) \{ \dot{\sigma} \} = (T) (G) (S) (N) \{ \dot{p} \} = (T) (G) (B) \{ \dot{p} \} \quad (12.237)$$

で算定できる。 (B) が定数行列ではない場合には、偏差応力増分の算定を積分点等で解釈し直す必要が生じる。硬化係数 H が定数の場合のせん断降伏応力 τ_Y は $\tau_Y = \tau_Y^0 + H \bar{\epsilon}^p$ で与えられる。

弾塑性接線係数等: 塑性変形を伴う場合の応力増分は

$$\{ \dot{\sigma} \} = \left((G) - (G^p) \right) \{ \nabla v \} \quad (12.238)$$

と関係付けられる。ここに行列 (G^p) が塑性による影響である。また nominal 応力速度で表した構成則も

$$\{ \dot{n} \} = \left((F) - (F^p) \right) \{ \nabla v \} \quad (12.239)$$

と表される。ここに行列 (F^p) が塑性による影響である。

Cauchy 応力の Jaumann 速度で歪弾性を定義した場合: この場合の応力増分で表した構成則は

$$\dot{\sigma}_{ij} = 2\mu d_{ij} + \lambda \delta_{ij} d_{kk} + w_{ik} \sigma_{kj} + w_{jk} \sigma_{ki} - \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} d_{kl}$$

となるので、式(12.238)の行列 (G^p) は

$$(G^p) \equiv \frac{\mu^2}{(\mu + H) \bar{\sigma}^2} \{ \sigma' \} \{ s \}^T \quad (12.240)$$

で定義できる。また nominal 応力速度で表した構成則も同様に

$$\dot{n}_{ij} = 2\mu d_{ij} + \lambda \delta_{ij} d_{kk} + \sigma_{ij} d_{kk} + w_{jk} \sigma_{ki} - d_{ik} \sigma_{kj} - \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} d_{kl}$$

となるので、式(12.239)の行列 (F^p) は

$$(F^p) \equiv \frac{\mu^2}{(\mu + H) \bar{\sigma}^2} \{ s \} \{ s \}^T \quad (12.241)$$

で定義できる。

Truesdell 応力速度で歪弾性を定義した場合: まず 1×9 の横ベクトル

$$[P] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (12.242)$$

と、同様の横ベクトル

$$[Q] \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 & Q_5 & Q_6 & Q_7 & Q_8 & Q_9 \end{bmatrix} \quad (12.243)$$

の二つを定義しておく。ここに

$$Q_1 \equiv \sigma_{11} \sigma'_{11} + \sigma_{12}^2 + \sigma_{13}^2, \quad Q_2 \equiv \sigma_{12}^2 + \sigma_{22} \sigma'_{22} + \sigma_{23}^2, \quad Q_3 \equiv \sigma_{13}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{33} \sigma'_{33}, \quad (12.244a, b, c)$$

$$Q_4 \equiv \sigma_{12} \sigma_{13} + \sigma_{23} \sigma_{22} + \sigma_{23} \sigma'_{33}, \quad Q_5 \equiv \sigma_{12} \sigma_{13} + \sigma_{23} \sigma'_{22} + \sigma_{23} \sigma_{33}, \quad (12.244d, e)$$

$$Q_6 \equiv \sigma_{13} \sigma'_{11} + \sigma_{12} \sigma_{23} + \sigma_{13} \sigma_{33}, \quad Q_7 \equiv \sigma_{13} \sigma_{11} + \sigma_{12} \sigma_{23} + \sigma_{13} \sigma'_{33}, \quad (12.244f, g)$$

$$Q_8 \equiv \sigma_{12} \sigma_{11} + \sigma_{12} \sigma'_{22} + \sigma_{13} \sigma_{23}, \quad Q_9 \equiv \sigma_{12} \sigma'_{11} + \sigma_{12} \sigma_{22} + \sigma_{13} \sigma_{23} \quad (12.244h, i)$$

と定義した。この場合の応力増分で表した構成則は

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} = & 2\mu d_{ij} + \lambda \delta_{ij} d_{kk} - \sigma_{ij} d_{kk} + v_{i,k} \sigma_{kj} + v_{j,k} \sigma_{ki} \\ & - \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} d_{kl} - \frac{\mu}{2(\mu + H)} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} (v_{k,m} \sigma_{ml} + v_{l,m} \sigma_{mk}) + \frac{\mu}{\mu + H} \sigma'_{ij} d_{kk} \end{aligned}$$

となる。したがって式 (12.238) の行列 (G^p) は

$$(G^p) \equiv \frac{\mu^2}{(\mu + H)\bar{\sigma}^2} \left\{ \sigma' \right\} \left\{ s \right\}^T + \frac{\mu}{(\mu + H)\bar{\sigma}^2} \left\{ \sigma' \right\} [Q] - \frac{\mu}{\mu + H} \left\{ \sigma' \right\} [P] \quad (12.245)$$

で定義できる。また nominal 応力速度で表した構成則は

$$\begin{aligned} \dot{n}_{ij} = & 2\mu d_{ij} + \lambda d_{kk} + \sigma_{ki} v_{j,k} \\ & - \frac{\mu^2}{\mu + H} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} d_{kl} - \frac{\mu}{2(\mu + H)} \frac{\sigma'_{ij} \sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2} (v_{k,m} \sigma_{ml} + v_{l,m} \sigma_{mk}) + \frac{\mu}{\mu + H} \sigma'_{ij} d_{kk} \end{aligned}$$

となるので、式 (12.239) の行列 (F^p) は

$$(F^p) \equiv \frac{\mu^2}{(\mu + H)\bar{\sigma}^2} \left\{ s \right\} \left\{ s \right\}^T + \frac{\mu}{(\mu + H)\bar{\sigma}^2} \left\{ s \right\} [Q] - \frac{\mu}{\mu + H} \left\{ s \right\} [P] \quad (12.246)$$

で定義できる。興味深いのは、第 12.5.3 (4) 節で示したように Truesdell 応力速度を用いた場合には弾性接線係数が対称になるのに対し、塑性接線係数は逆に Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合に対称になる⁴⁰ ことだ。

12.7.2 数値解析例 — 弾性体の 1 軸載荷

構成則の違いによる影響の可視化とコーディングの確認が目的なので架空の材料として非常に柔らかい材料を選んで、 $E = 10 \text{ MN/m}^2$, $\nu = 1/3$ としてみる。よって $C_0 \equiv \lambda + 2\mu = 15 \text{ MN/m}^2$, $C_1 \equiv \lambda = 7.5 \text{ MN/m}^2$, $\mu = 3.75 \text{ MN/m}^2$ となる。解析対象は図 12.28 に示したような辺長が 1 m の立方体である。境界下面の節点はすべて x_2 方向に固定した上で、下面中央を x_1, x_3 方向に、点 A を x_1 方向に、点 B を x_3 方向に固定した。そして上面を x_2 方向に 1 m あるいは -0.5 m だけ強制変位させたときの応答を二種類の歪弾性モデルで求めて比較する。この境界条件の下では数値解析上も物体には一様変形しか生じないのでもっと少ない要素数でも十分なのだが、できるだけ 3 方向に対称性を持ち均質な変形をするような境界条件が与え易いように、35 節点 96 要素のデータを齊木功先生に作っていただいた。中央付近には細かい要素が自動生成されているが、一様な変形をそれが乱すことは無かった。なお、プログラムそのものも齊木功先生に作っていただいた微小変形理論のプログラムを元にして接線係数だけを変更したのだが、以下の例で用いる初期不整の無いデータも齊木功先生に作っていただいた。

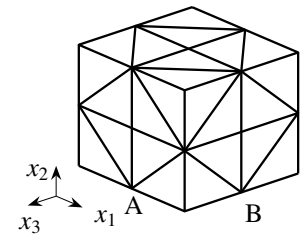


図 12.28 要素分割

⁴⁰ 弾性接線係数は初期応力が存在する材料の弾性係数なので対称であることは望ましいが、損失を伴う塑性接線係数が対称である必要は無いだろうと思うのだが。

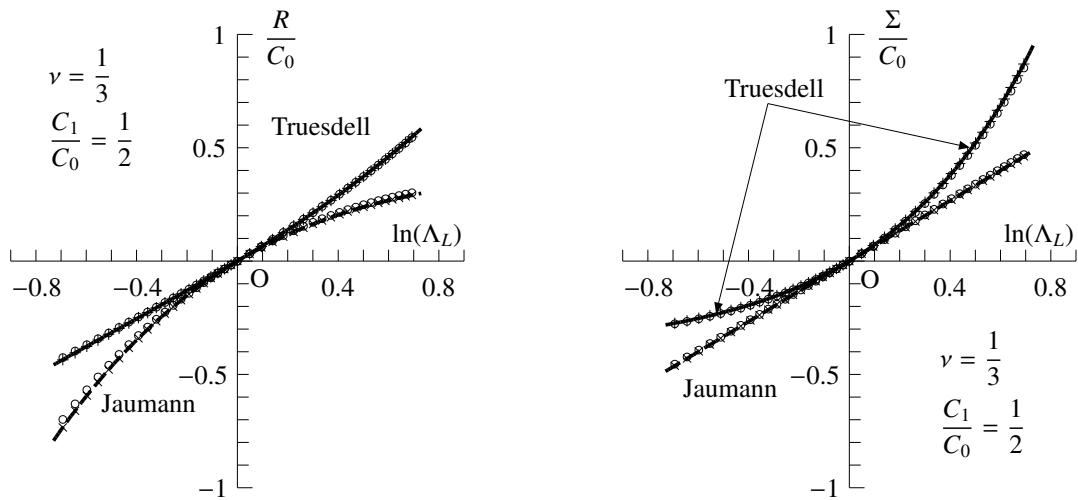


図 12.29 1 軸荷状態の数値結果と解析解の比較 — 公称応力と真応力

数値結果を示した図 12.29 では解析解を示した図 12.21 と同じ軸を用いたが、実曲線が Truesdell 応力速度を用いて歪弾性を定義した場合の式 (12.154) による解析解であり、破曲線が Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合の式 (12.151) による解析解である。それは有限要素法の収束解がある積分点で満足すべき解であり、この荷条件では有限要素解もそれに一致すべき解なので、それを参照解として必要な増分ステップ数について比較する。数値解の x_2 方向の公称直応力 R は上面（あるいは下面）の反力の総和から求め、 x_2 方向の Cauchy 直応力 Σ は積分点で求められた値そのものを用いた。図中の○が最終状態までを 20 ステップで求めた数値解で、×と+が 20000 ステップで求めた数値解でこちらは解析解とほぼ重なっている。

表 12.1 公称応力 R の数値解析誤差

model-steps	$\Lambda_L = 0.5$	$\Lambda_L = 2.0$
Jaumann-20	-4.84×10^{-2}	$+3.80 \times 10^{-2}$
J-200	-5.01×10^{-3}	$+3.69 \times 10^{-3}$
J-2000	-5.02×10^{-4}	$+3.68 \times 10^{-4}$
J-20000	-5.03×10^{-5}	$+3.68 \times 10^{-5}$
Truesdell-20	-2.31×10^{-2}	-3.63×10^{-3}
T-200	-2.39×10^{-3}	-4.34×10^{-4}
T-2000	-2.40×10^{-4}	-4.41×10^{-5}
T-20000	-2.40×10^{-5}	-4.43×10^{-6}

$\Lambda_L = 0.5$ あるいは 2 の状態における公称応力の絶対値の解析解に対する相対誤差を表 12.1 に示した。倍や半分まで変形させるために、繰り返し計算を用いない 200 (5 mm か 2.5 mm) ステップ程度で十分な精度が得られることは興味深い。

12.7.3 構成則の違いによる代表的な例

(1) 弾性座屈解との比較

異なる歪弾性を用いれば当然接線剛性も違って来るから数値解にも差異が生じるはずだ。どれが正しいのだろう。あるいはどちらがどういう特性を持っているのだろう。有限変形理論あるいは有限変位理論の境界値問題の解析解はそんなに多くはない。ただし「近似された連続体力学理論」としての構造力学理論の枠組の中の有限変位弾性理論解はいくつかあり、その弾性座屈荷重は接線剛性方程式から求めることができる。特に Timoshenko 梁には、せん断の構成則の違いによって 2 種類の座屈荷重が存在するので、図 12.30 のような非常に短い柱 (x_1 方向が柱の長さ方向) の座屈を 3 次元有限要素解析するが、詳細は文献 [111] に記した。Young 率

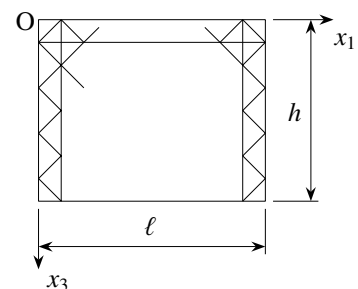


図 12.30 対象と要素分割

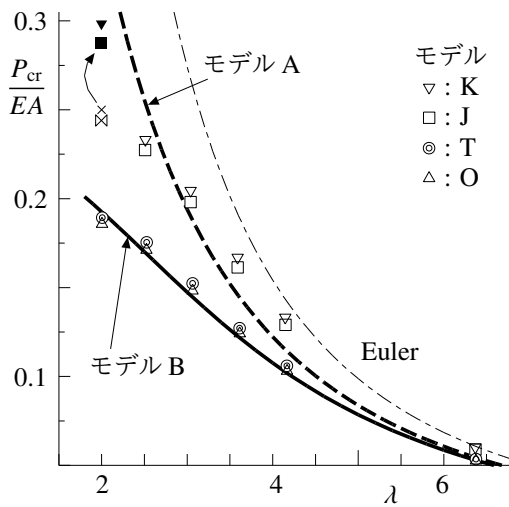


図 12.31 座屈荷重

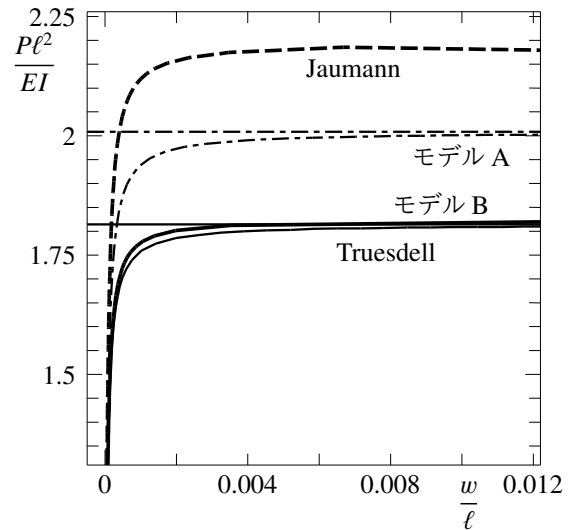


図 12.32 座屈後挙動

と Poisson 比は前節と同じとし、寸法は $h = 16 \text{ cm}$ の長さ $\ell = 10 \sim 40 \text{ cm}$ で x_2 方向の厚さ t は 5 mm とした。要素分割は $\ell = 20 \text{ cm}$ の場合、 x_1 方向には 40 分割で x_3 方向には 32 分割として、厚さ方向にはほとんどころに板厚中心面に節点を置き、3,985 節点・15,360 要素とした。分割数の影響は 1,034 節点・3,840 要素の粗い場合の解と比較して正確性を確認してある。片持ち梁をモデル化するために、境界条件は $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ の原点の節点は全方向固定し、 $x_2 = 0$ にある節点はすべて x_2 方向に固定することによって弱軸回りの座屈と横倒れ座屈を抑制した。 $x_1 = 0, x_2 = t$ の節点は x_1 方向と x_3 方向を固定し、この節点と原点以外の $x_1 = 0$ にあるすべての節点は x_1 方向にも固定し、 $x_1 = \ell$ の節点に x_1 の負方向に分布荷重を載せて圧縮し、総荷重を P と記す。Timoshenko 梁の解析解と数値解を求める際のせん断変形に関する補正係数 k_T は式 (B.7b) を用いた。数種類の荷重増分を試したあと十分小さい増分を用いて、接線係数行列 (F) を LU 分解したあとの対角項に負の要素が初めて現れるステップを「正值性の喪失」と捉え、そこを座屈発生状態と定義した。

図 12.31 に、数値的に求められた座屈荷重 P_{cr} と細長比 λ の関係と解析解を示した。座屈自体は座屈する瞬間の接線的力学特性だから、この図で用いている梁の断面積 A と断面 2 次モーメント I は数値解析上で正值性を失った瞬間の断面寸法で求めている。ただ参照する座屈公式では梁の有限な縮み量を考慮してあるので、長さ ℓ には梁の元の長さを用いて結果を整理した。後述する 1 ケースを除き、柱は座屈点までは一様変形を保持していた。図中の J (□) と K (▽) はそれぞれ Cauchy 応力と Kirchhoff 応力の Jaumann 速度で歪弾性を定義した場合の座屈解であり、T (◎) と O (△) が Truesdell 応力速度と Oldroyd 応力速度を用いた場合だ。一点鎖線はせん断変形の影響を無視した Euler 座屈荷重である。実線が Timoshenko 梁の「モデル B」の式 (C.56) を、破線が「モデル A」の式 (C.59) の解をプロットしたのだが、前者が軸力とせん断力の直交性がせん断変形によって失われるモデルであり、後者はその直交性を近似的に保持させたモデルである。Truesdell 応力速度あるいは Oldroyd 応力速度を用いた解は「モデル B」の実線とほぼ重なっているのに対し、Jaumann 速度を用いた二つの結果はほぼ「モデル A」の破線付近の解になっている。つまり Jaumann 速度を用いた歪弾性は他の二つの歪弾性よりもやや剛なせん断抵抗をモデル化したものになっていることがわかる。なお、図の $\lambda = 2$ 付近の極端に短い柱⁴¹に対する Jaumann 速度を用いた歪弾性の結果は、記号 ⊠ と × で示した外力レベルで一旦正值性を失ったが、そのあとすぐに正值に戻り、最後の記号 ■ および ▼ のレベルで再度正值性を失った。これはこの場合に限り柱が一様には変形できず、その非一様性による数値的な乱れが原因だと推測される。

⁴¹ 長さ ℓ が h よりも小さいものを柱と呼ぶかどうかはともかく、図の縦軸はほぼ柱の縮みなので座屈時には 25% も縮んでいることには注意が必要だ。

座屈点だけではなく有限変形挙動の違いを顕るために、初期不整を導入した長さ $l = 20 \text{ cm}$ (図 12.31 で細長比 λ がほぼ 4) の柱の座屈後の非線形挙動を図 12.32 に示した。座屈後の挙動を安定的に追跡するために $x_1 = 0$ の節点の x_3 方向の変位も拘束した上で、長方形の側面図が平行四辺形になるような初期不整を入れた。初期不整の詳細は文献 [111] を参照して欲しい。横軸の w は右端面中央 $x_1 = l, x_2 = 0, x_3 = l/2$ の x_3 方向の変位 (たわみ) である。太い破線が Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた亜弾性モデルの結果であり、太い実線が Truesdell 応力速度を用いた場合の結果である。参照解の方は第 C.6.2 節で定式化した有限要素で求め、細い実線が「モデル B」の梁の座屈後挙動で一点鎖線が「モデル A」の挙動である。やはり Truesdell 応力速度を用いた亜弾性モデルの挙動は座屈後も「モデル B」のそれと非常によく似ているのに対し、Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた結果は「モデル A」よりもやや大きい荷重レベルにまで達してしまっているが、やはり座屈はしている。このように、接線剛性が非対称な場合であっても上述の「正值性の喪失」の時点でたわみが大きくなっているのがわかる。

この結果だけで判断するのは危険ではあるが、図 12.23 に示した単純せん断における振動特性も踏まえて、著者は次のように [111]⁴² 考えている。

- Kirchhoff 応力の Jaumann 速度と Truesdell 応力速度を用いた亜弾性の場合には接線係数行列 (F) が対称になることから、どちらかと言えばこの二つを選択した方が、Cauchy 応力の Jaumann 速度や Oldroyd 応力速度を用いるモデルよりも超弾性に半歩くらい近い。
- せん断変形の扱い方が異なる二つのモデルによる座屈解との比較から、Jaumann 速度は比較的せん断抵抗が大きい材料、例えば単結晶金属等のモデル化に適している。実際 Asaro は Kirchhoff 応力の Jaumann 速度を用いて非常に美しい亜弾塑性構成モデル [3, 5] を構築している。
- 大きな変形状態で、例えば第 2 Piola-Kirchhoff 応力の初期に直交していた 2 方向成分がせん断変形の影響で歪むくらいせん断抵抗が小さい材料には、Truesdell 応力速度を用いるのが望ましい。

(2) 基本的な材料試験の弾塑性シミュレーション

基本的なモデルを用いて変形の局所化にも関連するような弾塑性変形挙動⁴³をいくつか数値解析⁴⁴する。比較する亜弾性モデルは Truesdell 応力速度を用いたものと Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いたものの 2 種類である。ここでも繰り返し無しの単純な増分解析をするので、一つ前の増分ステップ時に荷重と除荷を判定している。対象は図 12.30 と同様の領域で

ほぼ正方形: $h = 16 \text{ cm}$ を 16 分割し $l = 20 \text{ cm}$ を 20 分割した上で、厚さ $t = 1 \text{ cm}$ 方向にはところどころに板厚中心面に節点を置いた 1,034 節点・3,840 要素。以下これを「四角板」と呼ぶ。

長方形: 上の「四角板」を半分にしたもので、 $h = 8 \text{ cm}$ を 32 分割し $l = 20 \text{ cm}$ を 40 分割した上で、厚さを半分にした $t = 5 \text{ mm}$ 方向にはところどころに板厚中心面に節点を置いた 2,034 節点・7,680 要素。以下これを「細長板」と呼ぶ。

とした。この節の解析例の基本的な材料定数は鋼を念頭に置いて $E = 200 \text{ GN/m}^2$, $\nu = 1/3$ とし、初期せん断降伏応力は $\tau_y = 140 \text{ MN/m}^2$ で硬化係数を $H = 0.25 \text{ MN/m}^2$ とした。硬化係数が一般に用いられている値よりもかなり小さいのは変形の非一様化を促すためである。硬化係数の影響については少しだけ後述する。

⁴² 第 1 著者の卒業論文・修士論文・PhD 論文を通して持った長年の疑問を解決するための「辞職論文」を投稿したものだ。

⁴³ ポストプロセスでは研究室所有の Femap (Copyright © 2012 Siemens Product Lifecycle Management Software Inc., Version 10.3.1 日本語版) を利用した。

⁴⁴ これ以下は 2017 年 2 月までの 1 年間に「辞職論文」に発表した解析と併行して実行した基礎的な数値解析結果なので論文公表していない。したがって結果の検証が不十分なことには注意して欲しい。ちょっと疲労ぎみなのでご容赦願いたい。

板の左右端 $x_1 = 0$ と $x_1 = \ell$ の境界条件は前節と同じに⁴⁵したが、作用は外力ではなく強制変位で与えた。
 $x_2 = 0$ と $x_2 = t$ の境界条件は

ほぼ平面ひずみ: この両面の x_2 方向の変位を拘束した。板厚中心面にある節点の変位は自由にしたため「ほぼ」と書いたが、以下「平面ひずみ」状態と呼ぶ。

ほぼ平面応力: この両面のすべての変位を自由にした。まず平面応力状態は実際の実験では厳密には実現できないことに注意して「ほぼ」と書いたが、実際の引張試験の平滑板の状況と同じである。以下の数値解析結果では、変形がほぼ一様な状態では $|\sigma_{22}|$ は $|\sigma_{11}|$ の 10^{-6} より小さかった。本質的には 3 次元状態にあるが、以下「平面応力」状態と呼ぶ。

の 2 種類とした。さらに、変形が非一様化することを促すための初期不整として

右端面の隅一箇所の板厚を薄く: $x_1 = \ell$ で $x_2 = t, x_3 = h$ に配置した節点とその x_1 方向の隣の節点の x_2 座標を 20% 小さくして、板厚を薄くした。以下「片側」初期不整と略記する。

右端面の両隅の板厚を薄く: 「片側」初期不整の設定に加えて、 $x_1 = \ell$ で $x_2 = t, x_3 = 0$ に配置した節点とその x_1 方向の隣の節点の x_2 座標も 20% 小さくした。以下「両側」初期不整と略記する。

右端面隅と中央の対角配置箇所の板厚を薄く: 「片側」初期不整の設定に加えて、 $x_1 = \ell/2$ で $x_2 = t, x_3 = 0$ に配置した節点とその x_1 の負方向の隣の節点の x_2 座標も 20% 小さくした。以下「対角」初期不整と略記する。

の 3 種類を与えた場合も解析して結果を比較検討する。

状態を区別して変形履歴を図化するためだけに用いた公称応力 σ_N と工学（伸び）ひずみ ϵ は

$$\sigma_N \equiv \frac{P}{ht}, \quad \epsilon \equiv \frac{U}{\ell} \quad (12.247a, b)$$

で定義した。ここに P は右端表面の全節点の x_1 の負方向の反力の合計で、 U は右端表面 $x_1 = \ell$ にある全節点に与える x_1 方向の強制変位である。また、接線剛性行列の LU 分解後の対角項に現れる負の要素の数を n_d で表す。変形図は対象の実寸比の形状で、コンター図には相当（累積）塑性ひずみ $\bar{\epsilon}^p$ を

最小  最大

のような色のグラデーション⁴⁶で表示する。コンター図等の描画設定はすべてポストプロセサのデフォルトままである。以下、特に断らない限り Truesdell 応力速度を用いた亜弾性モデルによる結果である。

平面ひずみ状態の引張: 初期不整の無いまっすぐな板の右端面の節点を x_1 方向に変位させる。公称応力のピーク前後の変形状態を図 12.33 に示したが、この $\epsilon = 0.3\%$ 程度では一瞬境界から生じた応力集中が観察されるが、そのあと $\bar{\epsilon}^p$ の最大値と最小値がせいぜい 2 倍程度の周期的変形が生じる。その周期は板の小さい方の寸法つまり h に支配され、境界値問題の設定によってその周期が決まることを示している。しかもその周期は全体の変形に伴って徐々に変化する。このピーク前後では接線剛性行列の対角項に負の要素が発生し、その個数 n_d の変化が変形パターンの周期の変化に対応している。多分複数の分岐経路が存在するのだろうがその追跡は試みていない。ただ、さらに変形が大きくなると接線剛性行列の対角項はすべて正に戻る。

⁴⁵ $x_1 = 0, x_3 = h/2$ を全方向固定にしなかったのは、 x_3 方向の非対称性に初期不整の効果を持たせるためである。

⁴⁶ 基本的な 12 色相環の順番「赤・橙・黄・黄・緑・緑・青・青・紫・紫・赤・紫」であるが、この文書では最小側を「紫」と呼ぶ。

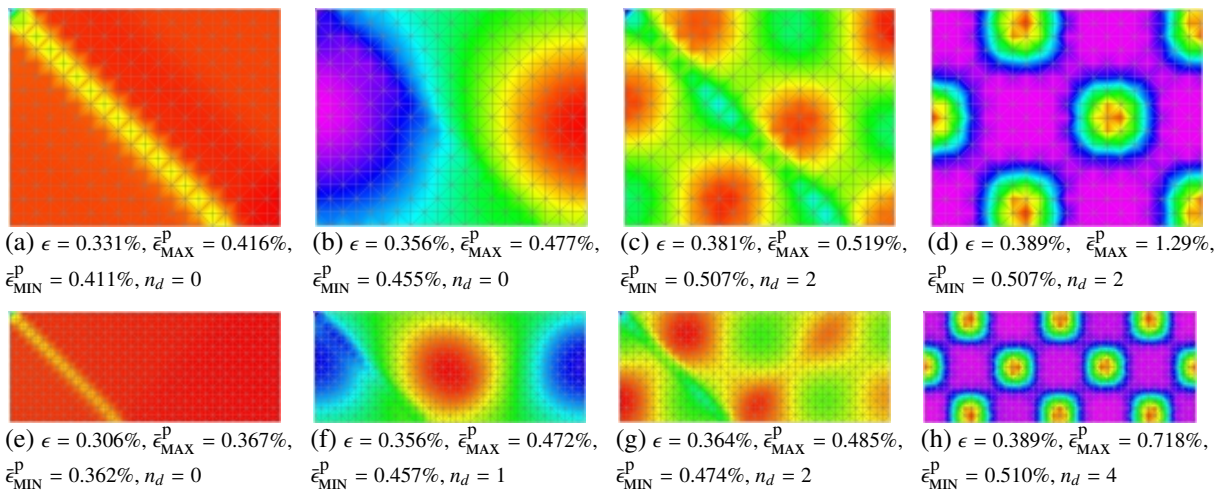


図 12.33 平面ひずみ状態で公称応力のピーク前後

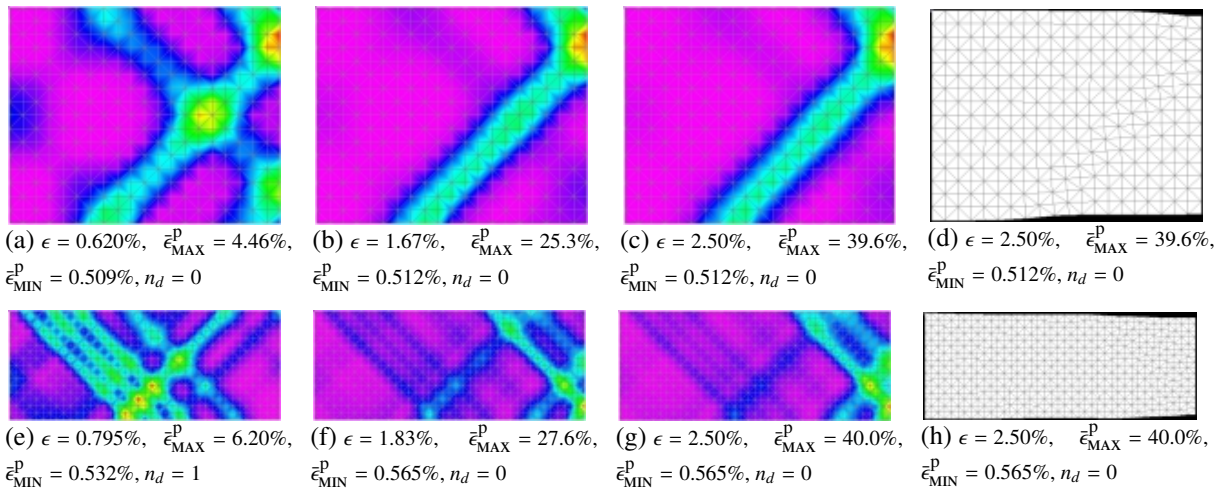


図 12.34 平面ひずみ状態で公称応力のピーク後

さらに大きな変形が生じた状態を図 12.34 に示したが、周期的変形が次第に消滅して引張方向から 45 度方向に伸びた変形集中帯が生じ始めてそれが発達する。これは周期的な大きな変形部分が発達して結合したものであり、いわゆる式 (12.206) で定義されるような支配方程式の楕円性の喪失といった微視的かつ孤立した局所変形ではないかもしれない。またその周期も増分ステップ毎に変化するが、ある程度変形が大きくなると接線剛性行列の対角項はすべて正に戻り、いくつかの巨視的な変形集中帯が孤立するような傾向を示す。最終的に $\epsilon = 2.5\%$ に達したあたりの黒背景のメッシュ図からわかるように、45 度方向のせん断の変形集中帯の発達に起因する絞りが顕著になった。解析的な研究 [39] でも、ピーク前後に周期的変形が先行したあとに式 (12.206) で定義された変形の局所化が生じると指摘されている。解析的研究の偉大さと重要性を再認識させる数値結果である。なお相当塑性ひずみが非常に大きな値になるのは用いた硬化係数 H が非常に小さいからである。

これに対し図 12.35 には歪弾性に Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた結果を示した。まず図 12.35 (f) に生じた変形の周期が、その直前の図 12.35 (e) や前述の Truesdell 応力速度を用いた図 12.33 (h) の周期と異なるのは興味深い。また四角板の場合、Truesdell 応力速度を用いた場合には接線剛性行列の対角項に現れる負の要素数 n_d が 1 ないし 2 であったのに対し、Jaumann 速度を用いた場合は 1 から 3 の間になっていた。また細長板では、前者の n_d が 1 から 4 の間であったのに対し、後者は 1 から 7 までにわたり、Jaumann 速度を用いた場合には比較的短い周期の応力分布も発生していることを示唆している。応力速度の違いだけがその原因だとは

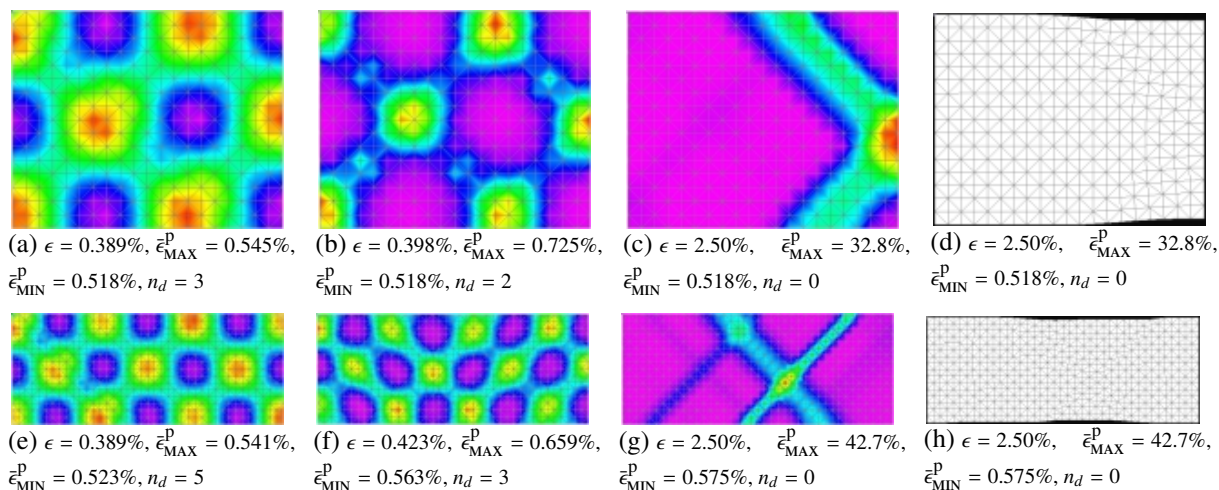


図 12.35 平面ひずみ状態で Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合

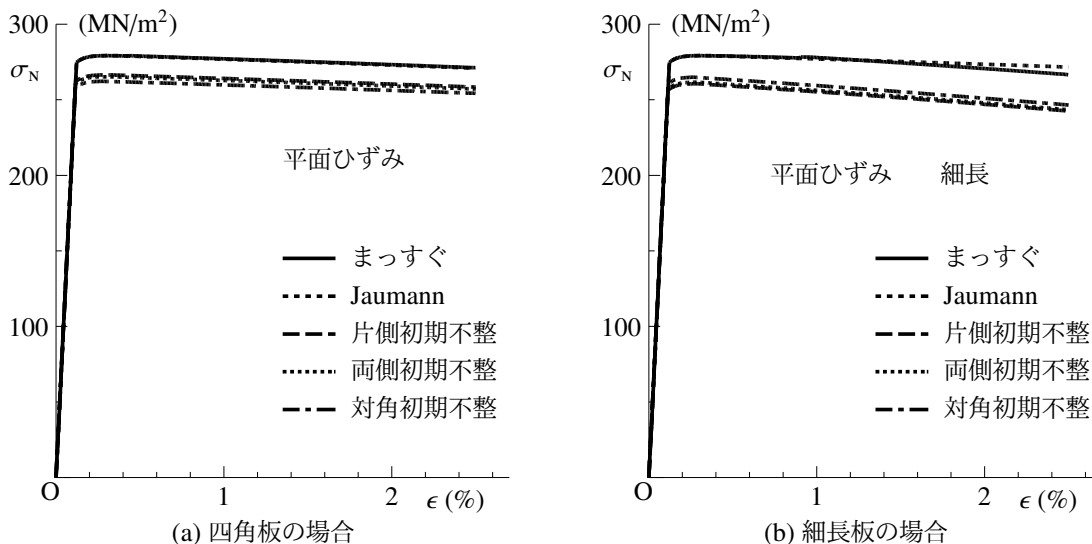


図 12.36 平面ひずみ状態の引張

断定できないが、ここで対象とした領域の辺長比が整数でないことを念頭に置いて次のように推測してみた。前節までの比較の結果から Truesdell 応力速度を用いた構成則は比較的せん断抵抗が小さいので、周期が比較的長い変形パターンを辺長比が整数でない領域に無理やり埋め込むことができたのに対し、せん断抵抗が比較的剛になる Jaumann 速度を用いた材料中には短い周期パターンの変形も生じようとしたのではないだろうか。

公称応力と工学ひずみの関係図 12.36 から明らかなように、平面ひずみ状態では式 (11.170) の $\sigma_y = 2\tau_y = 280 \text{ MN/m}^2$ で初期降伏が始まっている。また硬化係数をかなり小さくしたので巨視的な挙動には初期の硬化後のピークと軟化が現れているが、弾性座屈のような明確な分岐点は現れていない。特に細長板では $\epsilon = 1\%$ を越えたあたりから、Truesdell 応力速度を用いた場合と Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合との間の違いが顕著になる。まず Truesdell 応力速度を用いた場合の $\epsilon = 2\%$ の状態の図 12.34 (g) を見ると、変形集中帯が右端にしか現れていないが、Jaumann 速度を用いた図 12.35 (g) では変形集中帯が中央に位置している。そこでこの細長い領域を一種の x_1 方向の周期的対象に対するユニットセルだと解釈すると、前者は $2l$ の周期で変形集中帯が現れているのに対し、後者は l の周期で変形集中帯が現れていることになり、それがこの応力ひずみ関係の違いになったものとも推測される。ただし、Truesdell 応力速度を用いた場合の応答の方が常に柔らかくなるとは限らず、後述する平面応力状態の場合にはそれが逆転する。

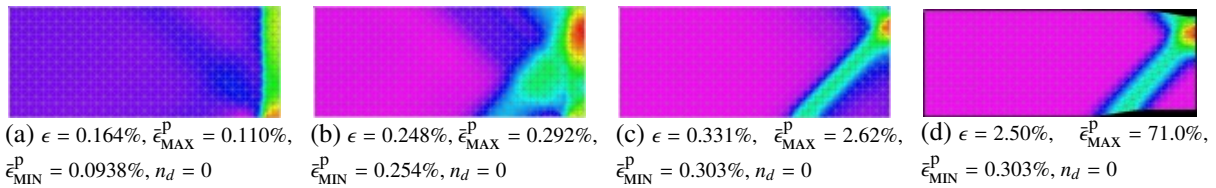


図 12.37 初期不整がある場合：片側

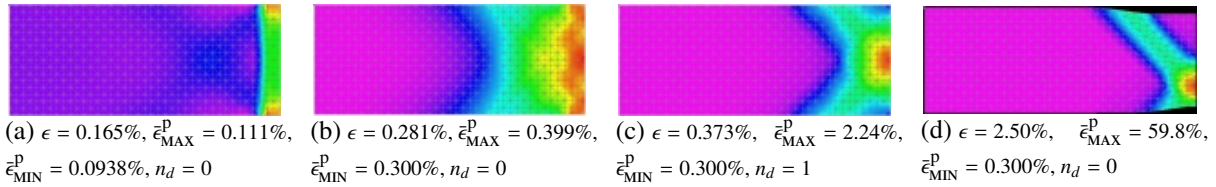


図 12.38 初期不整がある場合：両側

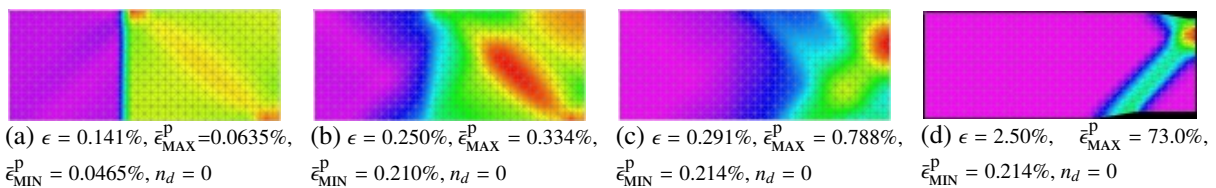


図 12.39 初期不整がある場合：対角

図 12.36 には 3 種類の初期不整を与えた場合の応力ひずみ関係も示したが、どの初期不整の場合でも局所的な応力集中によって巨視的な初期降伏応力がまっすぐな場合よりも若干小さくなる。四角板では接線剛性行列の対角項には負の要素は発生しなかった。どの場合もまっすぐな板に現れる周期的な変形を経ないまま孤立した 45 度方向の変形集中帯が生じた。これは、変形の初期段階に現れる可能性がある周期構造を初期不整が抑制したためだと考えられる。これに対し細長板の変形パターンを図 12.37~12.39 に示した。両側に初期不整を与えた場合にのみピーク後の $\epsilon \approx 0.4\%$ 前後に $n_d = 1$ になったものの、そこを除けば常に $n_d = 0$ だった。これは、両側初期不整は x_3 方向の対称性をまだ残しているため初期不整が無い状況にやや近くなり、そのため周期的な変形が少しかつたからだと推測される。片側および対角に初期不整を与えた場合には接線剛性行列の対角項に負の値は発生しなかった。これは図 12.37, 12.39 にあるように周期的な変形が初期不整によって抑制されたからだと考えられる。最終的に $\epsilon = 2.5\%$ に達した状態の変形図は初期不整の無い場合とほぼ同様だ。ただ最終状態までに生じた相当塑性ひずみは、初期不整による変形の集中による累積の分だけかなり大きくなっている。

平面ひずみ状態の圧縮： 強制変位の向きを x_1 の負の方向に変更して圧縮する。この場合も図 12.40 に示したように小さい方の寸法 h で支配された周期構造が発生する。しかし引張とは異なり、異なる周期分布が次々に現れることは無かった。四角板では接線剛性行列の対角項はすべて正だが、細長板では周期分布状態で $n_d = 1$ になる状況が発生した。最終的に $\epsilon = 2.5\%$ の変形状態はそれぞれがほぼ同様になり、引張の場合と同様の明確な変形集中帯が発生し、それに伴う絞りも生じた。また図 12.41 に示したように引張の場合よりも巨視的軟化の程度は小さかった。

Jaumann 速度を用いた細長板の変形状態が図 12.42 だが、この場合はピーク付近で異なる周期モードが次々に発生したが、その振幅はそれほど大きくはない。また図 12.40 (g) と図 12.42 (d) の比較からわかるように、Jaumann 速度を用いた場合には短い周期パターンが現れる。これは接線剛性行列の対角項の負の個数 n_d が Truesdell 応力速度を用いた場合よりも多いことに対応していると考えられる。相当塑性ひずみは Truesdell 応力速度を用いた場合の方が大きい、これはそのモデルの方がせん断抵抗が比較的小さいからだと推測される。同じ

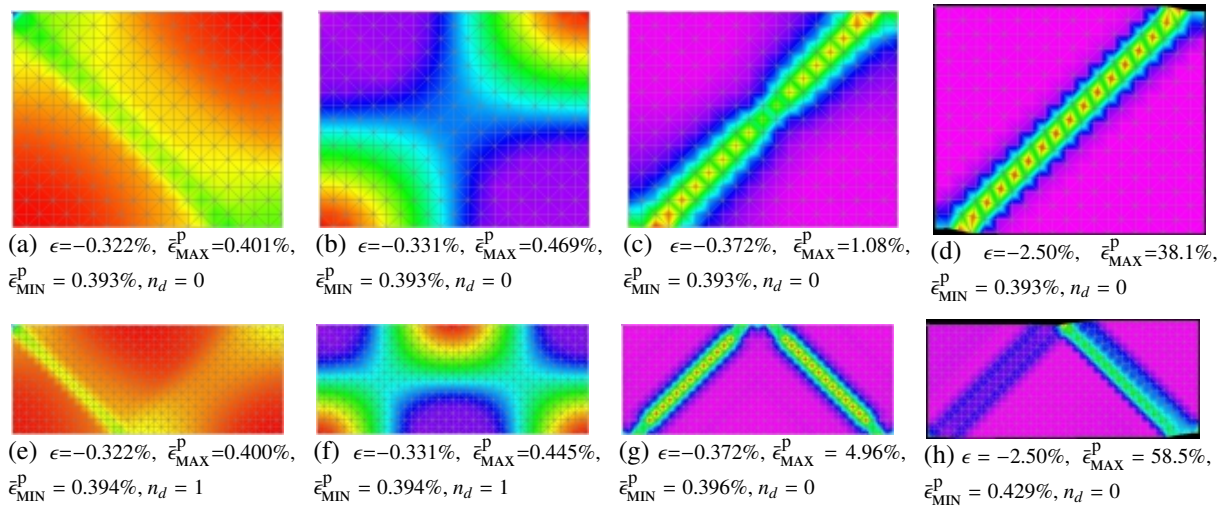


図 12.40 平面ひずみ状態の圧縮

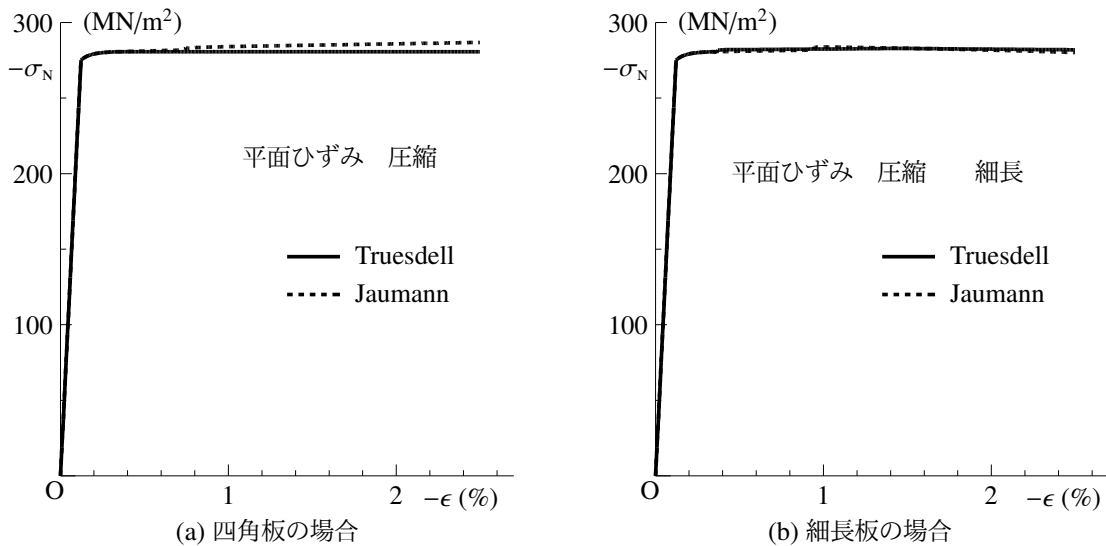


図 12.41 平面ひずみ状態の圧縮

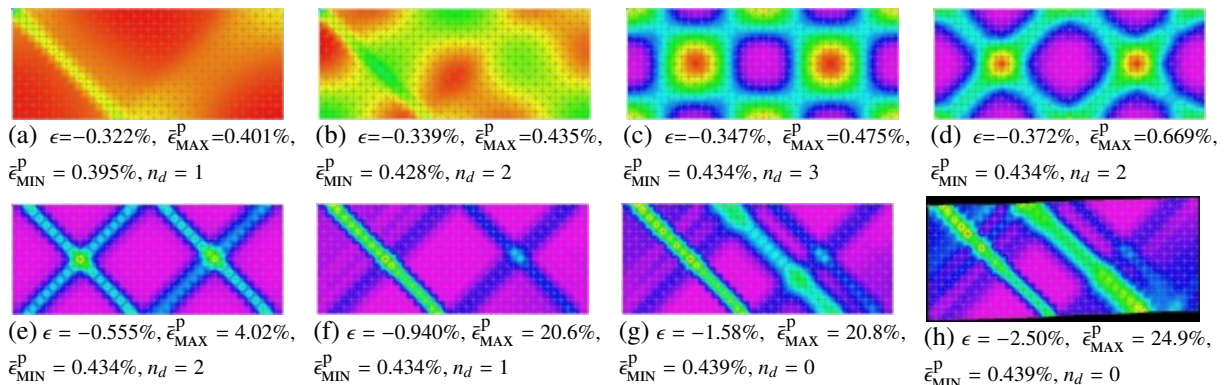


図 12.42 Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合の平面ひずみ状態の圧縮

理由で、最終的に $\epsilon = 2.5\%$ に至った状態では Jaumann 速度を用いた場合の方に短い周期パターンが複数現れている。これも用いる応力速度の違いだけが原因であると断定できないが、巨視的な挙動がほぼ同じであっても、構成モデルの違いによって微視的な変形パターン等には顕著な差異が生じることを示している。

平面応力状態の引張： 平滑板の引張試験をシミュレーションするために、平面応力状態で引張る。四角板の場合は図 12.43 に示したように $\epsilon = 5\%$ までには絞りも現れず、ほぼ一樣な変形状態でやや周期性が見られる⁴⁷だけである。これは Jaumann 速度を用いた場合もほとんど同じだった。そのあと、Truesdell 応力速度を用いた場合は $\epsilon = 15\%$ を越えたくらいから、また Jaumann 速度を用いた場合は $\epsilon = 20\%$ を越えたくらいからようやく変形の集中と絞りが生じ始める。しかし後述する細長板とは異なり x_3 方向にも振幅が非常に小さい周期性を持つだけでほぼ一樣な状態を維持し、かなり大きな変形を与えないと絞りが発生しなかった。

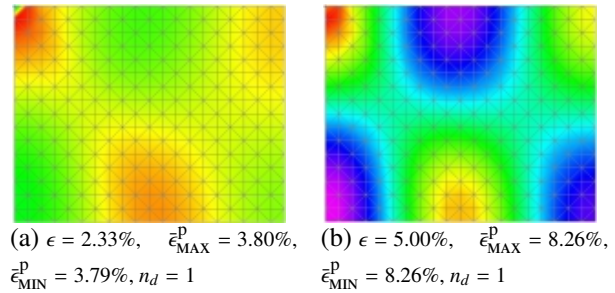


図 12.43 平面応力状態のまっすぐな四角板

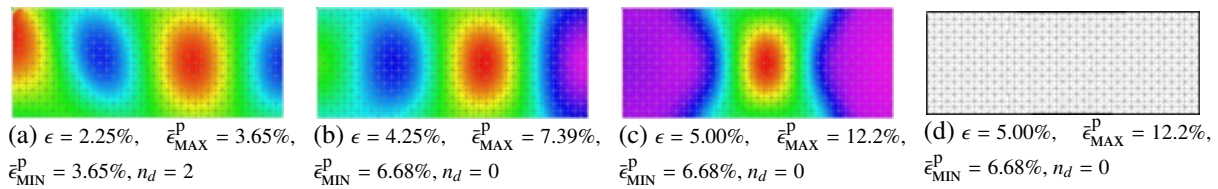


図 12.44 Truesdell 応力速度を用いた場合の板状引張試験片の引張

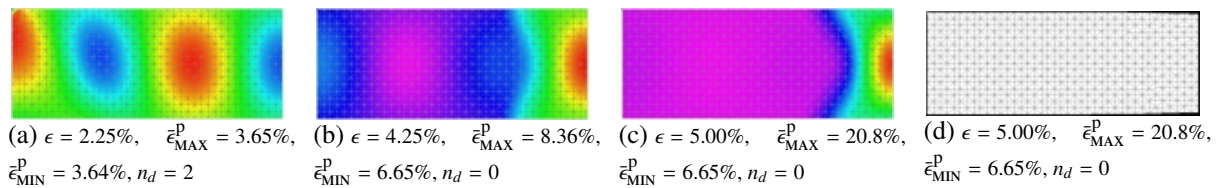


図 12.45 Cauchy 応力の Jaumann 速度を用いた場合の板状引張試験片の引張

これに対し細長板の場合は図 12.44, 12.45 に示したように周期的な変形が x_1 方向だけに顕著になり、 $\epsilon = 5\%$ で変形の集中と絞りが顕著になった。ただ変形集中帯は発生せず、絞りはせん断変形によってではなく、ちょうど Poisson 効果による挙動のような滑らかな変形として現れている。図 12.46 に応力ひずみ関係を示したが、平面応力状態は 3 次元状態と同じなので、式 (11.28) の $\sigma_Y = \sqrt{3} \tau_Y = 242 \text{ MN/m}^2$ で初期降伏する。また平面ひずみ状態とは異なり初期降伏時がピークになりその後はすぐに軟化する。また Truesdell 応力速度を用いた場合は $\epsilon = 5\%$ の段階で板中央部の変形が大きくなり、前述のようにユニットセル的捉え方をすると x_1 方向に l の周期で大きな変形が発生している。一方 Jaumann 速度を用いた場合は板の右端の変形が大きくなり、これも前述のように捉えると x_1 方向の $2l$ 周期で大きな変形が発生している。このため図 12.46 に示したように ϵ が 4% あたりから 2 種類の構成則による応答の間に若干の差が生じ、Truesdell 応力速度を用いた場合の方がやや剛な挙動をする。これは前述の平面ひずみ状態の場合とは逆である。

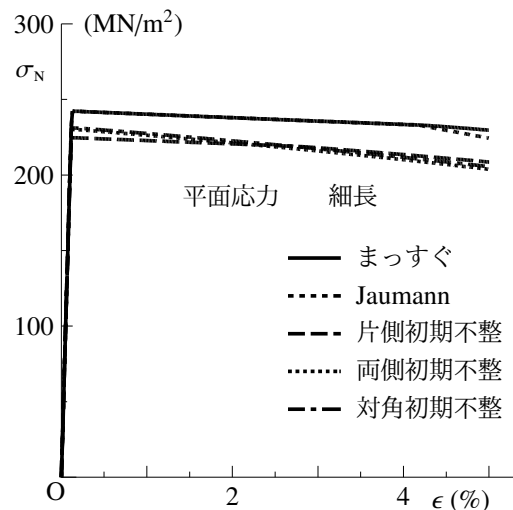


図 12.46 平面応力状態の細長板の引張

⁴⁷ ポストプロセッサに騙されている可能性もあるが。

また図 12.47 からわかるように初期不整も結果にかなり影響を及ぼしている。まず図 12.47 の両側あるいは対角に初期不整がある場合には、片側だけの初期不整の場合よりも変形の集中度（最大値と最小値の差）が高くなっており、変形の発達の方が初期不整から大きな影響を受けている。ただ変形集中帯は観察されず、絞りは滑らかな変形として生じている。また初期不整の位置によっても変形パターンが異なる。ただし図 12.46 の巨視的な挙動にはその違いが顕著ではなかったことから、微視的な挙動と巨視的な挙動の両方に着目して数値解析を実行する必要性・重要性を示唆している。

さて、図 12.44 (c) の $\epsilon = 5\%$ に達した状態では

巨視的には $\sigma_{11} \approx 240 \text{ MN/m}^2$ の一軸応力状態にあるが、絞りによって断面が小さくなった箇所では x_3 方向の中央部では塑性ひずみつまりせん断変形が卓越していることから、実際の板状引張試験片ではその転位密度が高くなっていき、界面や結晶内部にはいろいろな欠陥がその中央部で比較的多く発生すると予想される。そこで図 12.48 には平均応力 σ_{AVE} を、 85 MN/m^2 以上を赤で、 75 MN/m^2 以下を紫でコンター図示したが、せん断変形が大きくなった中央の領域の平均応力も周辺に比べると比較的高くなっていることがわかる。したがって多数発生し始めた欠陥の成長や結合も生じ易く、ポイドも発生し始めている可能性も高いことが予想される。したがって延性破壊は試験片の x_3 方向の中央部から発生し始めると推測できる。

弾塑性解析では用いる歪弾性モデルの違いが原因で生じる差はほとんど無いと考えられている。しかし以上の数値結果は、履歴依存の弾塑性体の数値解析では初期不整やちよとした数値的な誤差によって、その変形パターンの現れ方や破断箇所等が用いる歪弾性によっても異なることを示している。ただし、巨視的な挙動にはそれほど顕著な差異は現れないことにも注意すべきだろう。つまり有限変形の枠組で数値解析する場合には、巨視的な挙動と微視的な挙動の両方について複数の構成則を用いて数値シミュレーションする必要性を示唆している。

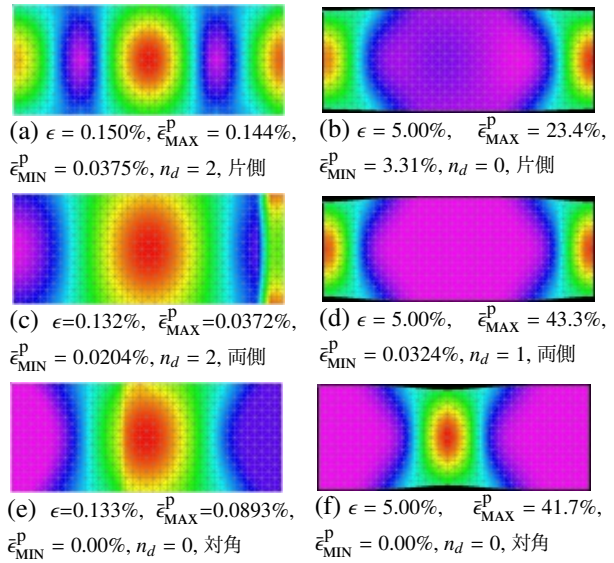


図 12.47 初期不整の影響

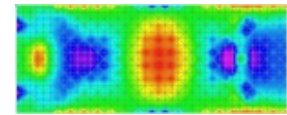


図 12.48 平均応力分布

(3) 平滑板の引張試験で現れる Lüders 帯は一体何?

膨張の無い特性曲線としての α, β すべり線の向き ϕ を求める Hill [38] の規準式 (11.188) は流れ則のみを考慮した不完全な基準ではあるが、それに前節で求められた数値解を代入してせん断帯の向きについて考察しておく。まず式 (11.188) を有限変形の枠組に拡張すると、例えば x_1 - x_3 面では

$$d_{11} \cos^2 \phi + 2d_{13} \sin \phi \cos \phi + d_{13} \sin^2 \phi = 0, \quad d_{11} \sin^2 \phi - 2d_{13} \sin \phi \cos \phi + d_{13} \cos^2 \phi = 0 \quad (12.248a, b)$$

と表される。孤立した局所変形が顕著になる载荷段階では弾性成分は塑性変形に比べて無視できて上式は

$$d_{11}^p \cos^2 \phi + 2d_{13}^p \sin \phi \cos \phi + d_{13}^p \sin^2 \phi = 0, \quad d_{11}^p \sin^2 \phi - 2d_{13}^p \sin \phi \cos \phi + d_{13}^p \cos^2 \phi = 0 \quad (12.249a, b)$$

と近似できる。これに Prandtl-Reuss の流れ則の式 (12.168) を代入した

$$\sigma'_{11} \cos^2 \phi + 2\sigma'_{13} \sin \phi \cos \phi + \sigma'_{33} \sin^2 \phi = 0, \quad \sigma'_{11} \sin^2 \phi - 2\sigma'_{13} \sin \phi \cos \phi + \sigma'_{33} \cos^2 \phi = 0 \quad (12.250a, b)$$

に数値解析で求められた応力 σ を代入すれば, Prandtl-Reuss の流れ則以外の構成モデルの影響も少しは考慮できるかもしれない。そこで, 平面ひずみ状態の引張の場合の数値解を上式 (12.250) に代入してその局所帯の向きを求めると, 降伏直前には Hill の解と同様 (数値解の 1.41 を $\sqrt{2}$ とみなした)

$$x_1-x_3 \text{ 面: } \tan \phi \approx \pm \sqrt{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x_1-x_2 \text{ 面: } \tan \phi \approx 0, \pm \infty \quad (12.251a, b)$$

だったものが変形に伴って変化していき, ほぼ一様な塑性状態の段階には

$$x_1-x_3 \text{ 面: } \tan \phi \approx \pm 1, \quad x_1-x_2 \text{ 面: } \tan \phi = \text{種々の値} \quad (12.252a, b)$$

になった。つまり, 少なくとも x_1-x_3 面上のすべり線は x_1 方向から ± 45 度方向に伸びることがわかる。これは圧縮の場合も同様だった。したがって, 平面ひずみ状態では x_1-x_3 面上で

- Hill の規準で求められる微視的な α, β すべり線の向きは x_1 方向から ± 45 度方向である。
- 支配方程式の楕円性喪失という規準式 (12.206) による微視的なせん断帯の向きも, 平面ひずみ状態においては図 12.27 に示したように硬化係数が小さい場合にはほぼ ± 45 度方向である。
- 巨視的な応力場の最大せん断応力の向きとせん断帯の向きがほぼ同じになる。
- 本数値解析で観察される相当塑性ひずみの巨視的な集中帯もその ± 45 度方向に発展した。

という結論を得る。一般に Lüders 帯の向き ϕ は 50 度前後であると認識されている。これは上式 (12.251) の Hill の解と整合している。そして Asaro [4] も示しているように, これに加えてさらに結晶格子の向きに依存した局所すべり面等⁴⁸も同時に発生すると考えられる。ただ文献 [50] でこの Asaro のモデルを用いて得られた 2 次元状態のすべり線の向きも 44 度だった。

これに対し平面応力状態の引張の場合, つまり平滑板の引張試験に対する数値解の応力 σ の値を用いると, 降伏直前には x_1-x_3 および x_1-x_2 のどちらの面でも (数値解の 1.73 を $\sqrt{3}$ とみなした)

$$\tan \phi \approx \pm \sqrt{3}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad \phi \approx \pm 60 \text{度}, \pm 30 \text{度} \quad (12.253)$$

だったものが変形に伴って変化して, ほぼ一様な塑性状態の段階では (数値解の 1.41 を $\sqrt{2}$ とみなした)

$$\tan \phi \approx \pm \sqrt{2}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \phi \approx \pm 54.7 \text{度}, \pm 35.3 \text{度} \quad (12.254)$$

になった。つまり, すべり線方向は Hill が求めた向き [38] と同じになる。しかし数値解析結果には巨視的な変形集中帯は観察されなかったのだ。ということは, 鋼のような多結晶体の引張試験で観察される Lüders 帯の発生を予測するためには, 例えば Asaro のモデル [4] のような結晶特性を 3 次元の構成則に導入しておく必要があるのかもしれない・・・のかな。

硬化係数の影響: 以上ではかなり小さい硬化係数を用いて考察した。これを 100 倍の $H = 25 \text{ MN/m}^2$ にした場合, 平面ひずみ状態の巨視的な公称応力-工学ひずみ関係はまだ軟化を示すが, $\epsilon = 2.5\%$ に至った段階でようやく図 12.33 (c) 程度の軽い周期性を持つ変形パターンしか生じない。また多くの研究で便宜的に用いられる Young 率の $1/1000$ 程度に当たる $H = 250 \text{ MN/m}^2$ にすると, 巨視的な公称応力-工学ひずみ関係は硬化を示しほとんど均一な変形しか生じない。一方平面応力状態の場合は, $H = 25 \text{ MN/m}^2$ の場合は前節の $\epsilon = 2.5\%$ の状

⁴⁸ 結晶格子の特性としての稠密面であるすべり面や kink band・coarse slip band (CSB)・macroscopic slip band (MSB) 等があるが, 著者はその区別を理解していない。

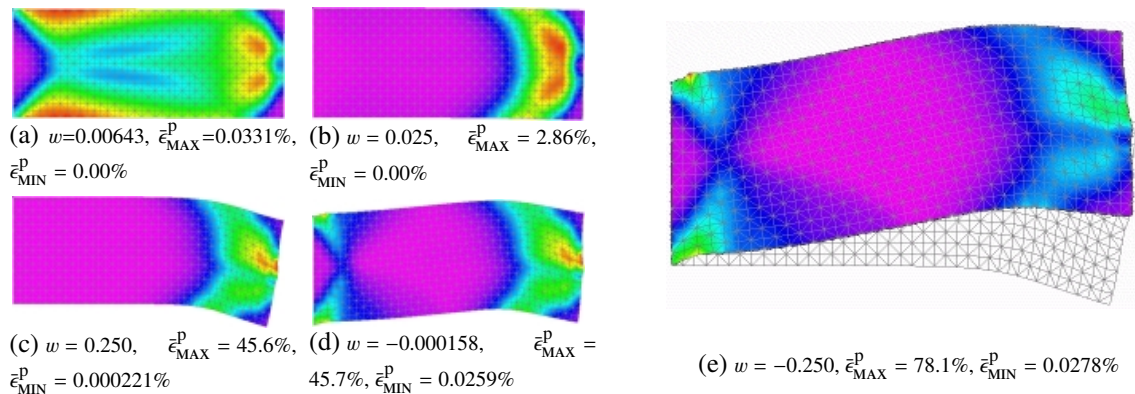


図 12.49 平面ひずみ状態の細長板の除荷と再載荷

態とほぼ同じような変形の集中が発生するが、 $H = 250 \text{ MN/m}^2$ にすると平面ひずみ状態の場合と同様ほとんど均一な変形しか生じない。これは図 12.27 から明らかなように、硬化係数が大きくなると変形集中帯の発生応力レベルがかなり大きくなることも整合する。じゃあ、なぜ鋼の引張試験片に Lüders 帯は発生するのだろう。構成則の問題か、さらなる 3 次元解析? が必要なのか・・・

(4) 逆向きの載荷で除荷を模擬する

片持ち梁のような、しかし非常に短い板の曲げをシミュレーションするために平面ひずみ状態の細長板の左端面の境界条件を変更し、すべての節点をすべての方向に固定する。そして、右端面の中央の 2 節点を強制的に x_3 方向に変位させることによって曲げるが、ある変形状態に至った時点で強制変位の向きを逆転させることによって除荷過程を含む応答を求める。結果の整理には平面ひずみ状態なので $\sigma_Y = 2\tau_Y$ として

$$w \equiv \frac{W}{h}, \quad p \equiv \frac{P}{P_Y}, \quad P_Y \equiv \frac{M_Y}{\ell}, \quad M_Y \equiv \frac{h^2 t}{6} \sigma_Y \quad (12.25a, b, c, d)$$

の諸量を用いたが、 W は右端表面中央 $x_1 = \ell, x_3 = h/2$ の $x_2 = 0, t$ にある 2 節点に与えた x_3 方向変位で、 P はその 2 節点の x_3 の負方向の反力の合計である。

たわみが $w \approx 0.0055$ くらいに達するまでは固定した左端側の上下面の応力 σ_{11} が大きくなって、そこがまず降伏するが、この図 12.49 (a) に至るあたりから荷重点に近い所にも大きなせん断変形が偏在し始める。実はその原因は小さい硬化係数なのだが、それについては後述する。その結果、それ以降は対象の右半分にのみ大きな塑性変形が集中して $w = 0.25$ に至る。そのあと逆向きに強制変位を与えるが、右半分に生じた大きな塑性変形は硬化のために元に戻るような変形は比較的小さく留まり、それに伴って、今度は対象の左半分の方に大きな塑性変形が拡がり始める。最終的に $w = -0.25$ に至った状態を $w = 0.25$ の状態と比較したのが図 12.49 (e) である。針金を思い切り曲げて塑性変形を導入（冷間加工）すると、どんなに頑張っても元のまっすぐな状態には戻せないことを再現したような数値結果になっている。図 12.50 には荷重変位関係を示した。正の曲げでは p が 1 に達するレベルまで高まるが、曲げが負方向に変わったあとは、それまで除荷していた左半分の領域の降伏が主に発達することから、逆向きの荷重 p は -1 に達する前に軟化を始めている。つまり、最初の載荷時に降伏した領域と再載荷時に降伏した

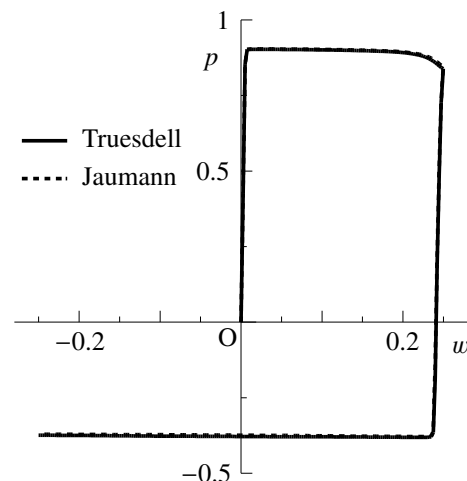


図 12.50 平面ひずみ状態の細長板の正負曲げ

領域と再載荷時に降伏した

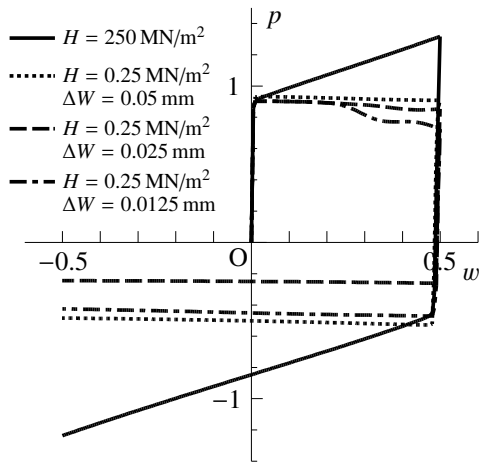


図 12.51 硬化係数と荷重変位関係

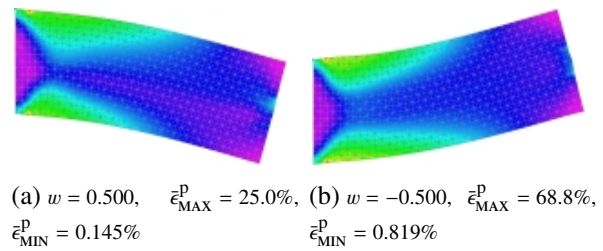


図 12.52 大きい硬化係数 $H = 250 \text{ MN/m}^2$

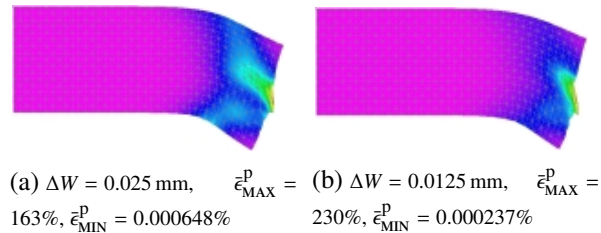


図 12.53 小さい硬化係数 $H = 0.25 \text{ MN/m}^2$; $w = 0.5$

領域とは異なっているわけだ。また用いる歪弾性の違いによる差異は顕著ではなく、接線剛性行列の対角項は常に正のままだった。

普通に板を曲げると固定している側に変形が集中するはずではないかと思った読者は少なくないのではないだろうか。著者も実はそうだった。そこで硬化係数を大きく $H = 250 \text{ MN/m}^2$ としてさらに大きく曲げてみると、図 12.51 の実線のような抵抗を示し、確かに塑性変形も想像した通りの分布図 12.52 になるのだ。等方硬化モデルなのに曲げでは移動硬化のような巨視的挙動を示して⁴⁹いるのは興味深い。このとき変位増分 ΔW は 0.05 mm 程度の増分で十分だった。そこで、これと同じ強制変位量を硬化係数の小さい前述のモデルに与えると、同じ図 12.51 に示したように、変位増分 ΔW の大きさによって異なる抵抗を示した。それに対応した塑性変形の分布を図 12.53 に示したが、相当塑性ひずみが非常に大きくなり、微視的には硬化材料であるにもかかわらず、変位増分を小さくすればするほど載荷位置周辺の要素だけに局所的な変形が集積している。構成則には速度依存性のような特性は含まれていないにもかかわらず軟化材料の数値解析で問題になるメッシュ依存性に似た増分依存性が生じている。これは一体？

(5) 3次元挙動の例

齊木功先生のお陰でようやく3次元挙動の数値解析プログラムができたので、薄板の横倒れ挙動を計算した。対象の左端の境界条件は前節の板曲げ問題と同じ片持ち状にしたが、こちらは平面応力状態と同じ境界条件にした上で、右端中央の $x_1 = l, x_2 = t, x_3 = h/2$ の1点のみを x_3 方向に強制変位させて、この板が x_1 - x_3 面外に倒れてねじれながら曲がる（横倒れる）挙動を調べた。ただし x_2 方向の要素はせいぜい2分割になっているため、2軸曲げや曲げねじり・そり変位の影響は十分には考慮されておらず、剛な結果になっているはずなので注意して欲しい。与える x_3 方向の強制変位量を W とし、その x_3 の負方向の反力を P とした上で、式 (12.255) の定義を用いて結果を整理する。ただし3次元状態なので $\sigma_Y = \sqrt{3}\tau_Y$ を用いている。載荷位置が $x_2 = h/2$ の x_1 - x_3 肉厚中心面に対して対称ではないことが実質的な初期不整になっているため、いわゆる分岐座屈のようなことは起きない。

⁴⁹ ひよっとするとプログラムにバグ有りか？一軸載荷の単純な除荷・再載荷では等方硬化挙動を確認してあるのだが。

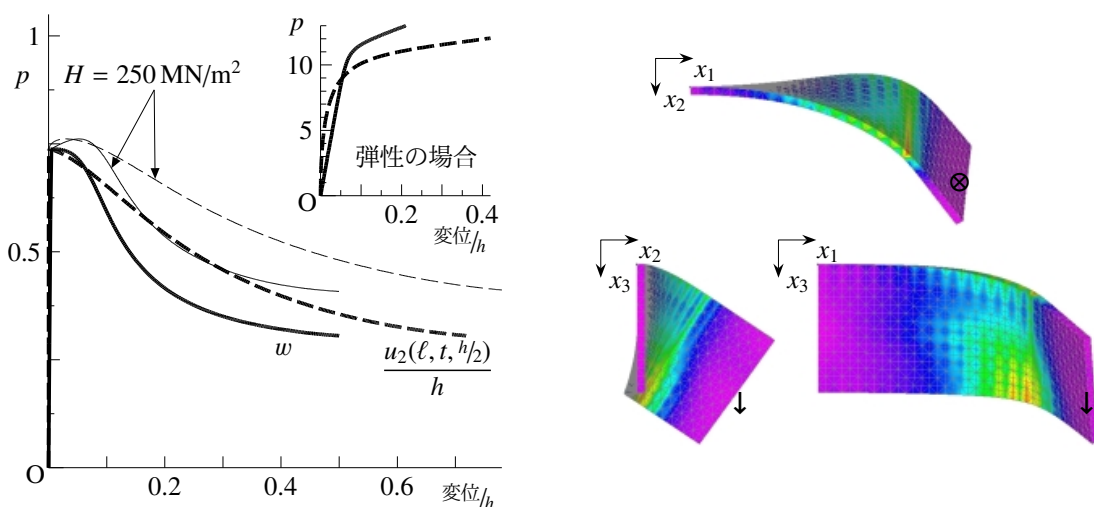


図 12.54 薄板の横倒れ挙動と $w = 0.5$ のときの变形と変位性状; $\bar{\epsilon}_{\text{MAX}}^p = 19.2\%$, $\bar{\epsilon}_{\text{MIN}}^p = 0.0255\%$

荷重変位関係と $w = 0.5$ に達したときの形状と相当塑性ひずみ分布を図 12.54 に示した。反力が $p = 1$ に達する前に横倒れが発生しており、左端の固定端で塑性モーメントに達する前に、図 12.55 に示したように板の中央部で塑性化が発生してその周辺へと発達する。また、対象を弾性体にした場合の同じ境界条件と要素分割による結果を図 12.54 のインセットに示したが、反力 p が 10 程度つまり $P \approx 65 \text{ kN}$ 程度が弾性横倒れ座屈荷重に相当し、その $1/10$ 程度の反力レベルで弾塑性体の横倒れが発生している。また弾性座屈の場合は座屈後に反力が単調増加することから安定な分岐座屈であるのに対し、弾塑性体の場合は横倒れのあと

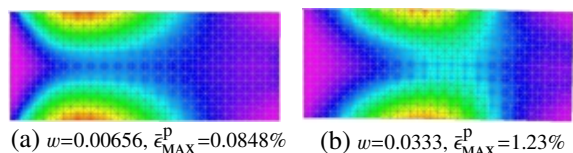


図 12.55 降伏直後の変形状況; $\bar{\epsilon}_{\text{MIN}}^p = 0\%$

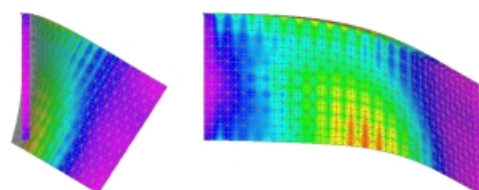


図 12.56 大きい硬化係数 $H = 250 \text{ MN/m}^2$, $w = 0.5$, $\bar{\epsilon}_{\text{MAX}}^p = 11.1\%$, $\bar{\epsilon}_{\text{MIN}}^p = 0.0621\%$

巨視的には軟化する。そこで硬化係数を大きくして $H = 250 \text{ MN/m}^2$ にした場合を細い曲線で示したが、初期降伏後に一旦反力は増加するもののすぐに軟化し始める。ただしその場合、図 12.56 に示したように大きな塑性変形領域は相対的に固定端側に偏る。なお接線剛性行列の対角項は常に正のままであり、それは、この巨視的軟化は塑性という材料特性が原因であって凸性を持つべき何らかのポテンシャルに基づく変分原理的な安定問題とは関係が無いからであろう。また用いる亜弾性の違いによる差異は顕著ではなかった。

こんな風にプリ・ポストプロセサのおかげで面白いようにすぐに結果を表示したり確認したりできる。これがあれば、どんどん面白い計算でも、多くのパラメトリックスタディでも、新しいテーマでも・・・と勉強できるはずなんだがなあ。と独り言。

第 IV 部

補足と蛇足



移設後の高麗橋と桜島



気仙沼大島大橋（仮称：気仙沼湾横断橋）2017年3月ヤードにて

付録 A

補講: 致命傷を負わないために

A.1 なぜ Hooke の法則を応力とひずみで表すのか

初めて Hooke の法則に触れるのは中学校だろうか高校だろうか。そのときはたいていは 1 本のバネに加えた力と伸び（つまり変位）との関係をバネ定数 k で結び付けている。おやっ? 力¹はともかく、変位だ。変形じゃない! と、変形できる物体の力学を学んだ人は疑問に思わないといけないかもしれない。

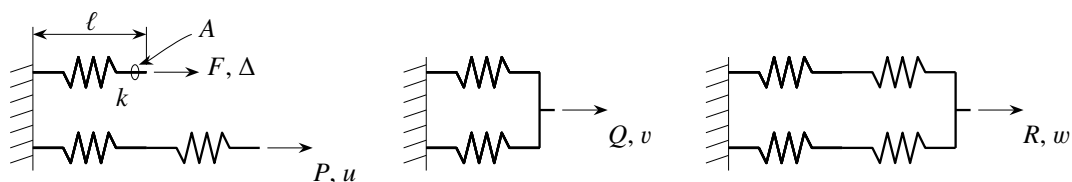


図 A.1 通常のバネ定数は材料定数か

まず図 A.1 の左上にあるように、バネの長さを l として断面積（ま、ここは曖昧に）を A として、力 F で引っ張って生じる伸びを Δ とすると

$$F = k \Delta \quad (\text{A.1})$$

が成り立つ。ではその下の図のように、同じバネを 2 本直列に並べて力 P で引っ張ろう。この場合は

$$u = 2 \frac{P}{k} \rightarrow P = k \frac{u}{2} \quad \text{あるいは} \quad P = \frac{k}{2} u \quad (\text{A.2a, b, c})$$

という関係を得る。つまり「みかけ上の弾性係数」が元のバネの係数の半分になっている。柔らかくなっているわけだ。同じ材料でできた構造なのに材料定数が異なるように見える。ということは k は材料定数じゃなく、構造の内部構造も含めた「みかけ上」のものに過ぎないということになる。次に、中央の図のように 2 本を並列に並べて Q で引っ張ると

$$Q = 2k v \quad (\text{A.3})$$

のように、バネ定数が 2 倍剛になっている。確かに複合材料の平均特性を求めるといった場合のように、その目的が明確な場合は除かないといけないが、以上の 3 式を Hooke の法則と呼ぶのはさすがにおかしいだろう。

では、以上の関係式を応力とひずみで表すことにしよう。この場合の応力は力を断面積（バネの並列本数）で割ったもので、ひずみは長さ（バネの直列本数）で割ったもので定義すればいい。この置き換えをすると順に

$$\frac{F}{A} = \frac{k l}{A} \frac{\Delta}{l}, \quad \frac{P}{A} = \frac{k l}{A} \frac{u}{2 l}, \quad \frac{Q}{2A} = \frac{k l}{A} \frac{v}{l} \quad (\text{A.4a, b, c})$$

¹ 力も外力じゃなく内力でないといけないはずだが、これは後述。

のように、まさに材料定数を $\frac{k\ell}{A}$ で定義できている。これこそがバネの Hooke の法則だ。そもそもこの $\frac{k\ell}{A}$ がバネの配置や本数に関係の無い材料定数であって、これが Young 率や体積弾性率等に相当していて、したがって式 (A.1) も

$$\frac{F}{A} = K \frac{\Delta}{\ell}, \quad K \equiv \frac{k\ell}{A} \quad (\text{A.5a, b})$$

と書き直しておくべきなのだ。そして高校までは逆に、 $\frac{KA}{\ell} = \frac{\text{材料特性} \times \text{並列本数}}{\text{直列本数}}$ という本数と構造に依存したパラメータでバネの抵抗則を表していたことになるのだ。念のために、図の一番右のように直列も並列も 2 重にしよう。この場合も簡単に算定できて

$$w = 2 \frac{R}{2} \frac{1}{k} \rightarrow \frac{R}{2A} = K \frac{w}{2\ell} \quad (\text{A.6a, b})$$

を得る。当たり前だろう。Hooke の法則は本来、連続体内の各物質点における弾性を定義した材料則・構成則だから、このバネの配置のような、微視構造ではない巨視的構造あるいは半巨視的構造の影響を含むものであってはならないはずだ。これが、Hooke の法則を応力とひずみで表す理由だ。弾塑性状態の構造解析ではよく巨視的な見かけ上の構成則を使わざるを得ない場合もあるが、これは、断面毎に、長さ毎に、その構成則が異なることには十分注意しないといけない。

A.2 熱ひずみは非弾性ひずみ

A.2.1 1次元の場合

熱ひずみは応力を発生させるだろうか。確かに、両端固定の棒を熱すると内部には圧縮の軸力が発生している。これはちょうど Hooke の法則のように、熱ひずみに比例した応力が発生しているのだろうか。応力ってそもそも何だろう。我々はこのあたりを、特に構造力学の講義ではきちんと教えていないかもしれない。だから学生も勉強不足のために、場合場合によって難しく考えて間違ったりしているように見える。

実は熱ひずみは非弾性ひずみであって、応力を発生させる弾性ひずみとはまるで違うのだ。理屈だけを 1次元で書いておこう。物体内にあるひずみ ϵ が生じたとき、対象は連続体なので孔が空いたり物体が重なったりしない。だから変位とは $\epsilon = \frac{du}{dx}$ のような関係が成立する。これに対し、熱ひずみや塑性ひずみは非弾性ひずみ ϵ^i と呼ばれ、例えば後者は連続体の中に孔やすべりを発生させるような変形に相当している。そのとき同時に弾性ひずみ ϵ^e が生じることによって、孔やすべりによる幾何学的（運動学的）な非適合性を埋め合わせようとする考えるのだ。つまり

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^i = \frac{du}{dx} \quad (\text{A.7})$$

という関係になる。そして Hooke の法則は、この弾性成分のみに対して定義される抵抗則で

$$\sigma = E\epsilon^e = E(\epsilon - \epsilon^i) \quad (\text{A.8})$$

のような抵抗力が発生するというものなのだ。 ϵ を総ひずみと呼び、これは式 (A.7) のような変位との関係を持っている適合ひずみである。ひずみを変位の微係数で表した式をひずみの定義と呼ぶが、場合によっては適合条件とも呼ぶことがあるが、それはそのひずみが適合性を持つからで、そのひずみに対応した変位が唯一に決定できる（離れたり重なったりしない、二値ではない）からだ。当然、物理モデルとしての定義から非弾性ひずみ ϵ^i は非適合だが、実は弾性ひずみ ϵ^e も非適合ひずみであることは覚えておいて欲しい。

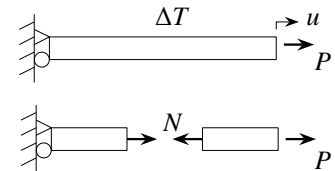


図 A.2 熱ひずみ

まず図 A.2 のように、外力 P が作用する棒全体の温度が ΔT だけ上昇したときの先端の変位 u を求めよう。まず軸の総ひずみは

$$\epsilon = \frac{u}{\ell} \quad (\text{A.9})$$

であることには誰も異論は無いだろう。そして熱ひずみは、熱膨張率を α とすると

$$\epsilon^i = \alpha \Delta T \quad (\text{A.10})$$

と算定できる。図 A.2 の下の図のように、軸力は外力とのつり合いから

$$N = P \quad (\text{A.11})$$

である。これを使って、さらに式 (A.8) に式 (A.9) (A.10) の二つのひずみ成分を代入すれば

$$\frac{P}{A} = \frac{N}{A} = \sigma = E \left(\frac{u}{\ell} - \alpha \Delta T \right) \quad (\text{A.12})$$

となるので、結局右端の変位は

$$u = \frac{P\ell}{EA} + \alpha\ell\Delta T \quad (\text{A.13})$$

のように求められる。第1項が外力 P による伸び変位で、第2項が熱膨張による変位だ。もし $P = 0$ なら第2項の熱膨張だけの伸びが発生するだけだ。もし $u = 0$ になるように右端も拘束されていれば、 $\Delta T > 0$ のとき

$$N = -EA\alpha\Delta T < 0 \quad (\text{A.14})$$

のように圧縮軸力が生じていることがわかる。棒は一切伸び縮みしていないのに、内部に軸力が生じていることから、熱ひずみと抵抗力の関係がいわゆる Hooke の法則ではないことがわかるはずだ。

さらに図 A.3 のような不静定構造の場合を解いてみると、熱ひずみの挙動がよく理解できるかもしれない。材料や寸法の異なる2本の棒をつないで、

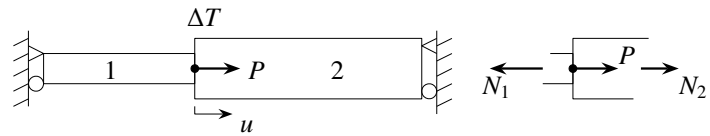


図 A.3 不静定構造の熱ひずみ

接合点に集中外力 P を与えると同時に全体に ΔT の温度変化を与える。接合点の右向きの変位を u とすると、左の部材では

$$\epsilon_1 = \frac{u}{\ell_1}, \quad \epsilon_1^i = \alpha_1 \Delta T, \quad \sigma_1 = E_1 (\epsilon_1 - \epsilon_1^i) = E_1 \left(\frac{u}{\ell_1} - \alpha_1 \Delta T \right) \quad (\text{A.15a, b, c})$$

右の部材では

$$\epsilon_2 = -\frac{u}{\ell_2}, \quad \epsilon_2^i = \alpha_2 \Delta T, \quad \sigma_2 = E_2 (\epsilon_2 - \epsilon_2^i) = E_2 \left(-\frac{u}{\ell_2} - \alpha_2 \Delta T \right) \quad (\text{A.16a, b, c})$$

となる。一方、図 A.3 の右の図から、接合点における力のつり合いは

$$P + N_2 - N_1 = 0 \quad (\text{A.17})$$

つまり

$$P = A_1\sigma_1 - A_2\sigma_2 \quad (\text{A.18})$$

なので、これに上の式 (A.15c) (A.16c) を代入して整理すると

$$u = \left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2} \right)^{-1} \{ P + (\alpha_1 E_1 A_1 - \alpha_2 E_2 A_2) \Delta T \} \quad (\text{A.19})$$

を得る。特別な場合として、 $P = 0$ で $E_1 = E_2, A_1 = A_2, \ell_1 = \ell_2$ の場合は

$$u = \frac{1}{2}\ell(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta T \quad (\text{A.20})$$

となるので、 $\Delta T > 0$ の場合には $\alpha_1 > \alpha_2$ のときには $u > 0$ になって、接合点が右に変位することがわかり、確かにその通りだろう。また式 (A.19) を式 (A.15c) (A.16c) に代入し戻せば、それぞれの棒の応力が、 $P = 0, \Delta T > 0$ の場合には

$$\sigma_1 = -\left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2}\right)^{-1} E_1 E_2 A_2 \left(\frac{\alpha_1}{\ell_2} + \frac{\alpha_2}{\ell_1}\right) \Delta T = -\left(\frac{\ell_1}{E_1} + \frac{\ell_2 A_1}{E_2 A_2}\right)^{-1} (\alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2) \Delta T < 0, \quad (\text{A.21a})$$

$$\sigma_2 = -\left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2}\right)^{-1} E_1 E_2 A_1 \left(\frac{\alpha_1}{\ell_2} + \frac{\alpha_2}{\ell_1}\right) \Delta T = -\left(\frac{\ell_2}{E_2} + \frac{\ell_1 A_2}{E_1 A_1}\right)^{-1} (\alpha_1 \ell_1 + \alpha_2 \ell_2) \Delta T < 0 \quad (\text{A.21b})$$

のように計算でき、どちらも圧縮であることがわかる。また $\Delta T = 0, P > 0$ の場合は

$$u = \left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2}\right)^{-1} P, \quad \sigma_1 = E_1 \left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2}\right)^{-1} \frac{P}{\ell_1} > 0, \quad \sigma_2 = -E_2 \left(\frac{E_1 A_1}{\ell_1} + \frac{E_2 A_2}{\ell_2}\right)^{-1} \frac{P}{\ell_2} < 0 \quad (\text{A.22a, b, c})$$

を得る。2本の棒の寸法と材料が同じなら $\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{P}{2A}, N_1 = -N_2 = \frac{P}{2}$ のように、外力の半分ずつに抵抗している。これも当たり前の結果だ。

ところで、ではこの棒は側方にはどのくらい変形が生じているのだろうか。どこにもそれを規定する条件が無い。だって1次元の定式化だから。これについては次節で求めてみる。

A.2.2 3次元の場合

所有している教科書類を眺めてみると、熱ひずみの3次元状態における取り扱いをちゃんと非弾性ひずみとして説明しているものが少ないように感じる。文献 [61] を参照して少し書いておく。まず熱ひずみは体積膨張成分なので、Hooke の法則のうちの等方成分に関する式 (3.44) を

$$\sigma_{\text{AVE}} = K (\epsilon_{kk} - \beta \Delta T) \quad (\text{A.23})$$

と変更すればいい。ここに β は熱による体積膨張係数なので、体積変形が ϵ_{kk} であることを踏まえれば、線膨張係数の3倍の

$$\beta \equiv 3\alpha \quad (\text{A.24})$$

で与えられる。偏差成分同士のせん断の構成則には熱は影響しないので式 (3.45) のままである。この式 (3.45) と式 (A.23) から、応力と総ひずみの関係を求めると

$$\sigma_{ij} = 2G \epsilon_{ij} + \left(K - \frac{2G}{3}\right) \delta_{ij} \epsilon_{kk} - \beta K \delta_{ij} \Delta T \quad (\text{A.25})$$

となる。右辺の最初の2項は式 (3.46) と同じであり、第3項が熱影響成分である。

簡単な例として、右図のように円柱を一様変形ができるように支えた上で、全体の温度を ΔT だけ変化させたときの長手方向の応力と側方膨張量を求めてみる。長手方向を x_1 軸にしておくと、問題の設定からせん断変形は生じず

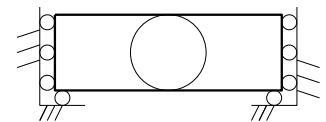


図 A.4 円柱の側方膨張量

$$\sigma_{22} = 0, \quad \sigma_{33} = 0, \quad \epsilon_{11} = 0, \quad \epsilon \equiv \epsilon_{22} = \epsilon_{33}$$

なので、式 (A.25) から

$$\sigma_{11} = \left(K - \frac{2G}{3}\right) 2\epsilon - \beta K \Delta T, \quad 0 = 2G \epsilon + \left(K - \frac{2G}{3}\right) 2\epsilon - \beta K \Delta T \quad (\text{A.26})$$

が成立する。これを解くことによって、 $\Delta T > 0$ の場合の長手方向の応力は

$$\sigma_{11} = -\frac{1}{3} E \beta \Delta T = -E \alpha \Delta T < 0 \quad (\text{A.27})$$

のように、前節と同じ結果を得る。一方側方膨張量も

$$\varepsilon = \frac{1}{3} (1 + \nu) \beta \Delta T = (1 + \nu) \alpha \Delta T > 0 \quad (\text{A.28})$$

と求められる。

A.3 内力と外力

A.3.1 内力って何だ

ここは、秋田大学の後藤文彦先生のブログ等に触発されて書いたものだ。図 A.5 のように左端を固定された棒の右端を P で引っ張る。さて左端の反力 Q はいくつになるか。これを解くには棒の巨視的な力のつり合いをとればいから

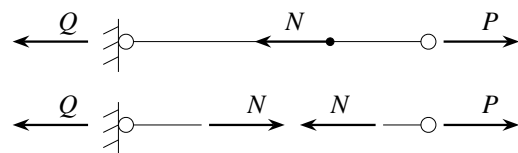


図 A.5 外力と内力

$$P - Q = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = P \quad (\text{A.29a, b})$$

のように求められる。単に作用反作用の定理の結果である。では、この棒はどのくらいの大きさの力で抵抗しているかと質問すると、数名の学生が「両方から P で引っ張られているから $2P$ で抵抗している」と答える。本当か。抵抗力は、連続体力学（材料力学・構造力学）では内力と分類される。内部の力なので、図 A.5 の上の図のように棒の途中に生じているのが軸力だという図が描かれている教科書等がある。さあ、この軸力 N は引張か圧縮か。左端から観たら圧縮のように感じるが、右端からこの矢印を観たら引張のようだ。そもそもどこに生じている抵抗力なのか。こういう図だと何も本質的なことが見えてこないのだ。

大事なのは、内力を可視化するには物体内部に仮想的な表面（断面）を設定して、その面に生じた力を矢印で表す必要があるということだ。これを実行したのが図 A.5 の下の図である。棒を途中で切断して（この例の場合は内力は一樣なので、どの位置で切断しても同じ）、その切断面に引張正（応力の正の向き）の方向に矢印を描いて軸力としなければならない。すると、切断面より左の区間あるいは右の区間でつり合いをとれば、軸力は $N = P$ になっていることがわかる。つまり、この棒は $2P$ ではなく P で抵抗しているのだ。これがわからない人は勉強不足だよ。

A.3.2 内力の可視化

勉強不足の学生が内力の扱い方を間違える面白い例を一つ示しておこう。図 A.6 の一番左に示した図のように、長さ ℓ の梁と柱でできたラーメンで、梁にヒンジがある系である。これは実は静定系なのでつり合い式だけで支点反力を求められるはずだ。ところが反力は図示したように四つあるが、力のつり合い式は上下方向と左右方向の二つ、モーメントのつり合い式が一つの、合計三つで

$$V_1 + V_2 - P = 0, \quad H_1 + H_2 + P = 0, \quad \ell P + \frac{\ell}{3} P - \ell V_2 = 0 \quad (\text{A.30a, b, c})$$

しか無い。おやっ、これは解けないぞ。と思ったら、梁にヒンジが挿入してあった。ヒンジ部はモーメントに抵抗できないから、その断面には曲げモーメントは発生しないという条件がもう一つ設定できる。勉強不足の学生でもそのくらいはわかったとしよう。

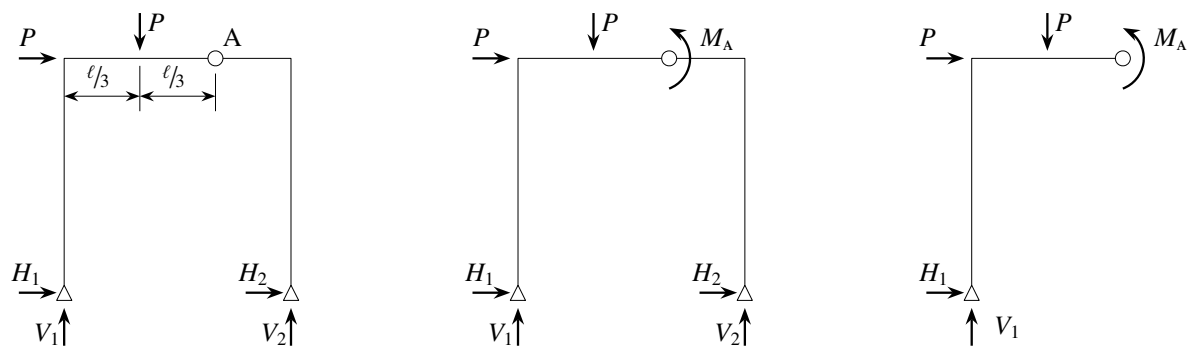


図 A.6 静定ラーメン

ところが、その曲げモーメント M_A を図 A.6 の中央の図のように、断面を切断せずに点 A の付近にいい加減な矢印で書いてしまう学生がいるらしいのだ。そうした上で点 A 回りのモーメントのつり合いを考えようとするのだが、そのときこの図のような構造全体のモーメントのつり合い式を求めてから、その M_A をゼロにする条件を求めようとするのである。つまり

$$M_A = \frac{2}{3}\ell V_1 - \frac{\ell}{3}P - \ell H_1 - \ell H_2 - \frac{\ell}{3}V_2 = 0 \tag{A.31}$$

のように、その条件式を求めるのだ。

ようやく四つの未知の支点反力に対して、式 (A.30) (A.31) の四つの条件式が得られたから、それを 4 行の連立方程式にしたときの係数行列を求めると、もちろんそれは特異になって解は得られない。当たり前である。なぜならヒンジ部の条件式 (A.31) は巨視的なモーメントのつり合いを点 A 回りでとっただけだからだ。あるいは式 (A.30a) (A.30c) から V_1, V_2 を求めて式 (A.31) に代入すると、それは $H_1 + H_2 + P = 0$ のように式 (A.30b) と一致するのだ。これでは答は求められない。

ヒンジ部の曲げモーメント M_A は内力だから、図 A.6 の一番右に示した図のように断面 A で切断した上で、正の向きに可視化しないとイケないのである。この切断面より左の区間でモーメントのつり合いをとって M_A をゼロにすると

$$M_A = \frac{2}{3}\ell V_1 - \frac{\ell}{3}P - \ell H_1 = 0 \tag{A.32}$$

になる。これと式 (A.30) を連立させると、最終的に

$$V_1 = -\frac{1}{3}P, \quad H_1 = -\frac{5}{9}P, \quad V_2 = \frac{4}{3}P, \quad H_2 = -\frac{4}{9}P \tag{A.33a, b, c, d}$$

のように求めることができる。図 A.7 には曲げモーメント図を示した。

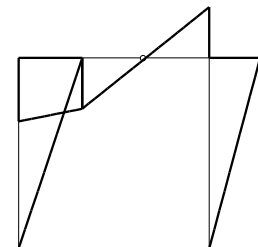


図 A.7 曲げモーメント図

A.4 トラスは軸力だけで抵抗する

図 A.8 のような静定トラスの支点反力を求めよう。何も考えずに水平・鉛直方向の反力を想定して図のような記号で表すと、力のつり合い式とモーメントのつり合い式が

$$V_1 + V_2 = P, \quad H_1 + H_2 = 0, \quad \frac{\ell\sqrt{3}}{2}H_1 + \frac{\ell}{2}P = 0 \tag{A.34a, b, c}$$

となるから、明らかに条件式が一つ足りない。解けない。なぜ。それは勉強不足だから。トラスの 1 部材は軸力だけでしか抵抗できないことを忘れてる。曲げやせん断では抵抗しないのだ。ということは、例えば図 A.8 の斜めの部材の支点反力は、その部材の斜め方向にしか生じないということを意味する。それを理解していない人が反力を想定したから答が出ないわけだ。

そこで今度は下の支点反力を部材方向に変更して Q_2 としてみよう。ただし、考え方が正しいかどうかを確かめるために、上の支点反力の鉛直方向は敢えて残しておく。するとつり合い式が

$$V_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}Q_2 = P, \quad H_1 + \frac{1}{2}Q_2 = 0, \quad \frac{\ell\sqrt{3}}{2}H_1 + \frac{\ell}{2}P = 0 \quad (\text{A.35a, b, c})$$

となるから、右から順に解いて

$$H_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}P, \quad Q_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}P, \quad V_1 = 0 \quad (\text{A.36a, b, c})$$

を得る。見事に V_1 はゼロになっている。つまり上の水平部材の支点反力もその部材方向にしか生じないことがわかる。

軸力も求めよう。軸力は棒の途中の断面の部材方向にしか生じておらず、軸方向には一様なので、図 A.10 のようにある断面で切断しよう。すると、この切断面よりも右の区間でつり合いをとると

$$N_1 + \frac{1}{2}N_2 = 0, \quad P + \frac{\sqrt{3}}{2}N_2 = 0 \quad (\text{A.37a, b})$$

だから、軸力は

$$N_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}P, \quad N_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}P \quad (\text{A.38a, b})$$

のように求められる。水平部材は引張状態で、斜めの部材は圧縮状態だ。あとは切断面よりも左の区間で反力と内力のつり合いを解けば

$$Q_1 = -N_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}P, \quad Q_2 = -N_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}P \quad (\text{A.39a, b})$$

のように、上で得た答と同じ反力の結果を得る。

内力を可視化するときには、外力の状況から容易に引張か圧縮が予想できる場合であっても必ず応力正の方向に矢印を書くのが無難だ。そして、正の断面と負の断面で軸力やせん断力・曲げモーメント等の内力の正の向きが逆になることには注意しないとイケない。ただし反力および外力は自分で好きなように定義していい。その定義した方向が正なわけだ。通常、外力は座標の正方向、集中モーメントは右ねじ正の方向を正とするが、この例のように特に座標軸を定義していない場合は自由だ。

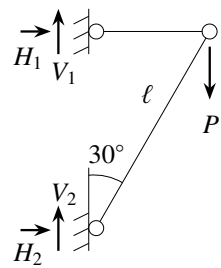


図 A.8 静定トラス

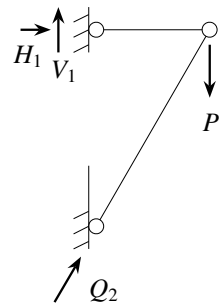


図 A.9 部材方向の反力

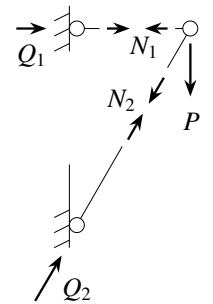


図 A.10 内力と外力

A.5 分布外力と等価な集中外力の落とし穴

実は分布外力もちゃんと理解しているとは限らないような答案がときどきある。どうも、本質的なことを教える前に、あるいは教えないまま、全スパンに一様に分布する場合や三角形分布だけを講義中に扱うからではないかと疑っている。

そこで例えば図 A.11 のように

$$q(x) = q_0 \sin \frac{\pi x}{3\ell} \quad (\text{A.40})$$

のような分布外力が載った単純梁の両端の支点反力は、まず力のつり合いから

$$R_a + R_b = \int_0^\ell q(x) dx = q_0 \int_0^\ell \sin \frac{\pi x}{3\ell} dx = \frac{3\ell}{2\pi} q_0 \quad (\text{A.41})$$

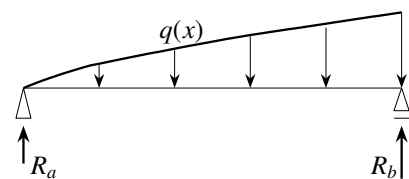


図 A.11 任意の分布外力

という関係が成立し、左支点回りのモーメントのつり合いから

$$\ell R_b = \int_0^\ell x q(x) dx = q_0 \int_0^\ell x \sin \frac{\pi x}{3\ell} dx = \frac{9\sqrt{3} - 3\pi}{2\pi^2} q_0 \ell^2 \quad (\text{A.42})$$

が成立する。この2式から結局

$$R_a = \frac{3(2\pi - 3\sqrt{3})}{2\pi^2} q_0 \ell, \quad R_b = \frac{9\sqrt{3} - 3\pi}{2\pi^2} q_0 \ell \quad (\text{A.43a, b})$$

を得る。このように、きちんと積分計算をしないといけないことをまず学んでおくべきである。

ところで式 (A.41) の右辺はこの分布荷重を図示したときの分布図形の面積に等しい。そして式 (A.42) の右辺は、その図形の左端回りの1次モーメントだ。したがって、この二つの比は、この図形の重心までの左端からの距離になっていることがわかる。つまり

$$F_q \equiv \int_0^\ell q(x) dx \quad (\text{A.44})$$

と置くと、この図形の左端からの重心までの距離 x_G は

$$x_G \equiv \frac{1}{F_q} \int_0^\ell x q(x) dx \quad (\text{A.45})$$

で求められることになる。つまりこれは、図 A.12 のように巨視的な検討をする場合には、この分布外力を右図のような等価な集中外力に置き換えられることを意味する。この定義を使えば、この梁全体の力のつり合い式と左端回りのモーメントのつり合い式は

$$R_a + R_b = F_q, \quad \ell R_b = x_G F_q \quad (\text{A.46a, b})$$

と書くこともできる。

しかし、この理解が不十分な学生が次のような間違いをすることがある。例えば図 A.13 のように

$$q(x) = q_0 \frac{x}{\ell} \quad (\text{A.47})$$

の場合は、その右の図に示したように $F_q = q_0 \ell / 2$, $x_G = 2\ell / 3$ となる。どちらの図を使っても支点反力は同じく

$$R_a = \frac{q_0 \ell}{6}, \quad R_b = \frac{q_0 \ell}{3} \quad (\text{A.48a, b})$$

と求められる。ここまではいい。次に左から x の断面のせん断力と曲げモーメントを求めよう。図の左下から明らかなように幅 x の三角形分布の面積は $F_q = 1/2 x q_0 x / \ell$ で、断面から三角形分布の重心までの距離は $x/3$ だから

$$V = R_a - F_q = R_a - \frac{q_0 x^2}{2\ell}, \quad M = x R_a - \frac{x}{3} F_q = x R_a - \frac{q_0 x^3}{6\ell} \quad (\text{A.49a, b})$$

と求められ、せん断力は2次曲線に、曲げモーメントは3次曲線になる。ところが、勉強不足の学生は分布外力は等価な集中外力に置き換えられるとだけ覚えていて、その置き換えた状態の右下の図から

$$V = R_a, \quad M = x R_a \quad (\text{A.50a, b})$$

が答だと思ってしまうのだ。「等価」がどういう意味かを理解していないのが原因だ。構造物全体を対象にしたときの等価性と、ある断面までの区間を対象にしたときの等価性とは違うのである。

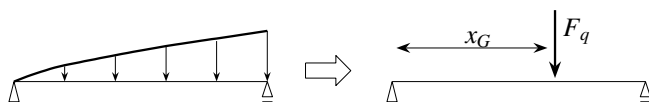


図 A.12 分布外力と巨視的に等価な集中外力

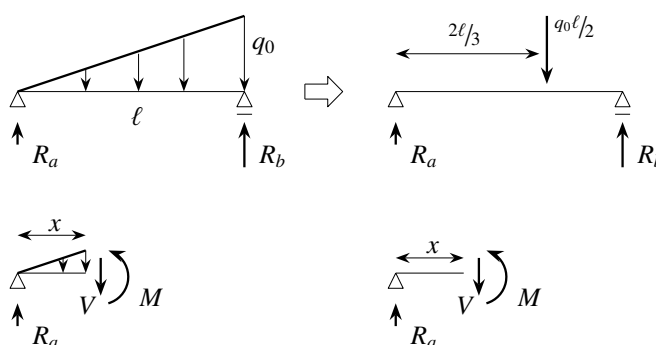


図 A.13 三角形分布外力に対する内力

A.6 集中モーメントって何

右図の構造の支点反力を求めるとき、この M_0 を一体どう扱えばいいのかわからない学生がときどきいる。左の支点 A 回りのモーメントのつり合いだけで B の支点反力は求められるのだが、 M_0 までの距離をどう対処したらいいのかわからないらしい。小学校でテコは学ぶのに、モーメントを教えないという噂もある。だとすると偶力も知らないのだろうか。一つの考え方は、右図の下に描いたような偶力で

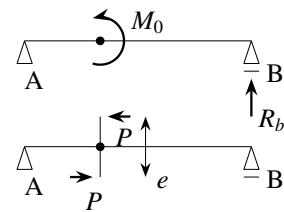


図 A.14 集中モーメント

$$P = \frac{M_0}{e} \tag{A.51}$$

と置き換えればいいだけなのだが。つまり、右図の場合の A 回りのモーメントのつり合い式は単に

$$\ell R_b + M_0 = 0 \tag{A.52}$$

だけでいいのだ。ただ、第3セメスタの力学の様子を覗いていると、どうもつり合い式、特にモーメントのつり合い式も立てられない学生がいるような気がする。

集中モーメントなんて、演習問題のためだけにあると思っている学生もいるのではないだろうか。例えば二主桁の格子桁のスパン中央を横桁で剛接した場合、片方の主桁の中央以外に集中外力を与えたとき、その曲げ変形によって横桁はねじられ、そのねじりモーメントがもう片方の主桁にとっての集中モーメントになるとは想像できないのだろうか。

A.7 Castigliano の第2定理は冗長過ぎる

Castigliano の第2定理が補ポテンシャルエネルギーの停留原理だと解釈できるような定式化を別の文書でしたが、いまいっしょくたにしない。が、ここはそういうことではなく、この定理がさほど有用ではないのに相変わらず講義されているらしく、修士の他大学からの受験者がとても冗長な計算をして、結局計算間違いをしたり、時間を浪費している場合が散見されているのが現状だ。ここにその実例を示しておこう。

同じ長さ ℓ の3本の部材でできた図 A.15 の構造で、 $Q = 0$ のときの載荷点の Q 方向の変位 δ を求めよう。曲げモーメント分布はそれぞれ

$$A: M = -xP, \quad B: M = xQ - \ell P, \quad C: M = -(x + \ell)P + \ell Q \tag{A.53a, b, c}$$

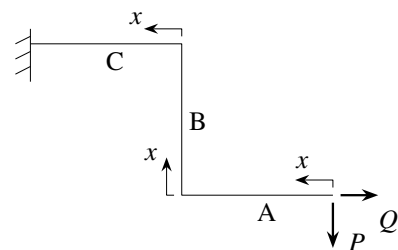


図 A.15 Castigliano の定理と単位荷重法

なので、補ひずみエネルギー U^* は

$$U^* = \frac{1}{2EI} \left[\int_0^\ell x^2 P^2 dx + \int_0^\ell (xQ - \ell P)^2 dx + \int_0^\ell (-xP - \ell P + \ell Q)^2 dx \right] \tag{A.54}$$

と表される。ここで微分演算と極限をとれば

$$\begin{aligned} \delta &= \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\partial U^*}{\partial Q} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{1}{2EI} \left[\int_0^\ell 2x(xQ - \ell P) dx + \int_0^\ell 2\ell(-xP - \ell P + \ell Q) dx \right] \\ &= \frac{1}{2EI} \left[\int_0^\ell -2x\ell P dx + \int_0^\ell 2\ell(-xP - \ell P) dx \right] \\ &= \frac{1}{2EI} \left[-\ell x^2 P - \ell x^2 P - 2\ell^2 x P \right]_0^\ell = \frac{1}{2EI} (-4\ell^3 P) = -\frac{2P\ell^3}{EI} \end{aligned} \tag{A.55}$$

のように 5 行程度で計算できる。ところが他大学からの修士受験生の中には、 U^* をまず計算してから、つまり 2 乗計算と積分をしたあとによく微分演算と極限をとる人が少なくない。こうすると U^* を

$$U^* = \frac{1}{2EI} \left[\frac{1}{3} \ell^3 P^2 + \frac{1}{3} \ell^3 Q^2 - \ell^3 PQ + \ell^3 P^2 + \frac{1}{3} \ell^3 P^2 + \ell^3 P^2 - \ell^3 PQ - 2\ell^3 PQ + \ell^3 P^2 + \ell^3 Q^2 \right] \quad (\text{A.56})$$

のように求めるだけで数行の長い演算が必要で、時間もかかるし計算間違いの落とし穴も散在してしまう。

では、単位荷重法を使おう。この場合は $Q = 1$ だけの载荷による曲げモーメント M_u が必要になり

$$\text{A: } M = -xP, \quad M_u = 0, \quad \text{B: } M = -\ell P, \quad M_u = x, \quad \text{C: } M = -xP - \ell P, \quad M_u = \ell \quad (\text{A.57a, b, c})$$

と求められるので、区間 A の計算は不要になり、変位は

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{1}{EI} \left[\int_0^\ell -\ell x P \, dx + \int_0^\ell (-\ell x P - \ell^2 P) \, dx \right] \\ &= \frac{1}{EI} \left[-\frac{\ell}{2} x^2 P - \frac{\ell}{2} x^2 P - \ell^2 P x \right]_0^\ell = \frac{1}{EI} (-2\ell^3 P) = -\frac{2P\ell^3}{EI} \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

のように 4 行程度つまり上式 (A.55) の下 2 行のみの計算で済んでいる。実は計算が簡単だけでなく、単位荷重法は二つの問題の内積（一種の仮想仕事の式）をとっている点で、理論や応用等も含めてとても汎用的なのだ。構造力学を初めて勉強した学部学生は、その意味もわからずに断面係数の計算をすること等も含めて、積分の演習科目なのではないかと思った人が多かったのではないだろうか。



写真 A.1 牛根大橋 対岸の七ツ島で組み立ててクレーン船で桜島半周の海上運搬を経た架設で、気仙沼大島大橋 (p.678) と同じ工法 (http://kagoshima01.gozaruru.jp/ushineoohasi_unpan/ の写真参照)

付録 B

Timoshenko 梁理論

B.1 支配方程式

B.1.1 運動場の仮定と合応力

第4章では、梁の軸線と断面の直交性が変形後も保持されるという、いわゆる Bernoulli-Euler 梁の定式化をした。その仮定の範囲内で求められる直応力とつり合うせん断応力が放物線分布することは、第4.6.1節で示した通りで、しかもそれは平面問題の解式(3.199b)とも整合していた。より(連続体力学として)正確な梁理論を求めたければ、この放物線分布に対応するせん断変形を予め考慮して梁理論の定式化をし直せばいいが、ここではもっと簡便な古典的理論を誘導する。なおこの章では簡単のために括弧無しの太字で行列を表している。

その理論は Timoshenko 梁理論と呼ばれ、Bernoulli-Euler の仮定を緩め、ある断面には一様なせん断変形が発生すると仮定する。すなわち基本的な仮定のうちの式(4.2)の代わりに

$$2\epsilon_{xz}(x, z) = \gamma(x) \quad (\text{B.1})$$

を前提とする。ただ、梁理論では梁の上下面には直接外力が作用することは無いので、せん断ひずみもそこで零にならなければならないことを踏まえると、この断面内一様な(z の関数ではない)せん断ひずみ分布は容認できない。しかしせん断変形は細長い梁にとっては2次的なものであり、この程度の差異について別途調整(後述の k_T の導入)ができるなら、これで簡便でかつ精度のいいモデルが構築できると考えられる。

この仮定に従って梁の運動を記述したのが図 B.1 である。図から明らかなように、断面内任意点の x, z 方向変位成分は微小変位の範囲内で、これも式(4.3)の代わりに

$$u_x(x, z) = u(x) + z\vartheta(x), \quad u_z(x, z) = w(x) \quad (\text{B.2a, b})$$

となる。ここに $\vartheta(x)$ は軸のたわみ角ではなく断面の回転角を表している。式(B.1)左辺に式(3.6)のひずみ変位関係を用いて式(B.2)を代入すると

$$2\epsilon_{xz}(x, z) = \vartheta(x) + w'(x) = \gamma(x) \quad \rightarrow \quad \vartheta = -w' + \gamma \quad (\text{B.3})$$

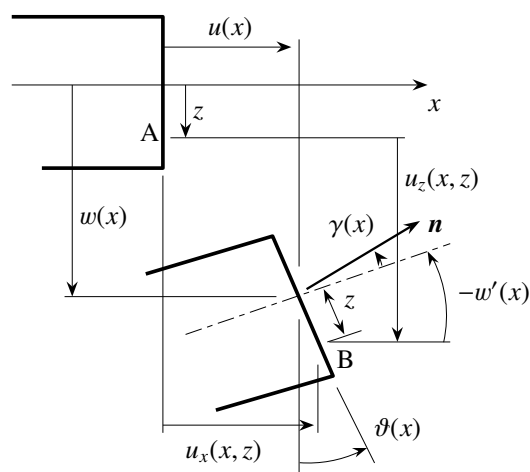


図 B.1 Timoshenko 梁の運動場

という関係を得る。ここにプライムは x に関する微分を表す。つまり、式 (4.4) の θ に代わる ϑ はたわみ角 $-w'$ には一致せず、せん断変形分の γ だけずれる。以上より伸びひずみは

$$\epsilon_{xx}(x, y, z) = u' + z \vartheta' = u' + z(\gamma' - w'') \quad (\text{B.4})$$

となる。

直応力は 1 次元の Hooke の法則式 (3.183a) に、せん断応力は Hooke の法則式 (3.46) に従うものとすれば、以上のひずみ成分をそれに代入することによって

$$\sigma_{xx} = E \epsilon_{xx} = E \{u' + z(\gamma' - w'')\}, \quad \sigma_{xz} = 2G \epsilon_{xz} = G \gamma \quad (\text{B.5a, b})$$

となる。ここに E と G はそれぞれ Young 率とせん断弾性係数である。 x 軸が図心を通るように選べば、これを用いて断面に発生する合応力は

$$N(x) \equiv \int_A \sigma_{xx} dA = EA u', \quad M(x) \equiv \int_A z \sigma_{xx} dA = EI(\gamma' - w'') = EI \vartheta', \quad V(x) \equiv \int_A \sigma_{xz} dA = Gk_T A \gamma \quad (\text{B.6a, b, c})$$

と定義され、変位と関係付けられる。ただし簡単のために均質材料でできた等断面の梁とした。また、せん断力の定義式 (B.6c) の k_T はその定義通りなら 1 になるはずだが、前述のように本来一様ではない断面内のせん断変形を一様な場 $\gamma(x)$ で近似したことを補正するために導入された係数で、断面形状と Poisson 比に依存 [17] する。例えば

$$k_T(\text{円形断面}) = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}, \quad k_T(\text{矩形断面}) = \frac{10(1+\nu)}{12+11\nu} \quad (\text{B.7a, b})$$

といった値を持つ。ちなみに、文献 [17] の誘導からも明らかなように、第 4.6.1 (1) 節の最後で求めたせん断応力の最大値と平均値の関係を表す係数 (矩形の場合の $3/2$) とは全く関係無いことには注意すること。

B.1.2 つり合い式と境界条件

つり合い式と境界条件は第 4.9 節と同様、3 次元の仮想仕事式に前節の変位場・ひずみ場と断面力の定義とを代入すれば求めることができる。式 (B.2) の変位場と式 (B.3) (B.4) のひずみ場の変分は

$$\delta u_x = \delta u + z \delta \vartheta, \quad \delta u_z = \delta w, \quad \delta \epsilon_{xx} = \delta u' + z \delta \vartheta', \quad 2\delta \epsilon_{xz} = \delta \vartheta + \delta w'$$

と表される。Bernoulli-Euler 梁とは異なりせん断成分もあるので、内力仮想仕事項は

$$\int_V (\sigma_{xx} \delta \epsilon_{xx} + 2\sigma_{xz} \delta \epsilon_{xz}) dV = \int_0^\ell \left\{ \int_A \sigma_{xx} (\delta u' + z \delta \vartheta') + \sigma_{xz} (\delta \vartheta + \delta w') \right\} dA dx$$

となる。これに式 (B.6) で定義した断面力を用いると

$$= \int_0^\ell \{N \delta u' + M \delta \vartheta' + V(\delta \vartheta + \delta w')\} dx$$

と書くことができるので、部分積分すると

$$= [N \delta u + M \delta \vartheta + V \delta w] \Big|_0^\ell - \int_0^\ell \{N' \delta u + (M' - V) \delta \vartheta + V' \delta w\} dx$$

を得る。あるいは式 (4.26) の記号を用いると

$$= n_i [N \delta u + M \delta \vartheta + V \delta w] \Big|_{x=0, \ell} - \int_0^\ell \{N' \delta u + (M' - V) \delta \vartheta + V' \delta w\} dx \quad (\text{B.8})$$

とも表すことができる。

体積力と表面力による仮想仕事項については、Bernoulli-Euler 梁の対応する項におけるたわみ角 $-w'$ を断面の回転角 ϑ に置き換えるだけでいいので、それぞれ

$$\int_0^\ell (p \delta u + m \delta \vartheta + q \delta w) dx, \quad [F_i \delta u + C_i \delta \vartheta + S_i \delta w] \Big|_{x=0, \ell} \quad (\text{B.9a, b})$$

と書くことができる。以上の式 (B.8) (B.9) をすべて結合すると、Timoshenko 梁の仮想仕事式は

$$\begin{aligned} & [(n_i N - F_i) \delta u + (n_i V - S_i) \delta w + (n_i M - C_i) \delta \vartheta] \Big|_{x=0, \ell} \\ & - \int_0^\ell [(N' + p) \delta u + (M' - V + m) \delta \vartheta + (V' + q) \delta w] dx = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

のように表現できる。したがって断面力で表したつり合い式は

$$N' + p = 0, \quad V' + q = 0, \quad M' - V + m = 0 \quad (\text{B.11a, b, c})$$

と表される。以下分布モーメント m は無視する。さらに境界条件は

$$\{u = u_i \text{ あるいは } n_i N = F_i\}, \quad \{w = w_i \text{ あるいは } n_i V = S_i\}, \quad \{\vartheta = \vartheta_i \text{ あるいは } n_i M = C_i\} \quad (\text{B.12a, b, c})$$

となる。ここに n_i は式 (4.26) で定義した記号であり、 u_i 等は端部で与える変位量である。たわみ角の境界条件を除けば他は Bernoulli-Euler 梁の式 (4.25) と同じである。ここではせん断変形を許しているので、梁の中間載荷点等では軸線が滑らかでたわみ角が連続するとは限らないが、その代わり断面の回転角 ϑ は連続しなければ連続体としての梁の連続性は失われてしまう。したがって、モーメントの境界条件に対応する変位の境界条件はたわみ角の代わりに ϑ を与える条件で与えられなければならないのである。つまり回転角についての境界条件については、 γ そのものや $-w'$ を与えるようなことはできないし、この 2 者が中間載荷点や中間支点で連続になる必要も無いことには十分注意する必要がある。

B.1.3 たわみで表した支配方程式

前節で示したように、軸方向の問題は初等梁理論のそれと同じなので、以下では曲げ問題のみを扱う。不静定構造を解くことを念頭に置いて、曲げ問題の支配方程式と境界条件式をたわみ $w(x)$ で表しておく。式 (B.6) を式 (B.11) (B.12) に代入し、式 (B.3) を考慮して γ と ϑ を消去すると、つり合い式は

$$-EI w'''' + q - \bar{\alpha}_T q' = 0 \quad (\text{B.13})$$

となり、境界条件式 (B.12) は

$$w = w_i \text{ あるいは } n_i \{-EI w'''' - \bar{\alpha}_T q'\} = S_i, \quad (\text{B.14a})$$

$$-w' - \bar{\alpha}_T \left(w'''' + \bar{\alpha}_T \frac{q'}{EI} \right) = \vartheta_i \text{ あるいは } n_i \{-EI w'' - \bar{\alpha}_T q\} = C_i \quad (\text{B.14b})$$

と表される。ここに

$$\bar{\alpha}_T \equiv \frac{EI}{Gk_T A} = \ell^2 \alpha_T, \quad \alpha_T \equiv \frac{E}{G(\lambda_T)^2}, \quad \lambda_T \equiv \frac{\ell}{\sqrt{I/(k_T A)}} \quad (\text{B.15a, b, c})$$

と定義した。 λ_T は Timoshenko 梁の細長さの特性を表す一種の細長比である。構造力学公式集の中には k_T 中の Poisson 比を無視したものもあるので、ここでも幾何量である細長比 λ_T の方に組み込んである。 $G \rightarrow \infty$ の極限で $\alpha_T \rightarrow 0$ および $\bar{\alpha}_T \rightarrow 0$ になり、上式はすべて初等梁理論の支配方程式に一致する。

式 (4.88) には両端単純支持の静定梁の中央における解を示したが、左半分の任意点のたわみは

$$w(x) = -\frac{P}{12EI} x^3 + \frac{P\ell^2}{16EI} x + \frac{P}{2Gk_T A} x \quad (\text{B.16})$$

となる。このときせん断変形 $\gamma(x)$ は

$$\gamma(x) = \frac{P}{2Gk_T A} \quad (\text{B.17})$$

なので、上式第3項がこのせん断変形によるたわみ成分であることがわかる。当然前2項が Bernoulli-Euler 梁の解である。また等分布外力 q が作用した両端単純支持梁の場合は

$$w(x) = \frac{q}{24EI} x(x-\ell)(x^2 - \ell x - \ell^2) + \frac{q}{2Gk_T A} x(\ell - x) \quad (\text{B.18})$$

となるが、この場合のせん断変形は

$$\gamma(x) = -\frac{q}{Gk_T A} \left(x - \frac{\ell}{2} \right) \quad (\text{B.19})$$

となることから、せん断変形によるたわみ成分 $w_{\text{shear}}(x)$ は

$$w_{\text{shear}}(x) = \int_0^x \gamma(\xi) d\xi \quad (\text{B.20})$$

で求めることができ、果たして上式 (B.18) の第2項に一致する。

次に不静定梁の例として両端固定梁を解いておこう。まず中央に集中外力 P が作用した場合の左半分のたわみは

$$w(x) = -\frac{P}{12EI} x^3 + \frac{P\ell}{16EI} x^2 + \frac{P}{2Gk_T A} x \quad (\text{B.21})$$

となる。このときのせん断変形 $\gamma(x)$ は両端単純支持梁と同じなので、上式第3項がこのせん断変形によるたわみ成分 $w_{\text{shear}}(x)$ であることがわかる。また等分布外力 q が作用した場合の解は

$$w(x) = \frac{q}{24EI} x^2(\ell - x)^2 + \frac{q}{2Gk_T A} x(\ell - x) \quad (\text{B.22})$$

となる。第1項が Bernoulli-Euler 梁の曲げの解であり、第2項がせん断変形によるたわみ $w_{\text{shear}}(x)$ である。

最後に右端を Δ だけ強制的にたわませた場合の解を求めてみると

$$w(x) = \Delta \frac{1}{\ell^3} x^2(3\ell - 2x) + \Delta \frac{12\alpha_T}{\ell^3(1 + 12\alpha_T)} x(\ell - 2x)(\ell - x) \quad (\text{B.23})$$

となり、これも曲げ成分とせん断成分に分解表示が可能になっている。せん断によるたわみ成分は両端と中央では生じていないのは興味深い。というのも、せん断変形とせん断力は

$$\gamma = \frac{12\alpha_T \Delta}{\ell(1 + 12\alpha_T)}, \quad V = \frac{12EI \Delta}{\ell^3(1 + 12\alpha_T)} = \frac{12EI \Delta}{\ell^3} \left(1 - \frac{12\alpha_T}{1 + 12\alpha_T} \right) \quad (\text{B.24a, b})$$

と一定になっているからだ。ただしこの場合には、せん断変形の影響の仕方は前の例のような α_T 倍という形ではなく、 $12\alpha_T/(1+12\alpha_T)$ という影響係数で支配されていることは覚えておいて欲しい。

B.2 曲げ問題の仮想仕事式と剛性方程式

B.2.1 仮想仕事式

つり合い式の基本的な弱形式は、式 (B.11) のつり合い式から

$$0 = - \int_0^\ell \{ \delta w (V' + q) + \delta \vartheta (M' - V) \} dx$$

と書くことができるから、部分積分をして境界条件式 (B.12) を代入すると

$$= \int_0^\ell \{V \delta(\vartheta + w') + M \delta\vartheta'\} dx - \int_0^\ell q \delta w dx - [S_1 \delta w_1 + C_1 \delta\vartheta_1 + S_2 \delta w_2 + C_2 \delta\vartheta_2]$$

となる。これに式 (B.3) を考慮して式 (B.5) を代入すると、最終的な仮想仕事式が

$$\int_0^\ell \{Gk_T A \gamma \delta\gamma + EI \vartheta' \delta\vartheta'\} dx - \int_0^\ell q \delta w dx - [S_1 \delta w_1 + C_1 \delta\vartheta_1 + S_2 \delta w_2 + C_2 \delta\vartheta_2] = 0 \quad (\text{B.25})$$

となる。第 B.1.2 節の誘導を逆向きにたどっただけである。内力仮想仕事項は式 (B.3) を考慮すると

$$\int_0^\ell \{Gk_T A \gamma \delta\gamma + EI (-w'' + \gamma') \delta(-w'' + \gamma')\} dx \quad (\text{B.26})$$

とも表すことができる。

B.2.2 剛性方程式

(1) かなり低次元要素

式 (B.25) を見る限り γ は要素内一定、 ϑ は 1 次多項式でよさそうだ。したがって式 (B.3) を考慮すれば w には 2 次多項式でいいことになる。これで四つの未定係数で γ, w を表すことができ、節点における連続条件を満足すべき四つの w_i, ϑ_i を係数とする変位関数が仮定できる。しかし式 (B.26) を見ると、これでは被積分関数第 2 項の γ の微係数が落ちてしまう。だからといって γ に 1 次の多項式を仮定すると未定係数の数が一つ増え、後述の高次元要素と同じような煩雑さを伴う。ただこの第 2 項は曲げの項であり、 γ の貢献は主に第 1 項であるうから、思い切ってこの最も簡単な変位関数を採用して試してみよう。つまり

$$\gamma(x) = \frac{w_2 - w_1}{\ell} + \frac{\vartheta_1 + \vartheta_2}{2}, \quad w(x) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right) w_1 + \frac{x(x-\ell)}{2\ell} \vartheta_1 + \frac{x}{\ell} w_2 + \frac{x(\ell-x)}{2\ell} \vartheta_2$$

と置く。これを式 (B.26) に代入して剛性行列を求めると

$$\begin{pmatrix} \frac{Gk_T A}{\ell} & -\frac{Gk_T A}{2} & -\frac{Gk_T A}{\ell} & -\frac{Gk_T A}{2} \\ & \left(\frac{EI}{\ell} + \frac{Gk_T A \ell}{4}\right) & \frac{Gk_T A}{2} & \left(-\frac{EI}{\ell} + \frac{Gk_T A \ell}{4}\right) \\ & & \frac{Gk_T A}{\ell} & \frac{Gk_T A}{2} \\ \text{Symm.} & & & \left(\frac{EI}{\ell} + \frac{Gk_T A \ell}{4}\right) \end{pmatrix} \quad (\text{B.27})$$

となる。

ここでは敢えて（精度が悪いことはわかっている）変位関数に対する最低条件を満足する低次多項式を用いてみた。しかし Timoshenko 梁理論は Bernoulli-Euler 梁の拡張理論であり、 $G \rightarrow \infty$ の極限で各基礎式は初等梁理論のそれに整合するはずである。ところが式 (B.27) の剛性行列は $G \rightarrow \infty$ の極限で式 (5.25) にはならない。しかも式 (B.27) を用いた有限要素解析による数値解は、要素数を非常に多く用いなければならない等、厳密解への収束が非常に遅い [43] こともわかっている。

(2) 高次元要素 — 適正な要素

たわみ w で表したつり合い式 (B.13) を見ると明らかなように、最も重要な項は初等梁理論と同様、たわみについての 4 階の微係数であった。したがって、 w に対しては 3 次の多項式を用いるのが望ましいことは明らか

なのだが、前節では故意に簡単な要素を誘導してみた。そこでここでは、 γ については定数として

$$\gamma(x) = \gamma_0, \quad (\text{B.28a})$$

$$\begin{aligned} w(x) &= w_1 \psi_1(x) - w' \psi_2(x) + w_2 \psi_3(x) - w'_2 \psi_4(x) = w_1 \psi_1 + (\vartheta_1 - \gamma_0) \psi_2 + w_2 \psi_3 + (\vartheta_2 - \gamma_0) \psi_4 \\ &= w_1 \psi_1(x) + \vartheta_1 \psi_2(x) + w_2 \psi_3(x) + \vartheta_2 \psi_4(x) + \gamma_0 \psi_5(x) \end{aligned} \quad (\text{B.28b})$$

と置いてみよう。ここに ψ_n は式 (5.22) で定義した多項式であり、新たに

$$\psi_5(x) \equiv -\psi_2(x) - \psi_4(x) = x - 3 \frac{x^2}{\ell} + 2 \frac{x^3}{\ell^2}$$

と定義した。

ここでも γ を定数と置いているから、式 (B.26) の被積分関数第 2 項の γ の微係数が落ちてしまう。しかし、式 (B.28) の w の方の変位関数表現に γ_0 の項があることから、少なからずせん断変形の影響がこの第 2 項にも及ぶことが期待できる。また γ を 1 次多項式にしても、実は求められる剛性方程式が同じになることは、ちょっと面倒な演算で示すことができ興味深い。

式 (B.28) を式 (B.25) に代入して「要素」剛性方程式を求めると

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \\ q_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \left[\begin{array}{c} \mathbf{k}_b \\ \mathbf{h}^T \end{array} \right] \\ \left[\begin{array}{c} \mathbf{h} \\ h_5 \end{array} \right] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} w_1 \\ \vartheta_1 \\ w_2 \\ \vartheta_2 \\ \gamma_0 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

となる。ここで \mathbf{k}_b は式 (5.23a) (5.25) で定義された初等梁の剛性行列であり、 q_i ($i = 1 \sim 4$) は式 (5.23b) で定義された等価節点外力である。 h_5 や \mathbf{h} の具体的な表現は省略するが

$$\mathbf{h} \equiv [h_1 \quad h_2 \quad h_3 \quad h_4]^T, \quad q_5 \equiv \int_0^\ell q \psi_5 dx, \quad (\text{B.29a, b})$$

$$h_n \equiv EI \int_0^\ell \psi_n'' \psi_5'' dx \quad (n = 1, 2, 3, 4), \quad h_5 \equiv Gk_T A \ell + \int_0^\ell EI (\psi_5'')^2 dx \quad (\text{B.29c, d})$$

と定義した。等分布荷重の場合の q_5 は零になる。剛性方程式 (*) の第 5 行の式は、境界条件から判断して左辺の外力に相当する部分が零になっており、これは要素剛性方程式の段階における余剰な自由度 γ_0 に対する拘束条件と考えなければならない。つまり式 (B.12) の境界条件から判断して γ は要素間で連続になる必要が無いから、式 (*) の要素剛性方程式の段階で γ_0 を残しておく必要は無くなる。したがって、式 (*) 第 5 行から γ_0 を計算してしまい、それを残りの行に代入して剛性行列の縮約を行う。まず第 5 行の式は

$$\gamma_0 = \frac{q_5 - \mathbf{h}^T \mathbf{v}}{h_5} \quad (**)$$

となる。便宜上

$$\mathbf{v} \equiv [w_1 \quad \vartheta_1 \quad w_2 \quad \vartheta_2]^T$$

と置いた。式 (**) を式 (*) の上 4 行右辺に代入すると

$$\begin{Bmatrix} S_1 \\ C_1 \\ S_2 \\ C_2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ q_4 \end{Bmatrix} = \mathbf{k} \mathbf{v} + \mathbf{h} \gamma_0 = \mathbf{k} \mathbf{v} + \mathbf{h} \frac{q_5 - \mathbf{h}^T \mathbf{v}}{h_5}$$

となる。したがって最終的な剛性方程式は

$$\mathbf{f} + \mathbf{q}^{(T)} = \mathbf{k}_T \mathbf{v} \quad (\text{B.30})$$

と表すことができる。ここに

$$\mathbf{f} \equiv [S_1 \quad C_1 \quad S_2 \quad C_2]^T, \quad \mathbf{q}^{(T)} \equiv \left\{ q_i^{(T)} \right\}, \quad q_i^{(T)} \equiv q_i - \frac{q_5 h_i}{h_5}, \quad (\text{B.31a, b, c})$$

$$\mathbf{k}_T \equiv \mathbf{k}_b - \frac{\mathbf{h} \mathbf{h}^T}{h_5} = \frac{EI}{1 + 12\alpha_T} \begin{pmatrix} \frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} & -\frac{12}{\ell^3} & -\frac{6}{\ell^2} \\ & \frac{4 + 12\alpha_T}{\ell} & \frac{6}{\ell^2} & \frac{2 - 12\alpha_T}{\ell} \\ & & \frac{12}{\ell^3} & \frac{6}{\ell^2} \\ \text{Symm.} & & & \frac{4 + 12\alpha_T}{\ell} \end{pmatrix} \quad (\text{B.31d})$$

である。式 (B.15b) のように α_T がせん断変形の影響の程度を代表するパラメータであり、せん断変形を無視する場合には前述のようにせん断抵抗係数 $G \rightarrow \infty$ と考えればよいから、 $\alpha_T \rightarrow 0$ となる。 $\alpha_T = 0$ のとき、式 (B.31d) は式 (5.25) の初等梁理論の剛性行列に一致する。剛性行列の分母の形は式 (B.23) (B.24) に現れるせん断変形の影響係数 $12\alpha_T/(1+12\alpha_T)$ の分母に一致するのは興味深い、当たり前でもある。実は式 (B.30) はマトリックス構造解析の基礎式としての厳密な剛性方程式に一致するのだ。したがって当然のことであるが、式 (B.13) (B.14) で表した支配方程式から有限要素定式化しても同じ剛性方程式 (B.30) が求められる。この節を高次要素と題したが、以上のような意味ではこの要素の方が有限要素法として適正なものと言わざるを得ない。

‘Close.’ 国内では長年にわたり、既に閉店したドアに「閉じろ」という表示が絶えない。なんと、某大学工学部教務事務の入り口ドアでも同じ状況である。ちょっと恥ずかしい。英文法の教育が徹底している現状であってもこれである。ある発表会では既に ‘choice’ を動詞に使う日本人学生は多数だ。昨今は、会話等の「使える英語」教育の必要性が叫ばれているが、そのうち、米国映画に出てくるある種の人達が使う、例えば ‘He don’t know nothing, you know!’ といった英語をスラスラしゃべることができる日本人が増えてくるのであろう。この国の英語教育の将来が実に楽しみである。

‘納豆と豆腐：’ 第1 著者が留学直前に通った神田の英会話学校で一緒だった日本大学の学生から「元々の中国では逆だよ。豆を箱に納めたらトウフだし，豆を腐らせたのがナットウだろ。」と教えてもらい，中国人留学生に大笑いされるまでの数年間は信じてしまっていた。あーあ。



写真 B.1 移設後の西田橋 岩永三五郎



‘Gesundheit!’ くしゃみをした人には ‘God bless you!’・・・と習うが，アメリカ（中西部か?）では人によってはこう言う。実は，それが英語だと思っているアメリカ人がいるというジョークがある。そうそう，我が国では噂をされるとくしゃみが出ると言うが，イタリアではシャッキリなんだそうだ。

付録 C

面内の有限変位棒理論

C.1 微小でない変位と変形

C.1.1 ひずみの定義

この章タイトルにある有限変位というのは微小ではない変位のことを指す。ただし、第 12 章の有限「変形」理論とは異なり、ひずみはそれほど大きくならず、材料はある種の線形弾性のままだとする。さて変位前の物体中の任意点の位置ベクトルは式 (3.1) で表すことができるから、任意の微分線要素ベクトルは

$$d\mathbf{p}^0 = dx_i \mathbf{e}_i \quad (\text{C.1})$$

と表現できる。総和規約を用いたが、主に直角座標で説明するのでテンソルの共変成分・反変成分の区別をせず、すべて下付きの指標で成分を表す。極座標等の一般的な厳密な表現については例えば文献 [25] や付録 D を参照のこと。一方式 (3.3) を考慮すると、変位後の微分線要素ベクトルは位置ベクトルの式 (3.2) から

$$d\mathbf{p} = dp_j \mathbf{e}_j = \left(\delta_{ji} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i \mathbf{e}_j = dx_i \mathbf{G}_i \quad (\text{C.2})$$

と書くことができる。ここに \mathbf{G}_i は

$$\mathbf{G}_i \equiv \left(\delta_{ji} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \mathbf{e}_j \quad (\text{C.3})$$

で定義した変形後の基底ベクトルである。これは、変形前に空間座標系基底ベクトル \mathbf{e}_i と一致するように定義した上で物体中の物質点に糊付けしたもので、物体と一緒に変位して変形するベクトルである。したがって元の基底ベクトル \mathbf{e}_i が単位の直交ベクトルで定義されていても、変形後の基底ベクトル \mathbf{G}_i は単位でもなく互いに直交もしないベクトルの組になっていることに注意すること。

ひずみは式 (3.10) のように変形前後の微分線要素の長さの差として定義できたから、上式をこれに代入して整理すると

$$(ds)^2 - (ds_0)^2 = (\mathbf{G}_i \mathbf{G}_j - \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) dx_i dx_j = (\mathbf{G}_i \mathbf{G}_j - \delta_{ij}) dx_i dx_j \equiv 2 E_{ij} dx_i dx_j$$

のようにしてひずみ成分 E_{ij} を定義できそうだ。つまり、有限変位における厳密なひずみテンソル成分は

$$E_{ij} \equiv \frac{1}{2} (\mathbf{G}_i \mathbf{G}_j - \delta_{ij}) \quad (\text{C.4})$$

で定義することができる。このひずみテンソル \mathbf{E} を **Green** のひずみテンソルと呼ぶ。式 (C.2) の \mathbf{G}_i の定義を式 (C.4) 右辺に代入して整理すると、各成分は

$$E_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right) \quad (\text{C.5})$$

と定義できる。右辺括弧内第3項が式(3.6)で定義された微小変位におけるひずみ成分には無かった非線形項である。微小変位の式(3.10)はこの線形部分だけで定義されていた。

物理的な意味について、代表的な成分と微小変位の場合の成分とを比較してみよう。まず E_{11} は

$$E_{11} = \frac{1}{2} (|\mathbf{G}_1|^2 - 1) = \frac{1}{2} \{ (1 + \epsilon_{11})^2 - 1 \} \simeq \epsilon_{11}$$

となるから、ひずみ自体が微小である限り、式(3.4)の伸びひずみと近似的に一致する。一方 E_{12} は

$$E_{12} = \frac{1}{2} |\mathbf{G}_1| |\mathbf{G}_2| \cos \widehat{\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2} = \frac{1}{2} (1 + \epsilon_{11})(1 + \epsilon_{22}) \sin(\epsilon_{12} + \epsilon_{21}) \simeq \epsilon_{12}$$

となる。これもひずみ自体が微小である限り、式(3.5)のせん断ひずみと近似的に一致する。

C.1.2 仮想仕事の原理と応力

前節で定義した Green のひずみテンソル成分を用いた仮想仕事式は、その誘導は省略するが、式(5.73)と形式的には同じく

$$\int_V S_{ji} \delta E_{ij} dV - \int_V X_i \delta u_i dV - \int_S F_i \delta \bar{u}_i dS = 0 \quad (\text{C.6})$$

と表現される。ただし S_{ji} は第2 Piola-Kirchhoff 応力テンソル成分である。物理的には、変位前に単位面積を持ち変位後に \mathbf{G}_j 方向を法線ベクトルとする微分面積要素当たりの、その物質点の変位後の基底ベクトル \mathbf{G}_i 方向の力成分を表している。したがって、変形後の基底ベクトルが必ずしも単位ではないことから、それ自体は物理的な応力の大きさ次元を持っておらず、少なくとも微分面積要素の変化が微小であれば

$$S_{ji} \text{ の物理成分} = S_{ji} \times |\mathbf{G}_i| \quad i \text{ について総和はとらない} \quad (\text{C.7})$$

という調整が必要であることに注意する必要がある。以下簡単のために添え字(1, 2, 3)の組を (x, y, z) で記す。

C.1.3 運動場の仮定

最初は少し一般性を持たせるために、せん断変形の影響を含んだ Timoshenko 梁モデル [42, 48] を対象とした運動場を仮定する。付録 B で提示した運動場に対する仮定を図 C.1 に示した。微小変位理論の式(4.3)では sine と cosine を近似したが、そうせず式(B.2)をきちんと書くと

$$u_x(x, z) = u(x) + z \sin \vartheta(x), \quad (\text{C.8a})$$

$$u_z(x, z) = w(x) + z \{ \cos \vartheta(x) - 1 \} \quad (\text{C.8b})$$

となる。 $\vartheta(x)$ は断面の回転角である。軸線は断面の図心を通るものとするが、棒¹の線素を変形前には軸線と平行に定義したが、それは変形後には \mathbf{G}_x 方向を向く。したがって線素の向きは x 軸と $\Lambda(x, z) \equiv \{\vartheta(x) - \Gamma(x, z)\}$ の角度をなす。 Γ は断面の軸線方向に対する角度変化で、せん断変形を表している。このことから、軸線の変位と傾きの幾何学的関係は

$$\tan \Lambda_0(x) = \tan \{\vartheta(x) - \Gamma_0(x)\} = -\frac{w'(x)}{1 + u'(x)} \quad (\text{C.9})$$

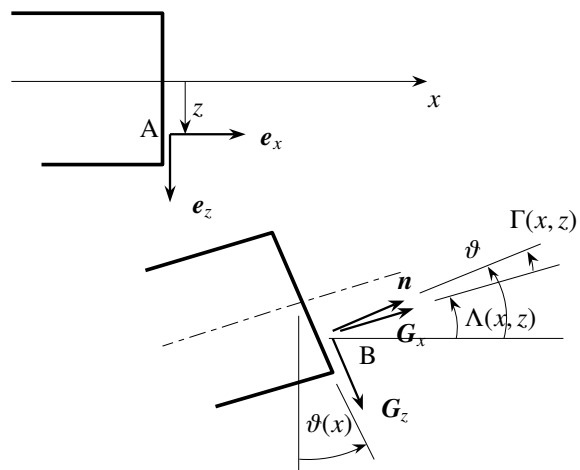


図 C.1 Timoshenko 梁の変形状態

¹ いわゆる梁と柱と梁-柱を対象とするので棒と称するが、ねじりは含まない。

となる。ここにプライムは x に関する微分を表し、下添え字に 0 が付いた $\Lambda_0(x)$, $\Gamma_0(x)$ はそれぞれ、基底ベクトルの回転角 $\Lambda(x, z)$ および $\Gamma(x, z)$ の軸線上 ($z = 0$) での値を表す。

式 (C.9) を考慮しながら式 (C.8) をひずみの定義式 (C.5) に代入して整理すると

$$E_{xx} = \frac{1}{2}(g - 1), \quad g \equiv |\mathbf{G}_x|^2, \quad 2E_{xz} = \sqrt{g} \sin \Gamma = \sqrt{g_0} \sin \Gamma_0 = \gamma \quad (\text{C.10a, b, c})$$

と表すことができる。ここに

$$g = (1 + \epsilon + z\kappa)^2 + \gamma^2, \quad g_0 \equiv g(z = 0) = (1 + \epsilon)^2 + \gamma^2 = (1 + u')^2 + (w')^2, \quad (\text{C.11a, b})$$

$$\epsilon \equiv \sqrt{g_0} \cos \Gamma_0 - 1, \quad \gamma \equiv \sqrt{g_0} \sin \Gamma_0, \quad \kappa \equiv \vartheta' \quad (\text{C.11c, d, e})$$

と定義した。式 (C.9) と式 (C.11) の定義を用いると、変位勾配は

$$u' = (1 + \epsilon) \cos \vartheta + \gamma \sin \vartheta - 1, \quad w' = -(1 + \epsilon) \sin \vartheta + \gamma \cos \vartheta \quad (\text{C.12a, b})$$

という関係にあることを示すことができる。変形前に軸線と平行だった任意の線素の向きは、断面任意点での変形後の基底ベクトルの回転角と変形の関係式

$$\cos \Lambda = \frac{1 + \epsilon + z\kappa \cos \vartheta}{\sqrt{g}}, \quad \sin \Lambda = \frac{\gamma + z\kappa \sin \vartheta}{\sqrt{g}} \quad (\text{C.13a, b})$$

で表される。あるいは、せん断変形部分だけについては

$$\cos \Gamma = \frac{1 + \epsilon + z\kappa}{\sqrt{g}}, \quad \sin \Gamma = \frac{\gamma}{\sqrt{g}} \quad (\text{C.14a, b})$$

という関係がある。

C.2 Bernoulli-Euler 梁理論 — 美しい理論

C.2.1 運動場

比較的細長い梁の場合には、せん断変形を最初から無視した Bernoulli-Euler 梁として取り扱えるので、以上の定式化で $\Gamma \equiv 0$ とすれば良く、構成則も含めて合理的で近似の無い美しい理論が誘導できる。区別を明確にするために断面の回転角 ϑ を θ と表記する。まず式 (C.8) の運動場は

$$u_x(x, z) = u(x) + z \sin \theta(x), \quad u_z(x, z) = w(x) + z \{\cos \theta(x) - 1\}, \quad \Lambda(x, z) = \Lambda_0(x) = \theta(x) \quad (\text{C.15a, b, c})$$

となる。 $\theta(x)$ は断面の回転角だが、梁の軸線のたわみ角に等しい。また式 (C.9) の傾きの幾何学的関係は

$$\tan \theta(x) = -\frac{w'(x)}{1 + u'(x)} \quad (\text{C.16})$$

となり、 θ と u, w とは独立ではなくなる。同様に式 (C.11) は厳密に

$$\sqrt{g} = 1 + \epsilon + z\kappa, \quad \epsilon = \sqrt{g_0} - 1, \quad \kappa = \theta' = -\frac{1}{g_0} \{(1 + u') w'' - w' u''\} \quad (\text{C.17a, b, c})$$

と表現できる。式 (C.16) と式 (C.17) から変位勾配は

$$u' = (1 + \epsilon) \cos \theta - 1, \quad w' = -(1 + \epsilon) \sin \theta \quad (\text{C.18a, b})$$

という関係になる。

さて、式 (C.4) のひずみの定義式と式 (C.10a) とを比較すれば明らかなように、式 (C.10b) のように g は変形後の基底ベクトル \mathbf{G}_x のノルムの 2 乗で定義したから、ここで物理的な伸びひずみ e を基底ベクトル \mathbf{G}_x の長さの変化率で定義することにし

$$e \equiv |\mathbf{G}_x| - |g_x| = \sqrt{g} - 1 \quad (\text{C.19})$$

と定義する。これに式 (C.17a) を代入すれば

$$e = \epsilon + z\kappa \quad (\text{C.20})$$

という簡単な表現になる。つまり、大きく変位した場合であっても、Bernoulli-Euler 梁のひずみ（伸びひずみの物理成分）は断面内で三角形（線形）分布をしている。美しい！逆に言うと、式 (C.10a) の Green のひずみ成分の物理的意味はわかり難い。

ところで式 (C.17c) の曲率が解析学等で習ったものとは違うと感じたと思う。それは独立変数の考え方が数学のそれとは全く違うからである。この章の x は梁が変位する前の軸線の位置の空間座標である。数学の場合は、ある空間 (ξ, ζ) の曲線 $\zeta = \zeta(\xi)$ が持つ曲率を ξ あるいはその曲線に沿った座標 s の関数として定義している。そこでこの 2 種類の独立変数の変換をしておこう。つまり変位した梁が空間に描く曲線の位置は

$$\xi = x + u(x), \quad \zeta = w(x)$$

である。この関係を用いて変数変換して式 (C.17c) を書き直すと

$$\kappa(x) = \theta'(x) = \frac{d\theta(x)}{dx} = -(1+u') \frac{1}{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2} \frac{d^2\zeta}{d\xi^2}$$

になる。一方、曲率も (ξ, ζ) におけるそれで定義し直すと

$$\tilde{\kappa}(\xi) \equiv \frac{d\theta(\xi)}{d\xi} = \frac{1}{1+u'} \kappa(x)$$

となるので、上式を代入して

$$\tilde{\kappa}(\xi) = -\frac{1}{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2} \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = \tilde{\kappa}(s) = -\frac{d^2\zeta}{ds^2}$$

あるいは

$$\tilde{\kappa}(s) \equiv \frac{d\theta(s)}{ds} = \tilde{\kappa}(\xi) = -\frac{1}{\left\{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2\right\}^{3/2}} \frac{d^2\zeta}{d\xi^2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2}} \tilde{\kappa}(\xi)$$

のように、数学で習った表現を得る。この独立変数 x の考え方については十分気を付けておく必要がある。有限変形理論の第 12 章では、この章の x を大文字 \mathbf{X} で、変位後の位置を小文字 \mathbf{x} で表して区別している。

C.2.2 つり合い式と境界条件

一方、式 (C.10) のひずみ成分を式 (C.6) の仮想仕事式に代入して、せん断ひずみ E_{xz} の項を無視した上で式 (C.19) を考慮して変分をとれば、その内力仮想仕事は

$$\int_V S_{xx} \delta E_{xx} dV = \int_V \sqrt{g} S_{xx} \delta e dV \quad (\text{C.21})$$

と表してもいいことがわかる。ここが、美しい理論体系になるための一番のミソである。梁の抵抗は軸方向の変形 E_{xx} が主であり零ではないため、その軸方向の基底ベクトル \mathbf{G}_x は変形後には単位でなくなる。したがって、梁の断面形は不変なので直応力 S_{xx} の物理成分には式 (C.7) のように \sqrt{g} だけの調整が必要になる。よって

$$\sigma \equiv \sqrt{g} S_{xx} \quad (\text{C.22})$$

で、軸方向の応力の物理成分を定義することができる。これを用いると、上の内力仮想仕事項は

$$\int_V \sigma \delta e \, dV \quad (\text{C.23})$$

のように、物理的にも数学的にも簡明な表現になる。

式 (C.20) から、伸びの物理成分の変分は

$$\delta e = \delta \epsilon + z \delta \kappa$$

となるから、上式 (C.23) に代入すれば内力仮想仕事項が

$$\int_x (N \delta \epsilon + M \delta \kappa) \, dx \quad (\text{C.24})$$

となる。ただし、二つの基本的な断面力を

$$N \equiv \int_A \sigma \, dA, \quad M \equiv \int_A z \sigma \, dA \quad (\text{C.25a, b})$$

と定義した。これは微小変位理論のそれと形式的には同じだ。

式 (C.16) (C.17) を考慮しながら、各変形成分の変分をとると

$$\delta \epsilon = \cos \theta \delta u' - \sin \theta \delta w', \quad \delta \kappa = \delta \theta'$$

という関係がある。また式 (C.16) の変分から

$$\delta \theta = -\frac{1}{\sqrt{g_0}} (\cos \theta \delta w' + \sin \theta \delta u')$$

という関係になる。また外力仮想仕事については、分布モーメントを無視した梁理論の範囲内での表現をする

$$-\int_x (p \delta u + q \delta w) \, dx - (F \delta u + S \delta w + C \delta \theta) \Big|_{x=0, \ell} \quad (\text{C.26})$$

と書いていい。式 (C.24) と以上の関係を用いて変分を実行して対応する Euler 方程式を導くと、つり合い式が

$$\left(N \cos \theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \theta \right)' + p = 0, \quad (\text{C.27a})$$

$$\left(-N \sin \theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \theta \right)' + q = 0 \quad (\text{C.27b})$$

と求められる。さらに境界条件も

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(N \cos \theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \theta \right) = F_i, \quad (\text{C.28a})$$

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left(-N \sin \theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \theta \right) = S_i, \quad (\text{C.28b})$$

$$\theta = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M = C_i \quad (\text{C.28c})$$

と求められる。ここに n_i は式 (4.26) で定義した記号であり、外力は図 4.7, 4.8 に定義されている。

C.2.3 構成方程式

式 (C.23) を見る限り、 σ と e の組の間に何らかの構成則を与えるのが一番素直である。したがって、1次元の線形弾性の構成方程式を

$$\sigma = E e = E (\epsilon + z \kappa) \quad (\text{C.29})$$

のようなわかり易い形で与えることには何の抵抗も無いと思う。ここに E は何らかの弾性係数であるが、もちろん Young 率と考えていい。したがって断面力と変形の関係は

$$N = EA\epsilon, \quad M = EI\kappa \quad (\text{C.30a, b})$$

のように、見かけ上線形になる等、非常にわかり易い理論体系になっている。ただ式 (C.17) から明らかなように、変形 ϵ, κ と変位 u, w との間は高次の幾何学的な非線形関係にあるため、限られた場合にしか解析的に解を求めることはできない。

C.2.4 座屈荷重

この理論の枠組の中で片持ち梁の座屈荷重 P_{cr} を求めよう。図 6.23 が解析対象なので

$$u = -\frac{P}{EA}x, \quad w = 0, \quad \theta = 0, \quad \epsilon = -\frac{P}{EA}, \quad N = -P, \quad M = 0$$

が座屈直前の解であること、自明な解であることは明らかである。そこで第 6 章の剛体バネモデルの例でも用いたように、この解のすぐ近傍に別な解が存在するか否かを確かめることによって、座屈が生じるか否かの判定をしよう。そのためには、例えば

$$u(x) := -\frac{Px}{EA} + \Delta u(x), \quad w(x) := \Delta w(x) \quad \text{etc.} \quad (\text{C.31a, b})$$

と置いたものを支配方程式に代入し直し、 Δ のついた摂動量について線形化した斉次の支配方程式を求めることができる。この支配方程式はいわゆる固有値問題を形成している。そうした上で、摂動量に対して一つでも零でない解が存在するための条件式から座屈荷重 P_{cr} を算定できる。具体的な誘導は文献 [42, 48] を参照のこと。

このようにすると、座屈前の伸びを厳密に考慮した場合は、文献 [95] にもあるように座屈荷重が

$$\frac{P_{\text{cr}}\ell^2}{EI} = \frac{\lambda^2}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^2} \right\} \quad (\text{C.32})$$

と求められる。ここに λ は細長比である。これに対し座屈前の伸びの影響を無視した場合には

$$\frac{P_{\text{cr}}\ell^2}{EI} = \frac{\pi^2}{4} \quad (\text{C.33})$$

となり、式 (6.43b) の梁-柱の解に一致する。式 (C.32) では伸びの影響を考慮しているため、その軸力による縮み分だけ座屈長が短くなる効果を含んでいる。また、細長比が π より小さい極端に短い柱の場合は、もちろん梁でモデル化するのは無謀ではあるが、座屈しないことを示している。この縮み分のために、式 (C.32) の解は $\pi^2/4$ より大きい値になる。ただし、そんなに短い柱の場合にはせん断変形の影響が無視できないため、後述の Timoshenko 梁理論で座屈も検討する必要がある。逆に細長比が大きい場合には、式 (C.32) の平方根の部分を Taylor 展開して最初の 2 項だけを用いると、それは式 (C.33) に一致する。座屈後の挙動については、その一つの解法を第 6.6.2 節で説明した。

C.2.5 変分原理と *Elastica*

さて、全ポテンシャルエネルギー最小原理という変分原理で捉えた梁理論について加筆しておく。Bernoulli-Euler 梁の場合の構成則は式 (C.29) でモデル化したので、伸びひずみ e の 2 次形式で定義される超弾性体と捉

えることができる。そこで式 (C.26) の外力仮想仕事を念頭に置くと、結局全ポテンシャルエネルギーに相当する汎関数 Π が

$$\Pi \equiv \int_V \frac{1}{2} E e^2 dV - \int_x (p u + q w) dx - (F u + S w + C \theta) \Big|_{x=0, \ell} \quad (\text{C.34})$$

で定義できることがわかる。この変分をとり、式 (C.30) の構成則を用いることによって、この汎関数 Π の停留原理から得られる Euler 方程式と境界条件がつり合い式 (C.27) と境界条件式 (C.28) になることを示すことは簡単だろう。読者は各自手を動かして欲しい。

では、第 6.6.3 節で説明した軸線の伸びが無い **Elastica** の支配方程式を、変分原理を用いて誘導してみよう。そのためには、式 (6.90) の付帯条件

$$\epsilon = 0 \quad (\text{6.90}) \text{再掲}$$

を汎関数に組み込む必要があるので、いわゆる **Lagrange** の未定乗数として P という乗数を導入し、上式 (C.34) を変更すると

$$\Pi \equiv \int_V \frac{1}{2} E e^2 dV - \int_x (p u + q w) dx - (F u + S w + C \theta) \Big|_{x=0, \ell} - \int_x P \epsilon dx \quad (\text{C.35})$$

とすればいいことがわかる。さて、この第 1 変分をとると結局

$$\delta \Pi = \int_x \{(N + P) \delta \epsilon + M \delta \kappa\} dx + \int_x \epsilon \delta P dx - \int_x (p \delta u + q \delta w) dx - (F \delta u + S \delta w + C \delta \theta) \Big|_{x=0, \ell} = 0$$

を得る。これより Euler 方程式が

$$\left\{ (N + P) \cos \theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \theta \right\}' + p = 0, \quad \left\{ -(N + P) \sin \theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \theta \right\}' + q = 0, \quad \epsilon = 0$$

となり、境界条件が

$$\begin{aligned} u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left\{ (N + P) \cos \theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \sin \theta \right\} &= F_i, \\ w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i \left\{ -(N + P) \sin \theta + \frac{M'}{\sqrt{g_0}} \cos \theta \right\} &= S_i, \\ \theta = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M &= C_i \end{aligned}$$

となるが、Euler 方程式の第 3 式が式 (6.90) の不伸張条件なので、式 (C.30a) から

$$g_0 = 1, \quad N \equiv 0 \quad (\text{C.36a, b})$$

の条件を得る。したがって、最終的な場の方程式は

$$(P \cos \theta + M' \sin \theta)' + p = 0, \quad (\text{C.37a})$$

$$(-P \sin \theta + M' \cos \theta)' + q = 0, \quad (1 + u')^2 + (w')^2 = 0 \quad (\text{C.37b, c})$$

となり、境界条件式は

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (P \cos \theta + M' \sin \theta) = F_i, \quad (\text{C.38a})$$

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (-P \sin \theta + M' \cos \theta) = S_i, \quad (\text{C.38b})$$

$$\theta = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M = C_i \quad (\text{C.38c})$$

のようになるので、見かけ上は軸力 N を P で置き換えただけになるが、導入された「軸力」 P は梁の伸びとは全く無関係な断面力となり、伸びないことの反力として生じた断面力であることに注意する必要がある。制約

条件式 (C.37c) が一つ増えたことに対応して未知関数も一つ増えたというわけだ。また変位場にも不伸張の制約条件が適用されるため

$$\sin \theta = -w', \quad \cos \theta = 1 + u', \quad \kappa \equiv \theta' = \frac{-w''}{1 + u'} = \frac{u''}{w'} \quad (\text{C.39a, b, c})$$

になることにも注意すべきである。

この Lagrange の未定乗数 P の物理的な意味はこの例から少しはわかり易くなったと思うが、最小化問題として別の見方をすると、例えば ($\epsilon = 0$) という付帯条件に掛けた「高額な罰金」が P だと考えてもいい。例えば「接触問題」で必要になる制約条件を数値解析に組み込むために用いることができるペナルティ法も同じ考え方である。もう一つほぼ同様な未定乗数の使い方として、ゴムのような非圧縮性材料に対する定式化も挙げられる。もし体積変形が生じないゴムのような材料の場合は、変形に対する付帯条件が

$$\epsilon_{kk} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0 \quad (\text{C.40})$$

となるので、これに未定乗数 p を乗じて Hooke 弾性体の汎関数を改訂すれば、最終的なつり合い式は式 (3.159) の Navier-Stokes 式の静的な場合の

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} + X_i = 0 \quad (\text{C.41})$$

になる。 p は引張を正とした静水圧に相当し、体積変形が生じないことの反力として生じた内力であり、上述の Elastica の P に相当する。Hooke 弾性体の支配方程式に非圧縮性を導入する場合に、単純に体積変形を零にするとこの p の項は生じない。また Hooke 弾性体の材料定数の性質において、単純に $\nu \rightarrow 1/2$ としてしまうと体積弾性係数 K が無限大になり、物理的には容認できない理論になってしまう。

C.3 Timoshenko 梁理論

C.3.1 つり合い式と境界条件

せん断変形の影響を考慮した Timoshenko 梁の場合も、断面力レベルの構成則以外は美しく明快な理論体系になり、そこでも式 (C.19) の物理的な伸びひずみ e を用いることができる。式 (C.10) のひずみ成分を式 (C.6) に代入すると、内力仮想仕事項は

$$\int_V (S_{xx} \delta E_{xx} + 2S_{xz} \delta E_{xz}) dV = \int_V (\sqrt{g} S_{xx} \delta e + S_{xz} \delta \gamma) dV$$

と表すことができる。

断面形不変の仮定から、断面方向の基底ベクトル \mathbf{G}_z そのものは単位ベクトルのままなので、式 (C.7) から明らかのように、 z 方向のせん断応力 S_{xz} は物理成分そのものである。一方、式 (C.22) で説明したように、 x 方向の直応力 S_{xx} は \sqrt{g} だけの調整が必要になる。よって二つの応力成分の物理成分をそれぞれ

$$\sigma \equiv \sqrt{g} S_{xx}, \quad \tau \equiv S_{xz} \quad (\text{C.42a, b})$$

で定義することができる。これを用いると、上の内力仮想仕事項は

$$\int_V (\sigma \delta e + \tau \delta \gamma) dV \quad (\text{C.43})$$

のように簡明な表現になる。式 (C.11a) 等を考慮すれば伸びの物理成分の変分は

$$\delta e = \cos \Gamma \delta (\epsilon + z \kappa) + \sin \Gamma \delta \gamma$$

となるから、上式 (C.43) に代入して内力仮想仕事項が

$$\int_x (N \delta\epsilon + M \delta\kappa + V \delta\gamma) dx \quad (\text{C.44})$$

となる。ただし、三つの基本的な断面力を

$$N \equiv \int_A \sigma \cos \Gamma dA, \quad M \equiv \int_A z \sigma \cos \Gamma dA, \quad V \equiv \int_A (\tau + \sigma \sin \Gamma) dA \quad (\text{C.45a, b, c})$$

で定義した。

式 (C.44) は、軸力が軸線の伸びと、曲げモーメントが軸線の曲率と、せん断力がせん断変形と仮想仕事になっていて非常にわかり易い形をしている。ただ式 (C.45) のように、断面力の定義は一見複雑になっている。しかしそれは、せん断変形の影響で変形後の基底ベクトルが断面に垂直にはなっておらず、したがって直応力 σ も断面に直交した方向を向いていないから複雑に見えるだけなのである。例えば軸力は直応力の断面法線方向成分 $\sigma \cos \Gamma$ だけで定義されている。曲げモーメントも同様である。せん断力はせん断応力 τ だけでは定義されず、直応力 σ の断面内方向成分 $\sigma \sin \Gamma$ も足された形で定義されていることに注意する必要がある。そう考えると逆に、この式 (C.45) の断面力の定義は非常に論理的・合理的であることが明らかだ。

式 (C.9) (C.11) を考慮しながら、各変形成分の変分をとると

$$\delta\epsilon = \cos \vartheta \delta u' - \sin \vartheta \delta w' - \sqrt{g_0} \sin \Gamma_0 \delta \vartheta, \quad \delta\kappa = \delta \vartheta', \quad \delta\gamma = \sin \vartheta \delta u' + \cos \vartheta \delta w' + \sqrt{g_0} \cos \Gamma_0 \delta \vartheta$$

という関係がある。また外力仮想仕事は Bernoulli-Euler 梁の式 (C.26) と同じだから、式 (C.44) と以上の関係式を用いて変分を実行し Euler 方程式を導くと、つり合い式が

$$(N \cos \vartheta + V \sin \vartheta)' + p = 0, \quad (\text{C.46a})$$

$$(-N \sin \vartheta + V \cos \vartheta)' + q = 0, \quad (\text{C.46b})$$

$$M' - \sqrt{g_0} (V \cos \Gamma_0 - N \sin \Gamma_0) = 0 \quad (\text{C.46c})$$

と求められる。あるいは式 (C.11) の関係を用いると、モーメントのつり合い式 (C.46c) は

$$M' - (1 + \epsilon) V + \gamma N = 0 \quad (\text{C.47})$$

とも表すことができる。また境界条件は

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (N \cos \vartheta + V \sin \vartheta) = F_i, \quad (\text{C.48a})$$

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (-N \sin \vartheta + V \cos \vartheta) = S_i, \quad (\text{C.48b})$$

$$\vartheta = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M = C_i \quad (\text{C.48c})$$

と求められる。この n_i も式 (4.26) で定義した記号である。

C.3.2 構成方程式

構成関係については式 (C.43) の内力仮想仕事項の組を見る限り、直応力 σ と物理的伸び e とを、せん断応力 τ とせん断変形 γ とを何らかの関係で結び付ければ、それが一つの明快な構成方程式の候補である。つまり

$$\sigma = E e, \quad \tau = G \gamma \quad (\text{C.49a, b})$$

と考えるのが素直であろう。ここに E と G はそれぞれ何らかの弾性係数であるが、もちろん前者を Young 率、後者をせん断弾性係数と考えていい。しかし、式 (C.11) の関係と式 (C.45) の断面力の定義とから明らかかなう

に、このままでは断面力と変位成分との関係は複雑な非線形関係になり、例えば Bernoulli-Euler 梁の式 (C.30) のような明快な関係を得ることはできない。

したがって、構成関係については何らかの近似をせざるを得ない。ここでは弾性範囲に限定していることを考えると、ひずみそのものはかなり微小なものとして取り扱っていいだろう。そう考えると、式 (C.14) より

$$\cos \Gamma \simeq 1, \quad \sin \Gamma \simeq \frac{\gamma}{1 + \epsilon} \quad (\text{C.50a, b})$$

と置いて良さそうだ。式 (C.50b) の分母の ϵ を 1 に対して無視していないのは、座屈前の縮み量を適切に考慮した既存の理論と整合させるためである。式 (C.49) (C.50) を断面力の定義式 (C.45) に代入して微小ひずみの仮定を用いて近似すると、以下「第 1 次近似理論 (モデル)」と呼ぶ構成方程式を

$$N = EA \epsilon, \quad M = EI \kappa, \quad V = Gk_T A \gamma + N \frac{\gamma}{1 + \epsilon} \quad (\text{C.51a, b, c})$$

と近似できる。ここに k_T は式 (B.7) で定義された補正係数である。この式 (C.51c) の第 2 項は、式 (C.45c) にある直応力のせん断力への寄与分であり、非常に重要な項である。

ただ、軸力は式 (C.51a) のように伸びひずみに比例した断面力なので、この式 (C.51c) の第 2 項はひずみの 2 次項になり、第 1 項に比べて無視していいようにも思われる。つまり

$$V = Gk_T A \gamma \quad (\text{C.52})$$

というモデルも、微小ひずみの範囲で論理的にも可能な一つの理論となり得る。これは微小変位理論の枠組での構成則と形式的に一致している。こちらを「第 2 次近似理論 (モデル)」と呼ぶことにする。

C.3.3 近似支配方程式

以上をまとめると、「第 1 次近似」の範囲の基礎的な支配方程式は

$$u' = (1 + \epsilon) \cos \vartheta + \gamma \sin \vartheta - 1, \quad w' = -(1 + \epsilon) \sin \vartheta + \gamma \cos \vartheta, \quad (\text{C.53a, b})$$

$$\vartheta' = \frac{M}{EI}, \quad \epsilon = \frac{N}{EA}, \quad \gamma = \frac{V}{Gk_T A + \frac{N}{1 + \epsilon}} \quad (\text{C.53c, d, e})$$

であり、つり合い式が

$$(N \cos \vartheta + V \sin \vartheta)' + p = 0, \quad (\text{C.54a})$$

$$(-N \sin \vartheta + V \cos \vartheta)' + q = 0, \quad (\text{C.54b})$$

$$M' - (1 + \epsilon) V + \gamma N = 0 \quad (\text{C.54c})$$

となる。微小ひずみの近似をしておきながら、 ϵ を 1 に対して無視していない所が数箇所あるが、 $(1 + \epsilon)$ の部分はそのすべてを残してある。しかし一般には伸びひずみは非常に小さいから、この ϵ を無視した理論をさらに微小伸び近似と呼んでもよさそうだ。ただし特に運動学的な記述だけでは、もし ϵ を 1 に対して無視してしまうと伸びを無視したこと (Elastica) になってしまうので、式 (C.53a) (C.53b) では決して無視することはできないことには注意して欲しい。それに対し、式 (C.53e) と式 (C.54c) の ϵ は無視できてそれぞれ

$$\gamma = \frac{V}{Gk_T A + N}, \quad M' - V + \gamma N = 0 \quad (\text{C.55a, b})$$

となる。この枠組をこの文書では「第 1 次近似の微小伸び近似」と呼ぶことにする。

これに対して「第 2 次近似」の範囲の基礎的な支配方程式は、式 (C.53e) (C.55a) を式 (C.52) で置き換えたもので表される。

C.3.4 座屈荷重

片持ち Timoshenko 梁の座屈を例としよう。その場合には、座屈直前の解は

$$u = -\frac{P}{EA}x, \quad w = 0, \quad \vartheta = 0, \quad \epsilon = -\frac{P}{EA}, \quad \gamma = 0, \quad N = -P, \quad V = 0, \quad M = 0$$

である。Bernoulli-Euler 梁の場合と同様、この解からの摂動を与えて、 Δ のついた摂動量についてすべての支配方程式を線形化する。その摂動量に対する固有値問題を解けば、座屈荷重 P_{cr} が「第 1 次近似理論」では

$$\frac{\pi^2}{4} = \frac{\zeta (1 - \beta^2 \zeta)^2}{1 - (\beta^2 + \alpha_T) \zeta} \tag{C.56}$$

の 3 次方程式 (岩熊の座屈公式²) の解として求められる。ここに

$$\zeta \equiv \frac{P_{cr} \ell^2}{EI}, \quad \beta \equiv \frac{1}{\lambda} \tag{C.57a, b}$$

であり、 β は厚さ (太さ) パラメータで細長比 λ の逆数で、 α_T は式 (B.15) で定義したせん断変形に関するパラメータである。さらに「微小伸び近似」の場合は

$$\zeta = \frac{\pi^2/4}{1 + \alpha_T \pi^2/4} \tag{C.58}$$

となり、これはいわゆる Engesser の公式に一致する。

これに対し、式 (C.51c) のせん断力と変形の関係に軸力の寄与分を無視した理論、つまり式 (C.52) を用いた「第 2 次近似理論」の枠組の中で柱の座屈荷重を求めると

$$\zeta = \frac{1 - \sqrt{1 - \pi^2 (\beta^2 - \alpha_T)}}{2 (\beta^2 - \alpha_T)} \tag{C.59}$$

となる。これは「第 2 次近似理論」で座屈前の縮みの影響を考慮していることから、例えば「つるまきバネ」のように座屈前に比較的大きな縮み量のある部品の座屈公式として文献 [95] では紹介されている。さらに上述の「微小伸び近似」をこの「第 2 次近似」に加えると、座屈荷重は

$$\zeta = \frac{\sqrt{1 + \alpha_T \pi^2} - 1}{2 \alpha_T} \tag{C.60}$$

となり、改訂 Engesser 公式を得る。

二つの Engesser 公式と式 (C.59) は文献 [95] にも書かれているが、式 (C.56) の伸びを考慮した第 1 次近似理論の座屈荷重は著者オリジナル [42] である。もし「つるまきバネ」のせん断に関する構成則が式 (C.51c) の方だと判断されれば、式 (C.56) も「つるまきバネ」の座屈荷重になる。参考のために図 C.2 には、非常に短い柱の場合の比較を示した。幅 10 mm 高さ 160 mm の矩形断面で Poisson 比を $\nu = 1/3$ として、強軸回りに座屈するものとした。せん断変形の影響は顕著だが、このくらい短い棒でも四つの公式間にはこの程度の差異しか無いと捉えることもできる。

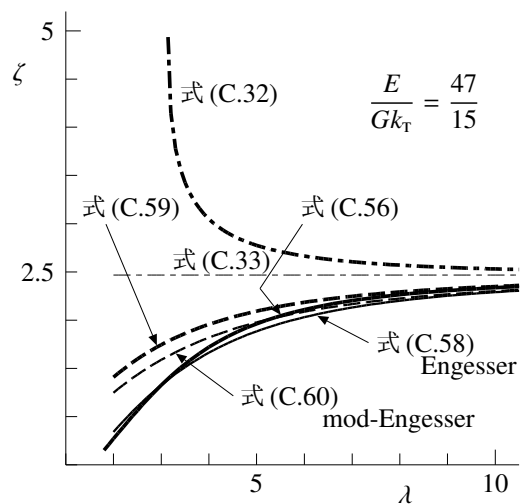


図 C.2 座屈荷重の比較

² 文献調査で見つからなかった解なので僭越ながら名付けた。文献をご存知の方は是非ご連絡を。

C.4 微小変位の枠組の中の梁-柱理論

C.4.1 有限変位理論の線形化

第6章で扱った梁-柱理論は、ひずみと変位の関係式の非線形項の一部を近似することによって求められる。まず伸びについては、式 (C.11b) で軸方向変位勾配の非線形項を無視し、式 (C.17b) を

$$\epsilon \approx u' + \frac{1}{2} (w')^2 \quad (\text{C.61})$$

と近似する。これは式 (6.31b) にも示した。また曲率についても式 (C.17c) における非線形項を無視し

$$\kappa \approx -w'' \quad (\text{C.62})$$

と近似する。断面力と変形の関係は式 (C.30) が、内力仮想仕事項も式 (C.24) がそのまま成立するものとする。分布外力のうち軸方向成分 p を無視すれば、その仮想仕事式が

$$\int_x (N \delta \epsilon + M \delta \kappa) dx - \int_x q \delta w dx - \{F \delta u + S \delta w + C \delta(-w')\} \Big|_{x=0, \ell} = 0 \quad (\text{C.63})$$

と表される。

式 (C.63) の変分を実行することによって支配方程式を得る。つり合い式は

$$N' = 0, \quad (\text{C.64a})$$

$$(N w' + M')' + q = 0 \quad (\text{C.64b})$$

と求められ、式 (6.26) に一致している。また境界条件は

$$u = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i N = F_i, \quad (\text{C.65a})$$

$$w = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i (N w' + M') = S_i, \quad (\text{C.65b})$$

$$-w' = \text{与える} \quad \text{あるいは} \quad n_i M = C_i \quad (\text{C.65c})$$

と求められて、これも式 (6.27) に一致する。

第6章でも扱ったように、境界条件が簡単な通常の柱の場合には、式 (C.64a) のつり合い式が式 (C.65a) の境界条件の下で簡単に解け

$$N = -P = \text{const.}$$

という関係式 (6.28) が成立する。したがって曲げに関する支配方程式の部分が、例えばつり合い式は

$$-EI w'''' - P w'' + q = 0$$

となる等、式 (6.32) が求められ、境界条件は式 (6.33) に一致する。このように梁-柱理論は、伸びひずみと変位の関係におけるたわみ角の2次項だけを考慮して得ることができる近似理論であることがわかる。

C.4.2 剛性方程式

(1) Bernoulli-Euler 梁の場合

仮想仕事式が式 (C.63) で与えられており、変形と変位の関係が式 (C.61) (C.62) で与えられ、断面力と変形の関係は式 (C.30) が成り立つから、変位成分を適切な関数で仮定すれば、第5章で紹介した有限要素法による近似つり合い式つまり剛性方程式を求めることができるはずだ。

表 C.1 剛性行列 (K_{ij}) の非零成分

11	A/ℓ^2	14	$-A/\ell^2$	44	A/ℓ^2	22	$12I/\ell^4$
23	$-6I/\ell^4$	25	$-12I/\ell^4$	26	$-6I/\ell^4$	33	$4I/\ell^4$
35	$6I/\ell^4$	36	$2I/\ell^4$	55	$12I/\ell^4$	56	$6I/\ell^4$
66	$4I/\ell^4$						

表 C.2 剛性抵抗の配列 (\tilde{K}_{ijk}) の非零成分: ($K_{ijk} = \frac{A}{2\ell^2} (\tilde{K}_{ijk})$)

122	$-6/5$	123	$1/10$	125	$6/5$	126	$1/10$
133	$-2/15$	135	$-1/10$	136	$1/30$	155	$-6/5$
156	$-1/10$	166	$-2/15$	224	$6/5$	234	$-1/10$
245	$-6/5$	246	$-1/10$	334	$2/15$	345	$1/10$
346	$-1/30$	455	$6/5$	456	$1/10$	466	$2/15$

表 C.3 剛性抵抗の配列 (\tilde{K}_{ijkl}) の非零成分: ($K_{ijkl} = \frac{A}{2\ell^2} (\tilde{K}_{ijkl})$)

2222	$72/35$	2223	$-9/35$	2225	$-72/35$	2226	$-9/35$
2233	$3/35$	2235	$9/35$	2255	$72/35$	2256	$9/35$
2266	$3/35$	2333	$1/140$	2335	$-3/35$	2336	$-1/140$
2355	$-9/35$	2366	$-1/140$	2555	$-72/35$	2556	$-9/35$
2566	$-3/35$	2666	$1/140$	3333	$2/35$	3335	$-1/140$
3336	$-1/140$	3355	$3/35$	3356	$1/140$	3366	$1/210$
3555	$9/35$	3566	$1/140$	3666	$-1/140$	5555	$72/35$
5556	$9/35$	5566	$3/35$	5666	$1/140$	6666	$2/35$

そこで軸方向変位は1階の微係数しか現われていないことから、式(5.16)の1次多項式で変位を仮定する。たわみも微小変位理論の場合と同様の条件でいいから、式(5.21)の3次多項式を用いることにする。これを仮想仕事式等に代入して整理すると、この場合は変位の非線形項が含まれていることから、剛性方程式も非線形になる。それは

$$\{F_i\} = \left(K_{ij} \right) \{u_j\} + \left(K_{ijk} \right) \{u_j\} \{u_k\} + \left(K_{ijkl} \right) \{u_j\} \{u_k\} \{u_l\} \tag{C.66}$$

と表現することができる。ただし、分布外力項は省略して

$$\{u_i\} \equiv [u_1/\ell \quad w_1/\ell \quad -w'_1 \quad u_2/\ell \quad w_2/\ell \quad -w'_2]^T, \quad \{F_i\} \equiv [F_1/E\ell^2 \quad S_1/E\ell^2 \quad C_1/E\ell^3 \quad F_2/E\ell^2 \quad S_2/E\ell^2 \quad C_2/E\ell^3]^T \tag{C.67a, b}$$

の順番で左辺の配列の成分を定義した。剛性行列 (K_{ij}) 等はすべての添え字に対して対称な(入れ替えても同じ値を持つ)配列として定義できる。その具体的な値を表C.1~C.3に与えた。線形部分の (K_{ij}) は式(5.39)で定義した微小変位理論の剛性行列に一致する。

式(C.66)の形は計算機で解く場合には何の不都合も無い形式をしているが、これを敢えて行列表示すること

もできる。そこで、非線形項の最初の部分だけを行列表示してみよう。すなわち

$$\left(K_{ijk} \right) \left\{ u_j \right\} \left\{ u_k \right\} \rightarrow \left(K_{ij}^G \right) \left\{ u_j \right\}$$

のように表示してみたい。この $\left(K_{ij}^G \right)$ はもちろん $\left\{ u_m \right\}$ の関数行列となる。まず対称行列になるように並べると

$$\left(K_{ij}^G \right) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -c/El^2 & a/El^2 & 0 & c/El^2 & b/El^2 \\ & 6N_0/5El^2 & -N_0/10El^2 & c/El^2 & -6N_0/5El^2 & -N_0/10El^2 \\ & & 2N_0/15El^2 & -a/El^2 & N_0/10El^2 & -N_0/30El^2 \\ & & & 0 & -c/El^2 & -b/El^2 \\ & & & & 6N_0/5El^2 & N_0/10El^2 \\ \text{Symm.} & & & & & 2N_0/15El^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.68})$$

と表すことができる。ここに

$$N_0 \equiv EA \left(\frac{u_2 - u_1}{\ell} \right), \quad a \equiv \frac{EA}{30} \left(-4w'_1 + w'_2 - 3 \frac{w_2 - w_1}{\ell} \right), \quad (\text{C.69a, b})$$

$$b \equiv \frac{EA}{30} \left(w'_1 - 4w'_2 - 3 \frac{w_2 - w_1}{\ell} \right), \quad c \equiv \frac{EA}{10} \left(-w'_1 - w'_2 - 12 \frac{w_2 - w_1}{\ell} \right) \quad (\text{C.69c, d})$$

と置いたが、 N_0 は近似的にこの有限要素の軸力と考えていい。あるいは、対称ではない形式で示すこともでき、その場合は

$$\left(K_{ij}^G \right) = \begin{pmatrix} 0 & -c/2El^2 & a/2El^2 & 0 & c/2El^2 & b/2El^2 \\ 0 & 6N_0/5El^2 & -N_0/10El^2 & 0 & -6N_0/5El^2 & -N_0/10El^2 \\ 0 & -N_0/10El^2 & 2N_0/15El^2 & 0 & N_0/10El^2 & -N_0/30El^2 \\ 0 & c/2El^2 & -a/2El^2 & 0 & -c/2El^2 & -b/2El^2 \\ 0 & -6N_0/5El^2 & N_0/10El^2 & 0 & 6N_0/5El^2 & N_0/10El^2 \\ 0 & -N_0/10El^2 & -N_0/30El^2 & 0 & N_0/10El^2 & 2N_0/15El^2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.70})$$

と書くことができる。この行列の第 1, 4 行を除いた部分は式 (6.64) で定義した幾何剛性行列の P を N_0 で置き換えたもの³と等価な対称行列になっている。

式 (C.70) で式 (6.64) の幾何剛性に含まれていない部分には、 u_1, u_2 は全く含まれず、たわみ w およびたわみ角 w' の 2 次項しか含まれていない。また式 (C.66) の右辺第 3 項もすべて同様の非線形項である。このことから、幾何剛性行列の式 (6.64) が座屈点近傍までの範囲での「第 1 次近似」としては十分な精度を持っていることが明らかだ。ちなみに、式 (6.64) の幾何剛性の通常の誘導は、式 (C.61) のひずみ変位関係を仮想仕事の式 (C.63) に代入して変分することによって得ることができる内力仮想仕事項を、まず

$$\int_x (N \delta \epsilon + M \delta \kappa) dx = \int_x (N \delta u' + Nw' \delta w' + M \delta \kappa) dx$$

とする。その上で、被積分関数の第 1 項の N を $N \approx EAu'$ と近似した上で、第 2 項の N を外力圧縮力で $N = -P$ と置き換え、モーメントと曲率の関係を代入して

$$\int_x (EAu' \delta u' - Pw' \delta w' + EIw'' \delta w'') dx \quad (\text{C.71})$$

と表される仮想仕事式に適切な変位関数を代入することによっても式 (6.64) の幾何剛性を得ることができる。

³ 式 (6.64) の幾何剛性行列に負の符号がついているのは P を圧縮力で定義したからである。

(2) Timoshenko 梁の場合

ここでは Timoshenko 梁の幾何剛性を求めるために、線形化した仮想仕事式から定式化を始める。詳細は文献 [32] を参照のこと。外力仮想仕事は Bernoulli-Euler 梁と同じなので割愛し、内力仮想仕事項と軸圧縮力 P の仮想仕事項だけを示すと

$$\int_0^{\ell} (EI \vartheta' \delta \vartheta' - P w' \delta w' + Gk_T A \gamma \delta \gamma) dx \quad (C.72)$$

となる。付録 B でも述べたように、精度のいいものを得るには、たわみ w には 3 次の多項式を仮定し、せん断変形 γ に一定を仮定した上で、最終的には γ を消去する必要がある。外力ベクトルと変位ベクトルを

$$\{f\} \equiv [S_1 \ell^2/EI \quad C_1 \ell/EI \quad S_2 \ell^2/EI \quad C_2 \ell/EI]^T, \quad \{u\} \equiv [w_1/\ell \quad \vartheta_1 \quad w_2/\ell \quad \vartheta_2]^T \quad (C.73a, b)$$

と定義すると、要素剛性方程式は

$$\{f\} = \left(\left(K^L \right) - \frac{P\ell^2}{EI} \left(K^{NL} \right) \right) \{u\} \quad (C.74)$$

と求められる。ここに ℓ は有限要素の長さである。行列 (K^{NL}) が幾何剛性行列である。具体的には

$$\left(K^L \right) = \frac{1}{\Delta_0} \begin{pmatrix} 12 & -6 & -12 & -6 \\ & 4 + 12\alpha_T & 6 & 2 - 12\alpha_T \\ & & 12 & 6 \\ \text{Symm.} & & & 4 + 12\alpha_T \end{pmatrix}, \quad \left(K^{NL} \right) = \frac{1}{\Delta_0^2} \begin{pmatrix} 6\Delta_1/5 & -1/10 & -6\Delta_1/5 & -1/10 \\ & 2/15 + \Delta_2 & 1/10 & -1/30 - \Delta_2 \\ & & 6\Delta_1/5 & 1/10 \\ \text{Symm.} & & & 2/15 + \Delta_2 \end{pmatrix} \quad (C.75a, b)$$

になる。また

$$\Delta_0 \equiv 1 + 12\alpha_T, \quad \Delta_1 \equiv 1 + 10\Delta_2, \quad \Delta_2 \equiv 2\alpha_T + 12\alpha_T^2 \quad (C.76a, b, c)$$

と定義した。ちなみにこれは後述する「伸び無視」の「第 1 次近似」モデルに相当する。

C.5 断面変形する薄肉円管梁理論

C.5.1 運動場

ここは第 1 著者の卒業論文の中身だが、青焼きが消える前に見える部分を写しておく。不鮮明な箇所もあったので写し間違いがあるかもしれないので注意して欲しい。対象は図 6.15 のように、円管が曲がるにつれて断面が扁平になっていく挙動である。その手法は当時よく用いられていた Vlasov 流のもので、断面変形パターンを仮定した上で、仮想仕事の原理⁴で支配方程式を求める手法だ。 x 軸を円管の中心に置き、円管肉厚中心面に沿って s 座標を、中心面から中心向きに n 座標を定義する。肉厚中心面の半径を r_0 とし、肉厚を t とする。ただし径厚比 r_0/t は大きい（薄い）ものとする。極座標の (r, ψ) との関係は、したがって $r = r_0 - n$, $ds = r_0 d\psi$ となる。曲げは z - x 面内で生じるものとする。梁理論の拡張だから、ひずみ場に対する仮定はまず

$$E_{zx} = 0, \quad E_{zz} = 0 \quad (C.77a, b)$$

である。断面変形に関しては、応力に対する推測が

$$S_{nx} = 0, \quad S_{sn} = 0, \quad S_{mm} = 0, \quad S_{ss}^* = 0, \quad \oint_s S_{sx}^* ds = 0 \quad (C.78a, b, c, d, e)$$

⁴ 学部の構造力学の講義に出てくるわけのわからない原理でこんなことができるのだという、とても新鮮な衝撃を受けたテーマだった。

でいいだろう。ここに上付きのアスタリスクは肉厚中心面上での値であることを示す。これと Hooke の法則を眺めた上で、ひずみ場の仮定は

$$E_{nx} = 0, \quad E_{sn} = 0, \quad E_{mm} = 0, \quad E_{ss}^* = 0, \quad \oint_s E_{sx}^* ds = 0 \quad (\text{C.79a, b, c, d, e})$$

で良さそうだ。

このひずみ場の仮定に対応する変位場は

$$u = u_0 + (\bar{\xi} \sin \psi + \bar{\eta} \cos \psi - r \cos \psi) \sin \theta + \bar{u} \cos \theta, \quad v = \bar{\xi} \cos \psi - \bar{\eta} \sin \psi, \quad (\text{C.80a, b})$$

$$w = w_0 + r \cos \psi + (\bar{\xi} \sin \psi + \bar{\eta} \cos \psi - r \cos \psi) \cos \theta - \bar{u} \sin \theta \quad (\text{C.80c})$$

となる。ここに上付きのバーは断面変形成分を表し、断面変形による変位の s, n, x 方向成分をそれぞれ $\bar{\xi}, \bar{\eta}, \bar{u}$ とした。また θ はたわみ角で、ここではせん断変形を無視しているので

$$\tan \theta = -\frac{w'_0}{1 + u'_0} \quad (\text{C.81})$$

という関係がある。ここにプライムは x に関する微分を表す。この変位場が式 (C.79) のひずみ場の仮定を満足するためには

$$\bar{\xi} = \bar{\xi}^*(\psi, x) - n \cos \alpha_1 \sin \alpha, \quad \bar{\eta} = \bar{\eta}^*(\psi, x) + n (\cos \alpha_1 \cos \alpha - 1), \quad \bar{u} = -n \sin \alpha_1, \quad (\text{C.82a, b, c})$$

$$\dot{\bar{\xi}}^* = \dot{\bar{\eta}}^*, \quad \tan \alpha(\psi, x) = \frac{\bar{\xi}^* + \dot{\bar{\eta}}^*}{r_0 + \dot{\bar{\xi}}^* - \dot{\bar{\eta}}^*}, \quad \tan \alpha_1(\psi, x) = \frac{\bar{\eta}^* \cos \alpha - \dot{\bar{\xi}}^* \sin \alpha}{\sqrt{g_0} + \theta' (\bar{\xi} \sin \psi + \bar{\eta} \cos \psi - r \cos \psi)} \quad (\text{C.82d, e, f})$$

であればいい。ここに上付きドットは ψ に関する微分を表す。また

$$g_0 \equiv (1 + u'_0)^2 + (w'_0)^2 \quad (\text{C.83})$$

と定義した。 α と α_1 は、断面変形によって肉厚面が断面内と長手方向に傾く角度である。

断面変形は、梁そのものの動きに比べればせいぜい断面寸法程度なので、ここでは微小と考えて線形化する。また、断面の変形パターンを想定することによって変数分離をして

$$\bar{\xi}^* = r_0 f(x) \Phi_1(\psi), \quad \bar{\eta}^* = r_0 f(x) \Phi_2(\psi) \quad (\text{C.84a, b})$$

のように置くことにする。力学的考察から Φ_2 は $\cos 2\psi$ が主要な関数であることはわかる。それを用いて式 (C.79) のひずみ場の仮定に代入すれば Φ_1 が求められて、結局

$$\Phi_1 = \frac{1}{2} \sin 2\psi, \quad \Phi_2 = \cos 2\psi \quad (\text{C.85a, b})$$

と求めることができる。つまり楕円形に変形するモードである。これより f の高次項をすべて無視すれば

$$\tan \alpha \simeq \sin \alpha \simeq f \phi, \quad \tan \alpha_1 \simeq \sin \alpha_1 \simeq r_0 f' \Phi_2, \quad \cos \alpha \simeq 1, \quad \cos \alpha_1 \simeq 1, \quad \phi \equiv \Phi_1 + \dot{\Phi}_2 \quad (\text{C.86a, b, c, d, e})$$

と近似できる。以上の考察から、変位場が

$$u(x, r, \psi) = u_0(x) + Z \sin \theta(x) - n r_0 f'(x) \Phi_2 \cos \theta(x), \quad (\text{C.87a})$$

$$w(x, r, \psi) = w_0(x) + r \cos \psi + Z \cos \theta(x) + n r_0 f'(x) \Phi_2 \sin \theta(x), \quad (\text{C.87b})$$

$$\xi(x, r, \psi) = w_0(x) \sin \psi + f(x) (r_0 \Phi_1 - n \phi) + Z \sin \psi \{\cos \theta(x) - 1\} + n r_0 f'(x) \Phi_2 \sin \psi \sin \theta(x), \quad (\text{C.87c})$$

$$\eta(x, r, \psi) = w_0(x) \cos \psi + r_0 f(x) \Phi_2 + Z \cos \psi \{\cos \theta(x) - 1\} + n r_0 f'(x) \Phi_2 \cos \psi \sin \theta(x) \quad (\text{C.87d})$$

と求められる。ただし Z は、断面変形で縮んだ実質的な z 方向の x 軸からの距離 ($z + (\text{断面変形})$) で

$$Z = \bar{\xi} \sin \psi + \bar{\eta} \cos \psi - r \cos \psi = -r \cos \psi + f Z_f, \quad Z_f \equiv (r_0 \Phi_1 - n \phi) \sin \psi + r_0 \Phi_2 \cos \psi \quad (\text{C.88a, b})$$

と定義した。すなわち、断面変形が無ければ基本的な未知関数は u_0, w_0 の二つの変位、つまり図心の面内の変位のみになる。そこに、式 (C.84) で仮定したパターン Φ_i ($i = 1, 2$) の振幅 $f(x)$ をもう一つの未知関数として加えることによって、断面変形の自由度を持つ梁理論が定式化できたことになる。

C.5.2 支配方程式

以上の変位場を極座標系の仮想仕事式に代入すれば、すべての支配方程式を Euler 方程式として求めることができる。通常の梁理論と違うのは断面変形のパラメータ f が加わっていることで、この変分原理から断面変形に関する付加的な「つり合い式」を得ることができる。定式化は冗長なので（間違っているかもしれないから。呵呵）省略すると、つり合い式が

$$P_{ss} + N_f + M_f'' - M'_{sx} - m_{zf} \cos \theta - m_{xf} \sin \theta - (M_{zf} \sin \theta)' + (M_{xf} \cos \theta)' = 0, \quad (\text{C.89a})$$

$$(N \cos \theta + M'_{xz} \sin \theta)' + p_x + \left\{ \sin \theta (-m_{zz} \sin \theta + m_{xz} \cos \theta - f' M_{zf} \cos \theta - f' M_{xf} \sin \theta) \right\}' = 0, \quad (\text{C.89b})$$

$$(-N \sin \theta + M'_{xz} \cos \theta)' + p_z + \left\{ \cos \theta (-m_{zz} \sin \theta + m_{xz} \cos \theta - f' M_{zf} \cos \theta - f' M_{xf} \sin \theta) \right\}' = 0 \quad (\text{C.89c})$$

と求められる。一番上の式が、断面変形に関係した「つり合い式」である。一方、境界条件は

$$f = \text{与える} \quad \text{or} \quad (\text{C.90a})$$

$$M_{sx} - M'_f + M_{zf} \sin \theta - M_{xf} \cos \theta = n_i \left\{ \bar{M}_{zf} (\cos \theta - 1) + \bar{M}_{xf} \sin \theta + \bar{M}_{sf} + \bar{M}_{nf} \right\},$$

$$f' = \text{与える} \quad \text{or} \quad M_f = n_i \left(\bar{M}_f \cos \theta - \bar{M}_{ff} \sin \theta \right), \quad (\text{C.90b})$$

$$u_0 = \text{与える} \quad \text{or} \quad (\text{C.90c})$$

$$N \cos \theta + M'_{xz} \sin \theta + \sin \theta (-m_{zz} \sin \theta + m_{xz} \cos \theta - f' M_{zf} \cos \theta - f' M_{xf} \sin \theta) = n_i \bar{N},$$

$$w_0 = \text{与える} \quad \text{or} \quad (\text{C.90d})$$

$$-N \sin \theta + M'_{xz} \cos \theta + \cos \theta (-m_{zz} \sin \theta + m_{xz} \cos \theta - f' M_{zf} \cos \theta - f' M_{xf} \sin \theta) = n_i \bar{V},$$

$$\theta = \text{与える} \quad \text{or} \quad M_{xz} = n_i \left(\bar{M}_{xz} \cos \theta - \bar{M}_{zz} \sin \theta - f' \bar{M}_f \sin \theta - f' \bar{M}_{ff} \cos \theta \right) \quad (\text{C.90e})$$

となる。最初の二つの式が断面変形に関する境界条件である。

各断面力は次のように定義した。

$$N \equiv \int_A \sigma \, dA, \quad M_{xz} \equiv \int_A \sigma Z \, dA, \quad N_f \equiv \int_A \sigma (\theta' Z_f) \, dA, \quad M_f \equiv \int_A \sigma (-n r_0 \Phi_2) \, dA, \quad (\text{C.91a, b, c, d})$$

$$P_{ss} \equiv \int_A S_{ss} \left(-\frac{n}{r} \phi \right) \, dA, \quad M_{sx} \equiv \int_A S_{sx} \left\{ r_0 \Phi_1 - n \left(\phi + \frac{r_0}{r} \Phi_2 \right) \right\} \, dA \quad (\text{C.91e, f})$$

また外力については、物体中の分布外力を X_x, X_z で定義し、端面の表面外力を F_s, F_n, F_x と定義した上で、次のように定義した。

$$\begin{aligned} p_z &\equiv \int_A X_z \, dA, & p_x &\equiv \int_A X_x \, dA, & m_{zz} &\equiv \int_A X_z z \, dA, & m_{xz} &\equiv \int_A X_x z \, dA, & m_{zf} &\equiv \int_A X_z Z_f \, dA, \\ m_{xf} &\equiv \int_A X_x Z_f \, dA, & m_{zz} &\equiv \int_A X_z Z \, dA = m_{zz} + f m_{zf}, & m_{xz} &\equiv \int_A X_x Z \, dA = m_{xz} + f m_{xd}, \\ M_{zf} &\equiv \int_A X_z (-n r_0 \Phi_2) \, dA, & M_{xf} &\equiv \int_A X_x (-n r_0 \Phi_2) \, dA, \end{aligned} \quad (\text{C.92})$$

$$\begin{aligned}
\bar{N} &\equiv \int_A F_x dA, & \bar{M}_{xz} &\equiv \int_A F_x z dA, & \bar{M}_{Xf} &\equiv \int_A F_x Z_f dA, & \bar{M}_{XZ} &\equiv \int_A F_x Z dA = \bar{M}_{xz} + f \bar{M}_{Xf}, \\
\bar{M}_f &\equiv \int_A F_x (-n r_0 \Phi_2) dA, & \bar{V} &\equiv \int_A (F_s \sin \psi + F_n \cos \psi) dA, \\
\bar{M}_{zz} &\equiv \int_A (F_s \sin \psi + F_n \cos \psi) z dA, & \bar{M}_{Zf} &\equiv \int_A (F_s \sin \psi + F_n \cos \psi) Z_f dA, \\
\bar{M}_{ZZ} &\equiv \int_A (F_s \sin \psi + F_n \cos \psi) Z dA = \bar{M}_{zz} + f \bar{M}_{Zf}, & \bar{M}_{ff} &\equiv \int_A (F_s \sin \psi + F_n \cos \psi) (-n r_0 \Phi_2) dA, \\
\bar{M}_{sf} &\equiv \int_A F_s (r_0 \Phi_1 - n \phi) dA, & \bar{M}_{nf} &\equiv \int_A F_n (r_0 \Phi_2) dA.
\end{aligned}$$

C.5.3 断面力の変位表示

定義に応力ひずみ関係を代入すれば、断面力を変位および断面変形のパラメータ f で表現できる。ただし、微小ひずみの仮定から軸方向の伸びひずみ e を

$$e \simeq \epsilon + Z \theta' - n r_0 \Phi_2 f'', \quad \epsilon \equiv u_0' + \frac{1}{2} \left\{ (u_0')^2 + (w_0')^2 \right\} \quad (\text{C.93a, b})$$

と近似した上で、応力ひずみ関係を

$$\sigma = Ee, \quad S_{ss} = E E_{ss}, \quad E_{ss} = -f \frac{n}{r_0} \dot{\phi}, \quad S_{sx} = 2G E_{sx}, \quad 2E_{sx} = r_0 f' \Phi_1 - n f' \left(\phi + \frac{r_0}{r} \dot{\Phi}_2 \right) \quad (\text{C.94a, b, c, d, e})$$

と仮定した。ここに E は Young 率で、 G はせん断弾性係数である。これを用いると断面力と変位の関係は

$$N = EA \left(u_0' + \frac{1}{2} \left\{ (u_0')^2 + (w_0')^2 \right\} \right), \quad A \equiv \int_A dA = 2\pi r_0 t, \quad (\text{C.95a, b})$$

$$M_{XZ} = EI_{ZZ} \theta', \quad I_{ZZ} \equiv \int_A Z^2 dA = \pi r_0^3 t - f \frac{3\pi r_0^3 t}{2}, \quad (\text{C.95c, d})$$

$$P_{ss} = EA_1 f, \quad A_1 \equiv \int_A \left(-\frac{n}{r} \dot{\phi} \right)^2 dA = \frac{3\pi t^3}{4r_0}, \quad (\text{C.95e, f})$$

$$M_{sx} = GI_s f', \quad I_s \equiv \int_A \left\{ r_0 \Phi_1 - n \left(\phi + \frac{r_0}{r} \dot{\Phi}_2 \right) \right\}^2 dA = \frac{\pi}{4} r_0^3 t, \quad (\text{C.95g, h})$$

$$N_f = EI_1 (\theta')^2, \quad I_1 \equiv \int_A Z_f Z dA = -\frac{3\pi r_0^3 t}{4} + f \frac{5\pi r_0^3 t}{8}, \quad (\text{C.95i, j})$$

$$M_f = EI_2 f'', \quad I_2 \equiv \int_A (-n r_0 \Phi_2)^2 dA = \frac{\pi r_0^3 t^3}{12} \quad (\text{C.95k, l})$$

と表される。

最終的に以上の関係式をつり合い式に代入すると、 f については 4 階の常微分方程式になる。これは f そのものと f' の境界条件が規定されていることとも対応している。したがって、ここでは示さないが、以上の支配方程式に対応する仮想仕事式に戻って、 f にも適切な「変位関数」を仮定すれば有限要素の定式化もできる。 f にも w と同様の 3 次の多項式を仮定すればいい。

C.5.4 安定問題

例として、等曲げを受ける単純梁を対象としよう。ただし、ダイアフラムを付けず、自由に断面変形できるようにする。等曲げだから、モーメントと断面変形は x 方向には一定と考えていい。そうすると、つり合い式 (C.89a) は

$$\left(6 + 5 \frac{\kappa^2 r_0^4}{t^2} \right) f = 6 \frac{\kappa^2 r_0^4}{t^2} \quad (\text{C.96})$$

となる。ここに κ は曲率 (θ') である。ここで無次元曲率と無次元集中モーメントを

$$\bar{k} \equiv \frac{\kappa r_0^2}{t}, \quad \bar{m} \equiv \frac{\bar{M}}{\pi E r_0 t^2} \quad (C.97a, b)$$

と定義しておく。式 (C.95) のモーメントと変形の関係から、無次元集中モーメントは

$$\bar{m} = \bar{k} \left(1 - \frac{3f}{2}\right) \quad (C.98)$$

となる。したがって、式 (C.96) (C.98) から集中モーメントと曲率の関係は

$$\bar{m} = \bar{k} \left(1 - \frac{9\bar{k}^2}{6 + 5\bar{k}^2}\right) \quad (C.99)$$

と求められ、結果を図 6.15 と図 C.3 に示した。

これに対し、輪を扁平にしていく解析と曲げを連成させて解析した研究 [78] がある。そこで求められている断面変形をここで用いた変位成分で表すと

$$\frac{\bar{\xi}^*}{r_0} = \left(\frac{k_0}{2} + \frac{11k_0^2}{6}\right) \sin 2\psi + \frac{3}{16} k_0^2 \sin 4\psi, \quad (C.100a)$$

$$\frac{\bar{\eta}^*}{r_0} = \left(k_0 + \frac{2k_0^2}{3}\right) \cos 2\psi + \frac{3}{16} k_0^2 (\cos 4\psi + 3), \quad (C.100b)$$

$$k_0 \equiv (1 - \nu^2) \bar{k}^2 \quad (C.100c)$$

のように、曲率の高次項までが入った解になっている。これと式 (C.84) を比較すれば明らかなように、1 次項はこのアプローチと一致している。

そこで、式 (C.100) の Reissner の解を参考にして、 k_0 をここで導入した断面変形のパラメータ f で置き換え

$$\frac{\bar{\xi}^*}{r_0} = \frac{1}{2} f \sin 2\psi + \frac{3}{16} f^2 \sin 4\psi,$$

$$\frac{\bar{\eta}^*}{r_0} = f \cos 2\psi + \frac{3}{16} f^2 (\cos 4\psi + 3)$$

のような断面変形を仮定しよう。これを用いて仮想仕事の原理で再度定式化して、つり合い式を解くと

$$f = \frac{16}{45\bar{k}^2} \left\{ \frac{\bar{k}^2}{2} - \frac{3}{4} + \sqrt{\frac{9}{16} - \frac{3\bar{k}^2}{4} + \frac{143\bar{k}^4}{32}} \right\} \quad (C.101)$$

を得る。このとき断面力と変形の関係は

$$\bar{m} = \bar{k} \left(1 - \frac{3f}{2} - \frac{1}{2} f^2\right) \quad (C.102)$$

となるので、この式 (C.101) (C.102) から、式 (C.99) より若干柔らかい応答が予測される。そのようにして得た結果が図 C.3 の「2次」であり、最大集中モーメントを文献の結果等と比較したのが表 C.4 である。

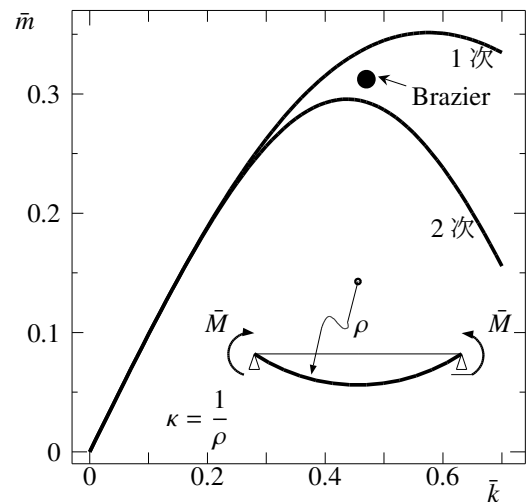


図 C.3 等曲げで断面変形する単純梁

表 C.4 等曲げで扁平になる単純梁の最大集中モーメント

	本解析手法		Reissner の結果	
	1 次項のみ	2 次項まで	3 次項まで	数値解析
\bar{m}_{MAX}	0.351	0.296	0.289	0.307
\bar{k}_{cr}	0.576	0.437	0.416	0.441

C.6 数値解析法

C.6.1 2点境界値問題の一解法

複雑な系については次節の有限要素法を使わざるを得ないが、1 スパンの2点境界値問題であれば、微分方程式を直接数値積分して解を求めることができる。まず左端で与えられた境界条件に加えて未知の量も適当に仮定して右端に向かって数値積分する。次に、その右端の結果と右端で与えられた境界条件の差を解消するように、今度は右から左に（随伴系の微分方程式を）数値積分して左端の未知量を更新する。これを繰り返すことによって解を得ることができる。非線形微分方程式であっても数値積分は容易だ。この節には基礎式となる1階連立常微分方程式を列挙するに留め、数値積分の方法 (method of adjoints) については文献 [80] を参照して欲しい。なお、以下の1階常微分方程式は表 C.5 にも別の表現を用いてまとめた。

長さ ℓ の梁に対する無次元化した連立微分方程式にするために以下の量と微分を定義する。

$$z_1 \equiv \frac{(N \cos \vartheta + V \sin \vartheta) \ell^2}{EI}, \quad z_2 \equiv \frac{(-N \sin \vartheta + V \cos \vartheta) \ell^2}{EI}, \quad (\text{C.103a, b})$$

$$z_3 \equiv \frac{M \ell}{EI}, \quad z_4 \equiv \frac{u}{\ell}, \quad z_5 \equiv \frac{w}{\ell}, \quad z_6 \equiv \vartheta, \quad (\cdot) \equiv \frac{d(\cdot)}{d(x/\ell)} \quad (\text{C.103c, d, e, f, g})$$

すると、まず伸びを考慮した第2次近似理論の場の方程式は

$$\dot{z}_1 = -q_1, \quad (\text{C.104a})$$

$$\dot{z}_2 = -q_2, \quad (\text{C.104b})$$

$$\dot{z}_3 = \left\{ 1 + \beta^2 (1 - \alpha'_T) y_1 \right\} y_2, \quad (\text{C.104c})$$

$$\dot{z}_4 = (1 + \beta^2 y_1) \cos z_6 + \alpha'_T \beta^2 y_2 \sin z_6 - 1, \quad (\text{C.104d})$$

$$\dot{z}_5 = -(1 + \beta^2 y_1) \sin z_6 + \alpha'_T \beta^2 y_2 \cos z_6, \quad (\text{C.104e})$$

$$\dot{z}_6 = z_3 \quad (\text{C.104f})$$

と表すことができる。ここに

$$\alpha'_T \equiv \frac{E}{k_T G}, \quad y_1 \equiv z_1 \cos z_6 - z_2 \sin z_6, \quad y_2 \equiv z_1 \sin z_6 + z_2 \cos z_6, \quad q_1 \equiv \frac{p \ell^3}{EI}, \quad q_2 \equiv \frac{q \ell^3}{EI} \quad (\text{C.105a, b, c, d, e})$$

と定義した。ここに α'_T は α_T を若干定義し直したパラメータである。これに対し、第1次近似理論の場合は、上式のうち

$$\dot{z}_3 = y_2 \frac{1 + \beta^2 y_1}{1 + \frac{\alpha'_T \beta^2 y_1}{1 + \beta^2 y_1}}, \quad \dot{z}_4 = (1 + \beta^2 y_1) \cos z_6 + \frac{\alpha'_T \beta^2 y_2 \sin z_6}{1 + \frac{\alpha'_T \beta^2 y_1}{1 + \beta^2 y_1}} - 1, \quad (\text{C.106a, b})$$

$$\dot{z}_5 = -(1 + \beta^2 y_1) \sin z_6 + \frac{\alpha'_T \beta^2 y_2 \cos z_6}{1 + \frac{\alpha'_T \beta^2 y_1}{1 + \beta^2 y_1}} \quad (\text{C.106c})$$

の3式が変更になる。

また伸びを無視した場合、まず第2次近似のつり合い式のうちの式 (C.104c) を

$$\dot{z}_3 = (1 - \alpha'_T \beta^2 y_1) y_2 \quad (\text{C.107})$$

で置き換えればよい。また第1次近似の式 (C.106) の場合は次のようになる。

$$\dot{z}_3 = \frac{y_2}{1 + \alpha'_T \beta^2 y_1}, \quad \dot{z}_4 = (1 + \beta^2 y_1) \cos z_6 + \frac{\alpha'_T \beta^2 y_2 \sin z_6}{1 + \alpha'_T \beta^2 y_1} - 1, \quad (\text{C.108a, b})$$

$$\dot{z}_5 = -(1 + \beta^2 y_1) \sin z_6 + \frac{\alpha'_T \beta^2 y_2 \cos z_6}{1 + \alpha'_T \beta^2 y_1} \quad (\text{C.108c})$$

C.6.2 一つの有限要素解析法 — 有限変位の枠組の中で

(1) 微小ひずみの枠組の中で有限回転を考慮する原理

ここでは弾性範囲の有限変位理論を取り扱っているので、微小ひずみの仮定に基づき、簡便だが精度良く有限回転する棒を有限要素解析する手法の一つ [46] を説明する。変形の一般的な記述に極分解の定理 [61] がある。これは式 (12.17) で表されるが、簡単に言うと、全体の変形勾配は回転成分とひずみ成分の積で表されるというものである。つまり微小なひずみのまま大きくたわむピアノ線のようなものを対象とする限りは、大きく見える変位成分から回転成分を除いてしまうと、実質的に変形に寄与する変位成分の大きさは非常に小さいことを示唆している。この定理を念頭に置き、次のように考えて剛性方程式を仮定しよう。

ある有限要素を取り出したとき、例えば左節点の断面のたわみ角分だけ回転した要素座標系で見ると、要素長を短くすればするほどその左右端の相対変位（たわみ角も含む）は小さくなり、その相対変位については微小変位理論の剛性方程式が成立すると考えるのである（図は文献 [46] を参照のこと）。つまり、ある代表的な構造物の長さを L としたときに、外力ベクトルと変位ベクトルを

$$\mathbf{f}_i \equiv \left[F_i L^2 / EI \quad S_i L^2 / EI \quad C_i L / EI \right]^T, \quad \mathbf{d}_i \equiv [u_i / L \quad w_i / L \quad \vartheta_i]^T \quad (\text{C.109a, b})$$

と定義して、有限変位の平面骨組の要素剛性方程式を

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{T} \mathbf{k}_1 \mathbf{T}^T \{\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 - \mathbf{D}\}, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{T} \mathbf{k}_2 \mathbf{T}^T \{\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 - \mathbf{D}\} \quad (\text{C.110a, b})$$

で近似するのだ。右辺のベクトルは左端に対する右端の相対変位ベクトルである。ここで \mathbf{T} は左の節点の断面の回転角 ϑ_1 で定義される座標変換行列で、 \mathbf{D} は要素の剛体変位成分で

$$\mathbf{T} \equiv \begin{pmatrix} \cos \vartheta_1 & \sin \vartheta_1 & 0 \\ -\sin \vartheta_1 & \cos \vartheta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{D} \equiv \begin{bmatrix} \frac{\cos \vartheta_1 - 1}{\xi} & \frac{-\sin \vartheta_1}{\xi} & 0 \end{bmatrix}^T, \quad \xi \equiv \frac{L}{\ell} \quad (\text{C.111a, b, c})$$

と定義した。ここに ℓ は有限要素の長さである。また剛性行列は、例えば Timoshenko 梁の式 (C.75) を用いて（第 1, 2 次近似モデルの違いを厳密に区別した剛性行列は第 C.6.2 (3) 節に示す）

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_i^L + z_0 \mathbf{k}_i^{\text{NL}}, \quad z_0 \equiv \frac{(\text{要素軸力})L^2}{EI} = \left\{ \left(\frac{u_2 - u_1}{L} - \frac{\cos \vartheta_1 - 1}{\xi} \right) \cos \vartheta_1 - \left(\frac{w_2 - w_1}{L} + \frac{\sin \vartheta_1}{\xi} \right) \sin \vartheta_1 \right\} \frac{\xi}{\beta^2} \quad (\text{C.112a, b})$$

のように幾何剛性成分に相当する成分を分離すると

$$\mathbf{k}_1^L \equiv \begin{pmatrix} -\frac{\xi}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12\xi^3}{\Delta_0} & -\frac{6\xi^2}{\Delta_0} \\ 0 & \frac{6\xi^2}{\Delta_0} & \frac{(2-12\phi)\xi}{\Delta_0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_1^{\text{NL}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6\Delta_1\xi}{5\Delta_0^2} & -\frac{1}{10\Delta_0^2} \\ 0 & \frac{1}{10\Delta_0^2} & \frac{-1/30 - \Delta_2}{\xi\Delta_0^2} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.113a, b})$$

$$\mathbf{k}_2^L \equiv \begin{pmatrix} \frac{\xi}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12\xi^3}{\Delta_0} & \frac{6\xi^2}{\Delta_0} \\ \text{Symm.} & \frac{(4+12\phi)\xi}{\Delta_0} & \end{pmatrix}, \quad \mathbf{k}_2^{\text{NL}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6\Delta_1\xi}{5\Delta_0^2} & \frac{1}{10\Delta_0^2} \\ \text{Symm.} & \frac{2/15 + \Delta_2}{\xi\Delta_0^2} & \end{pmatrix} \quad (\text{C.113c, d})$$

となる。ここに

$$\beta \equiv \frac{\sqrt{I/A}}{L}, \quad \alpha \equiv \frac{E}{Gk_T}, \quad \phi \equiv \alpha\beta^2\xi^2, \quad \Delta_0 \equiv 1 + 12\phi, \quad \Delta_1 \equiv 1 + 10\Delta_2, \quad \Delta_2 \equiv 2\phi + 12\phi^2 \quad (\text{C.114a, b, c, d, e, f})$$

と定義した。あとは式 (C.110) を Newton-Raphson 法で解けばいい。そのときの接線剛性 \mathbf{k}_t は式 (C.110) を \mathbf{d}_i で偏微分するだけなので

$$\mathbf{k}_t = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} & \mathbf{H}_{13} + \mathbf{S}_1 & \mathbf{H}_{14} & \mathbf{H}_{15} & \mathbf{H}_{16} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} & \mathbf{H}_{23} + \mathbf{S}_2 & \mathbf{H}_{24} & \mathbf{H}_{25} & \mathbf{H}_{26} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \vartheta_1 & \sin \vartheta_1 & g & \cos \vartheta_1 & -\sin \vartheta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{C.115})$$

のように求められる。ここに

$$\mathbf{H}_i \equiv [\mathbf{H}_{i1} \ \mathbf{H}_{i2} \ \mathbf{H}_{i3} \ \mathbf{H}_{i4} \ \mathbf{H}_{i5} \ \mathbf{H}_{i6}] = \mathbf{T}\mathbf{k}_i\mathbf{T}^T\mathbf{C}, \quad \mathbf{S}_i \equiv (\mathbf{Q}\mathbf{k}_i\mathbf{T}^T + \mathbf{T}\mathbf{k}_i\mathbf{Q}^T)(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 - \mathbf{D}), \quad (\text{C.116a, b})$$

$$\mathbf{P}_i \equiv \xi \mathbf{T}\mathbf{k}_i^{\text{NL}}\mathbf{T}^T(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 - \mathbf{D})/\beta^2, \quad (\text{C.116c})$$

$$\mathbf{C} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & -\sin \vartheta_1/\xi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -\cos \vartheta_1/\xi & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{Q} \equiv \begin{pmatrix} \sin \vartheta_1 & -\cos \vartheta_1 & 0 \\ \cos \vartheta_1 & \sin \vartheta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{C.116d, e})$$

$$g \equiv \{(u_2 - u_1)/L - (\cos \vartheta_1 - 1)/\xi\} \sin \vartheta_1 + \{(w_2 - w_1)/L + \sin \vartheta_1/\xi\} \cos \vartheta_1 \quad (\text{C.116f})$$

と置いた。例えば (n) ステップまでの解が求められているとすると、式 (C.110) から不釣り合い力を算定し、式 (C.115) の接線剛性を用いて、 $(n+1)$ ステップの修正解が

$$\begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix}^{(n)} + \left(\mathbf{k}_t^{(n)} \right)^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 - \{\mathbf{T}\mathbf{k}_1\mathbf{T}^T(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 - \mathbf{D})\}^{(n)} \\ \mathbf{f}_2 - \{\mathbf{T}\mathbf{k}_2\mathbf{T}^T(\mathbf{d}_2 - \mathbf{d}_1 - \mathbf{D})\}^{(n)} \end{pmatrix} \quad (\text{C.117})$$

のようにして求められる。右辺の接線剛性の逆行列がかかっている項が (n) ステップの不釣り合い力である。

収束は例えば

$$\frac{|\mathbf{d}^{(n+1)} - \mathbf{d}^{(n)}|}{|\mathbf{d}^{(n+1)}|} < \text{許容値}, \quad \mathbf{d} \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{d}_1 \\ \mathbf{d}_2 \end{pmatrix} \quad (\text{C.118a, b})$$

のようにすればいい。

(2) 数値解析例

図 C.4 は文献 [18] で対象とされた構造である。また図 C.5 は文献 [186] でも対象とされた浅いアーチで、AA' および BB' に分岐経路がある。文献では BB' は示されていないが、このアプローチでは見つけられた経路である。ここで定式化された接線剛性は非対称ではあるが、分岐前後で対角要素（固有値）に負の値が現れ、分岐点と荷重方向および変位方向のピークとでその数が変化する。図 C.6 には、斜張橋の塔が面外に座屈することを想定したものであるが、基部に向かって引張られて、魚のかかった釣竿のような柱の荷重変位関係を示した。ただし、最初に少しだけ曲がった柱に載荷している。図 6.13, 6.14 等も同じプログラムで数値的に解いて得たものである。

ここで用いたプログラムでは、メモリ節約等のためにスカイライン法 [23] を用い、安定な解析のために弧長法 [186] を併用した。またこのプログラムは、第 C.3.4 節で誘導した 4 種類の座屈公式のそれぞれに対応した剛性行列を用いて、それぞれのモデルの解を求めることができる。このような対応を表 C.5⁵ に示した。このプログラムもまえがき書いた方法で入手可能である。

(3) 面内梁の最も一般的な剛性行列

式 (C.112) の剛性行列の部分だけを二つの「第 1 次 (B), 第 2 次 (A) 近似」モデルに対して誘導するが、その詳細については文献 [42] を参照のこと。有限変位問題に対しても、微小変位（線形化された）理論の剛性行列

⁵ Bernoulli-Euler 梁の場合は非線形性を表す剛性（幾何剛性相当）を用いても用いなくても結果は同じになる。また微小伸び近似の場合の運動場で ϵ を無視してしまうと不伸張理論 (Elastica 相当) になってしまうので注意が必要である。

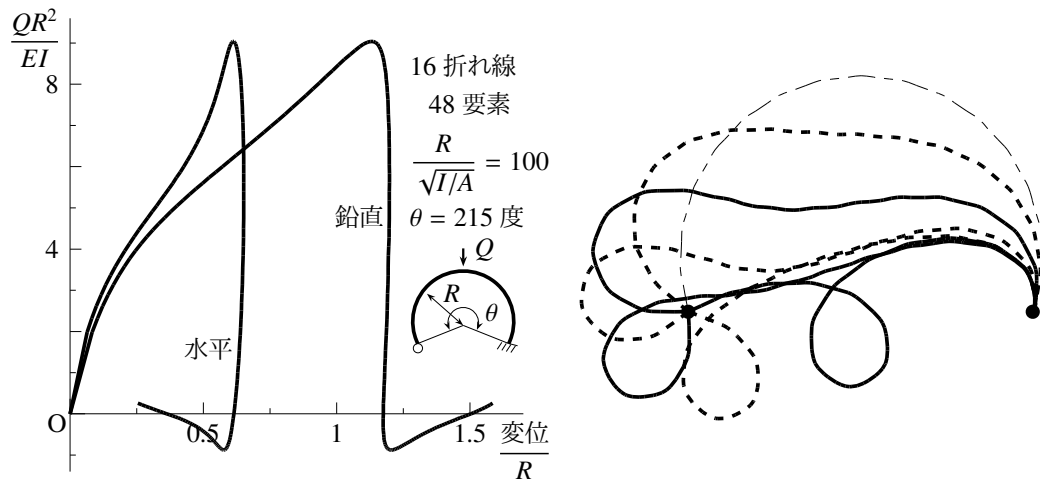


図 C.4 片端ヒンジで片端固定の深いアーチ頂点の荷重変位曲線と変形の進展

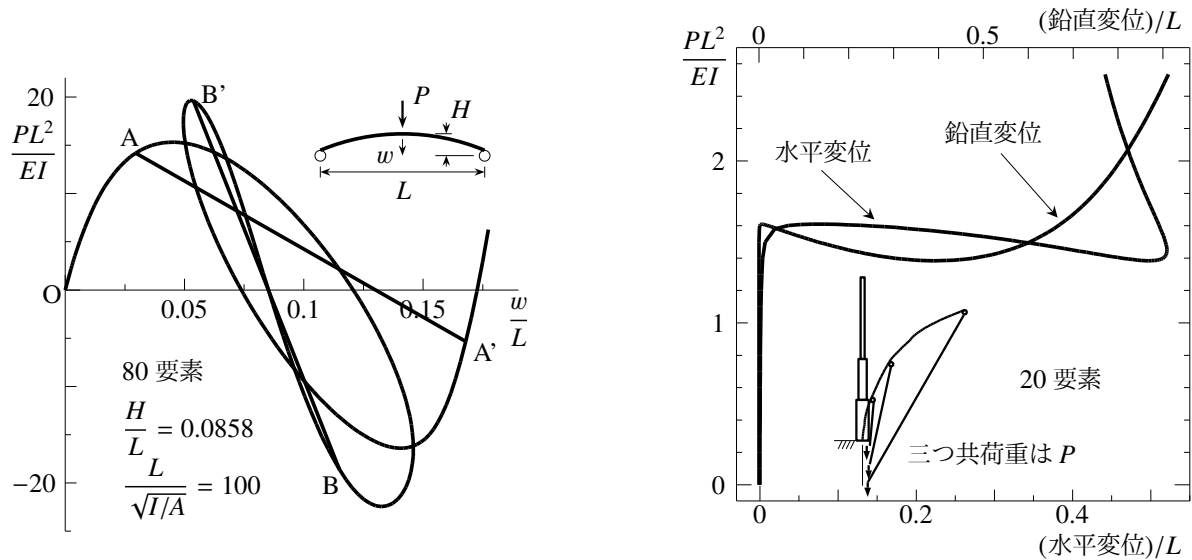


図 C.5 浅いアーチ頂点の荷重変位曲線

図 C.6 基部に向かって引張られる柱

を用いることができることを前節で示したので、ここには線形化された理論、つまり梁-柱理論レベルの剛性行列を示しておく。 $f \equiv [f_1 \ f_2]^T$ と定義して

$$f = (K^L + K_m^{NL}) d \quad (m = A, B), \quad K^L = \begin{pmatrix} K_1^L & K_2^L \\ K_2^{LT} & K_3^L \end{pmatrix}, \quad K_m^{NL} = z \begin{pmatrix} {}^m K_1^{NL} & {}^m K_2^{NL} \\ {}^m K_2^{NL T} & {}^m K_3^{NL} \end{pmatrix} \quad (C.119a, b, c)$$

という関係で剛性行列を定義する。なお、添え字 m の A と B は、Timoshenko 梁理論のせん断力とせん断変形の一つのモデルを区別したものである (表 C.5 参照)。要素長を L としたときの、有限変位の枠組での平面骨組の剛性行列は

$$K_1^L \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{(1+\epsilon)^2 \Delta} & -\frac{6}{(1+\epsilon)\Delta} \\ \text{Symm.} & & \frac{4+12\Psi}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad K_2^L \equiv \begin{pmatrix} -\frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{(1+\epsilon)^2 \Delta} & -\frac{6}{(1+\epsilon)\Delta} \\ 0 & \frac{6}{(1+\epsilon)\Delta} & \frac{2-12\Psi}{\Delta} \end{pmatrix},$$

表 C.5 面内棒の有限変位理論と、それぞれに対応した座屈公式と剛性行列 [()' ≡ d()/dx]

伸び考慮			微小伸び近似		
Bernoulli-Euler 梁	Timoshenko 梁		Bernoulli-Euler 梁	Timoshenko 梁	
	第 2 次近似 (A)	第 1 次近似 (B)		第 2 次近似 (A)	第 1 次近似 (B)
$u' = (1 + \epsilon) \cos \vartheta + \gamma \sin \vartheta - 1, \quad w' = -(1 + \epsilon) \sin \vartheta + \gamma \cos \vartheta, \quad \text{ただし, ここでは } \epsilon \neq 0$					
$(N \cos \vartheta + V \sin \vartheta)' + p = 0, \quad (-N \sin \vartheta + V \cos \vartheta)' + q = 0$					
$M' - V(1 + \epsilon) + N\gamma = 0$ モーメントのつり合いは厳密に成立する			$M' - V + N\gamma = 0$ モーメントのつり合いが近似的にしか成立しない		
$N = EA\epsilon, \quad M = EI\vartheta'$					
$\gamma = 0$	$V = Gk_T A \gamma$	$V = \left(Gk_T A + \frac{N}{1 + \epsilon} \right) \gamma$	$\gamma = 0$	$V = Gk_T A \gamma$	$V = (Gk_T A + N) \gamma$
式 (C.32)	式 (C.59)	式 (C.56)	式 (C.33) Euler 式	式 (C.60) 改訂 Engesser 式	式 (C.58) Engesser 式
$\mathbf{K}^L (+\mathbf{K}_B^{\text{NL}})$	$\mathbf{K}^L + \mathbf{K}_A^{\text{NL}}$	$\mathbf{K}^L + \mathbf{K}_B^{\text{NL}}$	$\mathbf{K}^L (+\mathbf{K}_B^{\text{NL}})$ $\epsilon = 0$	$\mathbf{K}^L + \mathbf{K}_A^{\text{NL}}$ $\epsilon = 0$	$\mathbf{K}^L + \mathbf{K}_B^{\text{NL}}$ $\epsilon = 0$

$$\mathbf{K}_3^L \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{\beta^2} & 0 & 0 \\ & 12 & 6 \\ \text{Symm.} & (1 + \epsilon)^2 \Delta & (1 + \epsilon) \Delta \\ & & \frac{4 + 12\Psi}{\Delta} \end{pmatrix}, \quad {}^m \mathbf{K}_1^{\text{NL}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6\Delta_1^m}{5(1 + \epsilon)\Delta^2} & -\frac{\Delta_4^m}{10\Delta^2} \\ \text{Symm.} & & \frac{(1 + \epsilon)(2/15 + \Delta_2^m)}{\Delta^2} \end{pmatrix}, \quad (\text{C.120})$$

$${}^m \mathbf{K}_2^{\text{NL}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6\Delta_1^m}{5(1 + \epsilon)\Delta^2} & -\frac{\Delta_4^m}{10\Delta^2} \\ 0 & \frac{\Delta_4^m}{10\Delta^2} & \frac{-(1 + \epsilon)(1/30 + \Delta_3^m)}{\Delta^2} \end{pmatrix}, \quad {}^m \mathbf{K}_3^{\text{NL}} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ & \frac{6\Delta_1^m}{5(1 + \epsilon)\Delta^2} & \frac{\Delta_4^m}{10\Delta^2} \\ \text{Symm.} & & \frac{(1 + \epsilon)(2/15 + \Delta_2^m)}{\Delta^2} \end{pmatrix}$$

となる。ここに

$$\Delta \equiv 1 + 12\Psi, \quad \Psi \equiv \frac{\alpha_T}{(1 + \epsilon)^2}, \quad \Delta_1^m \equiv \begin{cases} 1 + 20\Psi & (m = A) \\ 1 + 10\Delta_2^m & (m = B) \end{cases}, \quad (\text{C.121})$$

$$\Delta_2^m \equiv \begin{cases} 2\Psi - 24\Psi^2 & (m = A) \\ 2\Psi + 12\Psi^2 & (m = B) \end{cases}, \quad \Delta_3^m \equiv \begin{cases} 2\Psi + 48\Psi^2 & (m = A) \\ \Delta_2^m & (m = B) \end{cases}, \quad \Delta_4^m \equiv \begin{cases} 1 - 720\Psi^2 & (m = A) \\ 1 & (m = B) \end{cases}$$

と定義した。また、 z と ϵ は

$$z \equiv \frac{1}{\beta^2} \left\{ \left(\frac{u_2 - u_1}{L} - \frac{\cos \vartheta_1 - 1}{\xi} \right) \cos \vartheta_1 - \left(\frac{w_2 - w_1}{L} + \frac{\sin \vartheta_1}{\xi} \right) \sin \vartheta_1 \right\}, \quad \epsilon = z\beta^2 \quad (\text{C.122a, b})$$

で算定できる。Bernoulli-Euler 梁の場合は $\alpha_T = 0$ とすればいい。「伸びを考慮」したモデル B が、梁に対して最も正確な解を与えてくれる。有限回転に対処するには式 (C.110) の剛性行列をこの節のもので置き換えるだけでいいが、 $\mathbf{k}_1^{\text{L,NL}}$ を $\mathbf{K}_2^{\text{L,NL}}$ で、 $\mathbf{k}_2^{\text{L,NL}}$ を ${}^m \mathbf{K}_3^{\text{L,NL}}$ で置き換えることには注意して欲しい。

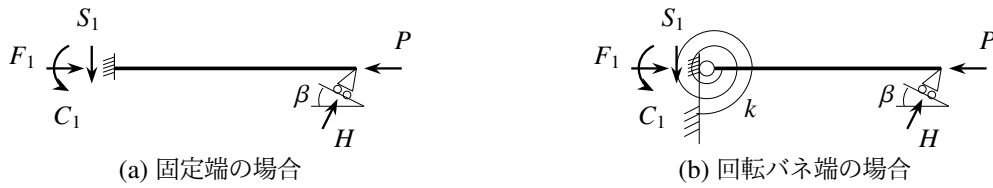


図 C.7 片端を斜面上で支持された棒

C.7 やや不安定な梁-柱の座屈と数値解

C.7.1 片端を斜面上で支持された棒

固定端の場合： 文献 [9] の演習問題で，図 C.7 のように右端の支点が斜面上に置いてある。右端は軸力による水平変位に相当する量の鉛直成分だけの鉛直変位が生じるから，正確には

$$w(\ell) - u(\ell) \tan \beta = 0$$

が境界条件になる。 $\beta = 90$ 度なら $u(\ell) = 0$ で何も起きない。しかしこれを用いるためには平面内の 2 方向の支配方程式を用いなければならない。しかし $u(\ell)$ は軸力による棒の縮み量に相当するので，少なくとも β が小さい細長い棒である限りは上式左辺第 2 項はかなり小さいと考えていい。このような面内挙動についてはあとで数値解析で明らかにすることにして，ここではまず棒の 1 次元モデルとしての座屈荷重の固有値解析を試みる。まず図 C.7 (a) のように左端が固定されている場合，反力を図のように定義すると，全体のつり合いから

$$F_1 = P - H \sin \beta, \quad S_1 = H \cos \beta, \quad C_1 = - \left(\ell + \frac{w(\ell)}{\tan \beta} \right) H \cos \beta + w(\ell) (P - H \sin \beta) \quad (\text{C.123a, b, c})$$

となる。これを用いて境界条件は， $x = 0$ で

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad S_1 = -(-EI w'''(0) - F_1 w'(0)), \quad C_1 = -(-EI w''(0))$$

であり， $x = \ell$ では

$$S_2 = -EI w'''(\ell) - F_1 w'(\ell) = -H \cos \beta, \quad C_2 = -EI w''(\ell) = 0 \quad (\text{C.124a, b})$$

となる。斜面が無い $\beta = 0$ のときの $x = \ell$ の境界条件式 (C.124a) は， S_2 を与えるのではなく $w(\ell) = 0$ であることに注意しなければならない。また， $x = 0$ の条件は，変位も反力も同時に規定しているように見えることから，果たして境界条件と呼べるかどうかは疑問ではあるが，右端が斜面上の支持であることから $w(\ell)$ を規定することはできず，したがって反力 H を陽に含めざるを得ないため，こうなると考えた。さて，その右端が斜面上の支持であることは，式 (C.123) の C_1 の右辺の下線・波下線部の 2 箇所のみにはしか現れない。しかし，波下線部は非線形項であり，以下の線形固有値解析には含めることができない。それはつまり，右の支点が斜面上にあるという条件が以下の固有値解析には含まれないことを示している。

棒の軸力 N は支点反力 H の分だけ P より減って F_1 であると考えればいから，梁-柱理論の一般解は

$$w(x) = a + bx + c \sin \mu x + d \cos \mu x, \quad \mu \equiv \sqrt{\frac{F_1}{EI}} = \sqrt{\frac{P - H \sin \beta}{EI}} \quad (\text{C.125a, b})$$

である。これを境界条件に代入すると，せん断力の条件は左右端で同じ式になり，結局，残りの五つが $a \sim d$ と H に対して

$$a + d = 0, \quad b + \mu c = 0, \quad \mu^2 b = \frac{H}{EI} \cos \beta, \quad c \sin \mu \ell + d \cos \mu \ell = 0, \quad (\text{C.126a, b, c, d})$$

$$-d\mu^2 = -\frac{H\ell}{EI} \cos \beta + \mu^2 \{ a + b\ell + c \sin \mu \ell + d \cos \mu \ell \} \quad (\text{C.126e})$$

となるので、 H を消去して特性方程式を求めると

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \\ 1 & 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell + 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \det \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \\ 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \end{pmatrix} = \sin \mu \ell \cos \mu \ell - \sin \mu \ell \cos \mu \ell = 0 \quad (\text{C.127})$$

と従属関係式であることがわかる。つまり、 P あるいは μ の値によらず特性方程式は常に成立している。これは、右端支点が斜面上にあることを考慮できていないことから、条件が一つ足りないことを示している。

そこで、これに対するたわみモードを求めると

$$w(x) = \frac{a}{\sin \mu \ell} [\sin \mu \ell - \mu x \cos \mu \ell - \sin \{\mu(\ell - x)\}] \quad (\text{C.128})$$

となることから、右端のたわみ W は

$$W \equiv w(\ell) = \frac{a}{\sin \mu \ell} (\sin \mu \ell - \mu \ell \cos \mu \ell) \quad (\text{C.129})$$

となる。図 C.8 に、3 種類の $\mu \ell$ の値に対するモードを描いた。さて、前述のように梁-柱はほとんど縮むことができないことから、座屈する瞬間にはまだ右支点が斜面を登る量はほぼ無視でき、 $w(\ell) = 0$ だと考え、この式 (C.129) から座屈の特性方程式を求めると

$$W = 0 \rightarrow \sin \mu \ell - \mu \ell \cos \mu \ell \rightarrow \tan \mu \ell - \mu \ell = 0 \quad (\text{C.130})$$

となる。これは、右端が水平な床にある片端固定・片端単純支持棒の特性方程式と一致する。ただし、 μ の中にも H が残り

$$\mu^2 = \frac{F_1}{EI} = \frac{P}{EI} - \frac{H}{EI} \sin \beta$$

であり、支点反力 H は不定のままなので、この特性方程式も解けていない。また上の条件から、 $\cos \mu \ell = 0$ あるいは $\sin \mu \ell = 0$ でない限り $H = 0$ は自明な解なのだ。そして右端が何らかの支持をされていることから $\cos \mu \ell = 0$ ではあり得ない。さらに外力が固定端に向いていない限り $\sin \mu \ell = 0$ ではあり得ない。したがって $H \neq 0$ でなければならないことになる。ただし、後述の数値解析でも確かめられるが、座屈する瞬間の支点反力 H あるいはせん断力 $H \sin \beta$ は、棒の軸力 N と比較してかなり小さいと考えていいので、実際には

$$\mu^2 = \frac{P}{EI} - \frac{H}{EI} \sin \beta \approx \frac{P}{EI} \quad (\text{C.131})$$

と近似していいと予想される。

それならば、モーメントのつり合いにおける右の支点の変位の影響を無視してもよさそうだ。したがって、式 (C.123) の下線部、つまり式 (C.126) の下線部を無視すると、その特性方程式は

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \\ 0 & \ell & 0 & -1 \end{pmatrix} = \mu \ell \cos \mu \ell - \sin \mu \ell = 0$$

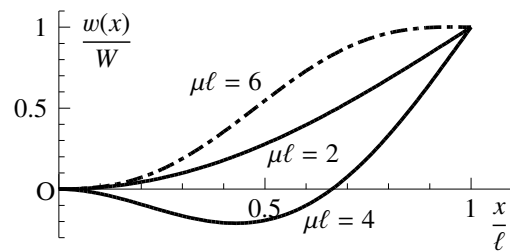


図 C.8 座屈モード

となり、上式 (C.130) が得られる。式 (C.123) の下線部を無視したことは、 $w(\ell) = 0$ と置いたことと同じであるから、片端固定・片端単純支持棒の特性方程式が得られるのは当然である。

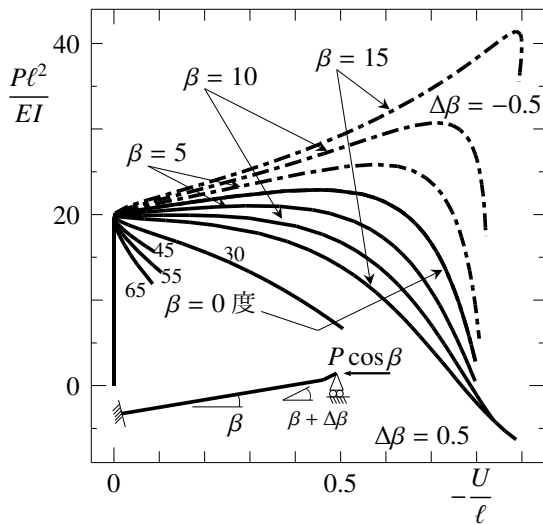


図 C.9 大変位数値解析

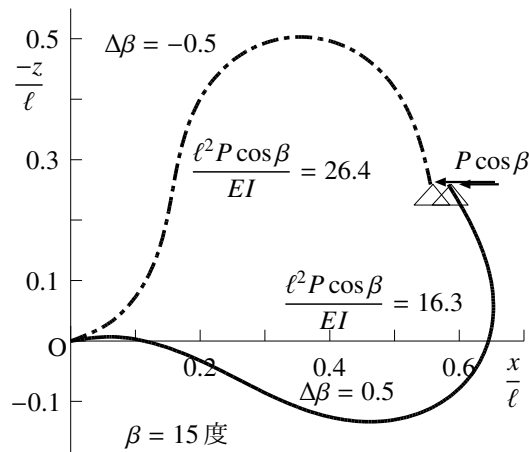


図 C.10 座屈後の変形

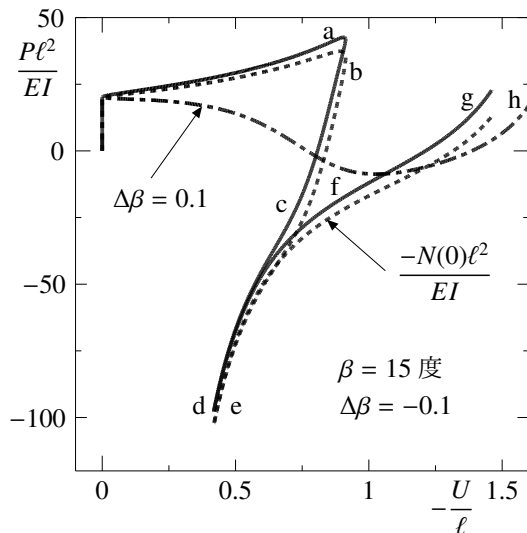


図 C.11 $\beta = 15$ 度の場合の分岐経路

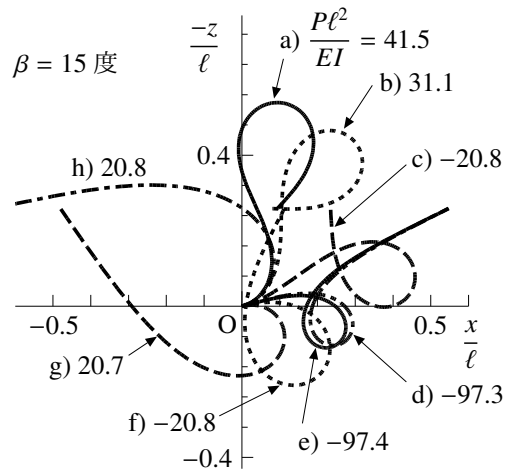


図 C.12 各段階における変形

そこで、弧長法を用いた有限変位有限要素（第 C.6.2 (1) 節参照）で数値解析をしたのが図 C.9 である。細長比はすべて 1,000 に設定し、軸の伸び縮みが無い Elastica に近いモデルになっているが、解析は「伸び考慮」の「第 1 次近似モデル」を用いた。図中に示したように、数値解析で与える外力を $P \cos \beta$ とみなして作用させたが、縦軸はそれを $\cos \beta$ で割った P で算定してあり、図 C.7 (a) の元の問題の P と同じ定義になる。横軸の U は載荷点の水平右向きの変位 $U \equiv u(\ell)$ である。棒は 16 要素でモデル化したがる、座屈をさせるために一番右端の 1 要素だけ、 $\Delta \beta = \pm 0.5$ 度だけさらに傾けてある。 β は図のように反時計回りを正にした。 $\beta = 0$ の場合の座屈荷重は式 (C.130) から $\mu \ell \approx 4.493$, $\frac{P \ell^2}{EI} \approx 20.19$ なので、 $\beta \neq 0$ の場合にもほとんど β の影響が無いことをこの結果は示している。これは前述のように、支点反力 H の影響が非常に小さいからである。また、応答が柔らかい方（実験では生じるであろうと考えられる方）の $\Delta \beta > 0$ の場合、 β が 10 度くらいよりも大きくなると座屈点は不安定になる。ちなみに $\Delta \beta$ の符号の違いによる変形形状の違いを図 C.10 に示したが、初期不整に追従した変形になっている。

$\beta = 15$ 度の場合に、要素数を増やして 32 要素を用い、先端の 1 要素だけを 29.9 度の傾きにして初期不整を小さくし、弧長も小さくして求めた最小分岐点からの分岐経路が図 C.11 の実線である。座屈後はピークまでは

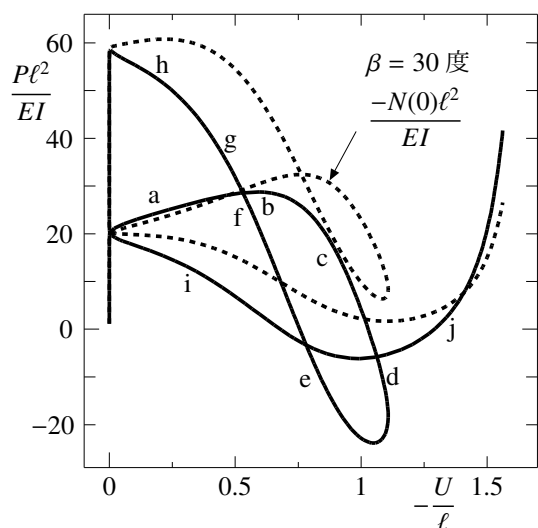
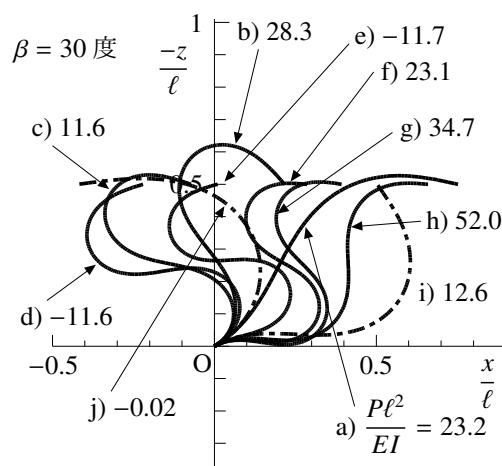
図 C.13 $\beta = 30$ 度の場合の分岐経路

図 C.14 各段階における変形

安定だった。一点鎖線は先端の1要素だけを30.1度の傾きにした場合だ。図 C.11 の破線は左の埋め込み端の棒の軸力 $N(0)$ で、座屈荷重レベルでは P (実線) と軸力 N の差が無いことが明らかである。なお、図中 a~g および h で示した状態の変形が図 C.12 であるが、状態 a と c, f, g, h は安定だった。

さらに $\beta = 30$ 度と大きくした場合の最小分岐点からの二つの経路が図 C.13 で、状態 a~h および i, j の変形が図 C.14 である。ここでも 32 要素を用い、先端の1要素だけ 29.9 度の傾きにし、小さめの弧長を用いた。図 C.13 の破線は左の埋め込み端の棒の軸力 $N(0)$ で、この場合も P と軸力 N の差がほとんど無い。つまり支点反力 H が軸力に比べて無視できるほど小さいことを示している。このことから、式 (C.131) の近似が適切であることを示している。なお、状態 a と j のみが安定だった。この図 C.14 の変形形状と図 C.8 のモードを比較すると、 $\mu\ell$ が初期座屈点のその値 4.493 より小さい場合のモードが、 $\frac{P\ell^2}{EI} \approx 20$ で荷重低下する方の分岐経路の一点鎖線の変形形状 i や j に似ている。一方、4.493 より大きい場合のモードが、 $\frac{P\ell^2}{EI} \approx 20$ で荷重増加する方の分岐経路の実線の変形形状 a~h に似ている。このように、荷重レベルと変形モードの関係も整合している。

表 C.6 座屈荷重

n	$\mu_n\ell$	$\frac{P_n\ell^2}{EI}$
1	4.4934	20.191
2	7.7253	59.680
3	10.904	118.90
4	14.066	197.86
5	17.221	296.55

次に、16 要素に戻して $\beta = 30$ 度のまっすぐな棒に大きめの弧長を用いて载荷した場合の結果が図 C.15 である。ただし、第2分岐経路からの経路 (一点鎖線) は、まっすぐな棒のまま分岐直前までを载荷したあと、先端の1要素を 0.1 度曲げて载荷を続けることによって求めた。式 (C.130) から低次五つの座屈荷重を表 C.6 に示した。このように、実際の実験で多分観察されるであろう最小分岐点からの不安定な座屈経路以外は、すべて一筆書きのように連続しているのはとても面白い。この図 C.15 の a~d の状態での各変形をそれぞれ図 C.16 に示した。図 C.14 と比較すれば高次モードになっているのが明らかだ。もちろんすべて不安定な状態である。図 C.14 の状態 a と i が 1 次の座屈における初期不整による安定経路とそれに対する不安定経路の組になっており、安定な状態は右支点付近は上に凸の変形をしている。同様に、図 C.14 の状態 h と図 C.16 の状態 d が、2 次の座屈における初期不整による安定経路とそれに対する不安定経路の組になっている。この場合も安定な状態は右支点付近が上に凸の不自然な変形をしている。

さて、角度 β が 90 度に近い場合の 32 要素のまっすぐな棒の結果が図 C.17 である。下の横軸が角度の大きい $\beta > 88$ 度の場合の実線に対するもので、上の横軸が $\beta = 75, 80$ 度の一点鎖線に対するものである。角度 β が 88 度より小さい場合には、この換算外力 P で表した座屈荷重は片端固定・片端単純支持棒の座屈荷重 $\frac{P\ell^2}{EI} \approx$

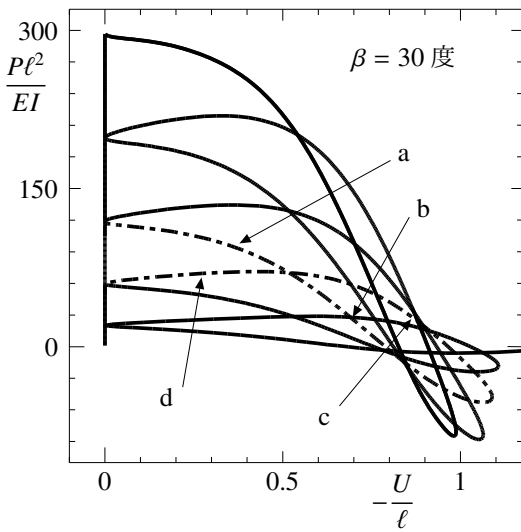


図 C.15 $\beta = 30$ 度の際の高次分岐経路

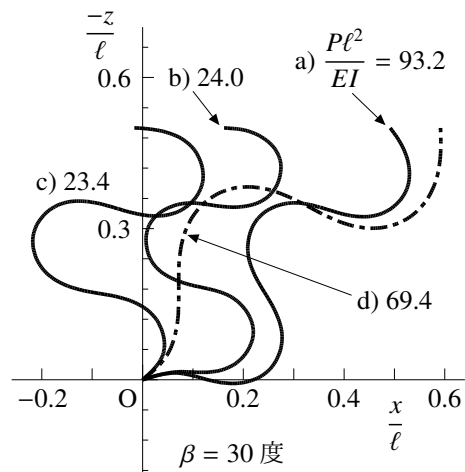


図 C.16 高次座屈後の変形

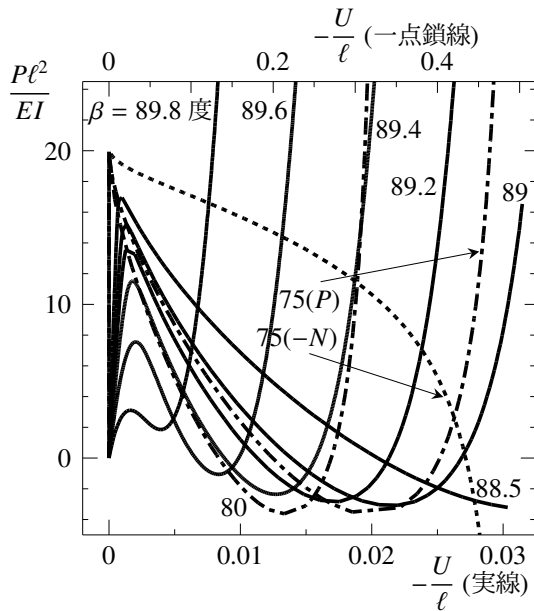


図 C.17 角度 β が大きい場合

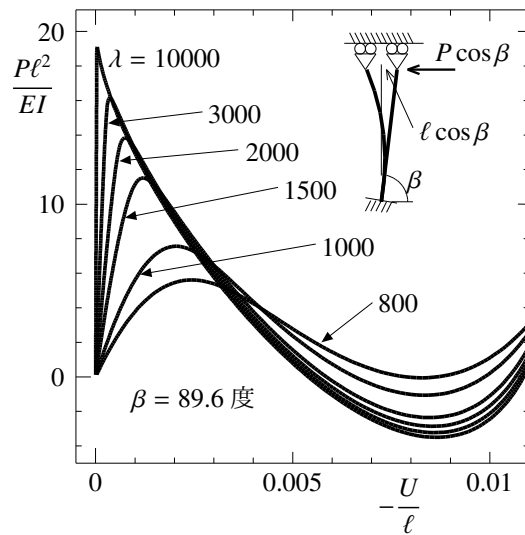


図 C.18 β が大きい場合の細長比の影響

20.19 になっている。また $\beta = 75$ 度の場合には、埋め込み端側の軸力 N も破線 (図中 75(- N) と記した) で示したが、このくらい大きな角度であっても、支点反力 H の影響も含めた軸力 N が座屈荷重に至って座屈している。そして数値結果は、実際に与えた外力を $\cos\beta$ で割った縦軸 P で表現しても、20.19 の荷重レベルで座屈している。また $\cos(75\text{度}) = 0.2588$ であることから、横軸が 0.4 を超える付近から軸力 N が引張になるのも当たり前である。そのあとの変位 U はもちろん、せいぜい $\ell \cos\beta$ の 2 倍程度までしか変位できないことになる。

しかし角度 β が 88 度よりも大きな場合には、上横軸のスケールで描いた場合には分岐座屈のように見えてしまいが、実際にはこの図 C.17 のようにピークを持つ不安定な挙動になる。これは、図 C.18 の中の対象モデルの図に示したように、棒は座屈せずに曲がらないまま縮んで左の方に移動する変形になるからだ。これは棒が縮んで座屈しないためなので、軸の伸び縮みを無視した *Elastica* にもっと近づけるために、細長比 λ をさらに大きくして再計算したところ、例えば細長比が 10,000 より大きい場合には、式 (C.130) で与えられる座屈荷重値 $\frac{P\ell^2}{EI} \approx 20.19$ で分岐座屈した。逆に細長比を小さくして伸び縮みし易くした場合の結果を図 C.18 に示した。

つまり、細長比が 10,000 より小さい場合には座屈せずにほぼまっすぐのまま縮んで左方に変位する。梁-柱理論も軸方向のひずみは連成させずに解ける線形理論になっており、その線形座屈解析から得られる結果は、軸ひずみを無視した結果になっているはずだ。結局、この数値解析で細長比をかなり大きくした場合の結果と上で求めた線形座屈解析結果とはよく整合していることが明らかになった。

さて、式 (C.127) の特性方程式が不定であったことが物理的におかしいことを示すために、右端に e だけの下方初期変位がある場合を解いてみる。この場合には、変位の一般解の係数は次式を満たす必要がある。

$$(A) \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \\ 1 & 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell + 1 \end{pmatrix}, \quad \{y\} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -e \end{pmatrix}, \quad (A) \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \{y\} \quad (\text{C.132a, b, c})$$

そこで、p.245 で述べた Alternative Theorem を用いて解の存在について検討する。上式 (C.132) の付随的問題である $(A)^T \{v\} = \{0\}$ の解を求めると、 $\{v\} = [1 \ 0 \ 1 \ -1]^T$ となるので、初期不整に対して解く問題の右辺と $\{y\}^T \{v\} \neq 0$ となり、この代数方程式 (C.132) は解を持たない。逆に、境界条件式 (C.123) で下線部の $w(\ell)$ の項を無視した場合には

$$w(x) = \frac{-e}{\Delta} [\sin \mu \ell - \mu x \cos \mu \ell - \sin \{\mu(\ell - x)\}], \quad \Delta \equiv \mu \ell \cos \mu \ell - \sin \mu \ell$$

これは式 (C.128) の $\frac{a}{\sin \mu \ell}$ を $\frac{-e}{\Delta}$ で置き換えたものに一致する。やはり境界条件は、右端で $w(\ell) = 0$ とするのが正しいと考えられる。

回転バネ端の場合: 次に図 C.7 (b) のような回転バネ支持の場合も同様に反力を定義し、モーメントのつり合いの非線形項を無視すると、その全体のつり合いから

$$F_1 = P - H \sin \beta, \quad S_1 = H \cos \beta, \quad C_1 = -\ell H \cos \beta + \underline{w(\ell) (P - H \sin \beta)} \quad (\text{C.133a, b, c})$$

となる。これを用いて境界条件は、 $x = 0$ で

$$w(0) = 0, \quad k w'(0) = -(-EI w''(0)) = C_1, \quad S_1 = -(-EI w'''(0) - F_1 w'(0))$$

であり、 $x = \ell$ では

$$S_2 = -EI w'''(\ell) - F_1 w'(\ell) = -H \cos \beta, \quad C_2 = -EI w''(\ell) = 0 \quad (\text{C.134a, b})$$

となる。式 (C.134a) は $x = 0$ のせん断力の条件と同じになるので考慮する必要が無い。この境界条件に式 (C.125) の一般解を代入すると、 H を消去すれば

$$a + d = 0, \quad k(b + \mu c) + EI \mu^2 d = 0, \quad c \sin \mu \ell + d \cos \mu \ell = 0, \quad (\text{C.135a, b, c})$$

$$-d \mu^2 = -\ell \mu^2 b^2 + \mu^2 \{a + b \ell + c \sin \mu \ell + d \cos \mu \ell\} \quad (\text{C.135d})$$

となるので、特性方程式は

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha'_s & \alpha'_s \mu & \mu^2 \ell \\ 0 & 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \\ 1 & 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell + 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \det \begin{pmatrix} \alpha'_s & \alpha'_s \mu & \mu^2 \ell \\ 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \\ 0 & \sin \mu \ell & \cos \mu \ell \end{pmatrix} = \sin \mu \ell \cos \mu \ell - \sin \mu \ell \cos \mu \ell = 0$$

となる。ここに α'_s は、バネ定数 k と曲げ剛性 EI の比で

$$\alpha'_s \equiv \frac{k\ell}{EI} \quad (\text{C.136})$$

と定義した。この場合も、 μ の値によらず、またバネ定数 k の値によらず、特性方程式は常に成立する。そこで、この場合もたわみを求めると

$$w(x) = \frac{a}{\alpha'_s \sin \mu\ell} \left\{ \alpha'_s (\sin \mu\ell - \mu\ell \cos \mu\ell) + (\mu\ell)^2 \sin \mu\ell \right\}$$

となるので、右端のたわみ $W \equiv w(\ell)$ が零になる条件から座屈の特性方程式は

$$W = 0 \rightarrow \alpha'_s (\mu\ell \cos \mu\ell - \sin \mu\ell) - (\mu\ell)^2 \sin \mu\ell = 0 \quad (\text{C.137})$$

と求められる。 α'_s が零のときは両端単純支持棒の座屈特性方程式 $\sin \mu\ell = 0$ になり、 α'_s が無限大のときは片端固定・片端単純支持棒の座屈特性方程式 (C.130) に一致する。そして式 (C.137) は、 μ の中に未知の H を含むことを除けば、 $\beta = 0$ の水平な床に置かれた片端回転バネ支持・片端単純支持棒の座屈の特性方程式に形式的には一致する。

ここでも再度、モーメントのつり合いにおける $w(\ell)$ の影響を無視し、式 (C.133) つまり式 (C.135) の下線部を無視すると、特性方程式は

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \alpha'_s & \alpha'_s \mu & \mu^2 \ell \\ 0 & 0 & \sin \mu\ell & \cos \mu\ell \\ 0 & \ell & 0 & -1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow \alpha'_s (\mu\ell \cos \mu\ell - \sin \mu\ell) - (\mu\ell)^2 \sin \mu\ell = 0$$

となり、式 (C.137) が得られる。

C.7.2 リンクで押された棒

大きく回転する例として図 C.19 (a) のリンクで押された片持ち棒を対象とする。図のように反力を定義すると、全体のつり合いより

$$F_1 = P, \quad S_1 = H, \quad C_1 = eP - (\ell + a)H$$

である。境界条件は $x = 0$ では

$$w(0) = 0, \quad w'(0) = 0, \quad S_1 = EI w'''(0) + P w'(0), \quad C_1 = EI w''(0)$$

であり、 $x = \ell$ では

$$S_2 = -EI w'''(\ell) - P w'(\ell) = -H, \quad C_2 = -EI w''(\ell) = 0$$

となる。これに一般解を代入すると、せん断の境界条件は左右で同じ式になり、最終的には $a \sim d$ と H に対する五つの条件になり、それを解くと

$$w(x) = e \frac{(1 - \cos \mu x) \sin \mu\ell + (\sin \mu x - \mu x) \cos \mu\ell}{\sin \mu\ell - \mu\ell \left(1 + \frac{a}{\ell}\right) \cos \mu\ell}, \quad H = \frac{-\left(\frac{e}{\ell}\right) P \mu\ell \cos \mu\ell}{\sin \mu\ell - \mu\ell \left(1 + \frac{a}{\ell}\right) \cos \mu\ell} \quad (\text{C.138a, b})$$

と求められる。ただし、ここでは

$$\mu^2 \equiv \frac{P}{EI}$$

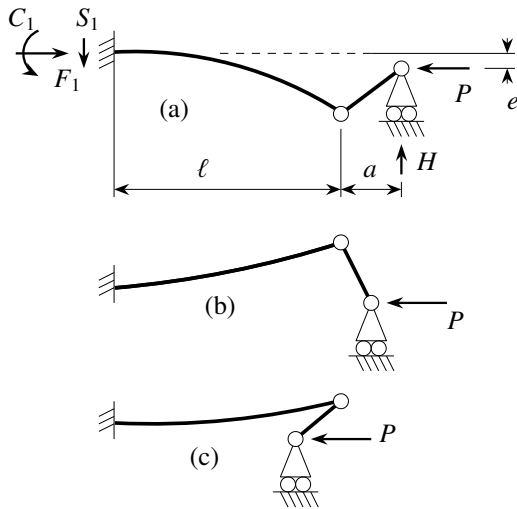


図 C.19 リンクで押された棒

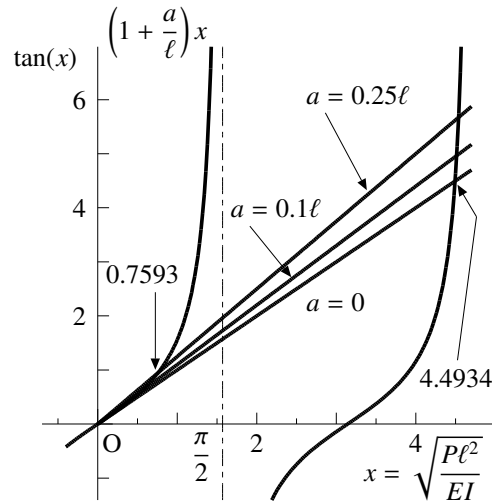


図 C.20 特性方程式の解

である。そこで、 $x = \ell$ のたわみを求めると

$$W \equiv w(\ell) = e \frac{\sin \mu \ell - \mu \ell \cos \mu \ell}{\sin \mu \ell - \mu \ell \left(1 + \frac{a}{\ell}\right) \cos \mu \ell} \tag{C.139}$$

となる。したがって、 $a = 0$ のときは分子と分母が同じになるので $w(\ell) = e$ である。

座屈荷重については、式 (C.138) つまり式 (C.139) の分母が零になる条件から

$$\tan \mu \ell - \mu \ell \left(1 + \frac{a}{\ell}\right) = 0$$

が特性方程式になる。これは $a = 0$ のときは、片端固定・片端単純支持棒の座屈荷重の特性方程式と一致する。面白いのは、 $a \neq 0$ のときに、その座屈荷重よりもかなり小さい座屈荷重になるということである。つまり、図 C.20 に示したように、 $a = 0$ ならこの解の最小解は $\mu \ell \approx 4.4934$ であるが、 $a \neq 0$ になった途端に $0 < \mu \ell < \pi/2$ の間に解が発生するからである。表 C.7 にその座屈荷重を列挙した。

表 C.7 座屈荷重

$\frac{a}{\ell}$	$\mu \ell$	$\frac{P \ell^2}{EI}$
0.05	0.3762	0.1415
0.10	0.5175	0.2678
0.15	0.6175	0.3812
0.20	0.6954	0.4837
0.25	0.7593	0.5765

そこで、先端に $a/\ell = \frac{1}{4}$ の長さのリンクが水平から時計回りに 2.3 度傾いたモデル、つまり $e/a = \tan(2.3 \text{度}) = 0.04016$, $e/\ell = 0.01004$ で取り付けたモデルを対象にして数値解析を行った。ここでも細長比は 1,000 に設定した。棒は 16 要素でモデル化し、リンクはどうせ変形しないので 1 要素とした。その結果が図 C.21 の実線と破線である。実線は棒端部の下方への変位 $W \equiv w(\ell)$ であり、破線は载荷点の水平右向きの変位 $U \equiv u(\ell + a)$ である。この場合の座屈荷重は表 C.7 (図 C.20 中にも示した) から $\sqrt{\frac{P \ell^2}{EI}} \approx 0.7593$, つまり $\frac{P \ell^2}{EI} \approx 0.5765$ になる。偏心 e のために、その最初の座屈前から荷重が正の最大値 (図中の点 A 付近) に至るまでは安定で、そのあと、今度は荷重が負の最大値に至るまでは不安定である。つまり、支点がヒンジの下にもぐりこんだあと左に移動してしまうまでは、 P は次第に小さくなってつり合い、ヒンジ真下の位置を過ぎたところからは $P < 0$ でブレーキをかけながら変形が進む。負の最大荷重に至ったあとは、片端固定・片端単純支持棒の座屈に至るまでは安定である。つまり、図 C.19 の (b) や (c) のように、リンクの部分がぐるっと 1 回転して、载荷支点が棒端部のヒンジよりも左に移動してしまってから、片端固定・片端単純支持棒の载荷状態に至るのである。最初の座屈点付近までの変位 W の、式 (C.139) の梁-柱理論解と数値解を比較したのが図 C.22 である。破線が図 C.21 の実線で示した数値解である。変位が小さい範囲では梁-柱理論によっても精度よく解が求

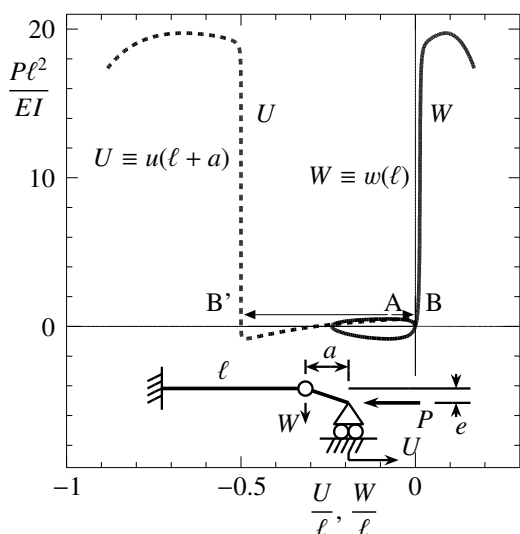


図 C.21 大変位数値解析

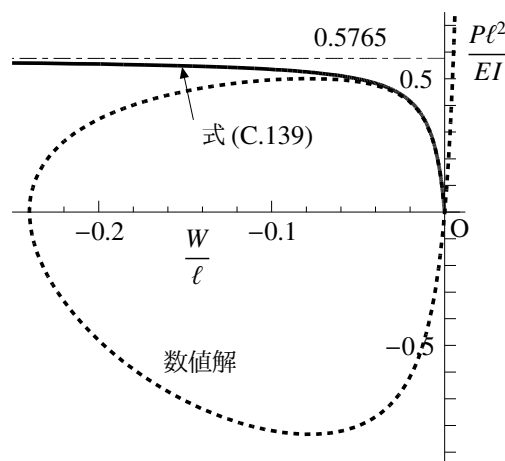


図 C.22 解析解と数値解の比較

められていることがわかる。

実際に荷重制御で実験した場合には、図 C.21 の $\frac{P\ell^2}{EI} \approx 0.5$ レベルに達した点 A 付近の状態、その荷重レベルのまま、 W は図の右方の $W > 0$ の点 B 付近の解へ、 U も図のように $U = -\frac{1}{2}$ の点 B' 付近の解へと動的に飛び移ることになるだろう。そのあとは変位にはあまり変化がなく、片端固定・片端単純支持棒の座屈荷重 $\frac{P\ell^2}{EI} \approx 20.19$ 付近で再度座屈をするはずだ。ちなみに、図 C.19 の (a) のような変形は、初期状態として右側支点の位置よりも図の下方にヒンジが位置するように曲がった状態の棒を圧縮した場合に得ることができるが、棒端部の変位 W が常に $W > 0$ である（図 C.21 の実線のループが $W > 0$ 側にある）ことを除けば、変形特性は上述の結果とほぼ同じだった。

‘Take care!’ 「じゃあね」とでも訳すか。‘Take it easy!’ も使われる。しかし最近、どうして「お疲れ様」が普通の挨拶になってしまったのだろう。学生さんも朝から使う。僕は「疲れてないよ」と返事をしている。「おはようございます」「こんにちは」「さようなら」はもう死語か。「お元気様」にしたらいと TV で著名人も言っていた。ところで鹿児島弁で「お疲れ様」あるいは「ご苦労様」は「おやっどさあ」であり、それは晩御飯の「いただきます」の代わりに家族が父親に対して発する言葉だ。九州の男性はたいていは女性に優しいのだが、外（人前）では奥様に立ててもらうのが当たり前と思っているところがあるようだ。九州人に嫁いだ九州人ではない奥様はご苦労しておられるのではないだろうか。ただ、一歩後ろを歩く奥様の手からは目に見えない紐が夫の首に繋がっているという噂もあるが。



写真 C.1 最上橋 山形県西村山郡大江町 1940 年竣工 (中沢正利先生撮影)



‘阿弥陀様:’ 第 1 著者は全く信心深くないのであるが、家のお坊様はとても愉快というか想像力豊かな方である。たいていは「因果」のお話なのであるが、あるときの講話はビッグバン（物理学の）から始まった。列席者のほとんどがチンプンカンプンだっただろう。その中で、「阿弥陀」は ‘a-meter’ つまり ‘un-measurable’ に通じるものであり、「アーメン」も同じ（そうではないようだが）ということであった。確かに「無量寿仏」とも当てる。

最近の学生さんはこういった想像力・教養が極めて乏しい。そのため創造という作業はできないのではないかと心配している。また何かを「学ぶ」ということと「習う」ということが区別できていないため、必要単位を準備できてしまうと、それ以上の講義を聴講することすらしない。さらに宿題を締め切り後に平気で提出しようとする。学期の最後から 2 回目の授業時間の最後に、来週の授業の内容はシラバスにあるから講義するが、試験には出さないので出欠は取らないと言うと、60 名くらいの受講者のうち半数以上は来ない。本当に大学生の過ごし方はこれでいいのだろうか、と悩んでいるところである。

付録 D

テンソル演算について

D.1 座標と基底ベクトル

文献 [25]¹ と、それを用いた西野文雄先生の「応用弾性学」の講義ノートとから、テンソルの特徴を知ることができると思う部分を列挙してみた。本当は、斜橋等の設計では斜交座標系で、曲線橋等の設計では直角座標ではない座標系で力学を論ずる必要がある。ここではその代表例として図 D.1 のような斜交座標を考え、下添え字のベクトル \mathbf{g}_i ($i = 1, 2$) はその方向の単位の基底ベクトルとする。図のように、下添え字の単位長さの基底ベクトル \mathbf{g}_j に対するベクトル成分を上添え字を付けて定義し、それを反変成分と呼んで、任意のベクトル \mathbf{P} を

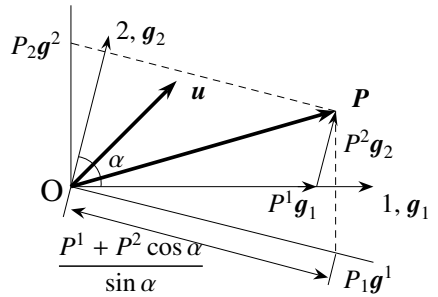


図 D.1 斜交座標

$$\mathbf{P} = P^1 \mathbf{g}_1 + P^2 \mathbf{g}_2 \quad (\text{D.1})$$

のように成分表示（分解）できると考える。さて図には描いていないが、水平 (x) 方向の単位基底ベクトルを \mathbf{i}_1 とし、鉛直 (y) 方向の単位基底ベクトルを \mathbf{i}_2 とすると、ベクトル \mathbf{P} の水平 (x) 方向および鉛直 (y) 方向成分 P_x, P_y はそれぞれ

$$P_x = P^1 + P^2 \cos \alpha, \quad P_y = P^2 \sin \alpha$$

になるので、 \mathbf{P} が力で \mathbf{u} が変位だった場合には、仕事 W は二つのベクトルの内積で定義され

$$W = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} = (u^1 + u^2 \cos \alpha)(P^1 + P^2 \cos \alpha) + u^2 \sin \alpha P^2 \sin \alpha$$

となることから

$$W = \mathbf{u} \cdot \mathbf{P} = (u^1 + u^2 \cos \alpha) P^1 + (u^2 + u^1 \cos \alpha) P^2 \quad (\text{D.2})$$

と書くことができる。

一方、上式 (D.2) を眺めながら、下添え字の変位成分を

$$u_1 \equiv u^1 + u^2 \cos \alpha, \quad u_2 \equiv u^2 + u^1 \cos \alpha \quad (\text{D.3a, b})$$

で定義すると、仕事は

$$W = \sum_{i=1}^3 u_i P^i = u_i P^i \quad (\text{D.4})$$

¹ もし手に入るならここは読まずにこの文献の方を読むことを強く薦める。訳本もあるらしい。

と書くことができることがわかる。ただし以下、この式の最右辺のように \sum の記号を省略し、同じ添え字が上下に 2 回出てくる場合にのみ、それは 1 から 3 まで総和をとる（総和規約）ものとする。ここでは \mathbf{u} の下添え字成分と \mathbf{P} の上添え字成分の積の和になっていることに気付いておいて欲しい。実は式 (D.3) の下添え字を付した成分は上添え字の基底ベクトル \mathbf{g}^i ($i = 1, 2$) の成分で、式 (D.1) に対応して、任意のベクトルが

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{g}^1 + u_2 \mathbf{g}^2 \quad (\text{D.5})$$

のようにも成分表示（分解）できるのである。この下添え字の成分を共変成分と呼ぶ。このとき \mathbf{g}^i を共変基底ベクトル、 \mathbf{g}_i を反変基底ベクトルと呼び、この「交代した」組み合わせで成分が定義されている。

さて、上式 (D.2) の仕事は

$$W = u^1 (P^1 + P^2 \cos \alpha) + u^2 (P^2 + P^1 \cos \alpha) \quad (\text{D.6})$$

とも書くことができる。ここで

$$P_1 = P^1 + P^2 \cos \alpha, \quad P_2 = P^2 + P^1 \cos \alpha \quad (\text{D.7a, b})$$

と書くことにすると、式 (D.3) との比較からも明らかなように、これは \mathbf{P} の共変成分である。つまり

$$\mathbf{P} = P_1 \mathbf{g}^1 + P_2 \mathbf{g}^2 \quad (\text{D.8})$$

となる。さて図からも明らかなように、 \mathbf{g}^i は単位長さではなく $\frac{1}{\sin \alpha}$ の長さを持っており、2 種類の異なる基底ベクトル同士は直交し

$$|\mathbf{g}^i| = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \mathbf{g}^m \cdot \mathbf{g}_n = \delta_n^m \quad (\text{D.9a, b})$$

の関係が成立する。ここに δ_n^m は Kronecker のデルタ（テンソルではない）である。結局仕事は

$$W = (u_i \mathbf{g}^i) \cdot (P^j \mathbf{g}_j) = u_i P^j \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}_j = u_i P^j \delta_j^i = u_i P^i = u^i P_i \quad (\text{D.10})$$

と書くことができるのだ。このように、共変成分と反変成分の間にしか本当の総和規約は適用できないが、直角座標のときはその区別が無い。

さて \mathbf{g}_i 方向の座標を ξ^i と記すことにすると、水平・鉛直の直角座標の x^i との間には

$$x^1 = \xi^1 + \xi^2 \cos \alpha, \quad x^2 = \xi^2 \sin \alpha \quad (\text{D.11a, b})$$

の関係がある。実は基底ベクトルは

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^i} \mathbf{i}_j \quad (\text{D.12})$$

とも定義できる。具体的に式 (D.11) を代入すると

$$\mathbf{g}_1 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{g}_2 = \cos \alpha \mathbf{i}_1 + \sin \alpha \mathbf{i}_2$$

のように、幾何学的に求められるものと一致する。これはどちらも無次元の単位ベクトルであるが、式 (D.9) のように \mathbf{g}^i は単位ベクトルではないことには注意する必要がある。

D.2 計量テンソルと置換テンソル

同じ基底同士の内積を計量テンソルと呼び

$$g_{ij} \equiv \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j, \quad g^{ij} \equiv \mathbf{g}^i \cdot \mathbf{g}^j \quad (\text{D.13a, b})$$

等と定義される。なお、共変基底ベクトルと反変基底ベクトルは式 (D.9b) のように直交している。これを用いれば、共変成分と反変成分を

$$u_i g^i = u^j g_j \quad \rightarrow \quad u_i g^i \cdot g_k = u^j g_j \cdot g_k \quad \rightarrow \quad u_i \delta_k^i = u^j g_{jk} \quad \rightarrow \quad u_k = u^j g_{jk} \quad (\text{D.14})$$

等のように関係付けること（添え字の入れ替え）ができる。

また交代記号 e_{ijk} （テンソルではない）を

$$e_{ijk} = e^{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{もし } (ijk) \text{ が } (123) \text{ の偶置換である場合} \\ -1 & \text{もし } (ijk) \text{ が } (123) \text{ の奇置換である場合} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

と定義すると、例えば 3×3 の行列 (C)

$$(C) \equiv \begin{pmatrix} C_1^1 & C_2^1 & C_3^1 \\ C_1^2 & C_2^2 & C_3^2 \\ C_1^3 & C_2^3 & C_3^3 \end{pmatrix}$$

の行列式 c は

$$c \equiv \det(C) = C_1^i C_2^j C_3^k e_{ijk} = C_i^1 C_j^2 C_k^3 e^{ijk}, \quad e_{lmn} c = C_l^i C_m^j C_n^k e_{ijk}, \quad c = \frac{1}{6} C_l^i C_m^j C_n^k e_{ijk} e^{lmn} \quad (\text{D.16a, b, c})$$

と書くことができる。

一方、計量テンソルの行列式を

$$g \equiv \det(g_{ij}), \quad \frac{1}{g} \equiv \det(g^{ij}) \quad (\text{D.17a, b})$$

と定義しておく、置換テンソル ϵ_{ijk} は

$$\epsilon_{ijk} = \sqrt{g} e_{ijk}, \quad \epsilon^{ijk} = \frac{1}{\sqrt{g}} e^{ijk} \quad (\text{D.18a, b})$$

と定義される。これと Kronecker のデルタの間には

$$\epsilon^{ijk} \epsilon_{imn} = \delta_m^j \delta_n^k - \delta_n^j \delta_m^k, \quad \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijn} = 2\delta_n^k, \quad \epsilon^{ijk} \epsilon_{ijk} = 6 \quad (\text{D.19a, b, c})$$

の関係が成り立つ。この置換テンソルを用いると、二つのベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の外積 $\mathbf{w} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ は

$$w^k = a_i b_j \epsilon^{ijk} = \epsilon^{kij} a_i b_j \quad (\text{D.20a, b})$$

と成分表示できる。直角座標系では $g = 1$ になるので置換テンソルの成分は交代記号に一致する。

D.3 共変微分

さて、極座標におけるナブラやラプラシアンは結構面倒な形をしていたが、なぜだろう。例えば任意のベクトル \mathbf{u} を $\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i$ と成分表示したとしよう。このベクトルの変化率つまり微係数は、成分のみならず基底ベクトルも微分する必要があることに気付く。極座標等では直角座標とは異なり、基底ベクトルが一定ではないことが微係数の表現を面倒にしているのだ。例えば \mathbf{g}_j 方向の座標 ξ^j でこれを微分すると

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} = \frac{\partial (u^i \mathbf{g}_i)}{\partial \xi^j} = \frac{\partial u^i}{\partial \xi^j} \mathbf{g}_i + u^i \frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \xi^j}$$

という計算をしなければならない。基底ベクトルは式 (D.12) のように表現できたことを思い起こすと

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \xi^j} = \mathbf{g}_{i,j} = \frac{\partial^2 x^k}{\partial \xi^i \partial \xi^j} \mathbf{i}_k$$

を求めておく必要がある。ここに、添え字中のコンマは次の添え字の座標で偏微分することを意味する。そこで

$$\mathbf{g}_{i,j} = \Gamma_{ijk} \mathbf{g}^k = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k \quad (\text{D.21})$$

と表すことにする。この Γ_{ijk} 等は **Christoffel** の記号 (テンソルではない) と呼ばれている。これともう一つの基底ベクトルとの内積から

$$\mathbf{g}_{i,j} \cdot \mathbf{g}_k = \Gamma_{ijl} \mathbf{g}^l \cdot \mathbf{g}_k = \Gamma_{ijl} \delta_k^l = \Gamma_{ijk}, \quad \mathbf{g}_{i,j} \cdot \mathbf{g}^k = \Gamma_{ij}^k. \quad (\text{D.22a, b})$$

という関係を得る。式 (D.21) を用いれば、上述のベクトルの微係数は

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \xi^j} = \frac{\partial (u^i \mathbf{g}_i)}{\partial \xi^j} = u^i_{,j} \mathbf{g}_i + u^i \mathbf{g}_{i,j} = (u^i_{,j} + u^k \Gamma_{jk}^i) \mathbf{g}_i = u^i|_j \mathbf{g}_i \quad (\text{D.23})$$

と表すことができる。ここに $u^i|_j$ は共変微係数と呼ばれる。

D.4 極座標系における物理成分

注意して欲しいのは、例えば図 D.1 の斜交座標のときの基底ベクトル \mathbf{g}^i が式 (D.9) で示したように単位量ではないこと等である。つまり、基底ベクトルを含むテンソル自体、例えば $\mathbf{u} = u^i \mathbf{g}_i$ そのものが物理量なのは間違い無いが、その成分 u_i は必ずしも物理的な量だとは限らないということになるのだ。そこで、極座標 ($\xi^1 = r, \xi^2 = \theta, \xi^3 = z$) の場合の各量を文献 [25] から引用して列挙してみよう。まず基底ベクトルが

$$\mathbf{g}_r = \mathbf{i}_1 \cos \theta + \mathbf{i}_2 \sin \theta, \quad \mathbf{g}_\theta = -\mathbf{i}_1 r \sin \theta + \mathbf{i}_2 r \cos \theta \quad (\text{D.24a, b})$$

となる。この \mathbf{g}_θ が長さの次元を持っていることには注意すること。これから計量テンソル成分は

$$g_{rr} = 1, \quad g_{\theta\theta} = r^2, \quad g^{rr} = 1, \quad g^{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \quad (\text{D.25a, b, c, d})$$

であり、Christoffel の記号が

$$\Gamma_{r\theta\theta} = r, \quad \Gamma_{\theta\theta r} = -r, \quad \Gamma_{\theta\theta}^r = -r, \quad \Gamma_{r\theta}^\theta = \frac{1}{r} \quad (\text{D.26a, b, c, d})$$

と表される。これを用いて応力表示のつり合い式 $\sigma^{ji}|_j + f^i = 0$ を誘導すると次のようになる。

$$\frac{\partial \sigma^{rr}}{\partial r} + \frac{\sigma^{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma^{r\theta}}{\partial \theta} - r\sigma^{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial z} + f^r = 0, \quad (\text{D.27a})$$

$$\frac{\partial \sigma^{r\theta}}{\partial r} + \frac{3\sigma^{r\theta}}{r} + \frac{\partial \sigma^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{\theta z}}{\partial z} + f^\theta = 0, \quad (\text{D.27b})$$

$$\frac{\partial \sigma^{rz}}{\partial r} + \frac{\sigma^{rz}}{r} + \frac{\partial \sigma^{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma^{zz}}{\partial z} + f^z = 0 \quad (\text{D.27c})$$

ここに f^r, f^θ はそれぞれ $\mathbf{g}_r, \mathbf{g}_\theta$ 方向の体積力である。ただし、この応力テンソルや体積力ベクトルの成分は \mathbf{g}_r と \mathbf{g}_θ 方向の成分であり、特に後者の基底ベクトルは式 (D.24) から明らかなように長さの次元を持っていることから、この成分が必ずしも物理的な応力の成分にはなっていないことに注意が必要だ。そこで、それを調整した物理的な成分を、基底ベクトルの大きさと単位を念頭に置いて

$$\tau^{rr} \equiv \sigma^{rr}, \quad \tau^{r\theta} \equiv r\sigma^{r\theta}, \quad \tau^{\theta\theta} \equiv r^2\sigma^{\theta\theta}, \quad \tau^{zz} \equiv \sigma^{zz}, \quad \tau^{rz} \equiv \sigma^{rz}, \quad \tau^{\theta z} \equiv r\sigma^{\theta z}, \quad q^r \equiv f^r, \quad q^\theta \equiv rf^\theta, \quad q^z \equiv f^z \quad (\text{D.28a, b, c, d, e, f, g, h, i})$$

のように定義して上式を書き直すと

$$\frac{\partial \tau^{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau^{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\tau^{rr} - \tau^{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau^{rz}}{\partial z} + q^r = 0, \quad (\text{D.29a})$$

$$\frac{\partial \tau^{r\theta}}{\partial r} + \frac{2\tau^{r\theta}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau^{\theta z}}{\partial z} + q^\theta = 0, \quad (\text{D.29b})$$

$$\frac{\partial \tau^{rz}}{\partial r} + \frac{\tau^{rz}}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau^{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau^{zz}}{\partial z} + q^z = 0 \quad (\text{D.29c})$$

となり、これは物理的な量で表されたよく知られたつり合い式である。

また変位勾配は

$$u^r|_r = \frac{\partial u^r}{\partial r}, \quad u^r|_\theta = \frac{\partial u^r}{\partial \theta} - r u^\theta, \quad u^\theta|_r = \frac{\partial u^\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} u^\theta, \quad u^\theta|_\theta = \frac{\partial u^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} u^r \quad (\text{D.30a, b, c, d})$$

となるので、物理成分 v を

$$v^r \equiv u^r, \quad v^\theta \equiv r u^\theta \quad (\text{D.31a, b})$$

と定義すると、上式は

$$u^r|_r = \frac{\partial v^r}{\partial r}, \quad u^r|_\theta = \frac{\partial v^r}{\partial \theta} - v^\theta, \quad u^\theta|_r = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v^\theta}{r} \right) + \frac{1}{r^2} v^\theta, \quad u^\theta|_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v^r \quad (\text{D.32a, b, c, d})$$

に変換される。上の応力成分とスカラー（仕事）を通して対になるべきひずみ成分 ϵ_{ij} を求めるために、計量テンソルを用いると

$$u_r|_r = g_{rr} u^r|_r = \frac{\partial v^r}{\partial r}, \quad u_r|_\theta = g_{rr} u^r|_\theta = \frac{\partial v^r}{\partial \theta} - v^\theta, \quad u_\theta|_r = g_{\theta\theta} u^\theta|_r = r \frac{\partial v^\theta}{\partial r}, \quad u_\theta|_\theta = g_{\theta\theta} u^\theta|_\theta = r^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v^r \right) \quad (\text{D.33a, b, c, d})$$

と変換できるので、ひずみテンソル成分は

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial v^r}{\partial r}, \quad 2\epsilon_{r\theta} = r \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial v^r}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} v^\theta \right\}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = r^2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v^r \right) \quad (\text{D.34a, b, c})$$

と求められる。一方、式 (D.24) と対になる基底の組は

$$\mathbf{g}^r = \mathbf{i}_1 \cos \theta + \mathbf{i}_2 \sin \theta, \quad \mathbf{g}^\theta = -\mathbf{i}_1 \frac{1}{r} \sin \theta + \mathbf{i}_2 \frac{1}{r} \cos \theta \quad (\text{D.35a, b})$$

なので、ひずみテンソル成分の物理成分 ϵ_{ij} が

$$\epsilon_{rr} = \epsilon_{rr}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{r} \epsilon_{r\theta}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} \epsilon_{\theta\theta} \quad (\text{D.36a, b, c})$$

と定義できる。したがって最終的に、ひずみの物理成分が

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial v^r}{\partial r}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v^r}{\partial \theta} + \frac{\partial v^\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} v^\theta \right), \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} v^r \quad (\text{D.37a, b, c})$$

と求められる。z 方向成分については直角座標系とほぼ同様で

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial v^z}{\partial z}, \quad \epsilon_{rz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^r}{\partial z} + \frac{\partial v^z}{\partial r} \right), \quad \epsilon_{\theta z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v^\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial v^z}{\partial \theta} \right) \quad (\text{D.38a, b, c})$$

となる。

このようにテンソル（数学）成分と物理成分は必ずしも一致しない。したがって、特に構成方程式を

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{D.39})$$

とモデル化したときの係数 \mathbf{C} は物理的に意味を持たなければならないことにも十分注意しなければならない。多分そのとき、適切な材料モデルであれば、上式のような数学的関係（テンソル方程式）も美しくなるし、同時に

$$\tau^{ij} = \bar{C}^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (\text{D.40})$$

と表した物理的関係式（テンソル方程式ではない）も美しくなるのではないだろうかと思えるが、どうだろう。一般的な曲線座標系でシェル理論を構築しようとしたときの難しさにちょっとだけ触れることができたと思う。文献 [101] では構造力学も含めて正確なテンソル表記が使われているので参考にして欲しい。なお、梁の有限変位理論を説明した際の物理的な応力成分の定義式 (C.22) でも具体的に示したように、有限変形の枠組において Lagrange 的な記述をした場合の基底ベクトルには物体の変形も含まれ、単位でも直交系でもなくなるので、その物理成分を注意深く定義する必要があることには十分注意して欲しい。

D.5 座標変換とテンソル

テンソルって何だろう。それは物理量のことであり、人間の都合で導入した座標系とは無関係である。したがって、式 (D.39) のようなテンソル方程式も座標系とは無関係に成立する。しかし、基底ベクトルは座標系によって異なるからテンソル成分は座標系に依存した量になる。例えば任意の曲線座標 \mathbf{x} 系と別の座標 \mathbf{x}' 系の基底ベクトル同士は式 (D.12) と同様

$$\mathbf{g}^k = \beta_{i'}^k \mathbf{g}^{i'}, \quad \beta_{i'}^k \equiv \frac{\partial x^k}{\partial x^{i'}}, \quad \mathbf{g}^{k'} = \beta_i^{k'} \mathbf{g}^i, \quad \beta_i^{k'} \equiv \frac{\partial x^{k'}}{\partial x^i} \quad (\text{D.41a, b, c, d})$$

のような関係にある。この $\beta_{i'}^k$ は座標変換係数なので

$$\beta_{k'}^i \beta_j^{k'} = \delta_j^i, \quad \beta_{i'}^k \beta_k^{j'} = \delta_{i'}^{j'} \quad (\text{D.42a, b})$$

を満足する。したがって任意のベクトル \mathbf{v} の成分同士は

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{g}^i = v_i \beta_{j'}^i \mathbf{g}^{j'} = v_{j'} \mathbf{g}^{j'} \rightarrow v_{j'} = \beta_{j'}^i v_i \quad \text{あるいは} \quad v_i = \beta_i^{j'} v_{j'} \quad (\text{D.43a, b, c})$$

のような関係にある。この座標変換の規則は任意のテンソルに対して成り立ち、2 階の場合は

$$\sigma^{ij} = \beta_{k'}^i \beta_{l'}^j \sigma^{k'l'}, \quad \sigma^{i'j'} = \beta_k^{i'} \beta_l^{j'} \sigma^{kl} \quad (\text{D.44a, b})$$

のような関係になり、4 階の場合は座標変換係数が四つ並ぶことになる。

D.6 極座標系の物理成分を用いた誘導例

テンソル解析の共変微分等を用いれば、種々の物理量間の関係式等を誘導できるが、前述のようにテンソル成分が必ずしも物理成分ではないことを考えると、そういう誘導で得た関係式で実際の物理現象が理解できるとは言えないかもしれない。そこでここでは極座標系を例として、その微分要素をきちんと対象として、最初から物理成分を用いて関係式等の誘導をする例を示しておこう。一例として Northwestern 大学の Dundurs 先生の 'Elasticity' の講義ノート（1980 年頃）から、ひずみの定義式の誘導を紹介しておこう。

図 D.2 の左図には微分線素 Δr と $r\Delta\theta$ の変形前後の状況を描いたが、本来は円弧であるはずの $r\Delta\theta$ を直線で近似してあることには注意する。これは $\Delta\theta$ が微小なことから問題は生じない。まず左図より

$$a = \left(v^r + \frac{\partial v^r}{\partial \theta} \Delta\theta \right) \cos \Delta\theta - \left(v^\theta + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \Delta\theta \right) \sin \Delta\theta, \quad b = \left(v^r + \frac{\partial v^r}{\partial \theta} \Delta\theta \right) \sin \Delta\theta + \left(v^\theta + \frac{\partial v^\theta}{\partial \theta} \Delta\theta \right) \cos \Delta\theta$$

となるので、主要項だけを取り出せば

$$\frac{\partial r^{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial r^{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2r^{r\theta}}{r} = 0 \quad (\text{D.48})$$

のように、式 (D.29b) の平面応力部分を得る。

もう一つの例として、極座標系の熱伝導方程式を誘導しておこう。外部からのエネルギー入力がない場合には右図のような熱収支が生じるので、保存則は

$$\begin{aligned} q^r r \Delta \theta + q^\theta \Delta r - \left(q^r + \frac{\partial q^r}{\partial r} \Delta r \right) (r + \Delta r) \Delta \theta - \left(q^\theta + \frac{\partial q^\theta}{\partial \theta} \Delta \theta \right) \Delta r \\ = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} r \Delta r \Delta \theta \end{aligned}$$

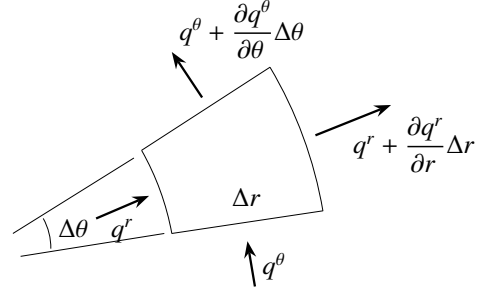


図 D.4 極座標系の熱伝導方程式

となる。ここに q が熱流で u は温度である。これを展開して主要項をまとめると

$$\frac{\partial (r q^r)}{\partial r} + \frac{\partial q^\theta}{\partial \theta} + c\rho \frac{\partial u}{\partial t} r = 0$$

を得る。これに Fourier の法則の

$$q^r = -\kappa \frac{\partial u}{\partial r}, \quad q^\theta = -\kappa \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \quad (\text{D.49a, b})$$

を代入して整理すると、 κ が定数の場合には

$$\kappa \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] = \kappa \left[\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] = \kappa \nabla^2 u = c\rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{D.50})$$

が極座標における熱伝導方程式である。

付録 E

破壊力学はどうしても好きになれない

E.1 破壊力学とは

第1著者が最も嫌いなもの。否、理解できないものだ。食べても味がしない。触っても感触が無い。よく見えないから実は触ることも困難だ。特に抵抗力 R なるものが出てくるあたりからはさっぱりだった。

さて第2次世界大戦の頃溶接を用いた橋梁や船舶がいくつか崩壊した。作用している外力がほぼ無い状態だったため、生じている応力は材料そのものの強度に比べてかなり小さいと想像された。そこで、次のような理想的へき開強度との比較がなされた。まず欠陥の無い結晶構造の金属材料が破断する状況はその結晶格子の原子間に新たに表面を作る（破断させる）ことなので、それを定量的に捉えるために、表面を生成するのに必要なエネルギーを γ としておく。一方、原子間距離と生じる応力の関係は図 E.1 のようになることがわかっているので、この応力と原子間距離の図の面積部分（近似としての図中の網掛け部分）に相当するエネルギーが表面を生成するのに消費された時点で破断すると考えてみよう。まず、この図の網掛け部の面積は微小変形の仮定等を用いて近似的に

$$U_0 \approx \frac{\sigma_{\max}^2}{E} 2b$$

となる。ここに E は Young 率であり、 b は原子間隔である。そして、そのエネルギーが上述の表面生成エネルギー 2γ （面が2枚あるので）に達したところで破断が生じると仮定するので、最大応力は

$$U_0 = 2\gamma \rightarrow \sigma_{\max} \approx \sqrt{\frac{E\gamma}{b}}$$

と求められる。例えば $\gamma \approx E/100$ くらいと考えられるので、具体的な値を鋼を参考にして代入すると

$$E = 210 \text{ GN/m}^2, \quad b \approx 2 \text{ \AA} = 0.2 \text{ nm}, \quad \gamma \approx 2 \text{ J/m}^2 \rightarrow \sigma_{\max} \approx 10 \sqrt{21} \text{ GN/m}^2$$

となり、オーダーとしては $\sigma_{\max} \approx E/10$ 程度となる。しかし実際に観察された破断応力は $E/1000$ 程度だったことから、理想的な結晶構造のままのへき開で破断するとは考えられないことが明らかだ。

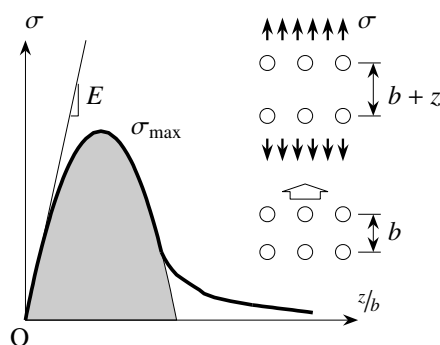


図 E.1 破断に必要なエネルギー

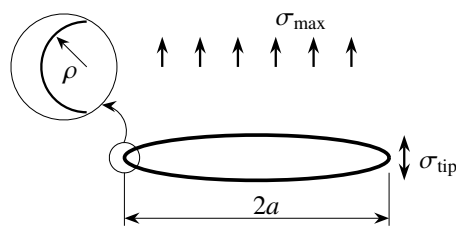


図 E.2 扁平な楕円空隙モデル

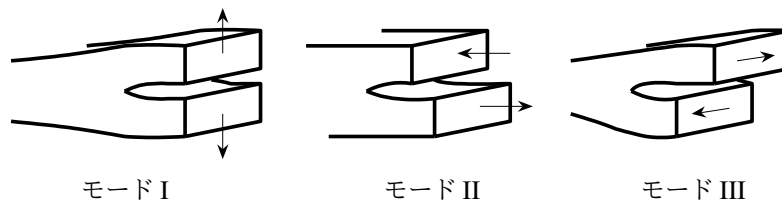


図 E.3 数学的亀裂の三つの変形モード

そこで Griffith は、材料中には亀裂という欠陥が最初から存在し、その先端の応力集中のような効果によって亀裂が進展して破断すると提唱した。それに基づき Orowan と Inglis は、図 E.2 に示したようなとても扁平な楕円形状の空隙が存在する場から、上述と同様のエネルギー的な概算を行った。無限遠点に σ_{\max} の応力に相当する荷重が作用しているときの、楕円空隙の先端付近の応力集中によって拡大された応力 σ_{tip} は

$$\frac{\sigma_{\text{tip}}}{\sigma_{\max}} = 1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$$

程度になることがわかっている。ここに a は楕円空隙の長軸半径であり、 ρ はその先端の曲率半径である。しかしここでは非常に扁平な空隙（ほぼ亀裂）だとするので、上式の第 2 項の方が第 1 項よりもかなり大きくなって第 1 項は無視できる。そして、この先端応力が上述の理想的へき開強度に一致するとすると

$$\sigma_{\text{tip}} \approx 2\sigma_{\max} \sqrt{\frac{a}{\rho}} \approx \sqrt{\frac{E\gamma}{b}}$$

と置くことができる。曲率半径はほぼ結晶格子間隔程度だと近似 ($\rho \approx b$) できるので、上式から

$$\sigma_{\max} \approx \sqrt{\frac{E\gamma}{4a}}$$

と求められる。実際に生じている初期亀裂はかなり長いと考えて $2a \approx 5000b$ 程度であると、表面エネルギーが前述と同様 $\gamma \approx Eb/100$ くらいだとすると

$$\sigma_{\max} \approx \frac{E}{1000}$$

のような現実的な値になることがわかる。このことから、実際に生じた船舶等の崩壊では亀裂の存在が不可欠だと考えられるようになった。そして亀裂が予め存在する場の挙動を対象とする力学を破壊力学と呼ぶようになった。金属材料の中に転位という欠陥があることは第 11 章で述べたし、その転位が結晶界面に移動して延性破壊する応力はある程度高いのだが、それより低い応力レベルで材料が破壊する可能性があるということが明らかになった。ただこの算定は弾性体としての近似的なモデルに基づくものであり、実際の亀裂先端の応力はかなり高いことから塑性変形も生じているはずであり、厳密に破断強度を求めることが困難であることには注意する必要がある。ちなみに $\rho \rightarrow 0$ の極限の空隙を数学的亀裂と呼ぶ。

E.2 弾性亀裂と応力拡大係数

E.2.1 亀裂の変形モードと面外問題

数学的亀裂の荷重状態は図 E.3 のような三つのモードに分類される。このうち面外変位が生じるモード III が最も簡単な問題なので、まずその亀裂先端付近の応力状態を求める手法を示しておこう。対象は図 E.4 で x 軸の負の部分に無限に長い数学的亀裂が存在し、上半分 ($y > 0$) が紙面手前方向に、下半分 ($y < 0$) が紙面奥行き方

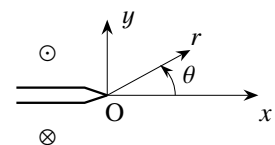


図 E.4 モード III 亀裂

向に変位するものとする。平面問題の対称性から

$$u \equiv 0, \quad v \equiv 0, \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

となるので、零でないひずみ成分は

$$\epsilon_{zx} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} \neq 0, \quad \epsilon_{yz} = \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial y} \neq 0$$

の二つだけだ。したがって、Hooke の法則から σ_{zx} と σ_{yz} , あるいは σ_{rz} と $\sigma_{\theta z}$ だけが非零となる。

境界条件は、まず亀裂のある部分は自由表面なので

$$\sigma_{yz}(y=0) = \sigma_{\theta z}(y=0) = 0, \quad \sigma_{yy}(y=0) = \sigma_{\theta\theta}(y=0) = 0$$

であり、亀裂の無い部分は固定されているものとして $w(y=0) = 0$ とする。したがって x 軸上の境界条件は

$$w = 0 \quad \text{along } \theta = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \theta} = 0 \quad \text{along } \theta = \pi \quad (\text{E.1a, b})$$

と記せばいい。一方、物体力が無いときの極座標のつり合い式は式 (D.29) から

$$\frac{\partial(r\sigma_{rz})}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_{\theta z}}{\partial \theta} = 0$$

である。また Hooke の法則とひずみ変位の関係とから、せん断弾性係数を μ とすると

$$\sigma_{rz} = 2\mu\epsilon_{rz} = \mu \frac{\partial w}{\partial r}, \quad \sigma_{\theta z} = 2\mu\epsilon_{\theta z} = \mu \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} \quad (\text{E.2a, b})$$

という関係が成立するので、上のつり合い式に代入すると、 w で表したつり合い式が

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = 0 \quad \text{あるいは} \quad \nabla^2 w = 0 \quad (\text{E.3})$$

と表される。境界条件式 (E.1) を満足するように w に対してこの式 (E.3) を解けば、亀裂が存在する弾性体の応力場を求めることができる。ただ、我々は亀裂先端に大きな応力が集中する（実際には無限大になる）と予想していて、その周辺から破壊が生じると考えているので、その先端付近の応力場にまずは興味がある。そのため、いわゆる漸近解析と称する（亀裂先端だけに着目した）解析を行う。

まず解を

$$w \sim A r^p f(\theta) \quad (\text{E.4})$$

のように仮定する。つまり、 θ 方向には $\theta = 0$ を境にして反対称な関数になると考えられる一方で、 r 方向については、 $r = 0$ 近傍だけを対象とした解にしか興味が無いことからべき乗で仮定しているのだ。これをつり合い式 (E.3) に代入して整理すると

$$p^2 r^{p-1} f + r^{p-1} f'' = 0$$

を得る。このプライムは θ に関する微分を表す。この式から $f(\theta)$ は

$$f'' + p^2 f = 0$$

を満足する関数でなければならないので

$$f = a \sin(p\theta) + b \cos(p\theta)$$

が一般解である。これを境界条件式 (E.1), つまり

$$f(0) = 0, \quad f'(\pi) = 0$$

に代入すれば

$$b = 0, \quad \cos(p\pi) = 0$$

でなければならないことから

$$f(\theta) \sim \sin(p\theta), \quad p = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \dots$$

が解の候補になる。 f が sine 関数なので、変位 w の x 軸に対する反対称性が得られている。

この結果を式 (E.2) (E.4) に代入すれば

$$w = A r^p \sin(p\theta), \quad \sigma_{rz} = A \mu p r^{p-1} \sin(p\theta), \quad \sigma_{\theta z} = A \mu p r^{p-1} \cos(p\theta)$$

のように亀裂先端の変位と応力が求められる。そこで、亀裂先端の半径 a の領域内のひずみエネルギー U を求めてみると

$$U \equiv \frac{1}{\mu} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^a \frac{1}{2} (\sigma_{rz}^2 + \sigma_{\theta z}^2) r \, d\theta \, dr = \frac{\pi}{2} A^2 \mu p a^{2p}$$

という表現になる。ここで、もし $p \leq -\frac{1}{2}$ の場合には $U < 0$ になってしまうし、しかも領域を小さくして $a \rightarrow 0$ にしたときに $U \rightarrow \infty$ になる。これでは弾性論として容認できない解を得たことになる。以上の考察から

$$p \geq \frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad U < \infty \quad (\text{有界})$$

でないといけないことがわかる。したがって、物理的に意味のある解の漸近表現は

$$w = w_0 + A r^{1/2} \sin(\theta/2) + O(r^{3/2}),$$

$$\sigma_{rz} = \frac{1}{2} A \mu r^{-1/2} \sin(\theta/2) + O(r^{1/2}), \quad \sigma_{\theta z} = \frac{1}{2} A \mu r^{-1/2} \cos(\theta/2) + O(r^{1/2})$$

となる。得られた結果で最も重要なのは、その応力場が $r = 0$ 付近で最も大きく（無限大に）なる成分の

$$\sigma \sim A \mu r^{-1/2} g(\theta)$$

の部分である。以上の結果から

- 亀裂先端では r の $-1/2$ 乗の特異性を持っている。 $r \rightarrow 0$ で無限大になる。
- 弾性係数 μ に比例している。
- θ 方向には何らかの関数になる。
- その絶対値 A は、荷重条件や物体の形（多分、亀裂長さ）等で決まる。

と考えていいことになる。実際の物体に存在する亀裂先端では応力が無限大にはならないので、この解が無限大になることそのものは弾性解が持つ不具合（誤差）だと捉えればいい。しかし r の $-1/2$ 乗で分布することは、例えば対象としている物体の「縁」から亀裂までの距離を検討するとき重要なことであろう。そして、絶対値 A が荷重条件や物体形状等で決まると考えていい（漸近解析には無限遠点の荷重条件や物体形状の影響は含まれていない）ことから、この絶対値 A がある規準値に達したときに亀裂は進展すると考えるのだ。つまり、亀裂の破壊規準を

$$A = A_{cr} \tag{E.5}$$

と考え、この A_{cr} を破壊靱性と呼び、これが材料の強度特性を表すパラメータだと考えるのである。

E.2.2 面内問題の場合

モード I と II の場合にも同様の漸近解析が可能である。まずつり合い式は

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r} (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \sigma_{r\theta} = 0$$

であり, Hooke の法則が

$$\sigma_{r\theta} = 2\mu \epsilon_{r\theta}, \quad \sigma_{rr} = \mu \left(\frac{3-\kappa}{\kappa-1} \epsilon_{\theta\theta} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \epsilon_{rr} \right), \quad \sigma_{\theta\theta} = \mu \left(\frac{3-\kappa}{\kappa-1} \epsilon_{rr} + \frac{\kappa+1}{\kappa-1} \epsilon_{\theta\theta} \right)$$

と表される。ここに κ は式 (3.192) で定義される。ひずみと変位の関係は

$$\epsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \epsilon_{\theta\theta} = \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}, \quad \epsilon_{r\theta} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right)$$

と定義されている。これに対し, 面外問題と同じように r のべき乗を用いて

$$u_r = r^p f(\theta), \quad u_\theta = r^p g(\theta)$$

と仮定して解けば亀裂先端の応力場を求めることができる。必要な読者は自分で解いてみて欲しい。

E.2.3 平面問題の応力拡大係数

実際に载荷された亀裂先端の解は第3章の第3.6.4節の応力関数を用いる等して求めることができる。図 3.45 が前節の面内問題のモード I の解に相当する。無限体中に長さ $2a$ の数学的亀裂が1個だけ存在して, 図 E.5 のような载荷状態にある場合の亀裂先端の応力場は, それぞれのモード毎に

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = \frac{K_i}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} f_i(\theta) \\ g_i(\theta) \\ h_i(\theta) \end{Bmatrix}, \quad i=I, II, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta z} \end{Bmatrix} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} p(\theta) \\ q(\theta) \end{Bmatrix}$$

と求められている。ここに K_i ($i=I, II, III$) は応力拡大係数と呼ばれ, 無限体のこの境界条件下では

$$\begin{Bmatrix} K_I \\ K_{II} \\ K_{III} \end{Bmatrix} = \sqrt{\pi a} \begin{Bmatrix} \sigma_{yy}^\infty \\ \sigma_{xy}^\infty \\ \sigma_{yz}^\infty \end{Bmatrix}$$

となる。ただし, 対象が無限体ではない場合や複数の亀裂が存在する場合あるいは载荷条件や境界条件が異なる場合には応力拡大係数は異なる表現になる。ルーズリーフのノートの穴が紙の端 (領域境界の自由表面の条件) に近い場合にはそこが破れ易いと感じると思うが, それはそのような境界条件下では応力拡大係数が大きくなるからだ。いずれにしても, 亀裂先端の応力の特異性は先端からの距離の平方根乗である。そして式 (E.5) と同様に, この応力拡大係数がその材料特有の規準値に達し

$$K_i = K_{ic}, \quad i=I, II, III$$

を満足したときに亀裂が進展すると考えるのである。この材料特性値 K_{ic} を破壊靱性と呼んでいる。この破壊靱性は温度が下がるほど小さくなることもよく知られている。したがって, 応力で表現した強度 σ_{cr} が材料の規準値としての破壊靱性だけではなく亀裂の長さにも依存し, その形は

$$\sigma_{cr} = \frac{K_{ic}}{\sqrt{\pi a}} \quad (E.6)$$

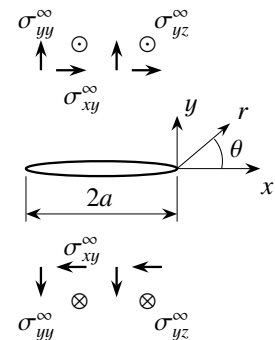


図 E.5 無限体中の亀裂

のようになる。このように、同じ材料であっても亀裂が長くなればなるほど材料強度が下がること、つまり寸法によって強度が下がることを式 (E.6) は示している。その寸法の平方根が分母にあるので、材料実験をしたときに試験片の寸法の平方根に反比例するような強度や挙動が観察された場合には、亀裂の存在を疑うのがいいということだ。

このように、材料特性に影響する要因のうち長さの次元を持つパラメータを特性長さと呼んでいる。この式 (E.6) のように材料の強度が何らかの寸法に支配される例として多結晶金属の強度について考察してみよう。製鋼所で欠陥の無い材料を製造することは不可能であり、転位が無数に内部に存在することは既に述べた。これが载荷に伴い内部の単結晶界面に集積して、そこが空隙になったとし、その界面に沿った空隙を亀裂とみなしてみよう。もしそういう把握が可能なら、多結晶体内に存在するかもしれない亀裂の長さが単結晶の粒の大きさ程度であることが容易に想像できる。したがって式 (E.6) を踏まえると、単結晶の粒径をできるだけ小さくした方が強度が下がらないことも想像できるのではないだろうか。映像で刀鍛冶の作業を見たことがあると思うが、それと同じように鋳等を作る場合にも「鍛える」という表現で鉄槌で材料を叩いている。実はこれは圧延して形を整えながら同時に内部の結晶粒を壊して粒径を小さくしているのである。これによって相対的に強度を上げていると考えてもいい。実際 **TMCP** 鋼という製品では、圧延装置とセンサー・コンピュータを併用して温度調整をしながら叩くことによって高強度の厚板を製造している。ただし溶接や切断による入熱によって粒径が大きくなってしまう可能性もあるので取り扱いは難しい。

E.3 亀裂先端の塑性変形について

ここで説明した弾性亀裂では亀裂先端の応力は無限大になることから、実際の材料中の挙動をそのままモデル化できていないことは明らかである。そのため、先端に拡がるであろう塑性変形をさらにうまくモデル化しないと、実際の破壊強度等を精度よく予測することはできない。昨今はすぐに数値解析に逃げる（著者も含めて）が、これを力学モデルで表すことは大事である。というのも、弾性亀裂で得られたような、例えば亀裂長さの平方根が重要なパラメータであるといったことを数値解析で求めるのは困難だからだ。解析的方法はやはり重要である。さて、亀裂先端の塑性変形を扱うモデルには **Dugdale-Barenblatt** モデルといったものがある。二つのモデル間には若干の違いがあるが、亀裂先端の大きくはない塑性域を考慮するために、その領域にある種の結合力を導入した上で亀裂先端の特異性を消失させるといった、とても興味深い力学的考察に基づいて作られたモデルである。読者には是非勉強して欲しいモデルだ。やや積分方程式的な考え方を通して思い付くかもしれないモデルのように感じる。例えばコンクリートに存在する亀裂先端の状況を想像してみて欲しい。そこには数学的亀裂のような尖った先端があるとは誰も思わないだろう。亀裂と思しき存在の先端付近には、モルタルがボロボロになりかけて内部に小さい空隙や微視的な亀裂が無数に分布し、材料はもはや連続体ではなくなる寸前といった状況だと想像できないだろうか。そういう亀裂先端部分を破壊進行領域と呼ぶが、上のモデルはそのような「特異性を持たない先端」を持つ亀裂モデルである。どう？興味持てた？駄目でしょ？さらに複素応力関数や **Hankel** 関数を、つまり複素関数論をしっかり勉強しておかないといけないのだ。破壊力学って頭のいい人じゃないと使えないんだよねえ。

付録 F

境界要素法と逆問題の概念

F.1 境界上の解の積分表現

F.1.1 問題の設定

これもよく、否、全く理解できていないトピックスの一つである。以下は 1992 年頃に誰かに説明するために作った資料だが、そのあと北原道弘先生の授業「弾性波動論」を無謀にも引き継いだときに文献 [139] で勉強を試みたものの、やはり挫折したお題である。破壊力学とこの力学にはいまでも拒否反応しない。簡単のためにラプラス方程式を例とする。

解きたい問題: 解こうとする境界値問題は

$$\nabla^2 u(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } V, \quad (\text{F.1a})$$

$$u = \bar{u} \text{ or } \mathbf{v} \nabla u = f \quad \text{on } \partial V \quad (\text{F.1b})$$

で与えられるものとする。

基本解の問題: 一方、無限領域の境界値問題で $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}$ 点に集中外乱（つまりデルタ関数）が作用した問題は

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) + \delta(\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}) = 0, \quad \text{with } G \rightarrow 0 \text{ as } x \rightarrow \infty \quad (\text{F.2})$$

で与えられる。この基本解 $G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ は図 F.1 右側の図の破線表面つまり解きたい問題の境界表面 (∂V) で

$$\mathbf{v} \nabla G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) = g(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \quad \text{on } \partial V \quad (\text{F.3})$$

のような関数値 $g(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi})$ を持つものとする。この基本解は頭のいい先輩達が既に求めてくれている。

F.1.2 解の積分表現

この基本解を「仮想変位」と捉え、解きたい問題との仮想仕事式を求めよう。式 (F.1a) に式 (F.2) の G を乗じて領域全体で積分すると

$$0 = \int_V G \{ \nabla^2 u(\mathbf{x}) + p(\mathbf{x}) \} d\mathbf{x}$$

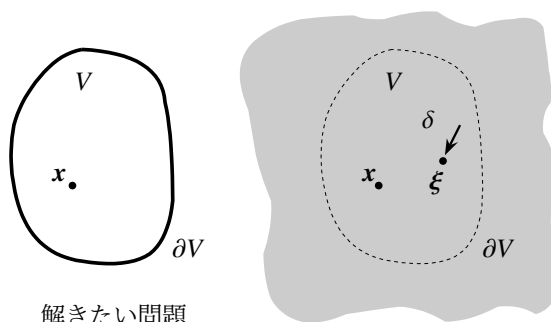


図 F.1 解きたい問題と基本解

が成立する。被積分関数第 1 項に Gauss の発散定理を 2 回適用すれば

$$\begin{aligned} 0 &= \int_V G(u_{,kk} + p) \, dx = \int_{\partial V} G(v_k u_{,k}) \, dx - \int_V G_{,k} u_{,k} \, dx + \int_V p G \, dx \\ &= \int_{\partial V} \{G(v_k u_{,k}) - G_{,k} v_k u\} \, dx + \int_V G_{,kk} u \, dx + \int_V p G \, dx \end{aligned}$$

となるから、式 (F.2) をこの第 2 項に代入すれば

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial V} \{G(v_k u_{,k}) - G_{,k} v_k u\} \, dx - \int_V \delta(x - \xi) u \, dx + \int_V p G \, dx \\ &= \int_{\partial V} \{G(v_k u_{,k}) - G_{,k} v_k u\} \, dx - u(\xi) + \int_V p G \, dx \end{aligned}$$

を得て、最終的に

$$u(\xi) = \int_V p(x) G(x; \xi) \, dx + \int_{\partial V} \{G(x; \xi) \nu \nabla u(x) - u(x) \nu \nabla G(x; \xi)\} \, dx$$

という関係式が求められる。これに、解きたい問題の境界条件式 (F.1b) と式 (F.3) を代入すると

$$u(\xi) = \int_V p(x) G(x; \xi) \, dx + \int_{\partial V} \{G(x; \xi) f(x) - \bar{u}(x) g(x; \xi)\} \, dx \quad (\text{F.4})$$

という式を得る。ここで G と g は既知なので、右辺の p と f , \bar{u} が与えられている問題なら、この式 (F.4) から任意点の u を求めることができる。これは順問題と呼ばれる。弾性体力学の場合の基礎式は第 3.5.5 節を参照のこと。

それに対し、境界上の \bar{u} が与えられているわけではなく、それを式 (F.4) から求める問題の場合には $\xi \rightarrow \partial V$ の極限を考えればよい。得られる式の左辺は境界上の解 $\bar{u}(\xi)$ ($\xi \in \partial V$) になるだけだが、右辺第 2 項の被積分関数にも境界の解 \bar{u} が含まれているので、これは \bar{u} に対する積分方程式になる。ところが、その極限はそんなに簡単ではない。というのも、基本解が

$$G(x; \xi) \rightarrow \infty \quad \text{as } x \rightarrow \xi$$

という特性を持っているからである。したがって、この $\xi \rightarrow \partial V$ の極限では式 (F.4) 第 2 項の積分は特異積分になることに注意する必要がある。これについては文献 [139] を勉強して欲しい。結果だけを写すと

$$\frac{1}{2} \bar{u}(\xi) = \int_V p(x) G(x; \xi) \, dx + \int_{\partial V} \{G(x; \xi) f(x) - \bar{u}(x) g(x; \xi)\} \, dx \quad \text{on } \xi \in \partial V$$

となる (らしい)。 \int は Cauchy の主値積分である。元々の問題が自己随伴であることから

$$G(x; \xi) = G(\xi; x), \quad g(x; \xi) = g(\xi; x)$$

が成立する (相反定理) ので、上式は x と ξ を入れ替えて

$$\frac{1}{2} \bar{u}(x) = \int_V G(x; \xi) p(\xi) \, d\xi + \int_{\partial V} \{G(x; \xi) f(\xi) - g(x; \xi) \bar{u}(\xi)\} \, d\xi \quad \text{on } x \in \partial V \quad (\text{F.5})$$

とも表現できる。これが、境界の解 \bar{u} を求める積分方程式として解釈できる。

F.2 境界要素法

式 (F.5) を解いて境界上の解が求められれば、それを式 (F.4) に代入することによって領域内部任意点の解を求めることができる。境界上の値を求めるための数値解法の一つは境界要素法と呼ばれていて、有限要素法と

同じように \bar{u} を既知関数で仮定して式 (F.5) を離散化して近似解を求めようとする。具体的には境界上に N 個の節点 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_i \in \partial V$ ($i = 1, 2, \dots, N$) を設けて、その節点における $\bar{u}_i \equiv \bar{u}(\mathbf{x}_i)$ の値を用いて

$$\bar{u}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N \bar{u}_i \phi_i(\mathbf{x})$$

と仮定する。この試行関数を式 (F.5) に代入すれば

$$\frac{1}{2} \bar{u}_i = \frac{1}{2} \bar{u}(\mathbf{x}_i) = \int_V G(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\xi}) p(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \int_{\partial V} G(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} - \sum_{j=1}^N \int_{\partial V} g(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\xi}) \bar{u}_j \phi_j(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{F.6})$$

を得る。そこで

$$A_{ij} \equiv \int_{\partial V} g(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\xi}) \phi_j(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad f_i \equiv \int_V G(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\xi}) p(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} + \int_{\partial V} G(\mathbf{x}_i; \boldsymbol{\xi}) f(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}$$

と定義すれば、式 (F.6) は

$$\sum_{j=1}^N \left(A_{ij} + \frac{1}{2} \delta_{ij} \right) \bar{u}_j = f_i, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (\text{F.7})$$

のような、境界上の \bar{u}_i を求めるための離散化された代数方程式に変換できる。

F.3 逆問題の概念

次に式 (F.5) を「逆」から眺るために順番を入れ替えて

$$\frac{1}{2} \bar{u}(\mathbf{x}) + \int_{\partial V} g(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) \bar{u}(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} = \int_V G(\mathbf{x}; \boldsymbol{\xi}) p(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi} \quad \text{on } \mathbf{x} \in \partial V \quad (\text{F.8})$$

と書いておこう。簡単のために表面外乱 f は省略した。順問題は式 (F.1) のように、外乱の p や f が与えられたときの u を求める問題だったから、上式 (F.8) の場合は右辺の p が原因で左辺の \bar{u} が結果だ。では逆に左辺の \bar{u} がわかって（測定されて）いるときに p を求める問題とは何だろう。因果を逆向きに捉えて結果の \bar{u} からその原因の p を予測する問題だ。これが逆問題と呼ばれていて、領域の表面で測定される現象を使って、その領域内に存在するその原因を予測する問題になる。もうピンときた読者も多いとは思いますが、典型的な応用例は内臓のエコー検査¹だ。皮膚に当てた装置からある種の波を体内に送り出し、反射してきた波から得られるデータ（上式の \bar{u} に相当）を処理し、内臓の大きさや血液の流速等（上式の p に相当）を推測する検査である。社会基盤構造の場合は、鋼橋の溶接部の亀裂を超音波探傷検査すること等の非破壊評価がこれに当たる。この章の例がラプラス方程式だったからわかり難いと思うが、変形できる物体の力学の場合は例えば付録 I で説明するように、領域内の異種材料や空洞等はある種の初期ひずみ（eigen ひずみ）あるいはそれに相当する応力（back stress）の分布で置換でき、それが上式 (F.8) 右辺の $p(\boldsymbol{\xi})$ に相当するのである。そして、体の表面や橋梁部材の表面で測定される変位等の $\bar{u}(\mathbf{x})$ に対応する $p(\boldsymbol{\xi})$ を、式 (F.8) のような積分方程式を解いて求めることによって、その内部の構造や欠陥の位置や大きさ等を予測する問題が、その逆問題なのである。積分方程式の例は第 3.6.4(2) 節にも示した。ただし、その内部欠陥等の領域を Ω とすると

$$p(\boldsymbol{\xi}) = \begin{cases} p(\boldsymbol{\xi}) & \text{in } \boldsymbol{\xi} \in \Omega \\ 0 & \text{in } \boldsymbol{\xi} \notin \Omega \end{cases} \quad (\text{F.9})$$

¹ 第 1 著者が年 1 回の心エコー検査時に real time で見ている動画は実は偽物なのだそう。人間の体内組成はあまりにも簡単なので、得られた信号を簡単に積分できて、心臓の弁が動いていたり血液がどちら向きに流れているかを、ほぼ real time で表示できるのだそう。驚きである。自分の大腸の内部を内視鏡で観察したときはまた違う次元の驚きである。

といった関数として取り扱うか、あるいは式 (F.8) で

$$\frac{1}{2} \bar{u}(x) + \int_{\partial V} g(x; \xi) \bar{u}(\xi) d\xi = \int_{\Omega} G(x; \xi) p(\xi) d\xi \quad \text{on } x \in \partial V \quad (\text{F.10})$$

のように、右辺の積分領域を Ω だけにすればいい。しかし Ω はその位置と形も未知なのだ。とても普通の頭では解けそうもないことがここで想像できる。

さらに、実際には変形できる物体中の波動方程式を用いる必要があるので独立変数には時間 t も含まれるのが一般的だが、定式化はほぼ同様だ。そして物体中の異種材料や空隙等の $p(\xi)$ と Ω は波の散乱源として捉えられる。著者は全く理解できなかったで、興味を持った読者は文献 [139] を読んで欲しい。また時空間を対象とするので、たいていは式 (F.8) に相当する式そのものを物理的時間領域で解く代わりに、それを Fourier 変換して周波数領域で解くことになるので、真剣に努力して勉強する必要がある。著者が理解できなかった理由はこの記述からも想像できると思う。破壊力学と同様、複素関数論の勉強が必須だ。



写真 F.1 Machinac 橋, Michigan 州 1957 年竣工



‘PhD.’ 米国の学位には他に Medical Doctor や Doctor of Music 等があるが、何が違う、どうして哲学? どうやら PhD 以外は何らかの技術そのものを身に付けたものなのだそう。だから技術や真実の裏にある理屈についての学位を総称して PhD と呼ぶらしい。したがって細菌学や音楽史で取る学位は PhD になるとか。なお、BS は ‘Bullshit’, MS は ‘More Shit’, PhD は ‘Piled High and Deep’ の頭文字とする見方は正しい・・・か。ところで ‘bullshit’ はもちろん動詞としても使われているが、これは ‘chicken’ が動詞でもあるのと同様ようだ。

付録 G

1 次元の粘弾性の基礎的な考え方

G.1 粘性

Northwestern 大学の Achenbach 先生の ‘Viscoelasticity’ の講義ノート（1980 年頃）から最初の 10 ページ程をここに引用するが、第 1 著者がどうやって単位を取得できたのか不思議である。ノートを読み直してみても、また中間テストの答案用紙を見ても、当時どうして理解できたのかが不思議なのだ。ここは純せん断の 1 次元問題を対象として、粘弾性を持つ基礎的な性質とその記述の仕方を列挙する。せん断問題なので簡単のために工学ひずみ γ を用いるが、時間パラメータに τ を用いるので、応力は σ で表示する。

さて、粘性はひずみ速度が応力に比例して生じるような性質なので、基本的には

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{\eta} \sigma \quad (\text{G.1})$$

とモデル化される。ここに上付きドットは時間による微分を表し、 η は粘性抵抗係数で材料パラメータである。一方、弾性は Hooke の法則に従うものとするとき (3.45) から

$$\gamma = \frac{1}{\mu} \sigma \quad (\text{G.2})$$

という関係が成立する。あとで定義する緩和関数 $G(t)$ と混同しないように、せん断弾性係数には μ の方を用いている。この両方が同時に成り立つ材料の性質を粘弾性と呼ぶ。次の節では、最も基本的な二つのモデルを用いて粘弾性を持つ特性を紹介する。

G.2 粘弾性

G.2.1 クリープ

(1) クリープコンプライアンス

まず、ある大きさの応力 $\sigma(0)$ が時刻 $t = 0$ に与えられたとする。つまり Heaviside 関数を用いて応力が

$$\sigma(t) = \sigma(0) H(t) \quad (\text{G.3})$$

で与えられたとする。このとき粘弾性材料には $\gamma(t)$ のひずみが生じ、それは

$$\gamma(t) = \sigma(0) J(t) \quad (\text{G.4})$$

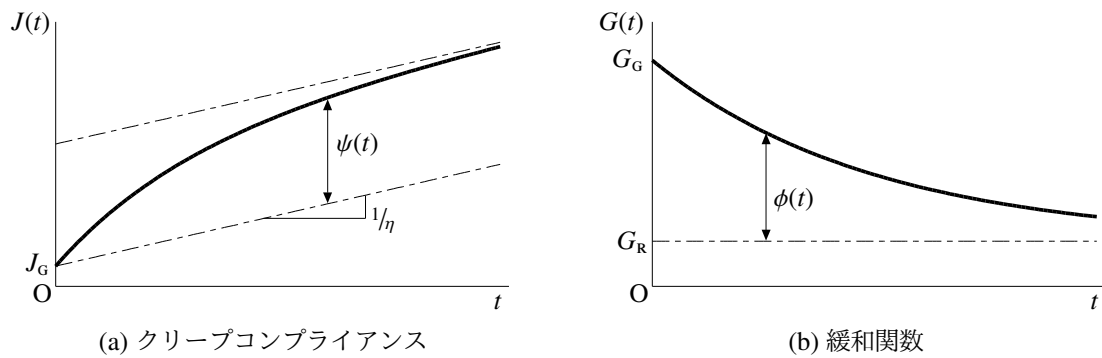


図 G.1 粘弾性挙動：クリープと応力緩和

になると表すことにする。ここに関数 $J(t)$ はクリープコンプライアンスと呼ばれ、多くの材料では一般的に

$$J(t) = J_G + \frac{t}{\eta} + \psi(t) \quad (\text{G.5})$$

のようにモデル化される。 J_G はガラス的コンプライアンスと呼ばれ、第3項の $\psi(t)$ はある有界な流動を表し、これに対し第2項は有界ではない流動成分になる。例えば図 G.1 (a) のような性質を示す。

この Δt 秒後に応力増分 $\Delta\sigma(t + \Delta t) H(t + \Delta t)$ が与えられたとすると、そのあとのひずみは式 (G.4) にその増分を加えればいいので

$$\gamma(t) = \sigma(0) J(t) + \Delta\sigma(t + \Delta t) J(t - \Delta t) \quad (\text{G.6})$$

となる。そのあとも Δt 秒毎に順次応力増分が N 回与えられ続けたとすると

$$\gamma(t) = \sigma(0) J(t) + \sum_{n=1}^N \Delta\sigma(t + n\Delta t) J(t - n\Delta t) \quad (\text{G.7})$$

のように重ね合わせればひずみを求めることができる。これを踏まえると、応力が階段関数的ではなく連続的に与えられた場合は、上式で $N \rightarrow \infty$ とすればいいから

$$\gamma(t) = \sigma(0) J(t) + \int_{0+}^t J(t-s) d\sigma(s) = \sigma(0) J(t) + \int_{0+}^t \frac{d\sigma}{ds}(s) J(t-s) ds \quad (\text{G.8})$$

のように算定できる。積分の下限の $0+$ は $0 + \epsilon$ において $0 < \epsilon \rightarrow 0$ の極限をとった時刻を示す。これがクリープという現象を表現する基礎式であり、次節の応力緩和も含めて粘弾性はこのようなたみ込み積分で表現される。

(2) Kelvin モデル

では $J(t)$ の中の $\psi(t)$ の具体的な例を求めるために、Kelvin モデル¹ に応力を与えてみよう。粘性は第9章の粘性振動の節で紹介したダッシュポットでその機能をモデル図化できる。そこで弾性バネとダッシュポットを一つずつ並列につないだ系に応力を与えよう。この系は Kelvin モデルと呼ばれる。並列なので、つり合い式は式 (G.1) (G.2) から

$$\sigma = \mu \gamma + \eta \dot{\gamma}$$

あるいは

$$\dot{\gamma} + \frac{1}{\tau} \gamma = \frac{1}{\eta} \sigma \quad (\text{G.9})$$

¹ 第9章では Kelvin-Voigt モデルと呼んでいた。

と表すことができる。ここに $\bar{\tau}$ は遅延時間と呼ばれ

$$\bar{\tau} \equiv \frac{\eta}{\mu} \quad (\text{G.10})$$

で定義される。さて応力は $t = 0$ に σ_0 を与えたものとすればいいので

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$$

で与えられる。これを式(G.9)の右辺に代入し、初期条件 $\gamma(0) = 0$ の元で解くと

$$\gamma(t) = \frac{1}{\mu} \sigma_0 \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\bar{\tau}}\right) \right\} \quad (\text{G.11})$$

という解を得る。式(G.4)が $J(t)$ を定義しているので、この解を用いると最終的に

$$J(t) \equiv \frac{\gamma(t)}{\sigma_0} = \frac{1}{\mu} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\bar{\tau}}\right) \right\} \quad (\text{G.12})$$

のようにクリープコンプライアンスが求められる。

Kelvinモデルにさらにもう一つのバネ（バネ定数 μ_0 ）ともう一つのダッシュポット（抵抗係数 η_0 ）を直列につなぐと、クリープコンプライアンスは

$$J(t) = \frac{1}{\mu_0} + \frac{t}{\eta_0} + \frac{1}{\mu} \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\bar{\tau}}\right) \right\} \quad (\text{G.13})$$

のように、式(G.5)の第1, 2項を導入できる。

G.2.2 応力緩和

(1) 緩和関数

逆に、ある大きさのひずみ $\gamma(0)$ が時刻 $t = 0$ に与えられたとすると

$$\gamma(t) = \gamma(0) H(t) \quad (\text{G.14})$$

のようにひずみは表現できる。このとき粘弾性材料には $\sigma(t)$ の応力が

$$\sigma(t) = \gamma(0) G(t) \quad (\text{G.15})$$

になると表すことにする。ここに関数 $G(t)$ は緩和関数あるいは緩和弾性率と呼ばれ、多くの材料では一般的に

$$G(t) = G_R + \phi(t), \quad \phi(0) = G_G - G_R \quad (\text{G.16a, b})$$

のようにモデル化される。式(G.16a)の右辺第1項の G_R はゴムの弾性率と呼ばれ、第2項の $\phi(t)$ はある有界な流動を表し、式(G.16b)の G_G はガラス的弾性率と呼ばれる。例えば図G.1(b)のような性質を示す。

この Δt 秒後にひずみ増分 $\Delta\gamma(t + \Delta t) H(t + \Delta t)$ が与えられた場合を考え、前節と同じような考え方を用いると、ひずみが連続的に与えられた場合

$$\sigma(t) = \gamma(0) G(t) + \int_{0+}^t G(t-s) d\gamma(s) = \gamma(0) G(t) + \int_{0+}^t \frac{d\gamma}{ds}(s) G(t-s) ds \quad (\text{G.17})$$

のように算定できる。これが応力緩和という現象を表現する基礎式である。

(2) Maxwell モデル

Kelvin モデルとは異なり、バネとダッシュポットを直列につないだ系を Maxwell モデルと呼ぶ。この場合の変形（実際は変形速度）の整合性は

$$\dot{\gamma} = \frac{\dot{\sigma}}{\mu} + \frac{\sigma}{\eta}$$

あるいは

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma = \mu \dot{\gamma} \quad (\text{G.18})$$

となる。ここに τ は式 (G.10) と全く同じ定義

$$\tau \equiv \frac{\eta}{\mu} \quad (\text{G.19})$$

で表されるが、緩和時間と呼ばれる。ひずみは $t = 0$ に γ_0 を与えたものとすればいいので

$$\gamma(t) = \gamma_0 H(t) \quad (\text{G.20})$$

で与えられる。これを式 (G.18) の右辺に代入すると、解くべき式は

$$\dot{\sigma} + \frac{1}{\tau} \sigma = \mu \gamma_0 \delta(t) \quad (\text{G.21})$$

となる。ここに右辺の $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数である。 $H(t)$ も $\delta(t)$ も超関数なので慣れないとその取り扱い方はとても難しいが、結局式 (G.21) の右辺は時刻 $t = 0$ 以外では零と考えればいいので、この式の解が

$$\sigma(t) = \mu \gamma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) H(t) \quad (\text{G.22})$$

となることは想像できるかもしれない。今はその解き方については言及しない（できないからだが）ことにしよう。実際この解を式 (G.21) に代入すれば、それが正しいことは確認できる。最終的には式 (G.22) の右辺の $H(t)$ は無くても同じだが、それが無いと式 (G.21) の右辺は得られないので注意すること。この結果を式 (G.15) の定義に代入すれば、緩和関数 $G(t)$ が

$$G(t) \equiv \frac{\sigma(t)}{\gamma_0} = \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{G.23})$$

と求められる。ここでは $H(t)$ は省略した。

Maxwell モデルにもう一つのバネ（バネ定数 μ_R ）を並列につなげば、緩和関数は

$$G(t) = \mu_R + \mu \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{G.24})$$

となり、式 (G.16a) の第 1 項を導入できる。と、ここまでは講義ノートの式を追うことができたのだが、ムニャムニャ・・・。

付録 H

1 次元の熱伝導と関連した力学

H.1 1次元の熱伝導問題

H.1.1 熱伝導方程式

(1) 場の方程式

長さ a で断面積が A の一様な棒の中の長手方向の熱伝導を対象とする。位置 x における時刻 t の温度を $u(x, t)$ とし、位置 x の断面を通過する単位断面積当たりの熱流を $q(x, t)$ とする。 q の符号は熱が x の正方向に流れているときに正とする。また棒の中間部には外からの入熱が単位体積当たり $r(x, t)$ だけ分布するものとする。多くの実験結果から、材料中に蓄積される単位質量当たりの熱は温度の時間変化率に比例することがわかって

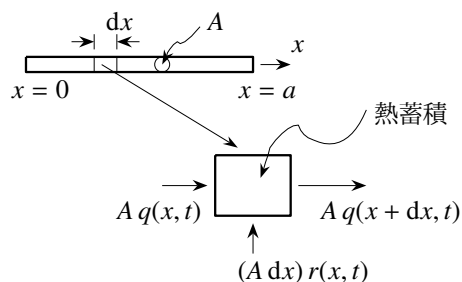


図 H.1 熱の入出力と蓄積

$$(\text{熱蓄積}) = c\rho (A dx) \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{H.1})$$

と表される。ここに比例係数の c は熱容量であり ρ は密度で、いずれも材料パラメータである。したがって、図 H.1 の微分要素の熱（エネルギー）の保存則から

$$(\text{熱入出力差}) = (A dx) r(x, t) + A q(x, t) - A q(x + dx, t) = (\text{熱蓄積}) = c\rho A dx \frac{\partial u}{\partial t}$$

あるいは

$$A r(x, t) - A \frac{q(x + dx, t) - q(x, t)}{dx} = c\rho A \frac{\partial u}{\partial t}$$

となるので、 $dx \rightarrow 0$ の極限を考えれば

$$r(x, t) - \frac{\partial q(x, t)}{\partial x} = c\rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \quad (\text{H.2})$$

が基本的な熱伝導方程式である。

さらに、熱流は温度の高いところから低いところへと生じるという **Fourier** の法則は

$$q(x, t) = -\kappa \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \quad (\text{H.3})$$

と表すことができる。ここに κ は熱伝導率と呼ばれる材料パラメータである。式 (H.3) を式 (H.2) に代入すれば、一般的な熱伝導方程式が

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + r(x, t) = c\rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < t, \quad 0 < x < a \quad (\text{H.4})$$

と求められる。もし材料が一様なら上で導入したすべての材料パラメータは x 方向に一定になるので、上式は

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{r(x,t)}{c\rho} \quad (\text{H.5})$$

と書くことができる。ここに k は熱拡散率と呼ばれる材料定数で

$$k \equiv \frac{\kappa}{c\rho} \quad (\text{H.6})$$

と定義されている。

(2) 初期条件と境界条件

熱伝導方程式は式 (H.5) の偏微分方程式で与えられ、これを用いて唯一な未来予測ができるためには、さらに初期条件と境界条件が適切に与えられなければならない。

初期条件: 初期条件は、時刻 $t = 0$ における棒中の温度分布で与えられるだろうから

$$u(x,0) = f(x) \quad (\text{H.7})$$

と表される。ここに $f(x)$ は時刻 $t = 0$ における任意の場所 x の温度分布であり、未来予測を始める時点で測定して与えられる関数である。

境界条件: さらに、棒の端部の $x = 0$ および $x = a$ における状態を境界条件として与えないと、唯一の解は求められない。境界条件は一般に3種類あるが、最も基本的なものは、その端部の温度を与える条件 (**Dirichlet** 条件あるいは**第1種条件**) だろう。つまり

$$u(0,t) = T_L(t), \quad u(a,t) = T_R(t) \quad (\text{H.8a, b})$$

であり、 $T_L(t)$ と $T_R(t)$ は時々刻々端部で測定されている温度を表していて、与えられる関数である。

二つ目は端部の熱入出力を与える条件 (**Neumann** 条件あるいは**第2種条件**) である。例えば発泡スチロールのような材料で両端を断熱する場合は、端部の熱流を零にする条件で与えればいいので

$$-q(0,t) = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0, \quad q(a,t) = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = 0 \quad (\text{H.9a, b})$$

となる。あるいは外部からの入熱装置を用いて、 x の正の向きに指定した熱流を与えることができれば、その条件は

$$-q(0,t) = \kappa \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = Q_L(t), \quad q(a,t) = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = Q_R(t)$$

のように与えられる。 $Q_L(t)$ と $Q_R(t)$ が端部の x の正方向の入熱流量を表していて、与えられる関数である。

三つ目の境界条件は上の二つの条件を混合したもの (**Robin** 条件あるいは**第3種条件**または**混合条件**) で、熱伝導問題では例えば **Newton** の冷却法則という条件がある。それは

$$\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = h_L \{u(0,t) - v_L\}, \quad -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(a,t) = h_R \{u(a,t) - v_R\} \quad (\text{H.10a, b})$$

のように与えられる。つまり、端部の熱流はその温度に比例するというもので、 h_L や h_R , v_L , v_R は材料や端部に設置した装置特性を表すパラメータである。Fourier 級数を用いてこのような種々の初期値境界値問題を解く方法は付録 J に示した。

H.1.2 過去に向かって拡がる

Northwestern 大学の Olmstead 先生 (1980 年頃当時) の ‘Differential Equations of Mathematical Physics’ の講義ノートに、一つ面白い考察がある。それは「逆向きの熱伝導方程式」という問題¹で、簡単のために $k = 1$ としたときに無限に長い棒中で、時間を $t \rightarrow -t$ のように置き換えて得られる

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = 0, \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \tag{H.11}$$

のような逆向きの時間方向の熱伝導の問題を

$$v(x, 0) = f(x), \quad \text{および, } x \rightarrow \infty \text{ において } |f(x, t)| < \infty \text{ (有界)} \tag{H.12a, b}$$

の条件で解いたときに、「どんお (Erutarepmet)」 $v(x, t)$ が存在するかどうかという問題である。講義ノートを今読んでも全く理解できないが、発散しない解が存在しないことを比較的容易に証明できるようだ。つまり、時間の逆向きの熱伝導方程式には物理的に意味のある答が無いことが証明できるというのだ。逆向きに再生された拡散する煙の映像には違和感を持つと思うが、それが物理ではないことを数学は証明できるというのだ。数学はすごい。興味のある読者のために当時の講義ノートのコピーを pp.757-759 に置いた。

H.2 1次元の力学との簡単な連成

もう一つ面白い問題がある。Northwestern 大学の Dundurs 先生 (1980 年頃) の ‘Elasticity’ の講義ノートにある問題である。図 H.2 のように、長さ a の棒の左端が温度 T_L になっていて、この温度を 0 度から十分ゆっくりと上げていって棒全体が一様な温度 T_L になると近似できるものとする。右の壁の温度は $T_R = 0$ 度で、 $T_L = 0$ 度の初期状態には棒の右端と右の壁との間には隙間 g があるものとする。

温度膨張ひずみは非弾性ひずみなので、一般化された Hooke の法則式 (3.105) の 1次元版は

$$\sigma_{xx} = E (\epsilon_{xx} - \epsilon^T), \quad \epsilon^T(x, t) = \alpha u(x, t) \tag{H.13a, b}$$

になる。ここに ϵ^T は温度膨張ひずみであり、 u は初期状態からの温度増加分である。 E は Young 率で α は線膨張係数であり、どちらも材料パラメータ (ここでは定数とする) である。右端が壁に接触する前は、棒中の温度は一様で T_L に等しいとしたので、右端が壁に接触するのは伸び変位が g になった瞬間である。したがってそのときの温度 T_0 は次の条件から

$$\epsilon^T a = g, \quad \epsilon^T = \alpha T_L \rightarrow T_L = T_0 \equiv \frac{g}{a\alpha} \tag{H.14}$$

のように求められる。

一方、 T_L を非常に大きな値に固定して、かつ右端が壁に接触した状態を保持し続けられていれば、十分時間が経った定常状態では図 H.2 の一番下のような線形の温度分布になる。したがって

$$u(x, t) = T_L \left(1 - \frac{x}{a}\right) \rightarrow \epsilon^T = \alpha T_L \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

であり、ひずみは式 (H.13) から

$$\epsilon_{xx} = \frac{\sigma_{xx}}{E} + \alpha T_L \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

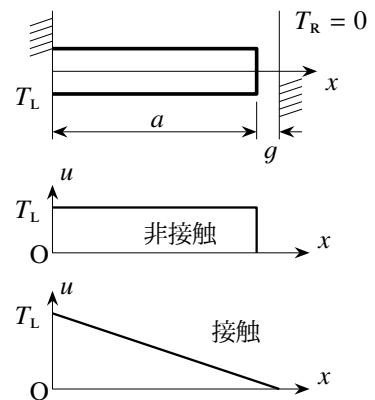


図 H.2 棒の伸びと接触

¹ 日本の高等教育現場で、こんな洒落た名称の物理量 (ん!?) を定義した問題の記述ができる先生が何人いるだろうか。

と求められる。このとき棒の途中には外力は存在しないので応力は x 方向に一定の圧縮になる。したがって $\sigma_{xx} = -p$ とすると

$$\epsilon_{xx} = -\frac{p}{E} + \alpha T_L \left(1 - \frac{x}{a}\right)$$

となる。この温度膨張ひずみによる棒の伸びは隙間の g に等しいから

$$g = \int_0^a \epsilon_{xx} dx = -\frac{pa}{E} + \frac{a\alpha T_L}{2}$$

という関係が成立する。そこで、左壁の温度を徐々に下げていき、右端が壁から離れる時点の温度 T_1 を求めると、それは $p = 0$ の瞬間に相当するので、上式から

$$\frac{pa}{E} = \frac{a\alpha T_1}{2} - g = 0 \quad \rightarrow \quad T_1 = \frac{2g}{a\alpha} = 2T_0 \quad (\text{H.15})$$

と求められ、式 (H.14) の T_0 の 2 倍の温度になったときに棒は壁と離れることがわかる。

この結果は面白いでしょう。つまり、では

$$T_0 < T_L < T_1 = 2T_0$$

の間は一体何が起きているのかということである。多分容易に想像がつくと思うが、 $T_L = T_0$ で右端が接触した途端右端の温度は 0 度になるから棒の先端はすぐに縮んで接触を失うことになるが、熱伝導によってまたすぐに伸びて接触する、といったことを繰り返すだろう。そこで、左壁の温度を T_0 から $U(t)$ だけ上げ続けることにして、棒が（理想的に）右端で壁に接触して、棒に圧縮応力が生じた状態を保持できたとすると、棒中の温度分布は一定から線形分布に徐々に変化していく。もしそういうことが可能なら、その熱伝導問題は、 $g \ll a$ と近似できる場合

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \frac{p(t)a}{E} = \alpha \int_0^a u dx - g \geq 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < t \quad (\text{H.16a, b})$$

という問題を

$$u(0, t) = T_0 + U(t), \quad u(a, t) = 0, \quad u(x, 0) = T_0, \quad \text{ただし} \quad U(0) = 0, \quad U(\infty) = T_0 \quad (\text{H.17a, b, c, d, e})$$

の条件で解けばいい。しかし、どんなに急に温度を上げても軸力 $p(t)$ は負になり、結局右端では接触・非接触の振動が生じることになる。いやあ、面白い。

‘headquarter:’ 第 1 著者が在職中の帰省時に市営プール前バス停付近にある道路標識には、一時、県警本部の英語名にこう記載されていた。インターネットを通して（最初は間違って交通安全協会に）建設省（当時）に注意のメールを送っておいたところ、数年してようやく ‘s’ が付いた。それにしても、一人のための一宿所 ‘quarters’（StarTrek²中の会話からの推量）であっても複数形を用いるのはなぜだろう。英語はやっぱり難しい。

「どんお」問題についての講義ノート No.1³

103

The study of Erutar&pmet

$$V(x, t) = \text{Erutar&pmet}$$

$$\text{(Backward heat eq)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial V}{\partial t} = 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad t > 0 \\ \star \quad \left\{ \begin{array}{l} V(x, 0) = f(x) \\ V(x, t) \text{ bounded as } |x| \rightarrow \infty \end{array} \right. \\ V(x, T) = ? \quad t = T > 0 \end{array} \right.$$

To connect to a problem involving the regular heat eq., let

$$\tau = T - t$$

$$u(x, \tau) = V(x, t) = V(x, T - \tau)$$

Here $u(x, \tau)$ will satisfy

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial \tau} = 0 \quad -\infty < x < \infty, \quad \tau > 0 \\ u(x, 0) = V(x, T) \quad ? \\ (u(x, T) = f(x)) \\ u(x, \tau) \text{ bounded as } |x| \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

Attempt to solve with Green's fn.

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} - \frac{\partial G}{\partial \tau} = -\delta(x-x_0)\delta(\tau-\tau_0) \\ G = 0 \quad \tau < \tau_0 \\ G \rightarrow 0 \quad \text{as } |x| \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

$$G(x, \tau | x_0, \tau_0) = \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4(\tau-\tau_0)}}}{2\pi^{1/2}(\tau-\tau_0)^{1/2}}$$

$$u(x, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4\tau}}}{2\pi^{1/2}\tau^{1/2}} V(x_0, \tau) dx_0$$

This satisfies the PDE and cond'n as $|x| \rightarrow \infty$. But $V(x, T)$ not known !!

³ 英語で受講する権利を持っている留学生を含む学部3年生に英語で数学(付録Jがその内容)を教えていたとき、日本人学生による授業評価に「黒板で筆記体を使うな」という強い表現の警告が書いてあって驚いた。というのも、第1著者が留学していたときの板書はすべて筆記体だったし、試験問題や資料にも筆記体が使われること(p.760に例示)もあったからだ。何か悪いことをしているような気がずっとしながらそのまま続けていたが、呵呵、なんと驚くべきことに、我が国の中等教育の英語科目では筆記体を教えていないということがあとでわかった。実際2016年に、配付資料に手書きした'learn'の最後の文字がわからないという質問をもらった。前後の文字列を眺めて推測すればわかるだろうに、最近は何でもかんでも聞くのよねえ。あーあ。

「どんお」問題についての講義ノート No.2⁴

104

Let us attempt to use the information $u(x, T) = f(x)$

$$u(x, T) = f(x) = \frac{1}{2\pi^{1/2} T^{1/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4T}} v(x_0, T) dx_0$$

Thus we have an integral eq. for the determination of $v(x, T)$.

Note that if $v(x, T)$ is locally integrable in x on $(-\infty, \infty)$, then $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4T}} v(x_0, T) dx_0$ is a C^∞ function.

Hence $f(x)$ must be in C^∞ . Thus if $f(x) \notin C^\infty$, no soln exists to the Initial value problem for Heat equation.

Suppose we try to examine uniqueness.

Let v_1 and v_2 be solns of $\#$.

$$w(x, t) = v_1 - v_2$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial t} = 0 & -\infty < x < \infty, t > 0 \\ w(x, 0) = 0 \\ w(x, t) \rightarrow 0 & \text{as } |x| \rightarrow \infty \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) dx = 0$$

$$w \frac{\partial w}{\partial x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx = 0$$

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} w^2 dx = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t) dx - \int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, 0) dx = 2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dt'$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} w^2(x, t) dx = 2 \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dt' \Rightarrow w = 0$$

uniqueness doesn't necessarily follow!!

⁴ お気付きと思うが、ここに示した quarter 制の 90 分週 2 回 10 週の letter-size 講義ノートの右上のページ番号は 100 を超えて (p.761 にその他の例) いる。我が国の 90 分授業 14 回 (少なくとも 1 回は定期試験だとして) で、50 ページを超える板書をしてくれる教員が第 1 著者以外に何人いるだろうか。と書いても、日本人学生にとってはそれがたいへん不評で、学生による授業評価から「字が汚い」と「速過ぎる」が無くなる。上の数学のノートと同じく文章を書くので、漢字は雰囲気だけを残した記号にならざるを得ない。呵呵。ただその文章は必ずしゃべりながら板書しているのだが、それを聞きながら (とすることができないのかもしれないが、昔は声に出した技術用語の定義を正確に写し取らないといけないう東京大学の国分正胤先生の「コンクリート工学」という講義もあったぞ) その汚い字を 90 分間に A4 版 4 枚分複写しないといけないのである。ん? そんなに辛くなさそうだなあ。呵呵。最近ではカメラで撮影する学生もいるくらいだ。先日計ったら 90 分の講義中にホワイトボードの前を 900 歩以上歩いていた。そもそも B5 サイズの綴じたノートを使っているのが間違いの元の一つだと思うのだが、シラバスでいくら注意しても誰も気にしてくれない。A4 幅 21 cm のレポート用紙に板書を書きながら写すことができる「自由」は魅力的なのに。ただし、左には綴じ代の 25 mm くらいのマージンは必須だ。

「どんお」問題についての講義ノート No.3⁵

105

Suppose we try to examine continuous dependence on data.

Consider the following example case for $f(x)$

$$f(x) = \epsilon \sin \alpha x$$

Since $f(x) = \epsilon \sin \alpha x \in C^\infty$, can solve the integral eq. for $V(x, \tau)$ to find

$$V(x, \tau) = \epsilon \sin \alpha x e^{\alpha^2 \tau} = V(x, 0) e^{\alpha^2 \tau}$$

Note that no matter how small we make $V(x, 0)$ (i.e. $\epsilon \ll 1$), we can have $V(x, \tau)$ as large as desired by taking α sufficiently large.

$$\begin{aligned} \text{That is } | \epsilon \sin \alpha x - 0 | &\leq \epsilon \\ | V(x, \tau) - 0 | &= | V(x, 0) | e^{\alpha^2 \tau} \\ &\leq \epsilon e^{\alpha^2 \tau} \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Hence no continuous dependence on data. //

it is not physics

The Backward Heat eq. problem is often referred to as a ill-posed problem.

⁵ ついでだが、以下は第1著者の経験談である。NUのquarter制講義は1科目90分週2回(例えばTTh1300-1430)あるいは60分週3回(例えばMWF1000-1100)ないし4回(例えば火曜日にクイズのある数学がMTWF1200-1300)で11週30時間だった。中にはT1300-1400, Th1300-1500という変則的なものもあった。最終週に定期試験が設定されるが、同日に3科目以上の試験を受けるような履修登録は禁止されていることからわかるように、卒業に必要な単位数は我が国に比べるとかなり少ない。ただしPhDプログラムの講義はquarter当たり3科目が限度、2科目でもきついかもかもしれない。また我が国と違って卒論も無いことから明らかなように、学部は専門教育を主目的とはしておらず、幅広い教養を身に付けた人材育成が教育目標と思われる。単位数は普通1科目1単位である。そして、秋学期が始まる時点で6単位以下の学生がFreshmen, 17単位以下がSophomores, 28単位以下がJuniorsで29単位以上がSeniorsとなっていた。またquarter制といってもsummer sessionはほぼ誰も受講しない、というよりも、期間が短いこともあって質の充実した通常の講義は提供されないの、実質3学期制である。そして理解を深めるために少なくない宿題が出される。学生は金曜の午後と土曜か日曜の個人的な重要行事を除き11週間、場合によっては夜遅くまで必死に予習・復習・宿題をこなして定期試験を受けたあとは、そのquarterに得た知識をすべて忘れ去るという効率的かつ有意義な青春を楽しんでいた。さらにtake-home exam (p.760の右上が24時間の期末試験だ)もあった。例えば火曜日の講義時に試験問題が提示され、3日後の金曜の講義のときに答案を提出するものだ。何を見てもいいが他人と相談してはいけない試験で、難易度はかなり高い。著者は、「難しいから早めに始めなさい」と先生が付け加えた試験では落第しそうになった。もし相対評価をした場合、90点を取っても不合格になるかもしれないといった試験である。興味深いことに、宿題であっても他人のを写すアメリカ人はいない(同室のアメリカ人学生を観察した事実に基づく推量)と思われる。さて、100人くらいの学部3年生の数学の授業(付録Jがその内容)における貴重な経験では、講義に遅刻する者はおらず始まる前に全員着席して待ち、私語は無かった。どこかの3年生とは全く違って。ただ終了時刻が近づくと、わざと「パタン」と首を立ててノートを閉じる学生が複数いたのは楽しかった。再履修制度は多分無く、学部生の場合、あるquarter期末の成績がB average (80点くらいか: 大学によって異なるらしい)を下回ると、まず父兄に警告が伝えられる。次のquarterでも同様だった場合には即退学である。当時のNUにはスポーツ入学は無く、学部生のレベルは全米でもかなり上位だと聞いた。成績が下がると試合に出られなくなるため、場合によってはチューターがついた。図書館は夜中まで開いているが、夜間、複数の学生に勉強を教えてもらっている体格がとてもいい(No offense)学生がいたのがそれだったのだろう。東北大学の議論では、すべての科目にGPを付けるべき(米国のようになっていないしP/Nオプションもあった)だとか、GPAを更新できるような救済的再履修制度を作るべきだとか、本末転倒で本質的ではない提案が強かった。実際、新しくトップダウン方式で導入されたレベル認定試験も複数回受験できる。さてNUの学内にはuniversity policeがいた。銃も持っていたような気がするが、学生と同じ若者もいたような記憶がある。間違いかもしれない。我が国のどこかの大学では駐輪違反はし放題だが、中西部のある州立大学の場合、学内外の誰であろうと学内で駐車違反すると一晩留置所に拘留されると聞いた。が、NUには違反切符を貯めた猛者もいたなあ。彼は卒業できたのだろうか。

筆記体で書かれた試験問題や宿題の例⁶

① Consider the elastic half plane shown and the Airy stress function

$$U = \frac{\nu}{2\pi} \left\{ r^2(\theta \sin 2\theta - \log r \cos 2\theta) + r^2 - r^2 \log r + r^2 \cos 2\theta + \frac{\pi}{2} r^2 \sin 2\theta \right\}$$

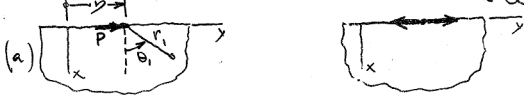
What tractions on $\theta = +\pi/2$ and $\theta = -\pi/2$ correspond to this Airy stress function?



② The Airy stress function for a concentrated load, as shown in (a), is

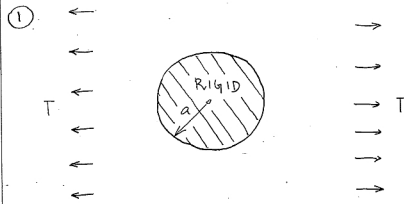
$$U = \frac{P}{\pi} r_1 \theta_1 \cos \theta_1$$

Find the Airy stress function for a doublet shown in (b). Strength of doublet is Q .

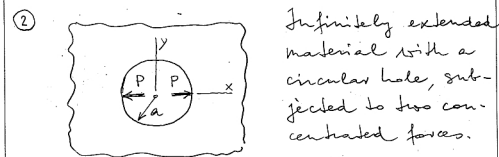


Final 3/13 - 2:30 pm

24 hr
3/14 ~ 2:30 p.m.



Uniform tension field disturbed by a rigid circular inclusion.
1. Find the Airy stress function.
2. Specialize the result for $\nu=1$ and study the stress concentration effect.



Review the Healy solution for the diametrically compressed disk. Then
1. Find the Airy stress function (use the same coordinates as for disk)
2. Find stresses on $x=0$.

MATH 605 COMPLEX VARIABLES FOR APPLIED ENGINEERS

INSTRUCTOR: GEORGE GASPER
OFFICE: LAMT 222
OFFICE HOURS: 10 AM - 12 PM
AND BY APPOINTMENT

TEXT: SAFF & SNIDER "FUNDAMENTALS OF COMPLEX ANALYSIS"
(LATE ARRIVING AT THE 35X SINCE IT WAS TEMPORARILY OUT OF PRINT)

HOMEWORK PROBLEMS FOR THE FIRST WEEK (NOT TO HARDEN)

1. Simplify the following:

- a) $(3+i) - (5+i)$
- b) $(-1+i)^2$
- c) $\frac{3-i}{2}$
- d) $\frac{-1+5i}{2+3i}$
- e) $\frac{2+3i}{1+2i} - \frac{8+i}{6-i}$
- f) $i^3 (i+1)^2$
- g) $i^{2k}, k \in \mathbb{Z}$ (the set of integers)
- h) $i^{2k+2}, k \in \mathbb{Z}$

2. Evaluate: $3i^n + 6i^3 + \frac{8}{i^{20}} + i^{-1}$.

3. Show that the complex numbers $z_1 = -1+i$ and $z_2 = -1-i$ satisfy the equation $z^2 + 2z + 2 = 0$.

4. Given four particles of masses 2, 1, 3, and 5 located at the respective points $1+i, -3i, 1-2i$, and -6 , find the center of mass of this system.

5. Which of the points $1, 2-i$, and -3 is furthest from the origin?

6. Describe the set of points z in the complex plane which satisfy each of the following

- a) $\operatorname{Im} z = -2$ (line)
- b) $|z - 2+i| = 3$ (circle)
- c) $|z-1| = |z+i|$ (line)
- d) $|z| = \operatorname{Re} z + 2$ (line)

507 HOMEWORK

17. Find the following

- a) $\left| \frac{1+2i}{-2-i} \right|$
- b) $\left| \frac{i^2(2+i)^3}{(1-i)^2} \right|$
- c) $|(3+i)(2-3i)(4-i)|$
- d) $\left| \frac{(i+i)^{100}}{(i-i)^{100}} \right|$

8. Find the argument of each of the following complex numbers and write each in polar form

- a) $-3/2$
- b) $-3+3i$
- c) $-7i$
- d) $-2\sqrt{5} - 2i$
- e) $(2-i)(-i\sqrt{3}+i)$
- f) $(\sqrt{3}-2)^2$
- g) $\frac{-2+i\sqrt{3}}{2+2i}$
- h) $\frac{-\sqrt{3}(1+i)}{\sqrt{3}+i}$

9. Find the following

- a) $\operatorname{Arg}(-6-6i)$
- b) $\operatorname{Arg}(10i)$
- c) $\operatorname{Arg}(-i\pi)$
- d) $\operatorname{Arg}(\sqrt{3}-1)$

10. Decide which of the following statements are true

- a) $\operatorname{Arg} z_1 z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$
- b) $\operatorname{Arg} \bar{z} = -\operatorname{Arg} z, z \text{ not a real number}$
- c) $\operatorname{Arg} \left(\frac{z_1}{z_2} \right) = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$
- d) $\operatorname{arg} z = \operatorname{Arg} z + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, z \neq 0$

⁶ 上の二つは Dundurs 先生による「弾性論」の中間・期末試験問題の一部であり、下の二つは Gasper 先生による「複素数とその応用」の宿題である。前者の右は 24 時間の take-home exam だったが、珍しいことに次の学期の継続講義の初回に Dundurs 先生が答を解説してくれた。後者は 1 年生か 2 年生対象の講義で、第 1 著者は複素関数論が苦手だったため復習を兼ねて興味本位で第 1 回目だけ座ってみたのだが、講義終了時に一人の学生が「あちこちに出てくる 'i' というのは何か?」という質問をした。教員の回答は prerequisite についての説明だった。我が国の状況からするととても面白い特徴的な事態だろう。

米国における講義ノート (letter size) の 1 quarter 当たりのページ数の例⁷

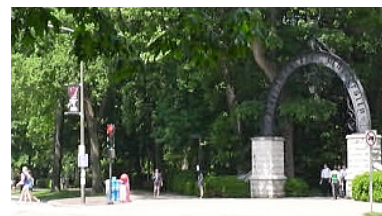
講義名	担当教員名	ページ数	× (21/30)
Asymp. and Pertur. Meth. in Appl. Math.	Prof. Davis	135	95
Continuum Theory of Fracture	Prof. Keer	89	62
Diff. Eqs and Math. Physics I	Prof. Olmstead	104	73
Diff. Eqs and Math. Physics II	Prof. Olmstead	107	75
Diff. Eqs and Math. Physics III	Prof. Olmstead	84	59
Elasticity I	Prof. Dundurs	65	46
Elasticity II	Prof. Dundurs	66	46
Fourier Series and BVP	Assist. Prof. Mahar	64	45
Mechanics of Continua I	Prof. Nemat-Nasser	92	64
Mechanics of Continua II	Prof. Nemat-Nasser	62	43
Mechanics of Fracture	Prof. Achenbach	84	59
Plasticity	Prof. Mura	54	38
Plasticity	Prof. Nemat-Nasser	48	34
Seminar in Micromechanics	Prof. Mura ⁸	28	20
Viscoelasticity	Prof. Achenbach	63	44
Wave Propagation	Prof. Achenbach	63	44
科目当たりの平均		76	53



TECHNOLOGICAL INSTITUTE



DEERING (MUSIC) LIBRARY



WEBER ARCH

2010年5月の Northwestern 大学 Evanston キャンパス⁹を Sheridan Road に沿って北 (左) から南 (右) へ

⁷ さて、米国の個々の講義の質は高く、高い評価を得ている上手な授業を教員が参観する等の努力 (著者はそんなことはしたくないのだが) をするし、板書はよくオーガナイズされていて、それを写した講義ノートはあとで独りで復習できるような、読むことができる貴重な資料になる。西野文雄先生が留学をしつこく勧める理由の一つがこれだった。おかげでその講義ノートからの流用がこの文書にはたくさんある。今は知らないが、もちろんスライドや OHP を用いる講義は一つも無かった。あとで読んで何が書いてあるかわからないような表やグラフ等の数値を羅列した資料や図等は配られなかった。よほどのことが無い限り休講は無い。単位目的ではないものも含めた 17 科目中、2 科目でそれぞれ 1 回ずつ休講があったが、重要人物との会合の予定を事前に知らされて 1 回、もう 1 回は先生達の間で予算獲得会議が長引いてしまったことが理由だった。そもそも先生が出張等しないものだから、PhD の学生にとってはたいへんなストレスなのである。そんな講義 30 時間の板書を写したノートのページ数の例が上の表である。科目当たりの平均が 76 ページになる。我が国の講義は 1 科目 21 時間なので、それに相当するページ数を一番右の列に記したが、平均が 53 ページである。しかし、我が国の講義で 50 ページ以上の板書をする教員はほとんどいないのではないだろうか。西野文雄先生の 4 年次の応用弾性学が 38 ページ、大学院の弾性論が 66 ページだったが、当時はそれでも多いなあと感じたものだった。ちなみに A4 サイズである。特に最近廊下から教室を覗くと、プロジェクタの性能が向上したためか多くの授業でスライドが用いられている。多分、そのスライドのコピーが資料として配られているのだろうが、教員がしゃべった内容をその資料の欄外にきちんと加筆しているとはとても期待できない。それで合格できるのだからたいしたものかもしれないが、オーガナイズされた知識として頭の中にきちんと納まっているのかどうかについては疑問を持っている。なお、上の表にある講義のいくつかでは、70 ページから 100 ページくらいの手書きかタイプされた資料がもらえるものもあった。

⁸ 村外志夫先生は当時文献 [69] の初版をご執筆中だったこともあって、その草稿の 300 ページ以上のコピーを資料として配って式展開等の板書を省略なさったため、講義ノートが薄かっただけである。第 1 著者所有の講義ノートファイルには当時の宿題の計算用紙も綴じてあるが、それをノートに加えると倍以上の量になることを見ると、式展開等の板書を省略したくなる村外志夫先生のお気持ちもわからなくもないですよねえ。

⁹ 昔の Northwestern 大学の写真は <http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/civil/node25.html> に。また Evanston 周辺の昔の写真は <http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/civil/node26.html> に。



写真 H.1 松齢橋の親柱 福島県 1925 年竣工



‘energy,’ ‘data,’ ‘memory,’ ‘mail,’ ‘main’ and ‘sale:’ この文書では「エネルギー」と長音を無しにすると述べたが、「データ」「メモリ」も同様である。第1著者は「メール」あるいは「メイル」と書くが、「メール」でもいいような気もする。どれもきちんとした理由がありそうだがわからない。ただ、昨今の新聞で「メーン」と書くのはなぜだろう。文字をみて意味を思い浮かべられないのだが。がしかし、「セール」でいいのは、もう日本語だからか。なら、「メール」「メーン」「セール」に整合性があるか。

付録 I

複合材料の平均特性

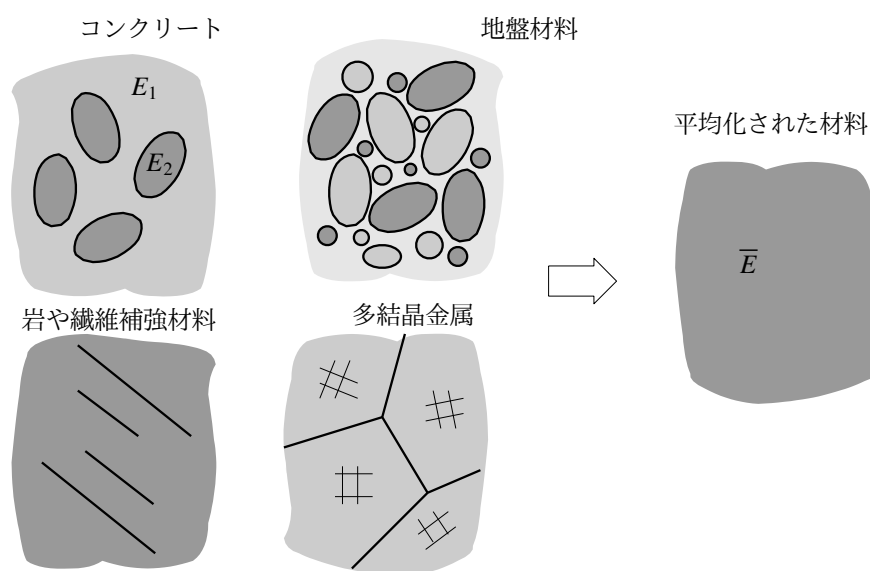


図 I.1 内部に微視構造を持つ材料とその平均化

I.1 内部に微視構造を持つ材料

この章は第 26 版までは英語で書かれていて、英語のみで実施する大学院博士課程（俗称）向けの集中講義用資料だった。ガラス繊維や炭素繊維を用いた繊維補強ポリマー (GFRP, CFRP) やコンクリートのような複合材料はもちろん、鋼のような多結晶金属でさえ内部は均質ではなく、異なる相等から成る複雑な内部の微視構造を持っている。例えばコンクリートは少なくとも二つの材料であるセメントペーストと骨材がそれぞれ異なる Young 率 E_1, E_2 等を持っている。岩には多くの節理が、繊維補強材には多くの繊維が内部に分布している。図 I.1 の左下の図では実線で節理や繊維を表している。地盤材料は各種粒子の隙間に空気や水が含まれている。多結晶金属はランダムな形や方向性を持った無数の単結晶がランダムに分布している。ただ社会基盤構造物の実際の設計では巨視的な材料特性を用いるのが現実的だが、もしこの微視構造に起因する特性を陽に考慮できればより合理的な設計が可能になるかもしれない。有限要素法で微視構造も要素分割すればその特性を考慮できるが、要素数が膨大になって、複雑な構造系全体の境界値問題を設計段階で数値解析の対象にするのはあまり現実的ではない。これに対し、複合材料の平均特性を解析的に求める方法もいくつか提案されていて、それを有限要素に組み込めば計算負荷もそれほど大きくならなくて済む。また例えば繊維補強材の繊維の種類や向

き・量のような材料中の微視構造そのものを設計する際にもその解析的手法は有用なツールになる。この章ではその解析的な平均化¹手法の代表例について説明する。

まず最も単純で古典的な平均化に Voigt モデルというものがある。2 種類のバネ定数 E_1, E_2 を持つ二つの異なるバネを図 I.2 の左側の図のように並列に設置し、その両方に全体的に $\bar{\epsilon}$ だけの伸びを与えると、全体合計の抵抗力は

$$\bar{\sigma} = (1-f)\sigma_1 + f\sigma_2, \quad \sigma_1 = E_1\bar{\epsilon}, \quad \sigma_2 = E_2\bar{\epsilon} \quad (\text{I.1a, b, c})$$

と算定できる。ここに f はバネの全本数のうちの二つ目のバネの本数の比率だ。この関係式から平均的なバネ定数 (Young 率に相当) を

$$\bar{\sigma} = \bar{E}\bar{\epsilon} \rightarrow \bar{E} \equiv (1-f)E_1 + fE_2 \quad (\text{Voigt}) \quad (\text{I.2a, b})$$

のように定義できることがわかる。つまり Young 率「だけ」の単純な体積平均である。これに対し、図 I.2 の右側の図のようにバネを直列に並べて全体的に $\bar{\sigma}$ だけの力を加えると、全体合計の伸びは

$$\bar{\epsilon} = (1-f)\epsilon_1 + f\epsilon_2, \quad \epsilon_1 = \frac{\bar{\sigma}}{E_1}, \quad \epsilon_2 = \frac{\bar{\sigma}}{E_2} \quad (\text{I.3a, b, c})$$

と算定できるので、平均的なバネ定数 (Young 率に相当) を

$$\bar{\epsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{E}} \rightarrow \bar{E} \equiv \left(\frac{1-f}{E_1} + \frac{f}{E_2} \right)^{-1} \quad (\text{Reuss}) \quad (\text{I.4a, b})$$

のようにも定義できる。これはコンプライアンスの体積平均で、明らかに Voigt の式 (I.2b) とは異なり Reuss モデルと呼ばれる。では平均 Poisson 比はどうやって求めますか?

現在この二つは平均 Young 率の上下界として知られていて、実測値はたいていはこの二つの値の間に分布する。しかし、例えば図 I.8 のようにこの上下界同士は f が小さい範囲であっても離れて過ぎていて現場では使い難く、幅広い境界値問題で使うにはさらなる精度の改良が必要だ。そしてこの古典的平均に決定的に欠けているのは、二つの相 (材料) 同士の力学的な相互作用が十分には考慮されていないことである。さらに、二つの相の形や向きといった幾何学的特徴も考慮されておらず、もう少し微視的な力学挙動を反映させる必要があることが明らかだ。ここでは文献 [69] で定義された ‘Micromechanics²’ の枠組の中で定式化される手法について説明する。例えば図 I.8 で ‘Mori-Tanaka’ と付記した曲線がその基本的なモデルによる平均値で「森・田中平均」として知られている。同じ図には Hill による self-consistent モデル [36] による平均値も比較のために ‘SC’ と付記して載せてある。なお第 I.3.1 節までは上述の文献 [69] からの抜粋コピーである。

I.2 非均質体と介在物

I.2.1 非均質体と Eshelby の解

まず、2 相複合材料の中の第 2 相の存在が回りの力学場をどのように乱すかを知る必要がある。図 I.3 の左側の図のように、ある母材でできた無限体中に 1 種類の非均質体が無数に分布した複合材料を考え、非均質体が占める全領域を Ω とする。母材も非均質体も等方弾性で、それぞれの Young 率と Poisson 比が E_M, ν_M と $E_1,$

¹ この章では微視的特性から巨視的特性を求める行為を「平均化 (averaging)」と呼ぶことにした。文献 [155] で紹介されている著名な手法では、微視・巨視の相互作用を異なるスケール間の特異摂動法によって考慮しながら有限要素法を併用して平均化しているので、その名称に用いられる「均質化 (homogenization)」という言葉は使わないように努めた。

² 単に寸法が 10^{-6} m レベルの微視的な力学という意味ではなく、後述する eigen ひずみを伸介とする力学のことで、村外志夫先生独自の命名である。種々の出版物ではこの村先生の定義とは無関係の力学体系を同じように呼んでいたりでするので注意が必要だ。

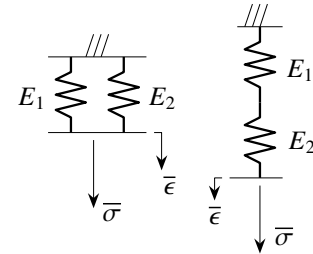


図 I.2 Voigt と Reuss のモデル

ν_1 だとする。添え字の M と I が母材か非均質体かを区別している。非均質体は三つの主半径 a_1, a_2, a_3 を持つ楕円体だとする。

非均質体が1個のときの Eshelby の偉大な発見 [24] は、
 図 I.3 の右側の図のように無限遠点で何らかの外力が作用したとき

非均質体中のひずみ場は均質である。 $\epsilon = \text{一様 in } \Omega$ (I.5)

ということだ。この結論は等方弾性でない場合や非均質体が楕円体でない場合には成立しない。この発見は、非均質体の存在によって乱される場が、その非均質体の領域 Ω の材料を母材と同じものにした上で、さらにその領域に熱膨張のような「適切な」残留ひずみを分布させて求められる

場に等しくできる、ということを示唆している。このような残留ひずみを以下では **eigen** ひずみと呼ぶことにする。文献 [69] の定義では、「非均質体」はある領域を占める母材とは異なる材料のことだが、均質な材料中に上述の eigen ひずみが分布した領域 Ω は「介在物」と呼ばれている。ただし、以下簡単のために「非均質体」も「介在物」と呼んだりするので注意して欲しい。この非均質体を適切な介在物で置き換える方法は「等価介在物法 [24]」と呼ばれているが、それについてはあとで説明する。

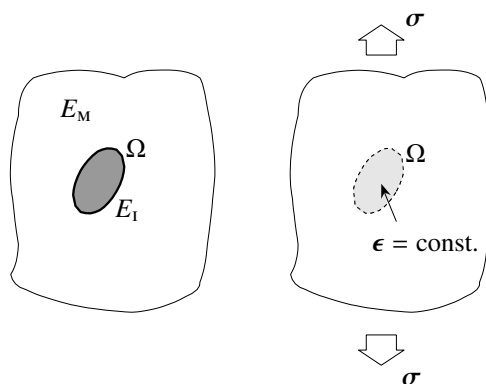


図 I.3 Eshelby の解

I.2.2 支配方程式

(1) 非均質体の問題 — 元の問題

まず図 I.4 の左側に描いたような、無限体 D 中に一個だけ非均質体が Ω の領域を占めている元々の問題の支配方程式を列挙しておく。任意点の変位 u とひずみ ϵ には

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (I.6)$$

という関係がある。等方弾性体を対象とするので、それぞれの材料は

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^M \epsilon_{kl} = C_{ijkl}^M u_{k,l} \text{ in } D - \Omega, \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl}^I \epsilon_{kl} = C_{ijkl}^I u_{k,l} \text{ in } \Omega \quad (I.7a, b)$$

という Hooke の法則を満足する。ここに C^M と C^I はそれぞれ母材と非均質体の弾性係数である。ただしそれぞれの第 2 式から第 3 式への等号では、式 (I.6) を代入した上で、弾性係数の $C_{ijkl}^K = C_{ijlk}^K$ ($K = M, I$) という対称性を用いた。それぞれの弾性係数は Lamé 定数 μ_K, λ_K を用いて

$$C_{ijkl}^K = \mu_K (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) + \lambda_K \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad (K = M, I) \quad (I.8)$$

のように表される。 δ_{ij} はの Kronecker のデルタである。 Lamé 定数は Young 率と Poisson 比と

$$\mu_K = \frac{E_K}{2(1 + \nu_K)}, \quad \lambda_K = \frac{\nu_K E_K}{(1 + \nu_K)(1 - 2\nu_K)}, \quad (K = M, I) \quad (I.9a, b)$$

という関係にある。そして体積力が無い場合の力とモーメントのつり合い式は

$$\sigma_{ji,j} = 0, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \rightarrow \text{あるいは } \sigma_{ij,j} = 0 \quad (I.10a, b, c)$$

と表される。式 (I.10c) はモーメントのつり合い式 (I.10b) を力のつり合い式 (I.10a) に代入したものである。境界条件は無限遠点で

$$n_j \sigma_{ji} = f_i \text{ at } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (I.11)$$

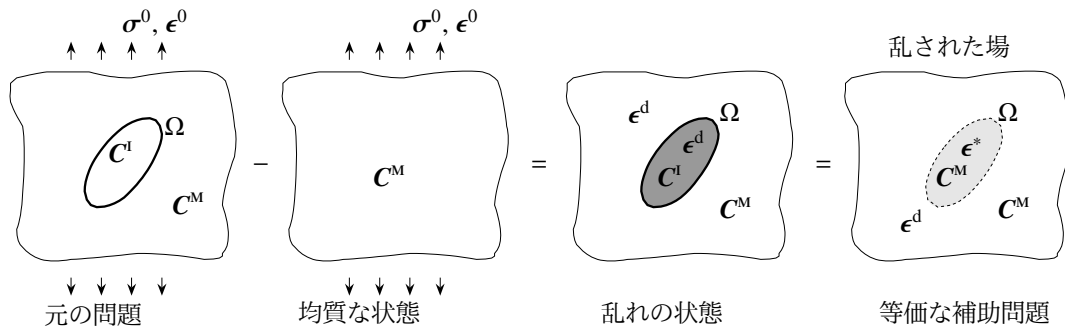


図 I.4 問題の分解: 母材 C^M 中の非均質体 C^I を均質母材 C^M 中の eigen ひずみ ϵ^* を持つ介在物で置き換える

のように与えられる。ここに \mathbf{n} は外力 \mathbf{f} が作用している無限遠点の表面の外向き単位法線ベクトルである。さらに非均質体の界面 $\partial\Omega$ では変位 \mathbf{u} と表面力 $(\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ の連続条件を満たしていないといけない。ここに \mathbf{v} は界面 $\partial\Omega$ の単位法線ベクトルである。

このように、異なる材料が存在する 2 相問題を解くときには、非均質体の界面 $\partial\Omega$ 上の連続条件を取り扱うことによって生じるひずみや応力の乱れ成分を求めるのがかなり面倒である。その応力とひずみの乱れ成分を $\boldsymbol{\sigma}^d, \boldsymbol{\epsilon}^d$ で表すと、それは無限遠点では

$$\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\sigma}^0 + \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\epsilon}^0 + \boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\sigma}^d(\mathbf{x}) \rightarrow 0, \quad \boldsymbol{\epsilon}^d(\mathbf{x}) \rightarrow 0 \quad \text{as } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (\text{I.12a, b, c, d})$$

という条件を満たす。ここに $\boldsymbol{\sigma}^0$ は非均質体が存在しない場合の無限遠点の外力 \mathbf{f} によって生じる均質な応力成分である。

(2) eigen ひずみを用いた介在物問題

そこで元々の問題を直接解く代わりに、図 I.4 のように均質な状態と乱された状態に分解して解いてみよう。均質な状態の場合は簡単に解けて、解は $\boldsymbol{\sigma}^0 = \mathbf{C}^M : \boldsymbol{\epsilon}^0$ である。それに対し乱された場 $\boldsymbol{\sigma}^d$ と $\boldsymbol{\epsilon}^d$ は、前述の Eshelby の発見を踏まえると、図 I.4 の一番右側の図のような介在物の問題を解くことによって求めることができそうだ。この等価な補助問題と記した問題は、無限遠点に外力が作用していない様な弾性係数 \mathbf{C}^M を持つ無限体を対象とするが、領域 Ω にはある種の残留ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^*$ が分布しているものとする。この残留ひずみが前述した eigen ひずみである。この節では外力の作用の無い乱された場だけを対象とし、上添え字 'd' を省略する。またここでは eigen ひずみ $\boldsymbol{\epsilon}^*$ は与えられるものとして取り扱い、それが持つべき適切な値を求める方法については第 I.2.4 節で説明する。

eigen ひずみは熱膨張と同じ非適合ひずみなので、総ひずみは弾性ひずみ \mathbf{e} と eigen ひずみの和で

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ij}(\mathbf{x}) = \mathbf{e}_{ij}(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\epsilon}_{ij}^*(\mathbf{x}), \quad \boldsymbol{\epsilon}_{ij}^* \neq 0 \text{ in } \Omega \quad (\text{I.13})$$

のように関係付けられなければならない。弾性ひずみも非適合ひずみなので、式 (I.6) のひずみ変位関係は左辺の総ひずみに対して成立する。一方 Hooke の法則は弾性ひずみ成分と応力の間で定義され

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^M e_{kl} = C_{ijkl}^M (\epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) = C_{ijkl}^M (u_{k,l} - \epsilon_{kl}^*) \quad (\text{I.14})$$

のようになる。ここでは式 (I.6) (I.13) と $C_{ijkl}^M = C_{ijlk}^M$ の対称性を用いた。弾性係数は式 (I.8) で定義されている。以下簡単のために添え字の M を省略する。また体積力が無い場合のつり合い式は式 (I.10c) なので、それに式 (I.14) を代入して変位 \mathbf{u} で表したつり合い式が

$$C_{ijkl} u_{k,lj} = C_{ijkl} \epsilon_{kl,j}^* \quad (\text{I.15})$$

と表される。無限遠点で外力は作用していないので、境界条件は

$$n_j \sigma_{ji} = 0 \text{ at } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (\text{I.16})$$

である。式 (I.14) を式 (I.16) に代入して変位 \mathbf{u} で表した境界条件が

$$n_j C_{ijkl} u_{k,l} = n_j C_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}^* = 0 \text{ at } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad [:\bar{\epsilon}^*(|\mathbf{x}| \rightarrow \infty) = 0] \quad (\text{I.17})$$

と表される。これを介在物問題と呼ぼう。

I.2.3 Fourier 解析

(1) Fourier 積分と Fourier 変換

前節で定式化した介在物問題の方を Fourier 変換で解くためにまず eigen ひずみ ϵ^* を Fourier 積分で

$$\epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{\epsilon}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}) \exp(i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{I.18})$$

と表す。もちろん Fourier 変換 $\bar{\epsilon}^*$ はこの逆作用なので

$$\bar{\epsilon}_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \epsilon_{ij}^*(\mathbf{x}) \exp(-i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (\text{I.19})$$

となる。同様に変位の Fourier 積分も

$$u_i(\mathbf{x}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_i(\boldsymbol{\xi}) \exp(i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{I.20})$$

と表しておく。

式 (I.18) (I.20) をつり合い式 (I.15) に代入すれば

$$- \int_{-\infty}^{\infty} C_{ijkl} \bar{u}_k(\boldsymbol{\xi}) \xi_l \xi_j \exp(i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} C_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}^*(\boldsymbol{\xi}) i \xi_j \exp(i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi}$$

を得る。簡単のために 3 重積分の積分記号は一つにした。これより変位と eigen ひずみの Fourier 変換同士が

$$(C_{ijkl} \xi_l \xi_j) \bar{u}_k = -i C_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}^* \xi_j \quad (\text{I.21})$$

を満足することがわかる。もちろんこれはつり合い式 (I.15) の Fourier 変換そのものである。したがって $\bar{\mathbf{u}}$ についての代数方程式

$$K_{ik} \bar{u}_k = X_i \quad (\text{I.22})$$

を得る。ここに

$$K_{ik} \equiv C_{ijkl} \xi_l \xi_j, \quad X_i \equiv -i C_{ijkl} \bar{\epsilon}_{kl}^* \xi_j$$

と定義した。この式を解けば変位の Fourier 変換が

$$\bar{u}_k = (K_{ik})^{-1} X_i = \frac{N_{ki}(\boldsymbol{\xi})}{D(\boldsymbol{\xi})} X_i \quad (\text{I.23})$$

と求められる。ここに N_{ij} は行列 K_{ij} の余因子行列であり D はその行列式で、次式で算定できる。

$$N_{ij} = \frac{1}{2} e_{ikl} e_{jmn} K_{mk} K_{nl}, \quad D = \frac{1}{6} e_{ijk} e_{lmn} K_{il} K_{jm} K_{kn} \quad (\text{I.24a, b})$$

ここに e_{ijk} は交代記号である。変位はこの式を Fourier 逆変換すれば求めることができ

$$u_i(\mathbf{x}) = -i \int_{-\infty}^{\infty} C_{jlmn} \bar{\epsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi}) \xi_l N_{ij}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} \quad (\text{I.25})$$

を得る。さらに対応するひずみと応力も

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} C_{klmn} \bar{\epsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi}) \xi_l \left\{ \xi_j N_{ik}(\boldsymbol{\xi}) + \xi_i N_{jk}(\boldsymbol{\xi}) \right\} D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (\text{I.26})$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl} \left[\int_{-\infty}^{\infty} C_{pqmn} \bar{\epsilon}_{mn}^*(\boldsymbol{\xi}) \xi_q \xi_l N_{kp}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) d\boldsymbol{\xi} - \epsilon_{kl}^*(\mathbf{x}) \right] \quad (\text{I.27})$$

のように求めることができる。

(2) Green 関数

式 (I.19) を式 (I.25) に代入すれば

$$u_i(\mathbf{x}) = -i \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\xi} C_{jlmn} \frac{1}{(2\pi)^3} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\mathbf{x}' \epsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') \exp(-i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}') \right\} \xi_l N_{ij}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp(i \boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{x}) \quad (\text{I.28})$$

を得るが、ここで関数 \mathbf{G} を

$$G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \equiv \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\boldsymbol{\xi} N_{ij}(\boldsymbol{\xi}) D^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \exp\{i \boldsymbol{\xi} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{x}')\} \quad (\text{I.29})$$

と定義すると、上式の変位は次式のように表すことができる。

$$u_i(\mathbf{x}) = - \int_{-\infty}^{\infty} C_{jlmn} \epsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') \left(\frac{\partial G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x_l} \right) d\mathbf{x}' \quad (\text{I.30})$$

この被積分関数の形から判断すると、そこに現れる \mathbf{G} の偏微係数は「ある単位の eigen ひずみ」に対する影響係数に相当するので、この関数 \mathbf{G} そのものはこの問題の Green 関数と呼ばれる。ただここで対象としているのは無限体なので Green 関数は基本解と同じだ。実際、関数 \mathbf{G} が方程式

$$C_{ijkl} G_{km,lj}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') + \delta_{im} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = 0 \quad (\text{I.31})$$

を満足することを証明すること（演習問題 I-1 の 1 番）はできる。ここに δ_{im} も Kronecker のデルタだが、第 2 項の最後の δ は Dirac のデルタ関数である。ただし $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{c}) \equiv \delta(x_1 - c_1) \delta(x_2 - c_2) \delta(x_3 - c_3)$ と定義した。一方、任意の体積力 \mathbf{X} が作用した無限体のつり合い式が

$$C_{ijkl} u_{k,lj} + X_i = 0 \quad (\text{I.32})$$

で表されることを踏まえると、この式と式 (I.31) の比較から Green 関数 \mathbf{G} の物理的な意味が

$G_{km}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ は、物体中の \mathbf{x}' の位置に x_m 方向に作用した単位の集中荷重に対する、位置 \mathbf{x} の x_k 方向の変位成分である。

ということがわかる。構造力学の影響線と同じだ。

式 (I.30) の微係数から、ひずみ場と応力場も

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} C_{klmn}^M \epsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') \left\{ \frac{\partial^2 G_{ik}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x_l \partial x_i} + \frac{\partial^2 G_{jk}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x_l \partial x_j} \right\} d\mathbf{x}', \quad (\text{I.33})$$

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = -C_{ijkl}^M \left[\int_{-\infty}^{\infty} C_{pqmn}^M \epsilon_{mn}^*(\mathbf{x}') \frac{\partial^2 G_{kp}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')}{\partial x_q \partial x_l} d\mathbf{x}' + \epsilon_{kl}^*(\mathbf{x}) \right] \quad (\text{I.34})$$

のように表される。等方弾性体の場合の各量および Green 関数の陽な表現は

$$D(\boldsymbol{\xi}) = \mu_M^2 (\lambda_M + 2\mu_M) \xi^6, \quad N_{ij}(\boldsymbol{\xi}) = \mu_M \xi^2 \left\{ (\lambda_M + 2\mu_M) \delta_{ij} \xi^2 - (\lambda_M + \mu_M) \xi_i \xi_j \right\}, \quad (\text{I.35a, b})$$

$$G_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\mu_M} \frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \frac{1}{16\pi\mu_M (1 - \nu_M)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \quad \xi^2 \equiv \xi_k \xi_k \quad (\text{I.35c, d})$$

と求められて³いる。

³ この Green 関数を求めるのがとても困難であることは知っておいて欲しい。

例: 結晶金属材料中に無数に分布する刃状転位やらせん転位は内部に分布するある種のギャップとしてモデル化できる。つまり非適合ひずみとして捉えることができ、第11章で説明したように塑性変形の最もわかり易い例でありモデルである。例えばらせん転位も非適合ひずみの分布つまり eigen ひずみのある種の分布でモデル化できるだろう。ここで対象とするらせん転位では、結晶構造のある直線状の x_3 方向のギャップ b が x_1 方向につながっている状態としてモデル化できる。このギャップ量 b は Burgers ベクトルと呼ばれる。この状態を描いたのが図 I.5 である。つまり

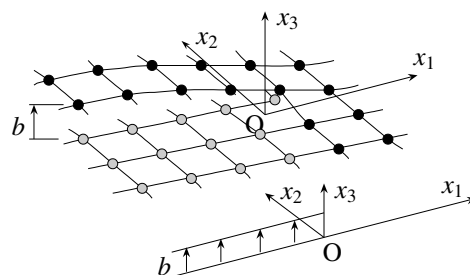


図 I.5 らせん転位

$$\epsilon_{23}^* = \frac{1}{2} b H(-x_1) \delta(x_2) \quad (\text{I.36})$$

という eigen ひずみを分布させたものがらせん転位に相当する。ここに $H(x)$ は Heaviside 関数である。この Fourier 変換は

$$\bar{\epsilon}_{23}^* = -\frac{b \delta(\xi_2)}{8\pi^2 i \xi_1} \quad (\text{I.37})$$

と求められるので、この式を式 (I.25) に代入すれば、二つの変位成分は零つまり $u_1 = 0, u_2 = 0$ になり、非零の変位成分が

$$u_3 = -i \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{\xi_1^2 + \xi_2^2} \frac{-b}{8\pi^2 i \xi_1} \xi_2 \exp\{i(\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2)\} d\xi_1 d\xi_2 = \frac{b}{2\pi} \tan^{-1} \frac{x_2}{x_1} \quad (\text{I.38})$$

のような 2 値関数として求められる。果たして、 x_1 軸の負の部分に x_3 方向の b のギャップを表している。

(3) Eshelby テンソル — 等方の場合

Eshelby の発見を利用するために、材料は等方弾性で介在物は楕円体とする。もし介在物領域 Ω 内に一様な eigen ひずみが分布するとその領域内のひずみも一様で、領域外のひずみは無限遠点で零に収束する。この場合には式 (I.33) の ϵ^* は積分の外に出すことができるので、少なくとも形式的には

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{x}) = S_{ijkl}(\mathbf{x}) \epsilon_{kl}^* \quad (\text{I.39})$$

という表現が可能である。そしてこの 4 階のテンソル $S(\mathbf{x})$ が領域 Ω 内では定数 ($S(\mathbf{x}) = \text{一様}, \mathbf{x} \in \Omega$) になり、母材の Poisson 比と介在物形状の主半径 a_i ($i = 1, 2, 3$) の比のみに依存する。この S は Eshelby テンソル [69] と呼ばれ、介在物が球形の場合はその内部で

$$S_{ijkl} = \alpha \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + \beta \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} = \alpha A_{ijkl} + \beta B_{ijkl} \quad (\text{I.40})$$

のような定数成分を持つ。ここに

$$\alpha \equiv \frac{1 + \nu_M}{3(1 - \nu_M)}, \quad \beta \equiv \frac{2(4 - 5\nu_M)}{15(1 - \nu_M)} \quad (\text{I.41a, b})$$

と定義される。さらに A と B は基本的な等方テンソルで

$$A_{ijkl} \equiv \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl}, \quad B_{ijkl} \equiv \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (\text{I.42a, b})$$

と定義されていて

$$A_{ijmn} B_{mnkl} = 0 \quad (\text{I.43})$$

という性質 (直交性) を持っている。

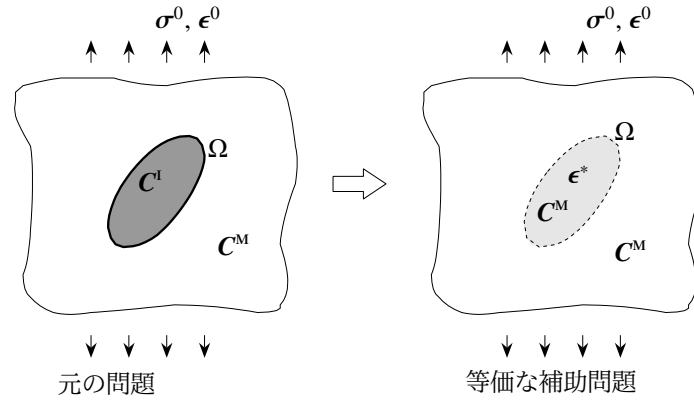


図 I.6 等価介在物法

この等方テンソルを用いると、等方弾性係数も

$$C_{ijkl}^M = 3\kappa_M \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + 2\mu_M \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} = 3\kappa_M A_{ijkl} + 2\mu_M B_{ijkl} \quad (\text{I.44})$$

のように表すことができる。この κ_M は体積弾性係数で、Lamé 定数とは

$$\kappa_M \equiv \lambda_M + \frac{2}{3} \mu_M \quad (\text{I.45})$$

という関係がある。このように、等方テンソルの \mathbf{A} の成分は体積変形に関する成分で、もう一つの \mathbf{B} の成分がせん断変形に関する成分であることが明らかだ。同様に、単位テンソル \mathbf{I} も

$$I_{ijkl} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} + 1 \left\{ \frac{1}{2} (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right\} = 1 A_{ijkl} + 1 B_{ijkl} \quad (\text{I.46})$$

と表現できる。このように二つの物理的な成分に分解できるので、4 階の等方テンソルの簡易表現としての

$$\mathbf{S} = (\alpha, \beta), \quad \mathbf{C}^M = (3\kappa_M, 2\mu_M), \quad \mathbf{I} = (1, 1) \quad (\text{I.47a, b, c})$$

を用いると、式 (I.43) の直交性によって二つの成分の係数間に次のような簡単な演算⁴が可能だ。

$$\mathbf{S} - \mathbf{I} = (\alpha - 1, \beta - 1), \quad (\mathbf{C}^M)^{-1} \mathbf{S} = \left(\frac{\alpha}{3\kappa_M}, \frac{\beta}{2\mu_M} \right) \quad (\text{I.48a, b})$$

I.2.4 等価介在物法

では図 I.6 の左側に示したような、1 個だけ非均質体が存在する無限体の無限遠点に外力が作用した問題に戻ろう。材料は等方弾性で非均質体は楕円体とすると、前述の Eshelby の発見 [24] によって、非均質体の領域 Ω 内のひずみは一様だということがわかっている。その結論は、同じ図の右側に示したようにその領域 Ω を母材と同じ材料にした上で、そこにある適切な値を持つ一様な eigen ひずみ ϵ^* を分布させた補助問題が元の問題と等価になる可能性を示唆している。前節では eigen ひずみが与えられたものとして乱された場を求めたが、ここではその eigen ひずみの値そのものを元の問題との等価性を持つように求める。

そこで図 I.4 のように、無限遠点の外力に対して一様な応力場とひずみ場の σ^0, ϵ^0 が生じた均質場と、非均質体の存在で乱された応力場とひずみ場の σ, ϵ の乱された成分の場に分解すると、まず均質場は

$$\sigma^0 = \mathbf{C}^M : \epsilon^0 \quad (\text{I.49})$$

⁴ 東京大学地震研究所堀宗朗先生の示唆による。

を満足している。また乱された場は式 (I.10c) のつり合い式と式 (I.16) の境界条件を満足する。この二つの場を重ね合わせた Hooke の法則は、それぞれの領域で

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}^M (\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}(\mathbf{x})) \text{ in } D - \Omega, \quad \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}^I (\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}(\mathbf{x})) \text{ in } \Omega \quad (\text{I.50a, b})$$

と表される。そして Eshelby の発見 [24] は

$$\epsilon_{ij} = \text{一様 in } \Omega \quad (\text{I.51})$$

を保証する。

この元々の問題の乱された場についての問題を図 I.4 の一番右側の補助問題と等価にできれば、外力がある場合のその置き換えられた補助問題は図 I.6 の右側の図のようになる。このように非均質体を介在物で置換することによって 2 相問題を解く方法を等価介在物法と呼び、その補助問題では応力の表現式 (I.50) は

$$\sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}(\mathbf{x}) = C_{ijkl}^M (\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}(\mathbf{x}) - \epsilon_{kl}^*) \quad (\text{I.52})$$

で置き換えることができると考えるのだ。ここに eigen ひずみは

$$\epsilon_{ij}^* \begin{cases} = 0 & \text{in } D - \Omega \\ \neq 0 & \text{in } \Omega \text{ (未知だが一様)} \end{cases} \quad (\text{I.53})$$

のように領域 Ω にのみ存在するものとする。そして eigen ひずみ ϵ^* の値を、元の問題と補助問題の領域 Ω 内の応力表現同士の等価性から求める。つまり式 (I.50b) と式 (I.52) を領域 Ω で等置して

$$C_{ijkl}^I (\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl}) = C_{ijkl}^M (\epsilon_{kl}^0 + \epsilon_{kl} - \epsilon_{kl}^*) \text{ in } \Omega \quad (\text{I.54})$$

が eigen ひずみの値を決定するのである。

一方式 (I.39) から、乱されたひずみ成分は eigen ひずみと

$$\epsilon_{kl} = S_{klmn} \epsilon_{mn}^* \quad (\text{I.55})$$

という関係にあるので、これを式 (I.54) に代入すれば

$$C_{ijkl}^I (\epsilon_{kl}^0 + S_{klmn} \epsilon_{mn}^*) = C_{ijkl}^M (\epsilon_{kl}^0 + S_{klmn} \epsilon_{mn}^* - \epsilon_{kl}^*) \rightarrow \{C_{ijkl}^I S_{klmn} - C_{ijkl}^M (S_{klmn} - I_{klmn})\} \epsilon_{mn}^* = (C_{ijkl}^M - C_{ijkl}^I) \epsilon_{kl}^0$$

を得る。これを解けば

$$\epsilon_{ij}^* = \{C_{ijmn}^I S_{mnkl} - C_{ijmn}^M (S_{mnkl} - I_{mnkl})\}^{-1} (C_{klpq}^M - C_{klpq}^I) \epsilon_{pq}^0 \quad (\text{I.56})$$

のように適切な eigen ひずみの値が求められる。一旦 eigen ひずみが求められれば、式 (I.56) を式 (I.55) に代入すれば非均質体中の乱されたひずみ場を求めることができ、式 (I.52) から応力場も求めることができる。

演習問題 I-1

- 関数 G が式 (I.31) を満足することを証明せよ。ただし単周期関数の Fourier 変換はデルタ関数になる。

$$\delta(\xi' - \xi) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\{i \mathbf{x} \cdot (\xi' - \xi)\} d\mathbf{x} \quad (\text{I.57})$$

- 非均質体と母材の弾性定数の比が、例えばせん断弾性係数比が $\frac{\mu_I}{\mu_M} = 10$ や $1/10$ で、Poisson 比が $\nu_I = \nu_M = 0.3$ の場合を対象として、等価介在物法を用いて介在物中の $(\sigma_{12}^0 + \sigma_{12})$ と σ_{12}^0 の比と $(\sigma_{kk}^0 + \sigma_{kk})$ と σ_{kk}^0 の比を求め、結果を考察せよ。

I.3 複合材料の平均特性

I.3.1 弾性材料の森・田中平均

非均質体の存在は母材中に力学的な乱れを生じさせるが、そのような乱れの源は種々の相互作用である。第 I.2 節では無限体にたった一個の非均質体が存在する場合のみを対象としたので、母材と 1 個の非均質体との間の相互作用はある程度定量的に評価できるかもしれないが、実際の複合材料のように多数の非均質体が規則的あるいはランダムに分布している状態に対する解にはなっていないとは限らない。つまり、非均質体が多数ある場合や近接している場合のような非均質体同士の相互作用というのもあるのだ。もちろん非均質体数が比較的少なければ第 I.2 節の解を近似として用いることはできそうだ。ここではその解を流用しながら上述の 2 種類の相互作用を近似的に考慮して、複合材料の平均特性を定量的に予測する森・田中平均手法⁵を説明する。

材料は等方弾性で非均質体は楕円体とする。もちろん以下でも図 I.7 の右側の図のように等価な介在物問題として複合材料をモデル化するが、森・田中手法 [67] の基本的な魔法は、まず第 I.2 節で扱った一個だけの非均質体が無限体に存在する問題の解で母材と介在物との相互作用を近似することなのだ。そして母材領域の平均ひずみを $\langle \epsilon \rangle_M$ として、その領域の Hooke の法則を

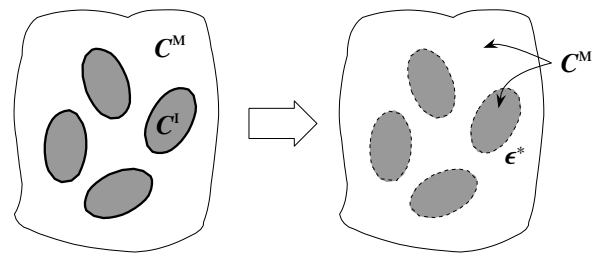


図 I.7 複合材料のモデル化

$$\langle \sigma \rangle_M = C^M : \langle \epsilon \rangle_M \quad (I.58)$$

と表すのだ。実は森・田中手法では、この母材中の平均ひずみ $\langle \epsilon \rangle_M$ が具体的にどのような力学量であるかを明言しないというのが重要な特徴である。以下 $\langle \cdot \rangle_M$ は母材領域の平均を表す。

森・田中手法の主張は、多くの非均質体が分布して生じた式 (I.58) で表された母材の均質場に非均質体をさらにもう 1 個だけ加えても、平均挙動には何ら影響を及ぼさないから、その非均質体による乱れつまり母材と非均質体の相互作用は第 I.2 節の解が使えるというものだ。つまり、非均質体領域の Hooke の法則を

$$\langle \sigma \rangle_I = C^I : \langle \epsilon \rangle_I \quad (I.59)$$

と表したとき、相互作用によるひずみの乱れ成分を $\langle \gamma \rangle_I$ とすると、非均質体中のひずみが

$$\langle \epsilon \rangle_I = \langle \epsilon \rangle_M + \langle \gamma \rangle_I \quad (I.60)$$

と表していいことにするのである。以下 $\langle \cdot \rangle_I$ は非均質体領域の平均を表す。そこで等価介在物法を用いて、非均質体の弾性係数も母材のそれと同じにした上で、そこに eigen ひずみ $\langle \epsilon^* \rangle_I$ を分布させた補助問題を考えると、介在物中の応力に対して

$$\langle \sigma \rangle_I = C^I : \{ \langle \epsilon \rangle_M + \langle \gamma \rangle_I \} = C^M : \{ \langle \epsilon \rangle_M + \langle \gamma \rangle_I - \langle \epsilon^* \rangle_I \} \quad (I.61)$$

という等価性が成立しなければならない。さらに Eshelby テンソルを介してひずみの乱れ成分は

$$\langle \gamma \rangle_I = S : \langle \epsilon^* \rangle_I \quad (I.62)$$

のように eigen ひずみと関係付けられるので、式 (I.62) を式 (I.61) に代入すると

$$C^I : \{ \langle \epsilon \rangle_M + S : \langle \epsilon^* \rangle_I \} = C^M : \{ \langle \epsilon \rangle_M + (S - I) : \langle \epsilon^* \rangle_I \}$$

⁵ この手法は、負電荷を持つ自由電子の運動の平均値として電流を計算する物理学の一方法と基本的には同じである。

を得る。このあと数ステップの演算をすれば

$$\langle \epsilon^* \rangle_I = \{ \mathbf{C}^M - (\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I) \mathbf{S} \}^{-1} (\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I) : \langle \epsilon \rangle_M = \{ \mathbf{C}^M - (\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I) \mathbf{S} \}^{-1} (\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I) (\mathbf{C}^M)^{-1} : \langle \sigma \rangle_M \quad (\text{I.63})$$

のように eigen ひずみが求められる。ここの演算では式 (I.58) を用いたが、式 (I.63) は式 (I.56) と同じである。式 (I.62) を式 (I.61) に代入したあと、式 (I.58) を考慮すれば

$$\langle \sigma \rangle_I = \mathbf{C}^M : \{ \langle \epsilon \rangle_M + (\mathbf{S} - \mathbf{I}) : \langle \epsilon^* \rangle_I \} = \langle \sigma \rangle_M + \mathbf{C}^M (\mathbf{S} - \mathbf{I}) : \langle \epsilon^* \rangle_I \quad (\text{I.64})$$

のように介在物中の応力が求められる。

さて非均質体の体積分率を

$$f \equiv \frac{\sum V_\Omega}{V} \quad (\text{I.65})$$

と定義する。分母の V は「無限体」の体積なので変だと思ってしまう読者もいると思うが、これは理論的な定式化で生じる違和感でしかなく、実際にはある有限な観察対象の材料がその材料の代表的な領域だと捉えるので、その代表領域の体積が V である。この体積分率を用いて、平均応力あるいは巨視的な応力 $\bar{\sigma}$ を

$$\bar{\sigma} \equiv \frac{1}{V} \int_\Omega \sigma dV + \frac{1}{V} \int_{D-\Omega} \sigma dV = \frac{\sum V_\Omega}{V} \langle \sigma \rangle_I + \left(\frac{V - \sum V_\Omega}{V} \right) \langle \sigma \rangle_M = f \langle \sigma \rangle_I + (1 - f) \langle \sigma \rangle_M \quad (\text{I.66})$$

と定義する。Voigt 平均ではこの平均のみを用いていたが、さらにここでは対応する平均ひずみ $\bar{\epsilon}$ も

$$\bar{\epsilon} \equiv f \langle \epsilon \rangle_I + (1 - f) \langle \epsilon \rangle_M \quad (\text{I.67})$$

のように定義する。これは Reuss 平均の考え方に相当するから、式 (I.1) の Voigt 平均と式 (I.3) の Reuss 平均を同時に仮定していることになる。ちょっと面白いと思いませんか。式 (I.58) (I.62) (I.63) を式 (I.67) に代入すれば

$$\bar{\epsilon} = (\mathbf{C}^M)^{-1} : \langle \sigma \rangle_M + f \mathbf{S} : \langle \epsilon^* \rangle_I \quad (\text{I.68})$$

を得る。最終的に式 (I.63) (I.64) (I.66) (I.68) から $\langle \sigma \rangle_M$, $\langle \sigma \rangle_I$, $\langle \epsilon^* \rangle_I$, $\langle \epsilon \rangle_M$ を消去すれば、

$$\bar{\epsilon} = [\mathbf{C}^M - (\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I) \{ \mathbf{S} - f (\mathbf{S} - \mathbf{I}) \}]^{-1} [\mathbf{C}^M - (1 - f) (\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I) \mathbf{S}] (\mathbf{C}^M)^{-1} : \bar{\sigma} \quad (\text{I.69})$$

という関係を得る。前述のように $\langle \epsilon \rangle_M$ の具体的な表現がどこにも無いのが特徴⁶の一つだ。複合材料の平均コンプライアンスを $\bar{\mathbf{C}}^{-1}$ と表すと、上式の右辺は形式的に

$$\text{Eq.(I.69) の右辺} \equiv \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \bar{\sigma} \quad (\text{I.70})$$

と定義していいので、この右辺から複合材料の平均弾性係数を

$$\bar{\mathbf{C}} \equiv \left[[\mathbf{C}^M - (\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I) \{ \mathbf{S} - f (\mathbf{S} - \mathbf{I}) \}]^{-1} [\mathbf{C}^M - (1 - f) (\mathbf{C}^M - \mathbf{C}^I) \mathbf{S}] (\mathbf{C}^M)^{-1} \right]^{-1} \quad (\text{I.71})$$

と定義できる。

実際には4階のテンソルの逆テンソルを計算しなければならないが、非均質体が球形であればすべてのテンソルは等方テンソルになるので、式 (I.48) の性質を用いて比較的容易に具体的な値を求めることができる。そうでない場合も文献 [73] のやり方が使える。例えば第 3.4.3 節の炭素繊維補強ポリマーの巨視的な弾性係数を森・田中手法で求めてみよう。母材のビニルエステル樹脂の弾性係数を $E_M = 2.81 \text{ GN/m}^2$ と $\nu_M = 0.274$ と設定し、炭素繊維の弾性係数は $E_I = 223 \text{ GN/m}^2$ および $\nu_I = 0.352$ として、体積分率を $f = 0.5$ と設定した。繊維は

⁶ これがこの手法の魔法だということに第2著者が気付いた。

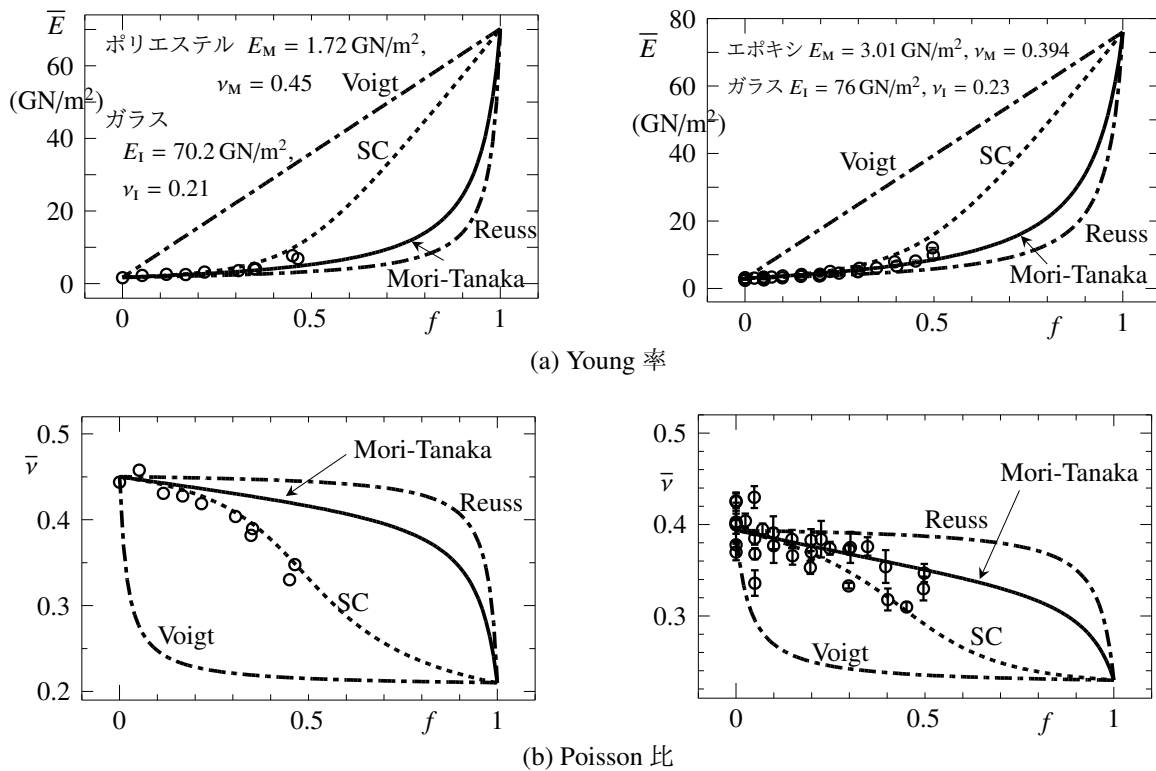


図 1.8 非均質体を球形と仮定した場合の実測値との比較

x_3 方向に無限に長い円柱形状にして Eshelby テンソルの値を文献 [69] を参照して求めた上で、上式 (I.71) で定義された弾性係数を求めると、Voigt 定数の表記で対称行列になり

$$\left(\bar{c} \right) \equiv \begin{pmatrix} 8.62 & 3.17 & 3.77 & 0 & 0 & 0 \\ 3.17 & 8.62 & 3.77 & 0 & 0 & 0 \\ 3.77 & 3.77 & 115. & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3.20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.20 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2.72 \end{pmatrix} \text{GN/m}^2 \quad (\text{I.72})$$

のように求められ、横等方性を持っていることが明らかだ。

I.3.2 実測値との比較

弾性係数の実測値 [79, 85] を森・田中平均で予測して図 I.8 で比較した。実験で用いられた非均質体は球形で近似できる。一点鎖線で Voigt 平均と Reuss 平均を表したが、'Mori-Tanaka' と付記した実線で表した森・田中平均はその中間のやや Reuss 平均側に位置する。また参考のために、Hill の self-consistent 法 [36] による予測も 'SC' と付記した点線で示した。体積分率 f が小さいときは、実測値は古典的な上下界よりも森・田中予測に近く、森・田中手法が相互作用をうまく考慮できていることがわかる。一方、体積分率の大きさによらず Hill の self-consistent 平均が実測値をよく予測しているのは興味深い。

Hill の self-consistent 法: では、その Hill の self-consistent 法の特徴について少しだけ書いておこう。この方法では、非均質体が実際の母材材料の中に分布しているのではなく、未知の（まだ求められていない）平均弾性を持つ母材中に分布していると問題を設定するのだ。そりゃそうだと納得する読者も少なくないと思う。し

たがって、平均弾性を求める式 (I.71) に相当する式が陰な方程式になる。例えば球形介在物の場合は

$$\bar{\mu} = \mu_M + \frac{f(\mu_I - \mu_M)\bar{\mu}}{\bar{\mu} + 2S_{1212}(\mu_I - \bar{\mu})}, \quad \bar{\kappa} = \kappa_M + \frac{f(\kappa_I - \kappa_M)\bar{\kappa}}{\bar{\kappa} + \frac{1}{3}S_{ijij}(\kappa_I - \bar{\kappa})} \quad (I.73a, b)$$

のような関係式になり、両辺に平均弾性係数が含まれる。さらに Eshelby テンソルにも未知の平均 Poisson 比が含まれていて

$$2S_{1212} = \frac{2(4 - 5\bar{\nu})}{15(1 - \bar{\nu})}, \quad \frac{1}{3}S_{ijij} = \frac{1 + \bar{\nu}}{3(1 - \bar{\nu})}, \quad \bar{\nu} = \frac{3\bar{\kappa} - 2\bar{\mu}}{2(\bar{\mu} + 3\bar{\kappa})} \quad (I.74a, b, c)$$

のようになる。この予測が持つ最も面白い特徴は多孔質材料の場合に見ることができる。つまり非均質体の弾性係数が零のときには上式からは

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_M} = 1 - \frac{f}{1 - 2S_{1212}}, \quad \frac{\bar{\kappa}}{\kappa_M} = 1 - \frac{f}{1 - \frac{1}{3}S_{ijij}} \quad (I.75a, b)$$

となり、平均 Poisson 比が

$$\bar{\nu} = \frac{(7 + 5\nu_M) - 6f(1 + \nu_M) - \sqrt{D}}{5\{2 - 3f(1 - \nu_M)\}} \quad (I.76)$$

のように求められる。ここに

$$D \equiv (7 - 5\nu_M)^2 - 6f(19 - 56\nu_M + 45\nu_M^2) + 9f^2(9 - 42\nu_M + 49\nu_M^2) \quad (I.77)$$

と置いた。式から明らかなように空隙の体積分率 f が 50% で弾性係数は零になるのだ。立方体に接する球が占める体積分率は $f = \pi/6 \approx 0.52$ なので、この結果は当然だと考える読者も少なくないと思うが、以上の定式化では介在物の大きさは全く指定していないのでスポンジのように・・・。

あるいは孔のせん断弾性係数は零にして Poisson 比は 0.5 のまま、体積弾性係数が非零の任意の値を持つ場合

$$\mu_I = 0, \quad \nu_I = 0.5, \quad \kappa_I = \text{任意}, \quad k \equiv \frac{\kappa_I}{\kappa_M} \neq 0 \quad (I.78a, b, c, d)$$

を計算してみよう。結果を図 I.9 に示した。空隙率 f の増加に伴って平均 Poisson 比は小さくなっていくが、 $f = 0.5$ に近づくと急に大きくなり始め、 $f = 0.6$ で

$$\bar{\nu} = 0.5, \quad \bar{\mu} = 0, \quad \frac{\bar{\kappa}}{\kappa_M} = \frac{5k}{3 + 2k} \quad (I.79a, b, c)$$

のように平均体積弾性係数の方は零にはならない。しかし実際の空気の体積弾性係数は $\kappa_I \approx 0.14 \text{ MN/m}^2$ 程度なので、母材が鋼やアルミニウムあるいはガラスなら $k \approx 10^{-6}$ 程度だし、塩化ビニル母材でも $k \approx 10^{-5}$ 程度になり、平均弾性係数の self-consistent 予測値は $f = 0.5$ でほぼ零になると考えていい。

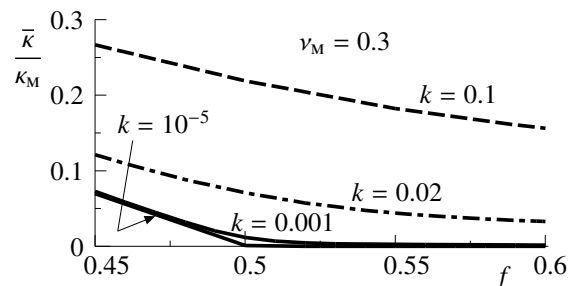


図 I.9 多孔質材料の体積弾性係数

演習問題 I-2

3. まず式 (I.63) (I.69) を求めよ。そして非均質体が球形の場合に、図 I.8 のように平均弾性係数を求めて図示せよ。例えば $\frac{\mu_I}{\mu_M} = 10$ として Poisson 比はどちらも同じ $\nu_M = \nu_I = 0.3$ とすればいい。その計算を踏まえて、母材と非均質体を入れ替えて同じような計算をし、上で求めた結果と比較せよ。つまり

1. 球形の材料 A が体積分率 f だけ材料 B の中に分布していると考えた場合と
2. 球形の材料 B が体積分率 $(1 - f)$ だけ材料 A の中に分布していると考えた場合

という2種類の計算をするのだ。介在物の形はともかく、どちらも二つの材料 A と B は同じ体積比率で複合化されているわけだが、二つの森・田中予測は一致する⁷だろうか。得られた結果を $\bar{\mu}$ と f の関係図に描いて考察して欲しい。できれば Hill の self-consistent 予測と比較すると、とても興味深い結果が得られるのでやってみて欲しい。実はこの二つの予測は第 I.3.3 (2) 節で説明するように Hashin と Shtrikman の上下界 [34] と一致するのである。

I.3.3 弾塑性材料の場合とその改善手法

(1) 増分塑性論と降伏曲面

増分塑性論の支配方程式は微小変位理論のそれと形式的にはほぼ同じなので、前節の森・田中手法を弾塑性材料に応用する [113, 183, 197] のはそれほど難しくはない。局所的な平均構成則はそれぞれの材料で

$$\langle \dot{\sigma} \rangle_M = \mathbf{C}^M : (\langle \dot{\epsilon} \rangle_M - \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_M), \quad \langle \dot{\sigma} \rangle_I = \mathbf{C}^I : (\langle \dot{\epsilon} \rangle_M + \langle \dot{\gamma} \rangle_I - \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_I) \quad (\text{I.80a, b})$$

と表される。上付きドットは増分を表し、 $\dot{\epsilon}^p$ は塑性ひずみ増分である。式 (I.80a) を式 (I.80b) に代入すれば

$$\langle \dot{\sigma} \rangle_I = \mathbf{C}^I : \left\{ (\mathbf{C}^M)^{-1} : \langle \dot{\sigma} \rangle_M + \langle \dot{\gamma} \rangle_I - \Delta \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_I \right\} \quad (\text{I.81})$$

を得る。ここに

$$\Delta \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_I \equiv \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_I - \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_M \quad (\text{I.82})$$

は母材と非均質体間の塑性ひずみ増分のミスフィットである。したがって等価介在物の構成則との間には

$$\langle \dot{\sigma} \rangle_I = \mathbf{C}^I : \left\{ (\mathbf{C}^M)^{-1} : \langle \dot{\sigma} \rangle_M + \langle \dot{\gamma} \rangle_I - \Delta \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_I \right\} = \mathbf{C}^M : \left\{ (\mathbf{C}^M)^{-1} : \langle \dot{\sigma} \rangle_M + \langle \dot{\gamma} \rangle_I - (\Delta \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_I + \langle \dot{\epsilon}^* \rangle_I) \right\} \quad (\text{I.83})$$

という関係が成立しなければならない。また塑性ひずみ増分のミスフィットによる乱れ成分は Eshelby テンソルを用いて

$$\langle \dot{\gamma} \rangle_I = \mathbf{S} : (\Delta \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_I + \langle \dot{\epsilon}^* \rangle_I) \quad (\text{I.84})$$

のような関係になるので、以上の式を用いて eigen ひずみ増分 $\dot{\epsilon}^*$ を求めることができる。そのあと数ステップの演算を通して、巨視的な構成則を

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\bar{\sigma}} + \mathbf{F} : \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_M + \mathbf{G} : \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_I \quad (\text{I.85})$$

と表すことができる。ここに $\bar{\mathbf{C}}$ や \mathbf{F} , \mathbf{G} は文献 [113, 183] に定義してあるが、 $\bar{\mathbf{C}}$ は巨視的な弾性係数である。ただし

$$\mathbf{F} \neq (1-f) \mathbf{I}, \quad \mathbf{G} \neq f \mathbf{I} \quad (\text{I.86a, b})$$

となっており、巨視的な塑性ひずみ増分が2相の塑性ひずみ増分の体積平均ではないということには注意が必要だ。

例えば文献 [92] で参照している SiC で補強したアルミニウムを対象としてみよう。SiC は弾性を維持し、母材が Mises の降伏条件を満足するものとする。回転楕円とした SiC の長軸は x_1 - x_3 平面上にあって x_2 軸回りに x_3 軸から時計回りに 60 度の向きに並んでいるものとし、半径比は $a_1 = a_2$ と $a_3/a_1 = 2$ で体積分率は 13.2% である。弾性係数はそれぞれ $E_M = 60 \text{ GN/m}^2$, $\nu_M = 0.3$, $E_I = 450 \text{ GN/m}^2$, $\nu_I = 0.2$ で、母材の引張降伏応力を $\sigma_M^Y = 700 \text{ MN/m}^2$ とした。森・田中手法で求めた母材中の平均応力が Mises の降伏条件を満足するときの巨視

⁷ 同じ比率のご飯とカレーを、ご飯にカレーをかけた場合とカレーにご飯を載せた場合とで味が同じか、という問題だ。呵呵。

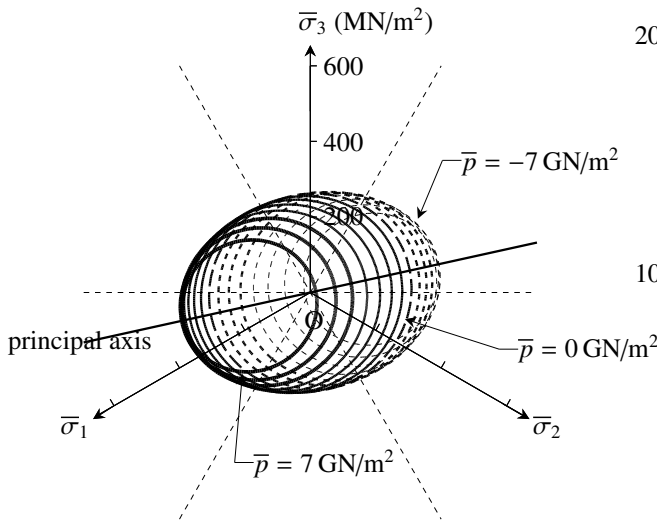


図 I.10 複合材料の巨視的な降伏曲面

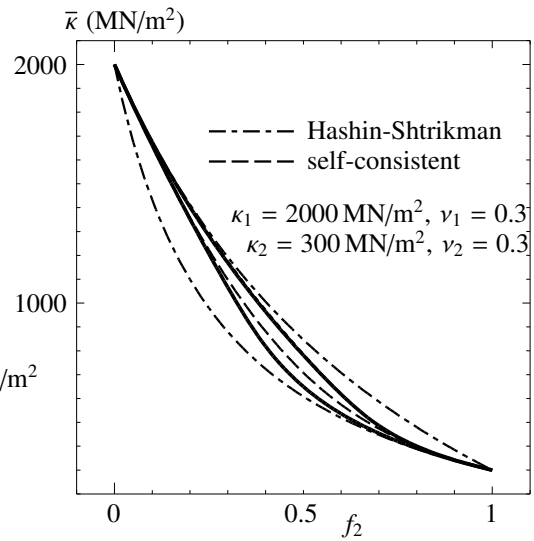


図 I.11 改善された平均体積弾性係数

的な応力で描いた巨視的な降伏曲面が図 I.10 である。実線・破線の円は、巨視的な静水圧 \bar{p} がある一定値を持つときの降伏曲面の輪郭だ。母材そのものはもちろん静水圧では降伏しないが、内部の微視構造の存在によって巨視的には等方応力状態でも降伏するのである。なお、この図では降伏曲面がラグビーボールくらいにはしか見えないが、実際には静水圧方向に非常に長いフランスパンのような形状である。

(2) 3相モデルを用いた改善手法

Voigt 平均等に比べると森・田中手法は相互作用をある程度良く考慮できているので、比較的精度のいい平均化ができています。さらに非均質体の向きや形（大きさではない）の影響も定量的に考慮できることがわかったが、図 I.8 を見る限りは非均質体の量が多くなると精度が落ちることもわかった。一方、Hill の self-consistent 法は非均質体の体積分率によらず実測値を比較的良く予測できていた。そこでその self-consistent 法の考え方を念頭に置いて、森・田中平均の精度を上げる手法の一つとして、3相問題による2相材料の平均化手法 [47] を説明しておこう。その手法では例えば材料 A と B の複合材料を対象としたとき、まずその二つの材料を一時的には非均質体と捉え、それを別の材料 C を母材として複合化して森・田中平均を求めておく。しかしそのあと母材 C の体積分率を零にすることによって材料 A と B の2相材料の平均挙動を予測するという手法である。この母材 C は最終的な複合材料には存在しないので文献では仮想母材と呼んでいる。代表的な例として、二つの非均質体を球形としてそれぞれ異なる体積弾性係数 κ_1 と κ_2 を持っているものとし、それぞれの体積分率を f_1, f_2 とする。これを体積弾性係数 κ_M を持つ母材中に分布させれば母材の体積分率は $\{1 - (f_1 + f_2)\}$ である。この3相材料に対して森・田中理論で平均体積弾性係数を求めた上で、最終的に母材を無くす極限つまり $(f_1 + f_2) \rightarrow 1$ の極限をとる。このようにして求められる平均体積弾性係数 $\bar{\kappa}$ は

$$\bar{\kappa} = \frac{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i \kappa_i}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_i) \alpha}}{\sum_{i=1}^2 \frac{f_i}{\kappa_M - (\kappa_M - \kappa_i) \alpha}} \tag{I.87}$$

となる。ここに α と β は存在しない母材の Poisson 比を用いて式 (I.41) で定義される。母材は存在しないのに κ_M と ν_M が無くならないのが最も重要な特徴であり、この手法の有用性である。つまり、この母材の選び方によって求められる平均弾性係数は違ってくるのである。

例えば母材が剛体だとしよう。つまり $\kappa_M \rightarrow \infty$ の場合には上式は

$$\bar{\kappa} = f_1 \kappa_1 + f_2 \kappa_2 \quad (\text{I.88})$$

となる。これは取りも直さず式 (I.2b) の Voigt 平均である。もう予想できていると思うが、逆に母材が真空つまり $\kappa_M \rightarrow 0$ の場合は

$$\bar{\kappa} = \left(\frac{f_1}{\kappa_1} + \frac{f_2}{\kappa_2} \right)^{-1} \quad (\text{I.89})$$

のように式 (I.4b) の Reuss 平均に一致する。したがって存在しない母材の弾性係数の選び方によって、予測される弾性係数は Voigt と Reuss の平均の中間の値になるのである。つまり Voigt と Reuss 平均は、平均弾性係数の上下界というよりも上限値と下限値だと考えていいだろう。

さらに興味深いのは、母材が材料 1 と同じ弾性係数を持っている場合だ。つまり $\kappa_M = \kappa_1, \nu_M = \nu_1$ とすると、式 (I.87) は

$$\frac{\bar{\kappa}}{\kappa_1} = 1 - \frac{f_2 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right)}{1 - f_1 \left(1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_1} \right) \alpha} \quad (\text{I.90})$$

となり、これは母材が材料 1 である場合の 2 相材料の森・田中平均である。実は、森・田中平均は非均質体が球形の場合には Hashin と Shtrikman の上下界 [34] の一つに一致することが知られている。そして、Hashin と Shtrikman のもう片方の上下界は、ここの 3 相問題で母材が材料 2 と同じ弾性係数を持ち $\kappa_M = \kappa_2, \nu_M = \nu_2$ とした場合の平均値と一致するのである。演習問題 I-2 の 3 番の後半で計算したのが、このもう片方の森・田中平均である。

結果を図 I.11 に示したが、Hill の self-consistent 予測も示しておいた。1 点鎖線が上述の二つの森・田中平均で Hashin と Shtrikman の上下界だ。そこで式 (I.87) で用いる母材の弾性定数の選び方として文献 [47] では、複合材料の弾性エネルギーを最小にするような選択法を提案している。しかも巨視的なひずみ $\bar{\epsilon}$ を与えた場合と巨視的な応力 $\bar{\sigma}$ を与えた場合とで二つの異なる予測ができることもわかっていた。図中の実線がそのエネルギー的考察に基づく平均弾性係数であり、通常の森・田中平均つまり Hashin と Shtrikman の上下界よりも狭い予測をしていて、さらに Hill の self-consistent 予測にも近づいている。そしてさらに特徴的なのは、 f_2 が小さい場合には森・田中平均 (Hashin と Shtrikman の上界) とこの 3 相問題による平均および Hill の self-consistent 予測が同じ漸近特性を持つことだ。逆に f_2 が大きい場合には、母材と非均質体を入れ替えた森・田中平均 (Hashin と Shtrikman の下界) とこの 3 相問題による平均および Hill の self-consistent 予測が同じ漸近特性を持つのである。ちなみに、図示してはいないが特に Voigt 平均にはこのような漸近特性は無い。

(3) 弾塑性挙動

前節の 3 相問題による平均化は弾塑性挙動に対しても用いること [55, 141] ができる。ただし最終的に存在しなくなる母材は弾性体とした。母材と非均質体の平均構成則は

$$\langle \dot{\sigma} \rangle_M = \mathbf{C}^M : \langle \dot{\epsilon} \rangle_M, \quad \langle \dot{\sigma} \rangle_i = \mathbf{C}^i : \{ \langle \dot{\epsilon} \rangle_i - \langle \dot{\epsilon}^P \rangle_i \} \quad (\text{I.91a, b})$$

と表される。ひずみ増分は乱れ成分を含めて $\langle \dot{\epsilon} \rangle_i = \langle \dot{\epsilon} \rangle_M + \langle \dot{\gamma} \rangle_i$ と置くことができるので

$$\langle \dot{\sigma} \rangle_i = \mathbf{C}^i : \{ \langle \dot{\epsilon} \rangle_M + \langle \dot{\gamma} \rangle_i - \langle \dot{\epsilon}^P \rangle_i \} \quad (\text{I.92})$$

となる。再度等価介在物法を用いることにすると、補助問題に対しては

$$\langle \dot{\sigma} \rangle_i = \mathbf{C}^M : [\langle \dot{\epsilon} \rangle_M + \langle \dot{\gamma} \rangle_i - \{ \langle \dot{\epsilon}^P \rangle_i + \langle \dot{\epsilon}^* \rangle_i \}] \quad (\text{I.93})$$

のように eigen ひずみ増分を導入すればよく、それを用いれば乱れ成分は

$$\langle \dot{\gamma} \rangle_i = \mathbf{S}_i : \{ \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_i + \langle \dot{\epsilon}^* \rangle_i \} \quad (I.94)$$

のように Eshelby テンソルを介して表すことができる。介在物中の等価性から eigen ひずみ増分 $\langle \dot{\epsilon}^* \rangle_i$ が求められる。

式 (I.66) (I.67) で定義した巨視的な応力とひずみを考慮して数ステップの演算をし、母材の体積分率を零にすることによって

$$\dot{\bar{\epsilon}} = \bar{\mathbf{C}}^{-1} : \dot{\bar{\sigma}} + \sum_{i=1}^2 f_i \left(\mathbf{P}_i - \bar{\mathbf{C}}^{-1} \mathbf{M}_i \right) : \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_i \quad (I.95)$$

のように巨視的な構成則を表すことができる。ここで $\bar{\mathbf{C}}$ や他のテンソルの定義については文献 [141] を参照して欲しい。式 (I.95) 右辺の第 2 項は巨視的な塑性ひずみ増分である。図 I.12 には、図中に示した文献で用いられた実測値との比較を示した。材料は長いボロン繊維で補強したアルミニウムで、アルミニウムの Young 率と Poisson 比は $E_1 = 55.85 \text{ GN/m}^2$ と $\nu_1 = 0.32$ で、ボロンの方は $E_2 = 379.23 \text{ GN/m}^2$ と $\nu_2 = 0.2$ で与えた。ボロンの体積分率を 34% とし、楕円体介在物の半径比は $a_3/a_1 = 1000$ $a_2 = a_1$ のようにした。ボロン繊維は弾性だが、アルミニウムは Mises の降伏条件

$$f \equiv \sqrt{J_2} - F(\langle \dot{\epsilon}^p \rangle_1) = 0 \quad (I.96)$$

を満足し、引張降伏応力 $F(\langle \dot{\epsilon}^p \rangle_1)$ は

$$F(\langle \dot{\epsilon}^p \rangle_1) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \sigma_1^Y + h_1 \left(\frac{\epsilon_1^{\text{eq}}}{\sqrt{3}} \right)^{n_1} \right\} \quad (I.97)$$

のべき乗則で与えた。ここで $\sigma_1^Y = 79.29 \text{ MN/m}^2$ および $h_1 = 827.4 \text{ MN/m}^2$, $n_1 = 0.6$ とした。なお ϵ_1^{eq} は

$$\epsilon_1^{\text{eq}} \equiv \int_{\text{history}} \sqrt{2 \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_1 : \langle \dot{\epsilon}^p \rangle_1} dt \quad (I.98)$$

で定義される相当塑性ひずみである。ちなみに文献 [51] の予測は非均質体の界面剥離を考慮していたので、この 3 相問題によるアプローチにもある界面剥離モデルを用いて予測した結果を文献 [55] には示しておいたが、上図にある実測値との差異を剥離で説明できることもわかっている。

もう一つ、球形のシリカ粒子で補強したエポキシの例を図 I.13 で比較した。エポキシは $E_1 = 3.16 \text{ GN/m}^2$ および $\nu_1 = 0.35$ で、シリカは $E_2 = 73.1 \text{ GN/m}^2$ および $\nu_2 = 0.18$ とした。シリカは弾性で、エポキシは上の例と同じべき乗則の Mises の降伏条件を満足し、 $\sigma_1^Y = 75.86 \text{ MN/m}^2$, $h_1 = 32.18 \text{ MN/m}^2$, $n_1 = 0.26$ である。ここで提案した予測は森・田中予測を若干改善するが、非均質体の体積比率が大きい場合の精度はまだ良くない。

しかし複合材料そのものを設計する場合にこういった手法を用いることは、微視構造も有限要素分割した場合の数値解析では避けられない計算負荷を抑えることができ、非均質体の体積分率だけではなく形や向きも考慮して、解析的あるいは負荷がほとんど無い数値計算によって平均挙動の予測ができるという特徴があるので、工学的な有用性はある。材料開発の段階で必要な経費や発生するかもしれない産業廃棄物の量を減らすという観点からも、解析的手法の提案は決して無駄な研究だとは思えないのだが、どうだろう。

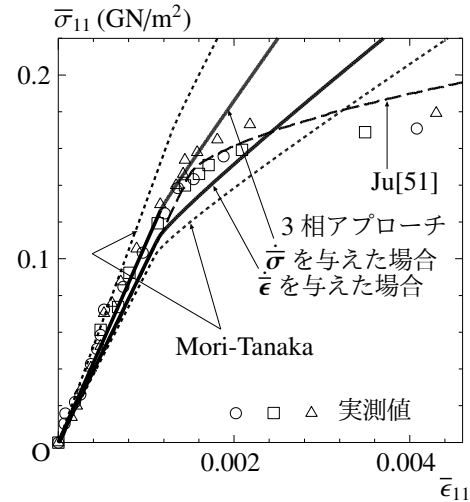


図 I.12 ボロン繊維補強アルミニウム

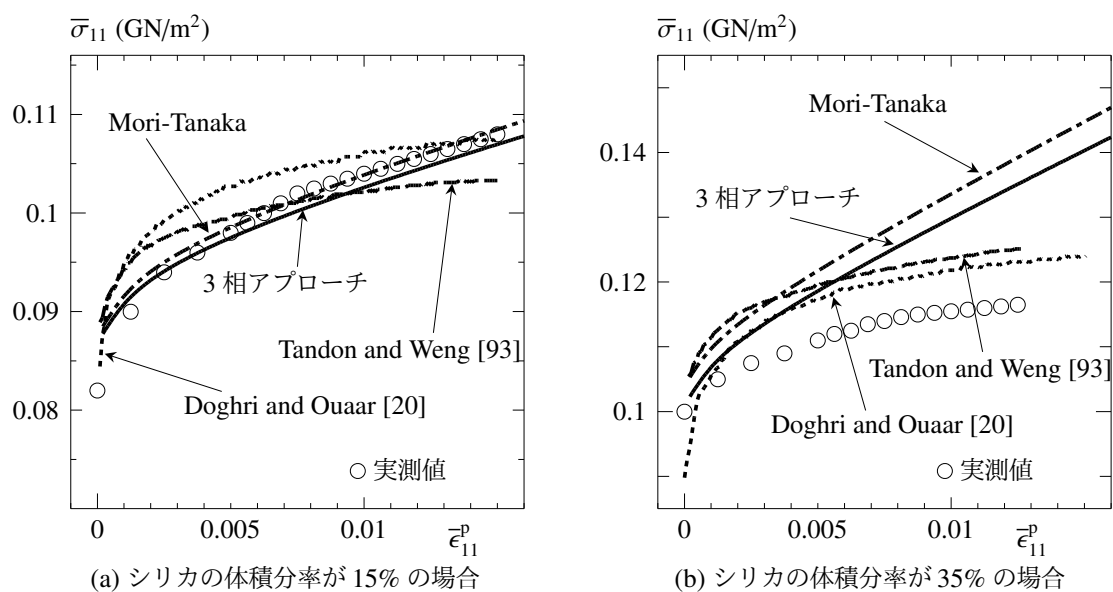


図 I.13 シリカ粒子補強エポキシ



写真 I.1 ものつくり大学内の FRP トラス歩道橋 (学生の研修成果) 2007 年竣工



‘Guess what!’, ‘Tell you what’ and ‘Chances are’ これは難しい。最初は何を言いたいのかわからなかった。自分では使えない。

付録 J

Fourier 級数と初期値境界値問題

J.1 準備 — ベクトル値関数と常微分方程式

J.1.1 問題の設定

この章は第 26 版までは英語で書かれていて、英語のみで実施する 3 年生向けの講義用資料だった。自然科学や社会科学の種々の分野の基礎的問題は、例えば次のようなスカラー関数 $u(t)$ に対する常微分方程式 (ODE) でモデル化されることがある。

$$\dot{u}(t) = a u(t)$$

ここに上付きドットは時間 t についての微分である。そしてこの解は

$$u(t) = c \exp(at)$$

と求められるが、 c は初期条件で決定される積分定数である。この解は a の符号に依存して収束するのか発散するのかといった全く異なる特性を持つことから、 a が問題の最も重要なパラメータであることがわかる。

これをベクトル値関数 $\mathbf{v}(t)$ に対する問題に拡張すると、その支配方程式は

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{v}, \quad \mathbf{v}(t) = [v_1(t) \ v_2(t) \ v_3(t)]^T, \quad \mathbf{A} = 3 \times 3 \text{ 実対称行列} \quad (\text{J.1a, b, c})$$

と記すことができ、初期条件は例えば

$$\mathbf{v}(0) = \boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3]^T \text{ (与えられる)} \quad (\text{J.2})$$

のように与えられる。3 元連立 ODE だが、これをどうやって解こう。関数 \mathbf{v} の 3 成分から 2 成分を消去して高次の微分方程式にする方法もあるかもしれない。しかし、次元がもっと大きくなった場合はその方法は適切だとは思えない。なおこの章では簡単のために括弧無しの太字で行列を表す。

J.1.2 固有値問題

前述のスカラー関数についての ODE における a の符号が持つ特性を踏まえると、式 (J.1) の係数行列 \mathbf{A} もやはり解の特性を左右する最も重要なパラメータだと推測できる。では行列の「符号」って何だろう。実はそれはこの係数行列の固有値問題を考察することによってわかるのだ。つまり λ をこの係数行列の固有値とし、 \mathbf{e} を対応する固有ベクトルとすると、この係数行列の固有値問題は

$$\mathbf{A} \mathbf{e} = \lambda \mathbf{e} \quad (\text{J.3})$$

で与えられる。この λ (値と符号) が解の特性を左右するのだ。我々が対象とする多くの工学的な問題では、この三つの固有値はお互いに異なる値を持つので、それをそれぞれ λ_i ($i = 1, 2, 3$); $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$) とし、対応する固有ベクトルを \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) とする。すると i 番目の固有値問題は

$$\mathbf{A} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_i \quad (\text{J.4})$$

と記すことができる。式 (J.4) に \mathbf{e}_j^T を左から乗じると

$$\mathbf{e}_j^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i = \lambda_i \mathbf{e}_j^T \mathbf{e}_i \quad (*)$$

となる。同様に j 番目の固有値問題の方程式に i 番目の固有ベクトルを左から乗じれば

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j \quad (**)$$

を得る。ただ係数行列 \mathbf{A} は対称なので $\mathbf{e}_i^T \mathbf{A} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^T \mathbf{A}^T \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i$ という関係が成立するため、式 (**) は

$$\mathbf{e}_j^T \mathbf{A} \mathbf{e}_i = \lambda_j \mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = \lambda_j \mathbf{e}_j^T \mathbf{e}_i$$

と書き直される。この式と上式 (*) を辺々引き算すると

$$0 = (\lambda_i - \lambda_j) \mathbf{e}_j^T \mathbf{e}_i$$

を得る。上述のように固有値同士は異なり $\lambda_i \neq \lambda_j$ が成立するので、この最後の式からは

$$\mathbf{e}_i^T \mathbf{e}_j = 0, \quad i \neq j \quad (\text{J.5})$$

という結論を得る。つまり固有ベクトル同士はお互いに直交するのである。これがまず重要な特性だ。

J.1.3 ベクトル値関数の常微分方程式

支配方程式 (J.1) を初期条件式 (J.2) の下で解きたいのだが、まず解を固有ベクトルを用いて

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^3 c_i(t) \mathbf{e}_i \quad (\text{J.6})$$

のように表現できると仮定しよう。すると

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \sum_{i=1}^3 \dot{c}_i(t) \mathbf{e}_i$$

なので、式 (J.6) を支配方程式 (J.1) に代入すると

$$\sum_{i=1}^3 \dot{c}_i(t) \mathbf{e}_i = \mathbf{A} \sum_{i=1}^3 c_i(t) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 c_i(t) \mathbf{A} \mathbf{e}_i$$

を得る。この最右辺に式 (J.4) の関係を代入すると

$$\sum_{i=1}^3 \dot{c}_i(t) \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 c_i(t) \lambda_i \mathbf{e}_i$$

となる。そこで、この式に n 番目の固有ベクトル \mathbf{e}_n^T を左から乗じると、式 (J.5) で示したように異なる二つの固有ベクトルは直交するので、得られた式の総和のうち n 番目以外は零になり、結局 n 番目の項だけが残る

$$\dot{c}_n(t) = \lambda_n c_n(t)$$

を得る。これはスカラー関数 $c_n(t)$ の ODE なので章の最初に示したように簡単に解け、一般解が

$$c_n(t) = k_n \exp(\lambda_n t) \quad (\text{J.7})$$

と求められる。 k_n は積分定数だ。

したがって、ベクトル値関数 \mathbf{v} の一般解が

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{e}_i \exp(\lambda_i t) \quad (\text{J.8})$$

のように求められたことになる。あとは初期条件式 (J.2) を用いて k_i を求めるだけだ。そこで式 (J.8) を式 (J.2) に代入すれば

$$\mathbf{v}(0) = \sum_{i=1}^3 k_i \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\alpha}$$

を得るが、果たして簡単に k_i を求められるだろうか。ここで重要なのが直交性だ。つまりこの式に \mathbf{e}_n^T を左から乗じて直交条件式 (J.5) を考慮すると、ここでも総和のうち k_n 以外を含む項は零になるので

$$k_n \mathbf{e}_n^T \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n^T \boldsymbol{\alpha} \quad \rightarrow \quad k_n = \frac{\mathbf{e}_n^T \boldsymbol{\alpha}}{|\mathbf{e}_n|^2}$$

のように積分定数を求めることができるのである。直交性が重要な理由が理解できたと思う。最終的に解は

$$\mathbf{v}(t) = \sum_{i=1}^3 \left(\frac{\mathbf{e}_i^T \boldsymbol{\alpha}}{|\mathbf{e}_i|^2} \right) \mathbf{e}_i \exp(\lambda_i t) \quad (\text{J.9})$$

と求められる。

例：簡単な例として

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\alpha} = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (\text{与えられる})$$

を解いてみよう。係数行列 \mathbf{A} の固有値問題は

$$\begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} \mathbf{e} = \mathbf{0} \quad (*)$$

となるので、特性方程式は

$$\det \begin{pmatrix} 5-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 5-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (5-\lambda) \{(5-\lambda)^2 - 4\} = (5-\lambda)(3-\lambda)(7-\lambda) = 0$$

となる。したがって各固有値が

$$\lambda_1 = 5, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 7$$

と求められる。この個々の固有値 λ_i に対する式 (*) から、それぞれの固有ベクトルが

$$\mathbf{e}_1 = [1 \ 0 \ 0]^T, \quad |\mathbf{e}_1|^2 = 1, \quad \mathbf{e}_2 = [0 \ 1 \ 1]^T, \quad |\mathbf{e}_2|^2 = 2, \quad \mathbf{e}_3 = [0 \ 1 \ -1]^T, \quad |\mathbf{e}_3|^2 = 2$$

と求められる。固有ベクトル同士の直交性は各自確かめて欲しい。

そこで式 (J.6) のように解の候補を設定すると、最終的にその未知関数 $c_i(t)$ に対する方程式が

$$\dot{c}_i(t) = \lambda_i c_i(t)$$

となるので、それぞれの解が

$$c_1(t) = k_1 \exp(5t), \quad c_2(t) = k_2 \exp(3t), \quad c_3(t) = k_3 \exp(7t)$$

と求められる。これを初期条件に代入することによって

$$k_1 = \frac{\mathbf{e}_1^T \boldsymbol{\alpha}}{|\mathbf{e}_1|^2} = \frac{6}{1} = 6, \quad k_2 = \frac{\mathbf{e}_2^T \boldsymbol{\alpha}}{|\mathbf{e}_2|^2} = \frac{7+8}{2} = \frac{15}{2}, \quad k_3 = \frac{\mathbf{e}_3^T \boldsymbol{\alpha}}{|\mathbf{e}_3|^2} = \frac{7-8}{2} = -\frac{1}{2}$$

を得るので、最終的な解が

$$\mathbf{v}(t) = 6 \exp(5t) \mathbf{e}_1 + \frac{15}{2} \exp(3t) \mathbf{e}_2 - \frac{1}{2} \exp(7t) \mathbf{e}_3$$

と求められる。3 元連立 ODE を解く際の固有値問題と固有ベクトルの直交性との重要性を実感してもらえただろうか。

J.2 1次元熱伝導方程式 — 放物型偏微分方程式

J.2.1 熱伝導方程式

誘導は付録 H に示したので、ここにはその結果だけを列挙する。温度を $u(x, t)$ として長さ a の棒の中の熱伝導方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \right) + r(x, t) = c \rho \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \quad 0 < t, \quad 0 < x < a \quad (\text{J.10})$$

と表される。ここに κ は熱伝導率で、 c が熱容量、 ρ は密度である。 $r(x, t)$ は外からの入熱だ。初期条件は時刻 $t = 0$ における棒の温度分布で与えればいいので

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (\text{J.11})$$

となる。ただ、この問題は空間的にも広がっている ($0 < x < a$) ので、境界条件も与える必要のある初期値境界値問題になる。境界条件には基本的に 3 種類あるが、最も基本的な条件は両端で温度を規定するもので

$$u(0, t) = T_L(t), \quad u(a, t) = T_R(t) \quad (\text{J.12a, b})$$

と表される。ここに $T_L(t)$ と $T_R(t)$ が端部の温度である。もう一つの条件は端部が断熱されている場合で

$$q(0, t) = 0, \quad q(a, t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = 0 \quad (\text{J.13a, b, c, d})$$

のように熱流が零だとして与えられる。最後の条件は Newton の冷却法則と呼ばれるもので

$$q(0, t) = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = h_L (u(0, t) - v_L), \quad q(a, t) = -\kappa \frac{\partial u}{\partial x}(a, t) = h_R (u(a, t) - v_R) \quad (\text{J.14a, b})$$

のように与えられる。つまり、端部の熱流がその温度に比例するというもので、上式の h_L と h_R , v_L , v_R は材料パラメータである。

最初は簡単のために外部からの入熱は無い ($r(x, t) \equiv 0$) ことにし、棒は一樣な材料でできていて κ や ρ , c は定数だとする。すると熱伝導方程式 (J.10) は

$$\dot{u}(x, t) = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{J.15})$$

となる。ここに k は次式で定義される熱拡散率である。

$$k \equiv \frac{\kappa}{c \rho} \quad (\text{J.16})$$

J.2.2 固有値問題

第 J.1 節では次の連立 ODE

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{u}(t) \quad (*)$$

を解くために、解を次式で仮定した。

$$\mathbf{u} \sim \sum_{i=1}^3 c_i(t) \mathbf{e}_i$$

ここに \mathbf{e}_i は行列 \mathbf{A} に関する式

$$\mathbf{A} \mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n \quad (**)$$

で定義される固有値問題の固有ベクトルだった。では、これを踏まえて熱伝導式 (J.15) を眺めると、行列による作用を微分作用素で置き換えて

$$\mathbf{A} \sim k \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

とすることによって、それが式 (*) と同じ形式になっていることがわかる。したがって式 (**) からのアナロジーとして次のような固有値問題

$$k \frac{d^2}{dx^2} f_n(x) = \lambda_n f_n(x) \quad (J.17)$$

を解くことが、元々の熱伝導方程式を解く道筋を与えてくれそうなことが推測できる。再度、この新しい（微分方程式で表した）固有値問題と行列の固有値問題とを比較しながら列挙しておこう。まず解くべき式は

$$\dot{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{A} \mathbf{u}(t) \quad \text{あるいは} \quad \dot{u}(x, t) = k \frac{d^2 u(x, t)}{dx^2}$$

である。そして、まず解くべき固有値問題は

$$\mathbf{A} \mathbf{e}_n = \lambda_n \mathbf{e}_n \quad \text{あるいは} \quad k \frac{d^2 f_n(x)}{dx^2} = \lambda_n f_n(x)$$

で表される。最後に元々の問題の解を級数表示して

$$\mathbf{u} = \sum_{n=1}^3 c_n(t) \mathbf{e}_n \quad \text{あるいは} \quad u(x, t) = \sum_n c_n(t) f_n(x)$$

のように置けば熱伝導方程式が解けそうだ。これが初期値境界値問題を固有関数を用いて解く手法である。

代表例として、初期条件が式 (J.11) で与えられた熱伝導方程式 (J.15) を解いておこう。境界条件としては、棒の左端が断熱されていて、右端には温度 0 度の巨大な氷が付着しているものとする。したがって境界条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0 \quad (J.18a, b)$$

で与えられる。まず解くべき固有値問題は式 (J.17) で与えられるので

$$k f_n''(x) = \lambda_n f_n(x) \quad (J.19)$$

を解けばいいことになる。ここにプライムは x に関する微分である。また固有関数 $f_n(x)$ の境界条件も式 (J.18) と等価にしておく必要があるなので、それは次式で与えられる。

$$f_n'(0) = 0, \quad f_n(a) = 0 \quad (J.20a, b)$$

実は解いてみればわかるのだが、固有値が $\lambda_n < 0$ の場合にのみ非零の固有関数 $f_n(x)$ が存在するのだ。したがって式 (J.19) の一般解は

$$f_n(x) = A_n \sin \xi_n x + B_n \cos \xi_n x, \quad \xi_n \equiv \sqrt{-\lambda_n/k}$$

と求められる。これを境界条件式 (J.20) に代入すると

$$\xi A_n = 0, \quad A_n \sin \xi_n a + B_n \cos \xi_n a = 0$$

を得る。つまり

$$A_n = 0, \quad B_n \cos \xi_n a = 0$$

であるが、第 2 式には二つの可能性がある。一つは $B_n = 0$ であり、これは当たり前の結果（棒が 0 度のまま）であり、今欲しい答ではない。これに対してもう一つの可能性は

$$\cos \xi_n a = 0 \tag{J.21}$$

であり、つまり

$$\xi_n a = \frac{2n-1}{2} \pi \quad \rightarrow \quad \xi_n = \frac{(2n-1)\pi}{2a} \tag{J.22}$$

であればよく、この場合は $B_n \neq 0$ は不定になる。これが欲しい結果であり、結局固有関数と固有値が

$$f_n(x) = \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right), \quad \lambda_n = -k \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \infty \tag{J.23a, b}$$

のように求められるのだ。ここは重要なステップなので、わからない人は手を動かすこと。

式 (J.19) から i 番目の固有関数は

$$f_i''(x) = \frac{1}{k} \lambda_i f_i(x)$$

を満足するので、これにある固有関数 $f_j(x)$ を乗じて 0 から a まで積分しよう。つまり仮想仕事の原理だが

$$\int_0^a f_j f_i'' dx = \frac{1}{k} \lambda_i \int_0^a f_j f_i dx$$

を得る。さらに左辺を部分積分して境界条件式 (J.20) を用いると

$$f_j f_i' \Big|_0^a - \int_0^a f_j' f_i' dx = - \int_0^a f_j' f_i' dx$$

を得る。したがって上式からは

$$- \int_0^a f_j' f_i' dx = \frac{1}{k} \lambda_i \int_0^a f_j f_i dx$$

という関係が成立する。同様に、 j 番目の固有値問題の式に $f_i(x)$ を乗じて同じ積分をすると

$$- \int_0^a f_i' f_j' dx = \frac{1}{k} \lambda_j \int_0^a f_i f_j dx$$

を得る。この 2 式を辺々引き算すれば

$$0 = \frac{1}{k} (\lambda_i - \lambda_j) \int_0^a f_i f_j dx$$

となるが、式 (J.23b) から二つの固有値は異なり $\lambda_i \neq \lambda_j$ ($i \neq j$) なので

$$\int_0^a f_i(x) f_j(x) dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle f_i, f_j \rangle = 0 \quad i \neq j \tag{J.24}$$

が成立する。この式の左辺は二つの関数の「内積」と呼ばれる。そしてその内積が零になるので、固有関数同士はお互いに直交していると呼び、式 (J.24) が直交性の定義である。

J.2.3 固有関数を用いた解

第J.1節のODEと同じように、偏微分方程式(PDE)の解も次のような級数解で求めてみよう。

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) f_i(x) \quad (\text{J.25})$$

この式(J.25)を式(J.15)に代入すると

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{c}_i(t) f_i(x) = k \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) f_i''(x)$$

を得るが、右辺に式(J.19)の係数を用いると

$$k \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) \frac{1}{k} \lambda_i f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) \lambda_i f_i(x)$$

となる。したがって未知関数 $c_i(t)$ について解くべき上式は

$$\sum_{i=1}^{\infty} \dot{c}_i(t) f_i(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i(t) \lambda_i f_i(x)$$

となる。ここで辺々固有関数 $f_n(x)$ との内積をとり、直交条件式(J.24)を用いれば n 番目の項だけが抽出できて

$$\dot{c}_n(t) \langle f_n, f_n \rangle = \lambda_n c_n(t) \langle f_n, f_n \rangle \quad \rightarrow \quad \dot{c}_n(t) = \lambda_n c_n(t)$$

を得る。したがって $c_n(t)$ の一般解が

$$c_n(t) = A_n \exp(\lambda_n t) \quad (\text{J.26})$$

と求められるので、 $u(x, t)$ の一般解が

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left(-k \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \quad (\text{J.27})$$

となる。ここでは式(J.23b)の λ_i を代入した。あとは初期条件から A_n を求めればよい。

式(J.27)を初期条件式(J.11)に代入すると

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n f_n(x) = u_0(x)$$

を得るので、再度固有関数 $f_i(x)$ との内積をとって直交性を利用すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^a f_i f_n dx = \int_0^a f_i u_0 dx \quad \rightarrow \quad A_i \langle f_i, f_i \rangle = \langle f_i, u_0 \rangle \quad \rightarrow \quad A_i = \frac{\langle f_i, u_0 \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle}$$

と求められる。したがって最終的な解が級数表示で

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f_n, u_0 \rangle}{\langle f_n, f_n \rangle} \exp\left(-k \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \quad (\text{J.28})$$

のように求められる。ここの二つの内積の陽な形は

$$\langle f_n, u_0 \rangle = \int_0^a u_0(x) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) dx, \quad \langle f_n, f_n \rangle = \int_0^a \cos^2\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) dx = \frac{a}{2} \quad (\text{J.29a, b})$$

である。結局、解は次式のように求められる。

$$u(x, t) = \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_0^a u_0(\eta) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi \eta}{2a}\right) d\eta \right) \exp\left(-k \left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right) \quad (\text{J.30})$$

この解が時間と共に零に収束しないとはいえないことは容易に推測できる。というのも、外部からの入熱は無く、左端は断熱され右端は0度を維持するからだ。確かに式(J.30)の指数関数の中の係数は負になっている。

初期条件が同様 $u_0(x) = u_0 = \text{const.}$ の場合は

$$\langle f_n, u_0 \rangle = u_0 \int_0^a \cos\left(\frac{(2n-1)\pi\eta}{2a}\right) d\eta = \frac{2au_0(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi}$$

となるので、解は次式になる。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4u_0(-1)^{n+1}}{(2n-1)\pi} \exp\left(-k\left(\frac{(2n-1)\pi}{2a}\right)^2 t\right) \cos\left(\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\right)$$

級数で 40 項を用いた場合の結果を図 J.1 に示した。有限個の項しか使ってないので、特に初期に近い $k t/a^2 = 0$ や 0.0001 のときの結果はあまりよくない。ただし右端 $x = a$ の温度は零のままだし、左端 $x = 0$ の温度勾配も零のままになっていて断熱条件をきちんと満足している。

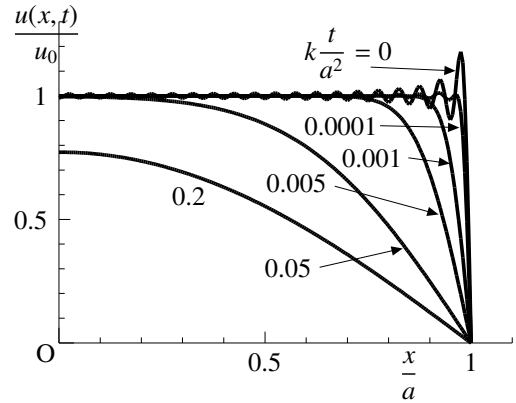


図 J.1 熱問題の例

J.2.4 非零の境界条件

熱伝導方程式は斉次の

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{J.31})$$

のままだが、境界条件が零ではない

$$u(0, t) = T_L, \quad u(a, t) = T_R \quad (\text{J.32a, b})$$

の場合を解いておこう。ここに T_L と T_R は与えられた温度だ。初期条件は式 (J.11) と同じとする。

固有値問題を定式化するに当たって、境界条件を零にするために関数を変換して

$$v(x, t) \equiv u(x, t) - \left\{ T_L + (T_R - T_L) \frac{x}{a} \right\} \quad (\text{J.33})$$

と置くと、 $v(x, t)$ に対する境界条件は

$$v(0, t) = u(0, t) - T_L = 0, \quad v(a, t) = u(a, t) - T_R = 0 \quad (\text{J.34a, b})$$

のように零境界条件になる。また $\left\{ T_L + (T_R - T_L) \frac{x}{a} \right\}$ という項は一定なので v と u の熱伝導方程式は同じく次式になる。

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} \quad (\text{J.35})$$

ただし初期条件はその項の分だけずらして次式で与えられる。

$$v(x, 0) = \hat{f}(x), \quad \hat{f}(x) \equiv f(x) - \left\{ T_L + (T_R - T_L) \frac{x}{a} \right\} \quad (\text{J.36a, b})$$

関数 $v(x, t)$ の問題は境界条件以外は前節の問題と同じだ。対応する固有関数を $v_n(x)$ とすると

$$v_n(x) = A_n \sin \xi_n x + B_n \cos \xi_n x, \quad \xi_n \equiv \sqrt{-\lambda_n/k}$$

である。境界条件式 (J.34) に代入すると $B_n = 0$ と $A_n \sin \xi_n a = 0$ を得る。第 2 式から意味のある固有関数が存在するためには

$$\sin \xi_n a = 0$$

でなければならないので

$$\xi_n a = n\pi \quad \rightarrow \quad \xi_n = \frac{n\pi}{a}$$

を得る。したがって次のように固有関数と固有値を得る。

$$v_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right), \quad \lambda_n = -k\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 \tag{J.37a, b}$$

境界条件によって固有関数と固有値が違ってくるところを実感して欲しい。したがって v の初期条件を考慮して解 $v(x, t)$ を求めると、最終的な解 $u(x, t)$ が次のように求められる。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle \hat{f}(\xi), v_n(\xi) \rangle}{\langle v_n(\eta), v_n(\eta) \rangle} \exp(\lambda_n t) v_n(x) + \left\{ T_L + (T_R - T_L) \frac{x}{a} \right\} \tag{J.38}$$

J.2.5 非斉次問題

最終的に非斉次の一般的な問題は

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + F(x)$$

と非零境界条件で与えられる。解法については波動方程式の節で説明する。

演習問題 J-1

1. 次の熱伝導方程式を与えた境界条件の下で解け。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad (0 < x < 1, 0 < t) \quad u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0$$

ただし初期条件は

$$u(x, 0) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1/2 \\ +1, & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

とし、 $t = 0, 0.0005, 0.0025, 0.01, 0.06$ の解を図示せよ。このノートの結果を公式として用いるのではなく、各自基礎式から始めて級数解を求めよ。

2. $0 < x < 1, 0 < t$ で次の問題を解け。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \cos x$$

初期条件と境界条件は $u(0, t) = 2, u(1, t) = 3, u(x, 0) = 5$ とし、 $t = 0, 0.0005, 0.0025, 0.01, 0.06$ の解を図示せよ。

3. $0 < x < 1, 0 < t$ で次の問題を解け。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad u(x, 0) = \cos 7\pi x$$

J.3 1次元波動方程式 — 双曲型偏微分方程式

J.3.1 波動方程式

弦の振動は波動方程式でモデル化される。1次元の波動方程式は

$$\ddot{u}(x, t) = c^2 u''(x, t) + g(x, t) \tag{J.39}$$

となる。ここには $u(x, t)$ は横変位で、 c は位相速度だ。また $g(x, t)$ は単位長さ当たりの分布外力である。弦の振動の場合は T を弦の張力として m を単位長さ当たりの質量とすると

$$c = \sqrt{\frac{T}{m}}$$

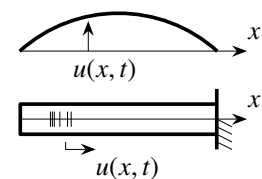


図 J.2 波動方程式の例

で定義される。熱伝導方程式とは異なり時間 t について 2 階の微分方程式なので、二つの初期条件が必要だ。通常それは次式のように初期の変位（形状）と速度で与えられる。

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = v_0(x) \quad (\text{J.40a, b})$$

図 J.2 の上図の長さ a の弦の境界条件の場合は

$$u(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0 \quad (\text{J.41a, b})$$

で与えられ、同じ図 J.2 の下図のような棒の場合は

$$u'(0, t) = 0, \quad u(a, t) = 0 \quad (\text{J.42a, b})$$

で与えられる。以下しばらくは

$$t := ct \quad (\text{J.43})$$

と再定義（無次元化）しておく、波動方程式は次式で表される。

$$\ddot{u}(x, t) = u''(x, t) + g(x, t) \quad (\text{J.44})$$

J.3.2 固有値問題

まずは固有値問題を定式化しなければならない。分布外力が無く $g(x, t) \equiv 0$ の場合、対応する固有値問題は

$$f_n''(x) = \lambda_n f_n(x)$$

と次の境界条件で与えられることは前節からの類推で理解できると思う。

$$f_n(0) = 0, \quad f_n(a) = 0$$

この場合も $\lambda_n < 0$ の場合にのみ意味のある固有関数が存在し

$$f_n(x) = A_n \sin \xi_n x + B_n \cos \xi_n x, \quad \xi_n \equiv \sqrt{-\lambda_n}$$

となる。この一般解を境界条件に代入すれば $B_n = 0$ と $A_n \sin \xi_n a = 0$ を得るので、ここでも第 2 式から意味のある解が存在するためには

$$\sin \xi_n a = 0 \quad \rightarrow \quad \xi_n a = n\pi \quad \rightarrow \quad \xi_n = \frac{n\pi}{a}, \quad \lambda_n = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2, \quad f_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

でないといけないことがわかり、非零の固有関数が求められる。

J.3.3 齊次問題

弦の振動解を固有関数の級数解で仮定しよう。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \quad (\text{J.45})$$

これを分布外力の無い波動方程式 (J.44) に代入すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{c}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

となるので、 $\sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right)$ を乗じて 0 から a まで積分し、式 (J.24) の直交性を利用すれば

$$\ddot{c}_j(t) = -\left(\frac{j\pi}{a}\right)^2 c_j(t)$$

を得る。この ODE の一般解は

$$c_j(t) = A_j \sin\left(\frac{j\pi t}{a}\right) + B_j \cos\left(\frac{j\pi t}{a}\right)$$

なので、式 (J.43) の置き換えを元に戻して次式を得る。

$$c_j(t) = A_j \sin\left(\frac{j\pi ct}{a}\right) + B_j \cos\left(\frac{j\pi ct}{a}\right)$$

したがって弦の変位が次のように求められる。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left\{ A_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) \right\} \tag{J.46}$$

最後に式 (J.46) を初期条件式 (J.40) に代入して

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{a}\right) A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = v_0(x)$$

となるので、ここでも $f_j(x)$ と内積をとって直交性を利用すれば

$$B_j \langle f_j(x), f_j(x) \rangle = \langle u_0(x), f_j(x) \rangle, \quad \left(\frac{j\pi c}{a}\right) A_j \langle f_j(x), f_j(x) \rangle = \langle v_0(x), f_j(x) \rangle$$

を得るので、次のように積分定数が求められる。

$$A_j = \frac{a}{j\pi c} \frac{\langle v_0(x), f_j(x) \rangle}{\langle f_j(x), f_j(x) \rangle} = \frac{2}{j\pi c} \int_0^a v_0(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right) dx, \quad B_j = \frac{\langle u_0(x), f_j(x) \rangle}{\langle f_j(x), f_j(x) \rangle} = \frac{2}{a} \int_0^a u_0(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right) dx$$

例： 境界条件が次式で与えられる場合を解こう。

$$u_0(x) = \begin{cases} u_0 \frac{2x}{a} & 0 < x < \frac{a}{2} \\ u_0 \left(2 - \frac{2x}{a}\right) & \frac{a}{2} < x < a \end{cases}, \quad v_0 = 0$$

各自解いて欲しいが、その解は

$$\frac{u(x, t)}{u_0} = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\pi/2}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right)$$

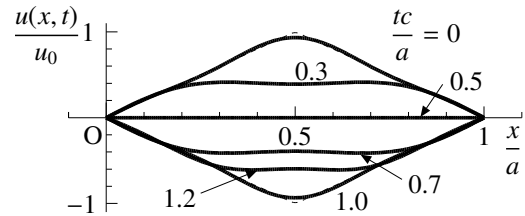


図 J.3 例

となる。図 J.3 の実線が級数の 5 項を用いた結果で、破線が 40 項を用いたものだ。もちろん正解は区分的な直線なのだが、たった 5 項の場合でもかなりいい精度を示しているのは興味深い。

J.3.4 非斉次問題

分布外力が存在し $g(x, t) \neq 0$ の場合を解こう。式 (J.45) を波動方程式 (J.39) に代入すれば

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ddot{c}_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = -\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi c}{a}\right)^2 c_n(t) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) + g(x, t)$$

となるので、 $\sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right)$ を乗じて 0 から a まで積分して直交性を利用すれば

$$\ddot{c}_j(t) \langle f_j(x), f_j(x) \rangle = -\left(\frac{j\pi c}{a}\right)^2 c_j(t) \langle f_j(x), f_j(x) \rangle + \langle g(x, t), f_j(x) \rangle$$

を得る。ここで $\langle f_j(x), f_j(x) \rangle = a/2$ なので次式になる。

$$\ddot{c}_j(t) = -\left(\frac{j\pi c}{a}\right)^2 c_j(t) + \bar{g}_j(t), \quad \bar{g}_j(t) \equiv \frac{2}{a} \int_0^a g(x, t) \sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right) dx$$

ここで $p_j(t)$ で特解を表すと、一般解は

$$c_j(t) = A_j \sin\left(\frac{j\pi ct}{a}\right) + B_j \cos\left(\frac{j\pi ct}{a}\right) + p_j(t)$$

である。したがって $u(x, t)$ の一般解は次のようになる。

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \left\{ A_n \sin\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) + B_n \cos\left(\frac{n\pi ct}{a}\right) + p_n(t) \right\} \quad (\text{J.47})$$

最後に式 (J.47) を初期条件式 (J.40) に代入すれば

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} (B_n + p_n(0)) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = u_0(x), \quad \dot{u}(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \left(\frac{n\pi c}{a}\right) A_n + \dot{p}_n(0) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) = v_0(x)$$

となるので、ここでも $f_j(x)$ との内積をとって直交性を利用すれば

$$(B_j + p_j(0)) \langle f_j(x), f_j(x) \rangle = \langle u_0(x), f_j(x) \rangle, \quad \left\{ \left(\frac{j\pi c}{a}\right) A_j + \dot{p}_j(0) \right\} \langle f_j(x), f_j(x) \rangle = \langle v_0(x), f_j(x) \rangle$$

を得る。したがって積分定数が次式のように求められる。

$$A_j = \frac{a}{j\pi c} \left\{ \frac{2}{a} \int_0^a v_0(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right) dx - \dot{p}_j(0) \right\}, \quad B_j = \frac{2}{a} \int_0^a u_0(x) \sin\left(\frac{j\pi x}{a}\right) dx - p_j(0)$$

演習問題 J-2

4. 次の波動問題を解け。

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + x(1-x), \quad 0 < x < 1, 0 < t$$

ただし、境界条件を $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0$ とし、初期条件を $u(x, 0) = \sin x, \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \cos x$ とする。

J.4 直角座標系のポテンシャル方程式 — 楕円型偏微分方程式

2次元あるいは3次元の熱伝導方程式と波動方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial y^2} \left(+ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial z^2} \right) + g(x, y, z), \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial y^2} \left(+ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial z^2} \right) + g(x, y, z)$$

これが定常状態の場合には、次式のようにラプラシアン作用素で支配方程式は表される。

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial y^2} \left(+ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial z^2} \right) + g(x, y, z) = 0 \quad (\text{J.48})$$

これはポテンシャル方程式と呼ばれる。これも固有値問題を介して解いてみよう。

例として $0 < x < a, 0 < y < b$ の2次元領域を対象とし、境界条件を次式で与える。

$$u(0, y) = A(y), \quad u(a, y) = B(y), \quad u(x, 0) = C(x), \quad u(x, b) = D(x) \quad (\text{J.49a, b, c, d})$$

このままでは零境界条件が無いので固有値問題の定式化ができない。そこで、どこかに零境界条件が適切に含まれるようにこの問題を三つの別々の問題に分解しておこう。

$$u(x, y) = u_1(x, y) + u_2(x, y) + u_3(x, y)$$

としたとき, u_1 と u_2 は式 (J.48) で $g(x, y) \equiv 0$ とした場合の解で, u_3 は $g(x, y)$ を考慮した特解とする。そして $u_1(x, y)$ は

$$\frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

を満足して境界条件が

$$u_1(0, y) = A(y), \quad u_1(a, y) = B(y), \quad u_1(x, 0) = 0, \quad u_1(x, b) = 0$$

で与えられるものとし, これに対し $u_2(x, y)$ は

$$\frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

と境界条件

$$u_2(0, y) = 0, \quad u_2(a, y) = 0, \quad u_2(x, 0) = C(x), \quad u_2(x, b) = D(x)$$

を満たすものとする。最後に $u_3(x, y)$ は

$$\frac{\partial^2 u_3(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_3(x, y)}{\partial y^2} + g(x, y) = 0$$

と次式の零境界条件を満足するものとする。

$$u_3(0, y) = 0, \quad u_3(a, y) = 0, \quad u_3(x, 0) = 0, \quad u_3(x, b) = 0$$

$u_2(x, y)$ の問題を変数分離法で解こう。そのために $u_2(x, y) = X(x)Y(y)$ と置くと, ポテンシャル方程式は

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} = -\mu^2$$

と分解できる。プライムはそれぞれの引数に関する微分を表す。こうすると $X(x)$ に対する境界条件だけが零境界条件になる。解くべき問題は

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \quad \text{with } X(0) = 0, \quad X(a) = 0$$

のような固有値問題にできて, 固有値と固有関数が

$$\mu_n = \left(\frac{n\pi}{a}\right), \quad X_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

と求められる。 μ_n が求められたので, $Y(y)$ の問題も解けて一般解が

$$Y(y) = c_n \exp\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + d_n \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right)$$

となるから, $u_2(x, y)$ の一般解が級数解で次のように表される。

$$u_2(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ c_n \exp\left(\frac{n\pi y}{a}\right) + d_n \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right) \right\} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

最終的にはまだ使っていない境界条件から積分定数 c_n と d_n が求められるが, その際必要になるのが固有関数の直交性だ。各自解いてみて欲しい。 $u_1(x, y)$ の問題も同様に解くことができる。

最後に $u_3(x, y)$ の問題の固有値問題は, 周囲の零境界条件の下の

$$\frac{\partial^2 f_3(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_3(x, y)}{\partial y^2} = \lambda f_3(x, y)$$

で定式化できるので、一般解が

$$u_3(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} c_{nm} \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right), \quad \lambda_{nm} = -\left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$$

と求められる。これを $u_3(x, y)$ のポテンシャル方程式に代入して固有関数の直交性を利用すれば、積分定数 c_{nm} が次のように求められる。

$$c_{nm} = \frac{G_{nm}}{\lambda_{nm}}, \quad G_{nm} \equiv \int_0^a \int_0^b g(x, y) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{m\pi y}{b}\right) dx dy$$

ここには方針を書いただけなので、各自実際に手を動かして欲しい。

演習問題 J-3

5. 次のポテンシャル問題を解け。

$$\frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = F(x, y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x}(a, y) = 0, \quad u(x, 0) = C(x), \quad u(x, b) = D(x).$$

J.5 円盤上の熱伝導方程式

J.5.1 極座標系の熱伝導方程式

極座標系のラプラシアンを数学の教科書からコピーすれば、極座標系の熱伝導方程式は

$$\frac{\partial^2 u(r, \theta, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \theta, t)}{\partial \theta^2} + g(r, \theta, t) = \frac{\partial u(r, \theta, t)}{\partial t}, \quad 0 < r < R_0, \quad 0 < \theta < 2\pi, \quad 0 < t \quad (\text{J.50})$$

となる。第 D.6 節参照。以下簡単のために $k = 1$ と（無次元化）する。初期条件は

$$u(r, \theta, 0) = u_0(r, \theta) \quad (\text{J.51})$$

で与えられ、境界条件は

$$|u(0, \theta, t)| < \infty, \quad u(R_0, \theta, t) = 0 \quad (\text{J.52a, b})$$

で与えられる。第 1 式は円盤中央で変なことが起きない条件だ。さらに実は θ 方向の連続性も与える必要があり、例えば次式で与えられる。

$$u(r, 0, t) = u(r, 2\pi, t) \quad (\text{J.53})$$

J.5.2 円盤上の固有値問題

対応する固有値問題は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 v(r, \theta)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v(r, \theta)}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v(r, \theta)}{\partial \theta^2} = \lambda v(r, \theta) \quad (\text{J.54})$$

ここでも変数分離法を用いるために

$$v(r, \theta) = R(r) \Theta(\theta) \quad (\text{J.55})$$

と置くと、式 (J.54) は次のように分解される。

$$\frac{r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} - \lambda r^2 R}{R} = -\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} \text{ must be } = \mu \text{ (const.)}$$

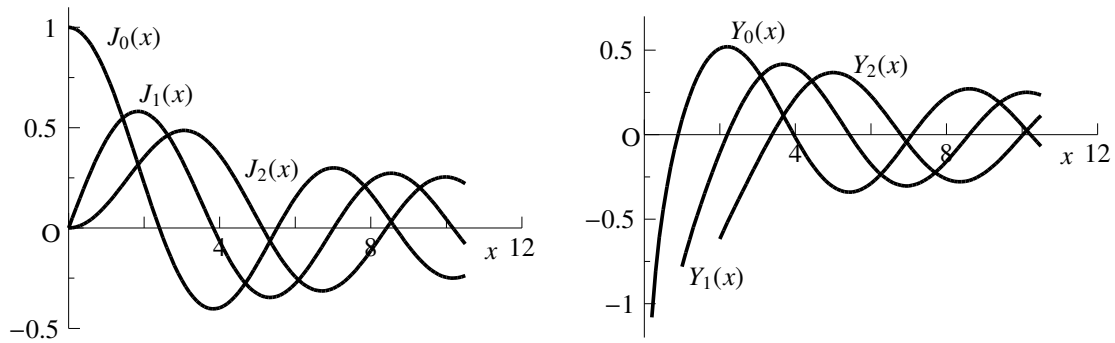


図 J.4 Bessel 関数

したがって、まず $\Theta(\theta)$ については

$$\frac{d^2\Theta}{d\theta^2} + \mu\Theta = 0$$

となるが、連続条件式 (J.53) からは解が 2π 周期でないといけないから

$$\mu = n^2, \quad \Theta(\theta) \sim \sin n\theta \quad \cos n\theta \tag{J.56a, b}$$

と求められる。ここに n は 0 を含む非零の整数だ。

一方、 $R(r)$ についての方程式は

$$r^2 R'' + rR' - (n^2 + \lambda r^2)R = 0 \tag{J.57}$$

となる。プライムは r に関する微分だ。境界条件も

$$R(R_0) = 0, \quad |R(0)| < \infty \tag{J.58a, b}$$

となる。実は $\lambda < 0$ でないといけないことも証明できるので $\lambda = -\beta^2$ と置けば

$$r^2 R'' + rR' + (\beta^2 r^2 - n^2)R = 0 \tag{J.59}$$

となるが、これは第 n 次の Bessel 方程式と呼ばれる。Bessel 方程式の解は Bessel 関数と呼ばれ、形式的に

$$R(r) = J_n(\beta r) \quad \text{および} \quad Y_n(\beta r) \tag{J.60a, b}$$

と書かれる。 $J_n(\beta r)$ は n 次の第 1 種 Bessel 関数で、 $Y_n(\beta r)$ は n 次の第 2 種 Bessel 関数だ。図 J.4 にその特徴を示した。

式 (J.58b) のように $r = 0$ で解は有界でないといけなかった
ので、図からも明らかなように $Y_n(\beta r)$ の方は解の候補にはならない。
したがって $R(r) = J_n(\beta r)$ と求められるので、これを境界条件
式 (J.58a) に代入すれば

$$R(R_0) = J_n(\beta R_0) = 0 \tag{J.61}$$

でないといけない。図 J.4 と表 J.1 を用いると、例えば J_0 に対して
は β に順に添え字を二つ付けて

$$\beta R_0 \approx 2.40 \rightarrow \beta_{01} \equiv \frac{2.40}{R_0}, \quad \beta R_0 \approx 5.52 \rightarrow \beta_{02} \equiv \frac{5.52}{R_0}, \quad \beta R_0 \approx 8.65 \rightarrow \beta_{03} \equiv \frac{8.65}{R_0} \dots$$

となり、 J_1 に対しては

$$\beta R_0 \approx 3.83 \rightarrow \beta_{11} \equiv \frac{3.83}{R_0}, \quad \beta R_0 \approx 7.02 \rightarrow \beta_{12} \equiv \frac{7.02}{R_0}, \quad \beta R_0 \approx 10.2 \rightarrow \beta_{13} \equiv \frac{10.2}{R_0} \dots$$

表 J.1 第 1 種の Bessel 関数の零点

m	1	2	3	...
$n = 0 (J_0)$	2.40	5.52	8.65	...
$n = 1 (J_1)$	3.83	7.02	10.2	...
$n = 2 (J_2)$	5.14	8.42	11.6	...
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots

等となることから、無限個の β_{nm} を求めることができる。したがって固有関数は

$$v(r, \theta) \sim J_n(\beta_{nm}r) (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta)$$

と求められる。ここに $n = 0, 1, \dots$ であり、 $m = 1, 2, \dots$ である。

J.5.3 固有関数を用いた解

最終的に級数解が

$$u(r, \theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \{A_{nm}(t) J_n(\beta_{nm}r) \cos n\theta + B_{nm}(t) J_n(\beta_{nm}r) \sin n\theta\} \quad (\text{J.62})$$

と求められる。前節までの結論から、sine 関数と cosine 関数は

$$\langle f_i, f_j \rangle_{\theta} \equiv \int_0^{2\pi} f_i(\theta) f_j(\theta) d\theta$$

で定義される内積によって直交性を有していることを知っている。さらに Bessel 関数も次式で定義される内積による直交性を有していることを証明することはできる。

$$\langle J_n(\beta_{ni}r), J_n(\beta_{nj}r) \rangle_r \equiv \int_0^{R_0} r J_n(\beta_{ni}r) J_n(\beta_{nj}r) dr \quad (\text{J.63})$$

この直交性を利用すれば、積分定数 A と B を初期条件から求めることができる。次節にヒントを書いているので、各自実際に計算してみたい。

J.5.4 軸対称問題

軸対称の場合の熱伝導方程式は

$$\frac{\partial^2 u(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r, t)}{\partial r} + g(r) = \frac{\partial u(r, t)}{\partial t}, \quad r < R_0, \quad 0 < t \quad (\text{J.64})$$

となる。つまり $n = 0$ の項だけが対象となる。初期条件は次式になる。

$$u(r, 0) = u_0(r) \quad (\text{J.65})$$

したがって固有関数を用いた級数解は

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_{0m}(t) J_0(\beta_{0m}r) \quad (\text{J.66})$$

と置くことができる。熱伝導方程式は式 (J.54) から

$$\frac{\partial^2 J_0}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial J_0}{\partial r} = \lambda J_0 = -\beta_{0m}^2 J_0$$

となるので、上式 (J.66) を式 (J.64) に代入して

$$-\sum_{m=1}^{\infty} A_{0m}(t) \beta_{0m}^2 J_0(\beta_{0m}r) + g(r) = \sum_{m=1}^{\infty} \dot{A}_{0m}(t) J_0(\beta_{0m}r)$$

を得るが、上式の関係を用いるとこれは次式のように書き直される。

$$\sum_{m=1}^{\infty} \{ \dot{A}_{0m}(t) + \beta_{0m}^2 A_{0m}(t) \} J_0(\beta_{0m}r) - g(r) = 0$$

式 (J.63) を参考にして次のような作用を方程式にすると

$$\int_0^{R_0} J_0(\beta_{0j}r) r dr \times$$

直交性を利用して A_{0j} に対する式が

$$\dot{A}_{0j}(t) + \beta_{0j}^2 A_{0j}(t) = \bar{G}_j, \quad \bar{G}_j \equiv \frac{\langle g(r), J_0(\beta_{0j}r) \rangle_r}{\langle J_0(\beta_{0j}r), J_0(\beta_{0j}r) \rangle_r} = \frac{\int_0^{R_0} g(r) J_0(\beta_{0j}r) r dr}{\int_0^{R_0} \{J_0(\beta_{0j}r)\}^2 r dr}$$

のように求められる。したがって一般解が

$$A_{0j}(t) = c_j \exp(-\beta_{0j}^2 t) + \frac{\bar{G}_j}{\beta_{0j}^2} \quad (\text{J.67})$$

となるので、元の問題の解も式 (J.66) に代入して

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ c_m \exp(-\beta_{0m}^2 t) + \frac{\bar{G}_m}{\beta_{0m}^2} \right\} J_0(\beta_{0m}r)$$

と求められる。この解を初期条件式 (J.65) に代入して得られる

$$u(r, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ c_m + \frac{\bar{G}_m}{\beta_{0m}^2} \right\} J_0(\beta_{0m}r) = u_0(r)$$

に対して次のような作用をすると

$$\int_0^{R_0} J_0(\beta_{0j}r) r dr \times$$

再度 Bessel 関数の直交性が利用できて、結局

$$c_j + \frac{\bar{G}_j}{\beta_{0j}^2} = \bar{U}_j \equiv \frac{\int_0^{R_0} u_0(r) J_0(\beta_{0j}r) r dr}{\int_0^{R_0} \{J_0(\beta_{0j}r)\}^2 r dr} \quad \rightarrow \quad c_j = \bar{U}_j - \frac{\bar{G}_j}{\beta_{0j}^2}$$

のように求められる。したがって最終的に解が

$$u(r, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left(\bar{U}_m - \frac{\bar{G}_m}{\beta_{0m}^2} \right) \exp(-\beta_{0m}^2 t) + \frac{\bar{G}_m}{\beta_{0m}^2} \right\} J_0(\beta_{0m}r) \quad (\text{J.68})$$

のように求められる。時間 t を ∞ にしてみると解は

$$u(r, t) \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\bar{G}_m}{\beta_{0m}^2} J_0(\beta_{0m}r)$$

となり、これは次のポテンシャル方程式の解だ。

$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du(r)}{dr} + g(r) = 0 \quad (\text{J.69})$$

この章は Northwestern 大学の Mahar 先生 (1980 年頃当時) のわかり易い講義 'Fourier Series and Boundary Value Problems' の講義ノートに参考にした。板書の補助 (予習用といった) 資料なので後半は特に端折っている。具体的な式誘導等については教科書 [77] も参照¹ のこと。

¹ 東北大学図書館の工学分館には所蔵されている。

交代定理

まず、2階の微分方程式で与えられる境界値問題と積分方程式で与えられる問題についての‘Alternative Theorem’を、Northwestern大学のOlmstead先生(1980年頃当時)の‘Differential Equations of Mathematical Physics’の講義ノートから引用したものに加筆し、線形代数についての定理を真似てみる。

微分方程式について・・・

Consider a boundary value problem with the 2nd linear differential equation

$$Lu(x) = f(x), \quad a < x < b, \quad B_1(u) = \alpha, \quad B_2(u) = \beta, \quad (1)$$

where

$$L \equiv a_0 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_2, \quad a_0 \neq 0,$$

and $f(x)$ is a locally integrable function. By the definition of a linear functional as

$$\langle g, h \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} g(x) h(x) dx,$$

the formal adjoint operator L^* and the corresponding boundary operators B^* can be defined by

$$\langle Lg, h \rangle = \langle g, L^*h \rangle.$$

Then the auxiliary problems are defined as follows:

$$Lu_H(x) = 0, \quad B_1(u_H) = 0, \quad B_2(u_H) = 0, \quad (2)$$

$$L^*u_H^*(x) = 0, \quad B_1^*(u_H^*) = 0, \quad B_2^*(u_H^*) = 0, \quad (3)$$

$$LG(x|\xi) = \delta(x - \xi), \quad a < \xi < b, \quad B_1(G) = 0, \quad B_2(G) = 0, \quad (4)$$

where $\delta(x - \xi)$ is the Dirac delta function.

Theorem: If $u_H(x) = 0$ is the only solution of (2), then $u_H^*(x) = 0$ is the only solution of (3), and (1) and (4) have a unique solution respectively. Alternatively, if (2) has a non-trivial solution(s), then (3) also will have a non-trivial solution(s), and (4) has no solution. Then (1) can have a solution (non-unique) if and only if

$$\int_a^b f(x) u_H^*(x) dx = 0$$

for each $u_H^*(x)$ satisfying (3).

積分方程式について・・・

Consider the problem with the integral equation

$$\int_a^b k(x, \xi) u(\xi) d\xi - \lambda u(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (1)$$

where $k(x, \xi)$ and $f(x)$ are known functions. Then the auxiliary problems are defined as follows:

$$\int_a^b k(x, \xi) u_H(\xi) d\xi - \lambda u_H(x) = 0, \quad (2)$$

$$\int_a^b k(\xi, x) u_H^*(\xi) d\xi - \lambda u_H^*(x) = 0, \quad (3)$$

where $\int_a^b d\xi k(\xi, x)$ is the adjoint integral operator of the integral operator $\int_a^b d\xi k(x, \xi)$.

Theorem: If $u_H(x) = 0$ is the only solution of (2) for a given value of λ , then $u_H^*(x) = 0$ is the only solution of (3), and, for sufficiently smooth $k(x, \xi)$, (1) has a solution and it is unique. Alternatively, if (2) has a non-trivial solution, then (3) has a non-trivial solution, and (1) has a solution (non-unique) if and only if

$$\int_a^b f(x) u_H^*(x) dx = 0$$

for each $u_H^*(x)$ satisfying (3).

連立方程式について . . .

Consider a linear equation

$$A u = f, \tag{1}$$

where A is the $n \times n$ matrix, and u and f are $n \times 1$ vectors. Then the auxiliary problems are defined as follows:

$$A u_H = 0, \tag{2}$$

$$A^* u_H^* = 0, \tag{3}$$

where A^* is the adjoint (transposed) matrix of A .

Theorem: If $u_H = 0$ is the only solution of (2), then $u_H^* = 0$ is the only solution of (3), and (1) has a solution and it is unique. Alternatively, if (2) has a non-trivial solution(s), then (3) has a non-trivial solution(s), and (1) can have a solution (non-unique) if and only if

$$(f, u_H^*) = 0$$

for each u_H^* satisfying (3).

‘Caucasian:’ 秋田の内陸部には驚くほど色白の女性がいる。いわゆる秋田美人という人達のことだろうか。これは「白人」との関わりによるものだという説がある。北国だけに、樺太と北海道を通過してそれこそコーカサス地方から来たらしいというのだ。その説では同時に、秋田犬にヨーロッパ犬との関係が見つかるというが、元々犬そのものがあちらから連れてきた動物だろうから、信憑性は定かではない。が、常陸の国から佐竹氏が美人を連れて行ったから水戸には云々という説よりも、科学の匂いがして面白い。



写真 J.1 錦帯橋 岩国（アーチじゃないよ p.8 脚注参照）



‘rafel:’「ラーフル」というものをご存知だろうか。黒板消し²のことを鹿児島ではこう呼ぶ。そして鹿児島人は、それが県外では通じないことを知らない。ページ <http://www.osumi.or.jp/sakata/hougen/raful.htm> には詳細な調査結果が出ていて面白い。多分元はオランダ語というのが正しそうだ。こういった文化は全国各地にあって面白い。鹿児島の場合「茶碗蒸しの歌」を歌えない鹿児島人はあまりいないだろう。また岐阜の治水（宝暦治水）に命を懸けた平田鞆負³を知らない鹿児島人はいない。前者は誰かに教えられるというわけではないが、後者は小学校で全員が学ぶ（多分）。今でも岐阜県では、鹿児島出身者を大事にしてくれると聞く。学内のある丸秘作業のときの「一地方のみで教えられる歴史というのがあるか否か」という雑談で思い出した。

² さすがに黒板が消えてしまうわけではないのだが。

³ この治水と薩摩義士の伝承については近年、さらなる研究や顕彰運動が行われているらしい [南日本新聞 (2017/5/24)]。

付録 K

橋梁と鋼構造

著者は橋梁工学も鋼構造工学も真剣には勉強しなかった。しかし授業は担当せざるを得ないので、過去の講義ノートを眺めて必要最小限の情報を教えている。卒業生の皆さんにはごめんなさい。したがって、この章の内容については鵜呑みにしないようにして欲しい。間違いがたくさんちりばめられていると思っていただきたい。また、それを逆手に取って、勝手なことをあちこち書いてあるので、それにも十分注意して欲しい。教科書は文献 [168] でいい教科書である。



写真 K.1 Chicago River の可動橋 Michigan Avenue Bridge

K.1 橋梁の形式と種類・構成

K.1.1 橋梁について

(1) 橋のライフタイムや寸法・構成

教科書の第 1.1 節と第 1.2 節を読むこと。現在設計寿命は 100 年で、これを全うするように設計と施工・維持管理をすること、その実現のために新しい橋梁技術や施工技術を開発することとが、技術者の使命である。

(2) 橋の分類と形式

教科書の第 1.3 節と第 1.4 節を読むこと。我が国にはあまり無い（あってもその機能を止めている）橋梁の例として、Chicago の可動橋¹を写真 K.1 に示した。

(3) 橋の材料

鋼：鉄と炭素の合金の多結晶金属材料で、土木分野だけでなくすべての分野の構造材料の大代表である。必要最小限の情報は次節で説明する。

長所：高（引張）強度・軽量（長所としての）・高品質（工場製作が主）・高靱性（エネルギー的に粘り強い）。

¹ 2 階建て（ダブルデッキ）で、1980 年頃は確か土曜日の正午に開いた。奥が Michigan 湖で手前にヨットハーバーがある。Michigan 湖と Chicago 川の水面には差があるため閘門がある。Michigan 湖の水質改善のための有名な土木事業らしい。湖の水位の方が低い。



写真 K.2 羽田空港 D 滑走路ジャケット部の犠牲防食 (J 社の製作ヤードにて)

短所: 比較的剛性が低い (たわみ易い) ・軽量 (短所として揺れ易い) ・薄肉板で断面を構成するため座屈の心配・腐食 (塗装等のメンテナンスが必要だが再生可能) 。

腐食対策の面白い例として、羽田空港の D 滑走路の鋼ジャケット部で使われている犠牲防食を写真 K.2 に示した。アルミニウムとのイオン化傾向差を利用する防食で、アルミニウム²は 30 年で交換し終わるように維持管理するため、「犠牲」の名称が付く。

コンクリート: 土木分野における複合材料の大代表である。橋梁の場合は鉄筋や鋼棒等を併用して³強度や靱性等を上げて用いる。いわゆる鉄筋コンクリート (RC) とプレストレストコンクリート (PC) である。

長所: 圧縮抵抗は大きい・安価・造形が自由・工場製作 (プレキャスト) すれば高品質・橋梁を崩壊させない限りは自由な配合で欲しい材料そのものを設計製造⁴できる。

短所: 現場打ちの品質確保の問題・引張には無抵抗・重い・RC は微視亀裂の存在が前提とした材料なので腐食対応の問題 (塩分等の供給がある場合) ・橋梁の場合は十分な靱性確保のために鋼材が不可欠。

ところで、上述の鋼とコンクリート等の複数の材料を適材適所で用いて、構造全体として抵抗を分担させることを目的とした複合構造というものがある。いわゆるハイブリッド化された構造と呼ばれる。配置のさせ方によって次の 2 種類がある。

合成構造: 橋梁のある断面内に複数の材料を配置してハイブリッド化するもの。ずれ止め等の設置が必要。

混合構造: 橋梁の長手方向に複数の材料を配置してハイブリッド化するもの。これも接合部には工夫が必要。ただし、異なるスパンが異なる材料でできた橋梁は単なる複数の橋梁である。

橋梁における具体例としては、引張に強い鋼と圧縮には強いコンクリートの強度特性を適材適所で利用している。図 K.1 中の S は鋼で C はコンクリート。ところで写真 K.3 は東北中央自動車道の小川橋で、波型鋼板ウェブの PC 箱桁橋⁵という形式の合成構造の一例である。波型鋼板ウェブの導入には、プレストレスを効果的にす

² そのアルミニウムであるが、摩擦攪拌接合が開発された今、後述する FRP 等よりも有望な橋梁材料とも考えられる。

³ 写真 3.5 のように使える繊維補強コンクリートも開発されている。商品名は「延性」の英訳が元だが本当は「靱性」では？

⁴ 鋼の場合は冶金屋さんに依頼が必要だが、お仕着せの鋼を使おうという雰囲気現場にあるのが悔しい。

⁵ あの木曾川大橋や本荘大橋でコンクリート中に埋まった鋼部材が破断したことを思い出すと、この鋼板ウェブがコンクリートの下フランジに上方から埋め込まれていることに違和感を覚えしまう。波型鋼板ウェブそのものの力学的特性はともかく、このような合成の仕方は力学的にはあまり雰囲気がよくないと感じてしまうのだが、どうだろう。

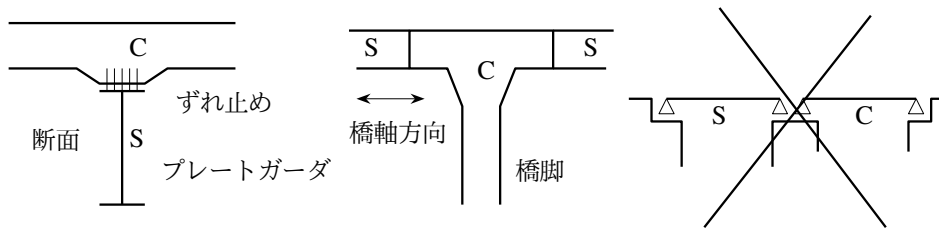


図 K.1 複合構造：左から合成構造・混合構造・ただの複数の橋梁構造



写真 K.3 東北中央自動車道の小川橋



写真 K.4 徳島祖谷の蔓橋

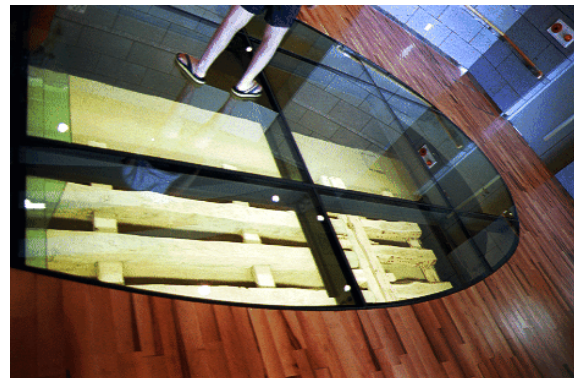


写真 K.5 鹿児島島の西田橋と発掘された木製基礎（石橋公園にて）

るための力学的な根拠があるとされる。なおこの橋梁のウェブは耐候性鋼材（後述する）の裸使用（桁端のみ塗装）である。

木や石：古くて新しい橋梁用天然材料である。どちらも環境や目的の設定の仕方によっては適切な橋梁材料ではある得るが、木橋は腐食の問題等の劣化の問題が考えられ、石はコンクリートと同様の問題がありそうだ。いずれにしても天然材料は品質確保が問題ではある。ところで、写真 K.4⁶のような蔓橋^{かがずら}は現在では造られないが、もしこの状態に近い自然の状況を吊橋のヒントにしたのだとすれば、天然材料や自然の構造や仕組み⁷に目を向けることは非常に重要だと考えるべきである。写真 K.5 には、鹿児島石橋公園に移設後の西田橋と、その移設時に発見された木製基礎との写真を示した。

⁶ 現在は鋼ケーブルに蔓が巻いてある。

⁷ 宇宙構造工学の先生達が蕾の開く状況や蛹の羽化時の羽の展開に注目してアンテナ等の収納方法と構造の参考に行っていることも覚えておいて欲しい。



写真 K.6 FRP 橋梁キット製作例

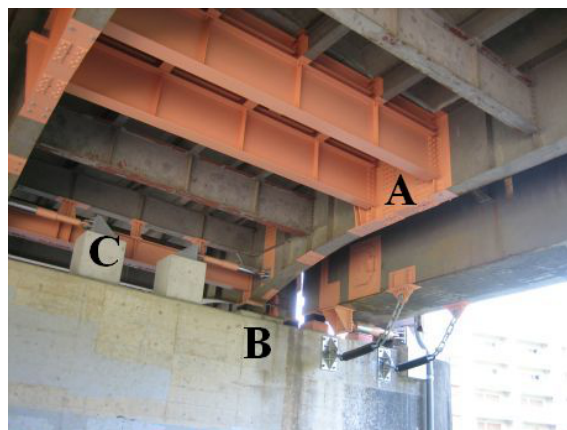


写真 K.7 仙台市の仲の瀬橋旧桁部

FRP: 新しい複合材料⁸で、一般的なものはポリマーにガラス繊維や炭素繊維（比較的高価）を織り込んで補強した複合材料として用いる。軽量なため少人数で短期間で架設できる。指針も揃っており、我が国でも歩道橋は実績があるが、材料そのもの⁹の靱性が低く、紫外線の影響等を受け易いとされる。写真 K.6 には米国で販売されている橋梁キットの例を示した。スパン 20 m 程度で軽自動車くらいは通行可能で、慣れた技術者なら 2 名 2 日で完成する。また、ものづくり大学の学生プロジェクトの FRP トラス橋の例も p.780 に示した。

K.1.2 鋼橋の形式や構成

(1) 桁橋

基本はプレートガーダ橋¹⁰である。主に曲げで抵抗する構造と考えている。ただし、断面が I 形や台形のような開断面はねじりに弱いため、特に架設中の強度や施工法を検討する必要がある。一方、箱断面のような閉断面はねじりにも強く、比較的長スパンの桁橋は箱桁であることが多い。古くは橋脚の不等沈下等に対応させられる特徴を重んじて、静定系の一つとしてのゲルバー形式¹¹が多用されたが、近年ではほとんど用いられない。写真 K.7 は、

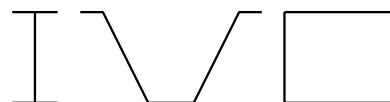


図 K.2 開断面と閉断面

広瀬川に架かる元々はゲルバー桁だった仲の瀬旧桁¹²だが、2009 年頃に掛け違い部 (A) が剛結補強され、(B) ゴム支承や (C) 落橋防止装置等 (C) も付加¹³されていた。耐震性等の観点からは、連続梁のような不静定構造が持つ冗長性は有効だが、設計段階で冗長性を効果的・定量的に考慮しているのかわからない。

(2) トラス橋

それぞれの弦材が主に軸力（単純な圧縮と引張）で抵抗するため、構造力学の授業でも梁よりも先に学ぶ。写真 K.8 はそれほど明確ではないが、引張側の下弦材は圧縮側の上弦材よりも細くなっている。これについて

⁸ 東京工業大学の森勉先生曰く、複合材料は旧約聖書 [128] の「出エジプト記」に既に記述があるから決して新材料ではないよ、と。

⁹ 鋼と同じように、材料を開発するのがメーカー任せになっているような印象を持つのだが。

¹⁰ 英語の 'girder' であり、「ガード下の屋台」と言うときの「ガード」が桁のこと。なお「ガーター」は靴下留めのこと。また飯は金偏である。

¹¹ 写真 K.21 にゲルバーヒンジ部つまり掛け違い部を示した。

¹² 現在の仲の瀬橋は 2 階建ての橋梁になっており、旧橋のプレートガーダのゲルバー桁が下階の橋の半分に流用された。新橋部分は箱桁で長スパン化されている。

¹³ そのあとの 2011 年の東北地方太平洋沖地震で、近くにある同様のゲルバー桁の牛越橋（1953 年竣工で写真 1.1 (a)）が健全なままであったことを踏まえると、仲の瀬橋も現況構造保持のままの補強はできなかったのかと残念である。2 階建てのためのラーメン構造とも組み合わせられているので、冗長性はかなり期待できただろうと思っていたのに。



写真 K.8 仙台市の赤石橋



写真 K.9 福島市の伊達橋

は圧縮強度を学ぶときに思い出して欲しい。プラットトラスとかハウトラスとか多くの形式があるようだが、その力学的特徴については独学してください。

構造力学で格点はヒンジとしてモデル化されていたため、確かに軸力しか生じないように思われるが、実際の格点付近は写真 K.8 でも見えるようにガセットプレート¹⁴を介して接合されていることから、その周辺には曲げ状態も発生し、それに相当する2次応力が生じている。このような小さい応力による疲労等の問題もあるらしい。これに対し福島市の阿武隈川に架かる写真 K.9 (p.7に上部構造)の伊達橋では、格点にはピンが挿入されているから、ほぼ構造力学で学ぶような力学状態になっていることが期待できそうだ。その伊達橋はトラス歩道橋として使われているが、元々は



写真 K.10 三原市の広島空港大橋（広島スカイアーチ）

鉄道橋だったそうで、写真 K.9 に示した横桁は鉄道橋の特徴を明瞭に示している。写真 K.10 は次に説明するアーチ橋であるが、そのアーチリブが補剛されていてトラスになっている。

(3) アーチ橋

アーチは上向きに湾曲させた太い部材で、曲げに比べると大きな軸圧縮力で抵抗する構造である。曲げやせん断が生じないことは無いが、主に軸力で抵抗させようとする構造である。断面力の作用線が断面の核の中を通るような形状、つまり断面内に引張応力が発生しないような形でない

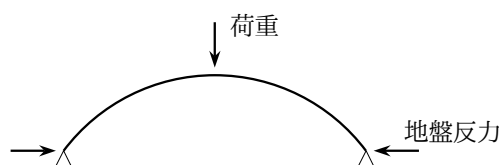


図 K.3 アーチの水平反力

¹⁴ 東北大学の昔の設計製図課題にトラスがあったが、ガセットプレート間隔よりも広い弦材を設計する学生さんが少なからずいて、毎年のように倉西茂先生が嘆いておられた。

と本来はアーチとは呼べず、ただの湾曲した桁あるいはラーメン橋¹⁵になってしまうだろう。最終的には両側の地盤で図 K.3 のように水平反力を受け持つ必要があるため、強固な地盤が立地条件となる。そうでない場合はタイドアーチという選択もある。隅田川の永代橋¹⁶が実はタイドアーチである。また、補剛桁とアーチリブの剛性比によって抵抗の仕方が異なるため、ローゼやランガー等の名称があるが、これもその力学的特徴については独学してください。写真 K.10 はバスケットハンドル型アーチ¹⁷と呼ばれる。

(4) ラーメン橋

ラーメン橋は、柱と梁で組み立てたいわゆる骨組構造の橋梁形式である。したがって、曲げやせん断と軸力がそれぞれ同程度の抵抗をする部材を組み立てた構造になっていると考えればいい。高速道路を Π や Λ の形で跨ぐ橋がほぼそれに相当する。後者はその見た目から「頬杖橋」とも呼ばれるが、広瀬川遊歩道で牛越橋と澗橋のほぼ中間から見える写真 K.11 の西道路非常用道路（元々は工事用道路）橋がその例である。永代橋のすぐ上流右岸の日本橋川に架かる豊海橋はフィレンデール橋と呼ばれるラーメン橋の一つである。



写真 K.11 頬杖橋

(5) 吊構造 — 吊橋と斜張橋・吊床版橋



写真 K.12 明石海峡大橋：1994 年（兵庫県南部地震の半年前）の主ケーブル送り出し状況

吊橋: ケーブルは引張に対する強度が相対的に高いため、長大橋には吊構造が多用される。吊橋の架設は、主塔とアンカーブロックの設置、次に主ケーブルを渡し、ハンガーロープを取り付けたあと、補剛桁をハンガーロープで吊るとするのが標準的な順番である。写真 K.12 がケーブルを送り出している段階を示すが、岸壁に並んでいるものが糸巻き状にケーブルを取めたもので、それをアンカーブロックの後方に設置してケーブルを

¹⁵ 第 1 著者の設計製図の課題は東京大学の岡村甫先生が担当で、なぜか RC アーチを選んだ。浅いアーチを取って目指して構造解析をして提出したとき、これは桁だと叱られた。当然鉄筋量が多く、骨材が鉄筋間を通れないくらいになっているのも怒られた。そんな・・・学生にはわからんよね。しかし教科書も設計マニュアルも無く、平方根の無い電卓しか無いときによく設計できたものだ。若いというのはすばらしいことなんだろう。呵呵。

¹⁶ この橋の場合のタイは鋼板で桁の中に隠れているが、船からは見ることができる。

¹⁷ 見学時は知らなかったが、バスケット（手揚げかご）の取っ手のようだからだそうだ。



写真 K.13 来島海峡大橋のキャットウォークとハンガーロープ取付部（中沢正利先生撮影）



写真 K.14 南備讃瀬戸大橋の坂出側アンカー



写真 K.15 来島海峡大橋の今治側

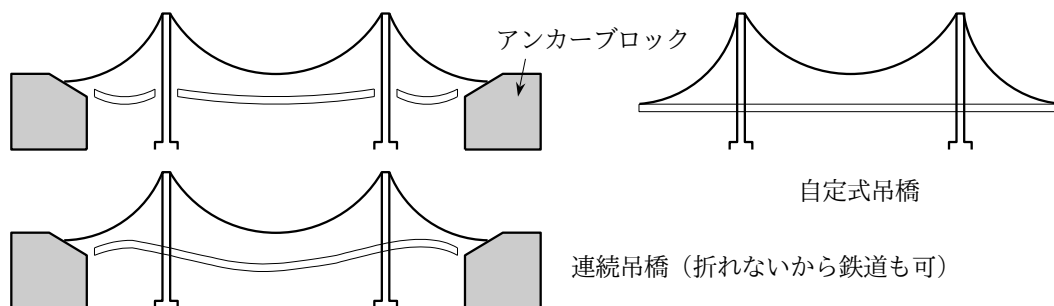


図 K.4 吊橋いろいろ

引っ張り出している。写真 K.13 は主ケーブル周辺工事のためのキャットウォーク等を示している。主ケーブルが死荷重を支え、桁の曲げ剛性で活荷重を支えるというのが大まかな考え方である。現在、主ケーブルはその最大強度のほぼ 90% 程を既に発揮しているという。今の技術では支間 3~4 km が限界¹⁸とも言われている。明石海峡大橋は写真 K.12 の状態から半年経って主ケーブルが渡り終えた時点で兵庫県南部地震に遭遇し、塔が 1 m くらい離れた上に少し向きを変えて¹⁹しまった。

アンカーブロックは通常写真 K.14 のようなコンクリート塊の重量物であるが、写真 K.15 のように、山の岩盤内に設ける場合もある。アーチ橋と同様だがその逆向きの水平反力で支える必要があるので、地盤や岩盤の状況によってそれができない場合には、自定式吊橋という選択がある。これはちょうどタイドアーチの逆の構造である。隅田川の清洲橋がこの構造で、しかも主ケーブルが超大型のチェーン（アイバー）でできている点

¹⁸ TV 番組で技術者談として聞いたが数値はうろ覚え。

¹⁹ 向きの変化は小さかったことから調整はしなかったが、離れた距離分は、まだ製作していなかったスパン中央の閉合桁を設計し直したと言われている。



写真 K.16 下津井瀬戸大橋のアイバー



写真 K.17 伯方大島大橋のサドル

がとても面白いので一度は見学して欲しい。

補剛桁は3径間の単純桁とするのが普通だろうと考えられるが、鉄道を渡す場合には連続吊橋にする必要がある。それによって塔部支承箇所ではレールの折れ曲がりを回避できるが、レールが例えば10cm弱くらいスパン中央側に引き込まれることを緩衝するようなスライド構造を工夫しなければならない。写真 K.16 は、鉄道併用橋である下津井瀬戸大橋の塔に設置されたアイバーと呼ばれる桁吊具である。桁を吊る前後の写真を並べておいた。塔頂でケーブルが置かれる「鞍」の例を写真 K.17 に示した。

吊橋は柔構造にすることによって塔が受け持つ水平反力による幾何学的非線形的抵抗が付加され、長スパン化が実現された構造である。第 K.8 節にその考え方を文献から抜粋して説明した。この作用はアーチと逆で、アーチは剛にしないといけない構造である。このように吊橋では柔構造が有利なため、風による問題等が予想される。橋梁自体の構造とは関係無いが、一つの対策としてグレー



写真 K.18 岩黒島橋か榎石島橋：左が1985年で右が1987年

チングがある。例えば p.748 の Machinac 橋の車道の一部がグレーチング²⁰になっている。Chicago 市内²¹の橋梁にもグレーチングが多く、写真 K.1 の可動橋の下階²²がそうになっている。

²⁰ 写真の路面をよおくと少し色合いが異なることからわかるかもしれない。

²¹ Chicago は Windy City と呼ばれるが、それと関係があるのかもしれない。

²² One of the best なミュージカルとして有名な映画 The Blues Brothers (©1980 Universal Studios) には、可動橋の動く様とそのグレーチングや2階建て橋梁に加えて写真 K.23 の耐候性鋼材のビルと彫刻が出てくる。この Daley Plaza に自動車飛び込むことを当時の市長 Jane Byrne (Chicago 初の女性市長) が許可したことも有名 (TIME 誌にも掲載された) である。というよりこの映画は、大きな映画を撮れないとされていた Chicago の状況を打破した画期的な映画で、そのあと The Fugitive (©1993 Warner Bros. Entertainment Inc.) のような映画も撮られ、その中でも2階建て可動橋周辺の追跡シーンがある。

斜張橋: 残念ながら勉強したことが全く無いので、斜張橋の力学的優位性はよくわからない。桁に大きな軸力が入るようにも感じる。さて鋼構造ならまだ力学的な効果は推測できるが、昨今PC斜版橋を斜張橋と呼んだりしている雰囲気があるが、ちょっと違うのではないかと²³感じる。写真 K.18 は児島坂出ルートの斜張橋の架設中と閉合後の例である。p.376 に載せた Winnipeg にある歩道橋は、中央の塔基部にレストラン²⁴がある。

吊床版橋: これはPC鋼棒やケーブルに直接コンクリートを巻いて床版にした橋梁形式。現在のところ、どうやら歩行者や自転車専用のようなものである。

(6) 主構以外の主な構成

床版: 自動車の良好な走行性を確保する舗装²⁵を通して、最初にその荷重を支えて主構造に伝達する床であり、標準的にはRC構造である。写真 K.19 の上フランジの上に四つずつ並んでいる突起²⁶にずれ止めをつなぎ、床版コンクリートを打設したりプレキャストの床を設置する。近年、合理化橋梁の一つとして多用される少数主桁²⁷の場合には、床版の支間が大きくなるため、PC床版が用いられることがある。

縦横桁と対傾構: 床版から伝達された荷重は主桁だけでなく縦桁で受ける場合もある。その縦桁は横桁で支持されて力を主桁に伝えている。また、隣り合う桁同士が倒れないように対傾構を端部や中間部には設ける。後述する横倒れ座屈の有効座屈長がこの対傾構間隔になる。図 K.5 は部材のみを書いたもので、実際の構造については教科書を参照のこと。

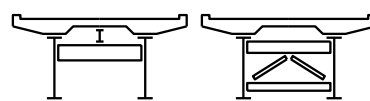


図 K.5 縦横桁と端対傾構

支承: 橋が支えた荷重を橋脚や橋台に伝えるもので、元々の変形しないで重量物をきちんと支える機能を重視したため、金属（鋳鉄）支承であった。しかし特に兵庫県南部地震後、耐震を念頭に置いて²⁸ゴム支承（水平力分散支承）や免震支承が増えてきている。また、縦断勾配がある橋梁の固定支承は下側に配置²⁹する。



写真 K.19 耐候性鋼の主桁・横桁と内側設置の排水管

伸縮装置: 温度による橋梁の伸縮に起因する応力上昇や載荷時のたわみ角折れを緩和するために設置する緩衝装置である。施工の最終段階では微妙な出来形修正や調整のためにも利用されるそう

だ。ただし図 K.6 に示したように、パラペット周りへの雨水や汚泥等の浸入口としての弱点でもあり得るた

²³ 斜版橋は吊構造ではなくPC定着部を高くしたものだと思うのだが力学的な気持ち良さを感じない。鋼を守るためにコンクリートを巻いたとも想像できるが、雰囲気が悪い。おっと、ここは鋼橋のことを書く節だった。ごめんなさい。

²⁴ 今は営業していないとか。しかし、ローマの橋等で見られるように古くから橋本体が交流や商売の場だったのは間違いない。

²⁵ 舗装は原則アスファルトが用いられる。これに対し、トンネル内等ではコンクリート舗装（仙台空港への直線道路もそう）が用いられることがある。理由は知らない。

²⁶ 四つずつ並んでいるのはタッピングした短いボルトで、ここに長めのナットを締めて、やはりタッピングしたずれ止めをそのナットに締め入れると完成。

²⁷ 部品を少なくする点は非常に効果的なのだろうと思うが、見せてもらった現場に限定すると桁高が大きくなる傾向があることから1支間中の添接が多くなっていて、維持管理等の観点から少し心配になった。2主桁にこだわらないという選択は無いのだろうか。

²⁸ 日本海中部地震後の調査でも、ねじれてしまった金属支承を見たことがある。ただ東北地方太平洋沖地震ではゴム支承が切れたという大問題が発生している。橋軸直角方向への可動性等についての調査結果をしっかりと検討する必要があるだろう。

²⁹ こういったことは技術者には常識だろう。若いOBと一緒に第1著者が東北大学の藤原稔先生の部屋に伺ったときに「そんなことも知らんのか」と叱られたことがある。

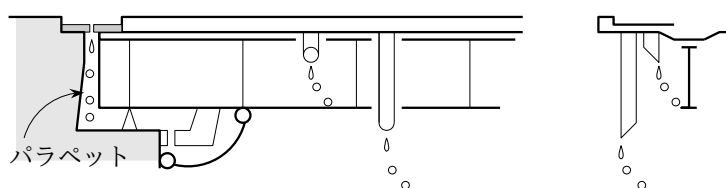


図 K.6 パラペット周辺の伸縮装置や落橋防止装置と排水管の仕様等

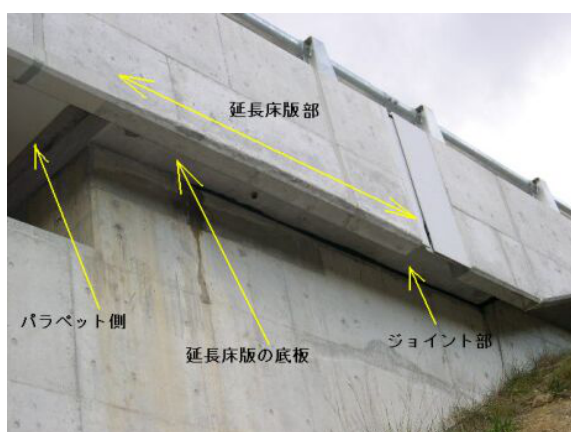


写真 K.20 常磐自動車道の延長床版

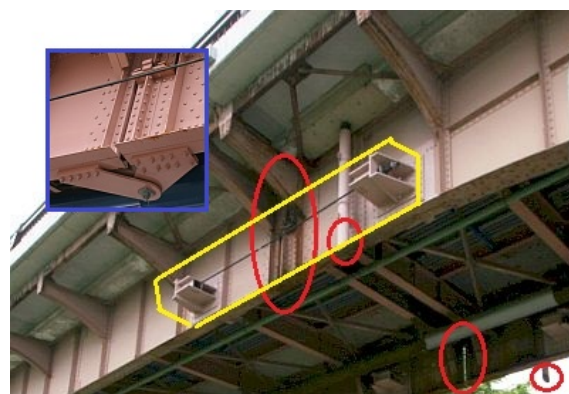


写真 K.21 ゲルバーヒンジと排水管・落橋防止装置
青枠はあの大地震後下フランジに設置されたずれ止め

め、構造詳細には十分な工夫が必要である。その対策の一つとしてノージョイント化も提案 [156] されているが、施工上の理由等からまだ全く主流ではない。例えば、ゴム等の混入された特殊舗装材料を用いたダブル埋設ジョイント [133, 134] や写真 K.20 に示したような延長床版等がある。後者には伸縮装置そのものは設置されるが、その設置箇所をパラペットから離してある。例えば温度変化 ΔT が 50 度であった場合、熱膨張係数は $K = 12 \times 10^{-6}$ でヤング率が $E = 210 \text{ kN/mm}^2$ なので生じる応力は確かに

$$\Delta\sigma = E\Delta\epsilon = EK\Delta T = 126 \text{ N/mm}^2$$

となって、これは SM400 の降伏応力の半分程度つまりほとんど許容応力レベルにまで到達してしまう³⁰ことになる。

排水装置: 水が路面に溜まらないように排水装置が必要である。さらにその排水パイプからの水が、直接パラペット周辺や桁に、特に下フランジ部のような汚泥も溜まっているような箇所に飛ばないように工夫も、防食のために必要不可欠である。排水パイプは桁から十分離し、図 K.6 と写真 K.21 に示したように、パイプ口の向きも丁寧に³¹設計しなければならない。

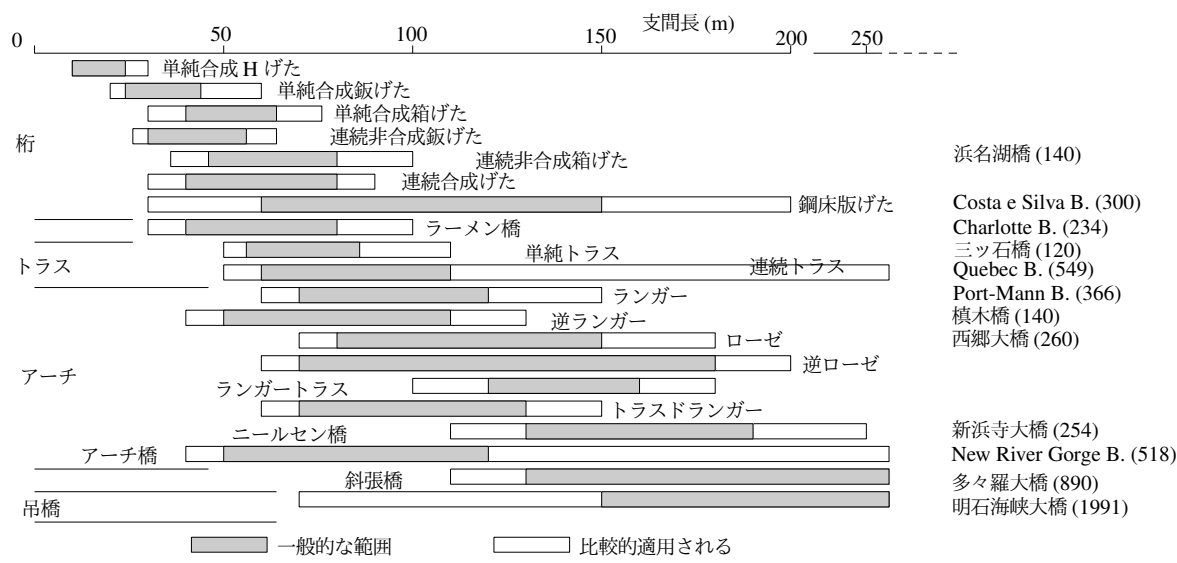
落橋防止装置と衝突防止装置: 地震時の万一のことを念頭に置いて、落橋しないようにする装置³² (写真 K.7 と K.21 参照) と、橋台等に衝突しないようにする緩衝装置が設置されることが多い。また橋台と橋脚の天端の拡幅対策も、特に補修工事時に併用することがある。

³⁰ ただし、橋梁形式や支間長によっては冗長性が期待できて、少なくとも片方だけは無くせるのではないかと想像 [153] している。

³¹ 近年写真 K.19 のように排水パイプを桁の内側で地表まで誘導するものも増えてきているが、橋脚等の位置では景観的にもよくないし、維持管理には問題は生じないようになってきているのだろうか。

³² 学生さんのレポートでは、落橋防止装置を主要な力学部材であると誤解した記述もときどきある。

表 K.1 形式とスパンの間の、経済的・力学的に合理的な組み合わせ



自動車用防護柵と高欄: 自動車が橋梁に衝突しないように、そして道路側に跳ね返すための柵³³である。そのための強度確保は必須で、実験や解析を踏まえた指針が公開されている。歩行者の転落防止のための柵は高欄と呼ばれる。これも歩行者による荷重で設計することになっている。

K.1.3 形式とスパン長

長岡技術科学大学の長井正嗣先生から承諾をいただいて、表 K.1 に教科書の表を複製した。このように、同じ支間長であっても複数の形式を選択できる。つまり、技術者の設計の自由度は非常に広い。例えば隅田川の場合、幅がほぼ同じ区間が長く続いているが、そこに架かる道路橋や鉄道橋には、桁橋やトラス橋・アーチ橋・吊橋等がある。関東大震災後の震災復興事業で、土木の大先輩³⁴が工夫して設計・施工したと言われている。今後も同様に、100年間愛される橋梁の設計を継続して欲しい。

K.2 鋼の基本的な特性

K.2.1 鋼の製法と冶金学的性質

(1) 製鋼

教科書の第3章を読むこと。まず基本として最重要な鋼の冶金学的³⁵な情報について説明する。鋼の製造プロセスの標準的なステップは以下ようになる。

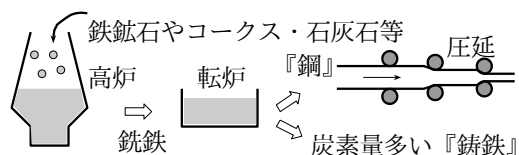


図 K.7 鋼の製法

³³ 最近仙台市内橋梁では、歩道と車道の間少し中途半端な柵が設けられる工事が進んでいる。ひょっとすると福岡の酒酔い運転による追突による死亡事故が発端ではないかと勘ぐっている。本来そこには自動車用防護柵が設置されるべきではないのかと思うのだが、よくわからない。

³⁴ 土木史等をきちんと履修して覚えよう。第1著者は歴史に興味がないので覚えていない。

³⁵ 冶金の英語は 'metallurgy' で、「冶」は「にすい」であることには注意すること。なぜこれを書いたかという、某教授会資料中に「冶金」という文字があることを金属工学分野の先生が指摘したのだが、意外とムニャムニャ・・・呵呵。

Step 1. 製鉄あるいは製鉄: 鉄鉱石とコークス・石灰石を高炉に入れることによって、酸化鉄 (Fe_3O_4) を還元して銑鉄を造る。この状態では炭素量がまだ3~4%と多くて、脆い。

Step 2. 製鋼: 銑鉄を転炉あるいは電気炉に入れ、炭素や不純物の除去をする。これで造られる炭素量が2%以下のものが鋼で、炭素量の多いものが鋳鉄である。鋳物は硬くて脆く、つまり後述の靱性が不足している。昔の製法の中には、鋳鉄からさらに炭素を除去して脆性を改善して錬鉄を造り、それから鋼を造る方法もあったようだ。

Step 3. 圧延: 製鋼された厚い鋼板をローラー間に通し、塑性加工をしながら薄肉にしたり整形したりして鋼材にする。鋼板や鋼棒・形鋼等が製造される。圧延には熱間加工（高温下の圧延）と冷間加工（高温数百度だが A_2 変態温度よりかなり低い温度帯の圧延）がある。後者の方法では前者より残留応力や残留ひずみが生じ易い。形鋼には H 形鋼や山形鋼・溝形鋼等がある。

(2) 鉄と炭素の合金

一般の方がよく鋼の橋を鉄橋³⁶と呼ぶ。しかし鉄 (Fe) そのものはとても柔らかいため、このままでは構造用材料としては使えない。そこで種々の元素を加えて、欲しい特性を持つ合金にしたものが鋼である。最も基本的な添加元素は炭素であり、その量によってまず異なる性質を示す。

少量の炭素を添加: 強度が高まる。やや硬くなる。

炭素が多過ぎると: 硬くなり過ぎ、結局は脆くなる。

文献 [132] によると、橋梁に用いる通常の鋼の炭素量は重量比で 0.18~0.3% と³⁷され、それを軟鋼と呼んでいる。

(3) その他の元素

炭素以外で、製鉄や製鋼時に添加する元素の主要なものは、おおよそ次の三つの目的別に分類³⁸できる。

製鋼時の脱酸材として: Al, Si

高強度化や靱性向上のために: Mn, Si

耐食性や耐熱性のために: Ni, Cr, Cu, V

特に Mn は自動車の軽量化のために積極的に用いられ、かなり薄肉で延性も確保³⁹された高強度鋼が製造され、強度が $1,000 \text{ N/mm}^2$ を超えるもの⁴⁰もある。さて、鋼の溶接性等を表す数値として、こういった添加元素量を炭素量に換算したものを炭素当量 C_{eq}

$$C_{eq} = C + \frac{1}{6}\text{Mn} + \frac{1}{24}\text{Si} + \frac{1}{40}\text{Ni} + \frac{1}{5}\text{Cr} + \frac{1}{4}\text{Mo} + \frac{1}{14}\text{V} \left(+ \frac{1}{13}\text{Cu} \text{ (Cu} \geq 0.5\% \text{ の場合のみ)} \right) \quad \%$$

と呼んで用いている。これも教科書によって微妙に数値が異なる。例えば鋼種 SM400~570 で $C_{eq} \leq 0.44\%$ 程度であるとされる。

³⁶ 鉄道の鋼橋を鉄橋と呼んでいるのかもしれないが。

³⁷ この数値も文献によって微妙に異なる。

³⁸ ただしこれも教科書によって微妙に分類が異なるが、同じ元素が複数の機能を持つからであろう。

³⁹ 普通の高張力鋼は一般的に模式図 K.11 のように軟鋼より延性が劣る。

⁴⁰ 自動車分野でも Mn が高価なことが障害になっており、とても公共事業の橋梁には使えないのかもしれない。



写真 K.22 仙台市の（仮称）ひより台大橋の桁



写真 K.23 Picasso の彫刻

(4) その他の元素の使用例 — 耐候性鋼材

耐食性は鋼橋には非常に重要な特性であり、そのため、近年よく使われる鋼に耐候性鋼材 (SMA400AW 等) というのがある。これは Cr や Ni の量を増やして製造⁴¹されるためやや高価である。しかし、橋梁の維持管理（塗装）にかかる費用と初期材料費とを総合的に比較判断すれば、経済性も持つ長寿命の橋梁が建設可能だと考えていい。ただし、錆代分の板厚が必須であることを忘れてはいけない。

その耐食メカニズムは、いわゆる安定錆（粒子の細かい黒錆）を初期段階でまず発生させ、水の進入を妨ぐことによって赤錆（粒子が大きく隙間も広がって水の進入を止められない）の生成を阻害するというものである。したがって、十分に黒錆を生成させられる環境、例えば海岸からの距離があって飛来塩分量が少なく、雨水が適度に供給されて風が当たり易い良好な環境では、裸使用が可能になる。ただし、パラペット周辺のような比較的悪い環境周辺の部材だけは塗装等で保護することになって⁴²いる。写真 K.22 の右の桁の外側は安定化処理されているが、その他の箇所は桁端部を除いて裸使用である。写真の状態ではまだ黒錆が十分には生成していないため茶色が強い。写真 K.23 は Chicago 市庁舎横にある耐候性鋼材⁴³でできた Daley Plaza（左の建物）とその前庭の Picasso の彫刻である。

(5) 組織と変態

図 K.8 は鋼の状態図である。炭素量によっても異なる特性を持つが、ある温度で起こる変態というのは、ちょうど氷が水になるのと同じである。結晶金属の場合の変態では、その結晶構造⁴⁴が例えば体心立方から面心立方へと急変したりする。

オーステナイト（fcc 固溶体）： γ 鉄，面心立方晶 (fcc)。固溶体とは、固体に固体が溶け込んだ混合体のこと。

フェライト（bcc 固溶体）： α 鉄，体心立方晶 (bcc)。柔らかくて延性がある。

セメンタイト（ Fe_3C ）：硬くて脆い。

⁴¹ 2002/10 の新聞報道でも新しい高性能耐候性鋼材が紹介されていた。

⁴² そのため、一部の発注者では使用を控える動きがあると聞いているが、2013 年度頃の東北地方整備局では、将来の技術者不足やメインテナンスコストの観点から必要な材料の一つとして捉えている。技術的チャレンジを常に心掛けるのが土木技術者の使命なので、この裸使用や新しい材料も積極的に使えるようにして欲しいところだ。

⁴³ アメリカ合州国 Pennsylvania 州 Pittsburgh にある US Steel 本社工場も同様じゃなかったかな。

⁴⁴ 一般の人にもよく知られている金属の変態の例は、形状記憶合金の挙動である。目的とする構造が要求する変態温度帯を持つ合金を開発するのが難しいらしく、おもちゃのスプーンや下着のワイヤ等身近な実用品もあるが、鋼ではないらしい。東京工業大学の森勉先生がある会社と開発した鋼系の形状記憶合金は最近（特許が切れてから）、どうやら制振ダンパーに使われているらしい。

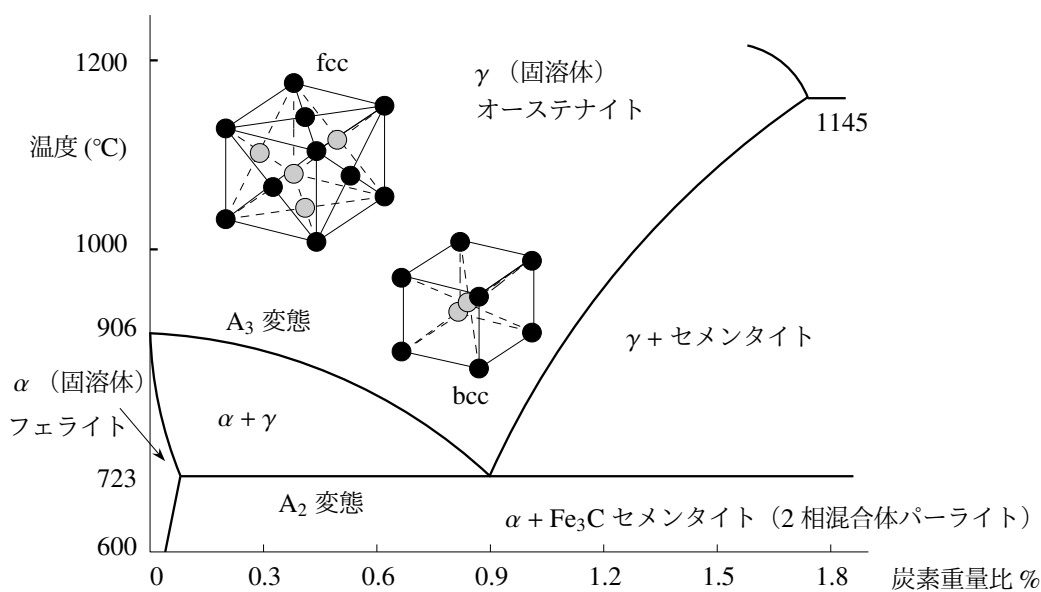


図 K.8 鋼の状態図

パーライト: α 鉄とセメンタイトの層状 2 相混合組織 (共析晶)。これが橋梁構造に用いられる鋼。

(6) 熱処理と鍛造

熱処理: 図 K.8 の状態図を見ながら、欲しい特性を持った鋼を製造するために加熱や冷却を調整・利用して組織を変える操作⁴⁵である。重要なのは加熱する温度帯と冷却速度・冷却温度である。熱処理の主な目的は

1. 強度や靱性・加工性の調整
2. 冷却等で生じた残留応力の除去

の二つであろう。それぞれの目的のために、次のような処理法がある。

焼ならし (焼準): 900°C 前後のオーステナイトをゆっくり冷や (空冷) し、組織の均質化や残留応力の除去をし、靱性を上げる。

焼なまし (焼鈍): オーステナイトを炉の中で徐冷し、軟化させて加工性を上げる。例えば 500~600°C からの徐冷では残留応力除去ができる。

焼入れ: オーステナイトを水中急冷して、硬いマルテンサイト組織を形成させて硬くするが、脆くなる。

焼戻し: 焼入れしたものを再加熱して徐冷を経て粘り (靱性) を与える。温度帯を選んで「強度や延性」の調整も可能である。

このうちの、後 2 者を組み合わせて強度や靱性を向上させた鋼を調質鋼と呼ぶが、溶接性のいい構造用高張力鋼のうち $\sigma_u \geq 600 \text{ N/mm}^2$ くらいの高張力鋼の主な製法である。逆に、添加元素を調整して造る鋼を「非調質鋼」と呼ぶ。

⁴⁵ よく TV 番組で、包丁や鋸・刀等の熱処理による特性改善のステップと映像が流れるので、機会があれば是非観て欲しい。刀の場合は、硬く脆い刃の部分 (硬いが靱性が強い) と粘り強い峰の部分 (靱性が高い) を同時に造り込まなければならないことに注目すべきである。靱性と靱性はあとで説明する。つまり刀には、「折れずにしかも硬くて切れ味がいい」という相反する性質を同時に持たせなければならないのである。ところで刀が反っているのはなぜでしょう。

TMCP 鋼: 高度に制御された熱処理をして厚板（板厚が 50 mm 以上）等を制御製造する方法がある。いわゆる TMCP と呼ばれる制御処理法⁴⁶である。これで製造された鋼を TMCP 鋼と [161] 呼んでいる。厚肉鋼板に対して、センサーとコンピュータ制御を用いて、板の必要な箇所に必要な制御圧延や焼入れ焼き戻しの熱処理を組み立てて、単結晶粒を非常に小さくしながら強度と靱性を上げる方法である。

図 K.9 にその概念を示した。厚板の場合は、その厚さ方向の品質が一樣にならないのが普通だが、そこも制御しようという方法である。ただし、加熱切断では残留応力等の影響で板が反ることも観察されている。また、そのような切断だけではなく溶接時の入熱も、せっかくの微細組織の逆向きの熱処理となって制御の効果が薄れる可能性もある。使い方には十分な注意が必要なのではないだろうか。

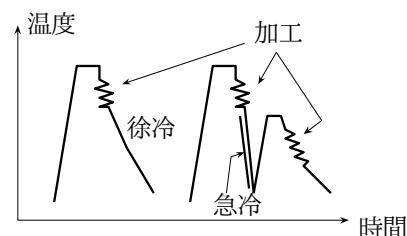


図 K.9 熱処理の概念図

鍛える・たたくこと: 圧延は一種の鍛錬プロセスだろう。鍛造という言葉があるように、刀や鋸の製造ではハンマーで叩くプロセスがある。この「鍛」とはどういう意味だろう。

1. 後述するが、常温で破壊する場合には単結晶粒の粒界に沿って破断すると考えている。つまりある結晶の欠陥が粒界に集まって亀裂になり、それがつながって破断する。
2. ということは、その亀裂の長さは単結晶粒の大きさに比例すると思えばいい。
3. 一方、破壊力学という学問の結論では、亀裂が長いほど壊れ易いことがわかっている。
4. 以上の考察を総合すると、単結晶粒を小さくすると亀裂長も小さくなって、破壊し難くなるという3段階論法が見えてくる。

したがって、鍛造⁴⁷において単結晶粒径を小さくすれば、結果的に強度が上がることになるというのが定説である。TMCP 鋼は制御圧延によって結晶の微粒子化をしている。

K.2.2 鋼の機械的性質

(1) 引張試験

前節の冶金的性質も橋梁技術者は基礎知識として持っている必要はある。新しい材料開発無しに技術の進歩はあまり期待できない状況にあるからだ。この節では橋梁材料の設計時に考慮すべき性質、つまり製造された鋼の持つ機械的⁴⁸特性について概説する。なお、一般の人達とは異なる意味で技術用語が定義されているので、技術者としての正しい意味の方を覚えて欲しい。

材料特性を調べるためにはいろいろな材料試験を行う。鋼の場合は、図 K.10 の右上にあるような棒（平板か円柱）を 1 方向に引張る試験がその代表である。左下に示したのが、荷重 P を棒の荷重前の断面積 A で割った応力 σ

$$\sigma = \frac{P}{A}$$

と棒の伸びをプロットしたもので、軟鋼の場合の例である。伸びは、ひずみゲージを貼付して測定するか、あるいは試験片の長さ方向に L_0 だけ離れた点にマークしておき、荷重が載ってその距離（標点間距離）が伸びて

⁴⁶ Thermo-mechanical control process (TMCP) は処理そのものの名称で、Thermo-mechanically controlled processing が名詞である。少なくともインターネット上で Thermo-mechanical control process steel という表現は見つからない。

⁴⁷ ある TV 番組で、局所的に叩くことによって残留変形を無くすという作業を鋸職人が行っていた。多分（ピーニングか?）微視的な塑性変形を与えて反りを減らしているもので、ひよっとすると結晶粒等の微視特性も変化させているのかもしれない。

⁴⁸ 節題目の「機械的」は mechanical の訳だから本来は「力学的」と称してもいいのだが、伝統的に前者を用いることになっている。

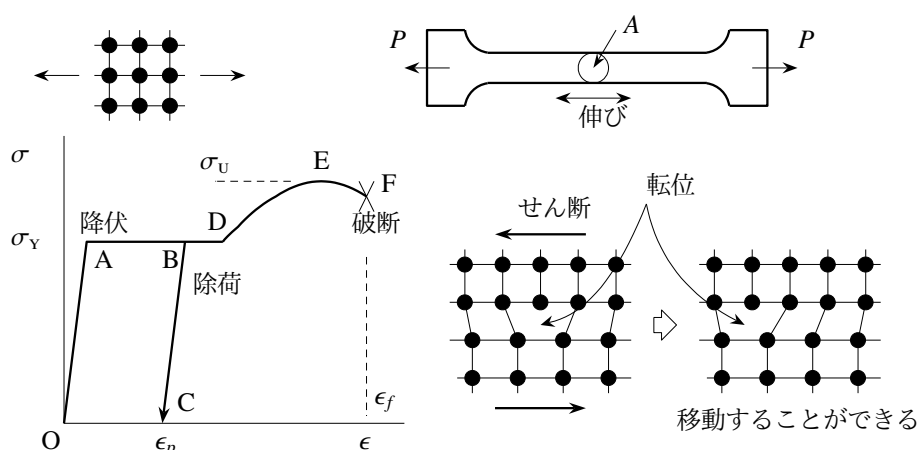


図 K.10 引張試験と荷重伸び関係

L になったとき

$$\epsilon = \frac{L - L_0}{L_0}$$

で、最も単純な伸び ϵ を定義できる。このプロットが示す特性から種々の材料特性を同定することができる。

(2) 剛性

まず原点 O から A までの挙動は、一般的に弾性と呼ばれる。この線の傾きが鋼の変形のし難さを表す特性の代表であり、抵抗特性あるいは剛性と呼ばれる。最も基本的な剛性はこの傾きで Young 率 ($E = 210 \text{ kN/mm}^2$) あるいは Young 係数と呼ばれる。鋼のような結晶金属材料の場合は、図 K.10 の左上図のように強い原子間力で抵抗すると期待できるので、コンクリート等の他の材料に比べてその傾きは非常に大きい。コンクリートの Young 率は鋼の $1/7$ 程度である。抵抗が大きいこのような材料を、一般の人達は「強い」と呼ぶことがあるが、後述の「強度」とは違う概念である。また「硬い」という特性⁴⁹とも厳密には異なるので注意する必要がある。面白いことに鋼はその結晶構造 (bcc か fcc) 等によらずこの傾きはほぼ同じ値になるらしい。

(3) 降伏

もし原子が整然と並んでいるなら、その間の抵抗力は非常に大きいので、破断する応力は非常に大きい（実際の破断強度の 100 倍以上に⁵⁰なる）と想像できるが、実際には図 K.10 の A で急に抵抗が小さくなるのが普通である。この A 付近で発生している現象を降伏と呼び、 A の応力レベル⁵¹を降伏応力 σ_Y と呼んで⁵²いる。この A から D までが平らになるのは軟鋼の特徴であり、この部分を「おどり場」と呼ぶことがある。

では降伏とは何だろう。その現象の説明のために、鋼内部のメカニズムを表す定説としてのモデルは、図の右側に書いたような転位の移動と蓄積である。実際の製鋼では単結晶中の格子構造のすべてを完全には並べることができず、この図のような転位と呼ばれる格子欠陥が無数に含まれてしまう。このような、きちんと握手していない原子が存在する格子の配置がこの図の奥行き方向に有限な長さで曲線状⁵³に伸びていて、それは転位線と呼ばれる。そしてこの欠陥は、それほど大きくない力（せん断力）で移動し、逆向きに力をかけると逆

⁴⁹ 「剛」を漢和辞典で引くと「かたさ」と平仮名で書いてある。硬さではないからだろうか。呵呵。

⁵⁰ 付録 E に概説した。

⁵¹ 降伏点とも呼ぶようだがこの文書では用いない。また上昇伏点や下降伏点も区別する必要があるが用いない。

⁵² 降伏するちょっと前までは弾性と考えられているが、正確には、微視的な降伏がその前にも徐々に進んでいる。その塑性変形が顕著にならず、剛性が直線状である上限を比例限界と呼び、そのあと非線形性が出てくるものの塑性変形が顕著になる限界を弾性限界と呼ぶことがあるが、事実上、そういう状況を区別する必要性を感じないので覚えなくていい。

⁵³ 透過型電子顕微鏡で無数の黒い弦状等の曲線として観察できる。

向きに移動⁵⁴する。しかし転位が単結晶の粒界⁵⁵や材料の表面に達すると、その新しい「表面」になって⁵⁶しまつて動けなくなる（図 K.12 の下のモデルを参照）。新しい表面が生じたということは、そこで表面エネルギーが放出されて散逸してしまったことになり、それが熱⁵⁷となって現れる。このエネルギーを失ってしまったことにより、力を抜いたり逆向きに与えたくらいでは、飛び出した結晶面は決して内側には戻らない。この元に戻らない変形を残留変形（塑性変形）と呼んでいる。

この荷重伸び関係図 K.10 の A から D までの間では、このような転位がたくさん表面や界面に移動してしまう。そのため、例えば B で荷重をかけるのをやめて「除荷（載せていた荷重を取り除くこと）」したときには、A の方向に伸びが戻ることは決してなく、C の方向にしか戻らない。したがって、全荷重を抜いた状態でも巨視的な残留変形 ϵ_p が生じる。そしてこの残留変形は時間が経っても変化しない。このような時間的には変化しない非可逆変形を塑性変形と呼んでいる。具体的な数値例として鋼種の中の SM490 を取り上げると、降伏応力は $\sigma_Y = 315 \text{ N/mm}^2$ なので、初期降伏ひずみはこれを Young 率で除しておよそ $0.154\% = 1,540 \mu$ である。ところで、高張力鋼 ($\sigma_u \geq 500 \text{ N/mm}^2$ 程度) の場合には明確なおどり場が無い。このような場合には 0.2% オフセット耐力で見かけ上の降伏応力 σ_Y を定義することがある。つまり図 K.11

のように、横軸のひずみの 0.2% ($2,000 \mu$) の点から Young 率と同じ勾配で斜め上に伸ばした線が応力ひずみ曲線と交わる点の応力レベル (0.2% オフセット耐力) を降伏応力とみなすことになっている。

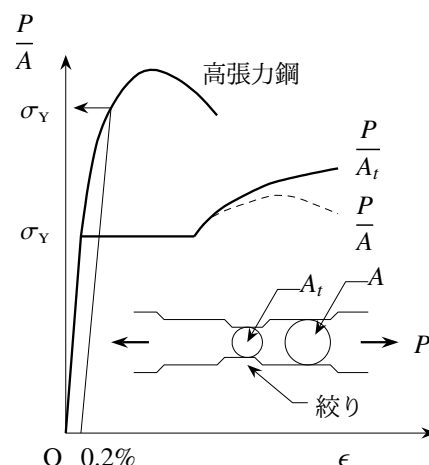


図 K.11 高張力鋼と真応力や絞り

(4) 硬化と硬さ

さて軟鋼の場合、図 K.10 の D では再度抵抗が大きくなる。これは、単結晶界面等に転位が蓄積して動けなくなることによって硬くなる⁵⁸ことを示していて、塑性的な硬さが増す性質であって、弾性剛性とは異なる特性である。この D-E 付近の曲線の勾配が A-D 付近のそれよりも大きく（硬く）なることを硬化と呼んでいる。硬さあるいは硬度と呼ばれている性質はほぼこの勾配を示していて、Vickers の硬さ試験等で確認される特性である。この試験は、押し付けた角錐形の治具が材料に残す塑性変形の大小を測定して硬さを定義している。したがって、主に塑性硬化の程度を表す特性が「硬さ」と呼ばれている。

(5) 強度

さらに荷重を増やすと、図 K.10 の E のような最高荷重に達し、そのあと軟化して F で破断する。この E の最大応力⁵⁹レベル σ_u を引張強度⁶⁰と呼んでいる。ただし図の縦軸は、試験片を引張る前の断面積で荷重を除いて定義している（公称応力）ことには注意しないとイケない。そのため、あるピーク後に材料そのものが軟化して破断するような図にも見えるが、実は E に達する少し前の段階で、試験片の実際の断面積は小さくなり始

⁵⁴ 名古屋大学の透過型電子顕微鏡で撮影した実験の動画を見せてもらったことがある。

⁵⁵ 鋼等は多結晶材料で、内部には別々の結晶の向きを持った単結晶が不規則に無数に分布している。その単結晶同士の界面は、必ずしも結晶格子構造のような強い結合をしているとは限らず、むしろ、格子定数の見かけ上の差があることから、そこにも転位が最初から並んでいると考えていい。さらに析出物もそこにはある。

⁵⁶ 実際走査型電子顕微鏡で表面を観察しながら引張ると、転位が表面に出てきた箇所に結晶格子 1 枚分の段差が生じるのが見える。ただ見せてもらった写真のどこが段差かわからなかった。

⁵⁷ 繰り返し曲げ続けて塑性変形した針金が次第に暖かくなることを経験した読者も多いと思う。

⁵⁸ 何度も曲げて「く」の字になった針金等の「く」の角をまっすぐにしようとするときに手が感じる硬さのことである。

⁵⁹ 教科書では σ_B と記されそれが一般的だが「B」の理由を知らない・調べていないので「ultimate」の「U」を使ってみた。

⁶⁰ 「strength」は最も長い 1 音節単語だったと思う。ちなみに SI 単位系ではないが、最も長い単語は「smiles」だ。

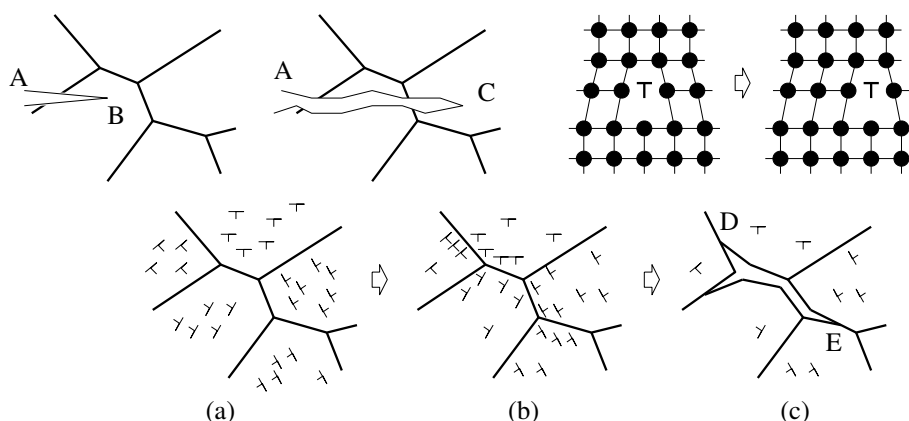


図 K.12 左上図が亀裂伸展による破壊，下図が粒界に集まる転位（右上図）が空隙・亀裂になって破壊

めている。このような現象を「絞りが生じている」と呼ぶ。この小さくなっていく実際の時々刻々の断面積 A_t で荷重を除した応力（正確な応力）を定義し直すと、Eのようなピークは発生せず、FはEよりも高いレベルになる。各変形状態の瞬間的な断面積 A_t で荷重を除した応力、つまり図 K.11 の $\frac{P}{A_t}$ を真応力と呼ぶ。

(6) 降伏比

図 K.10 の E に相当する引張強度 σ_u と A の降伏応力 σ_y は、教科書の表 3.1 の鋼種表に列挙されている。例えば SM490 の場合の σ_u は 490 N/mm^2 であり、降伏応力は $\sigma_y = 315 \text{ N/mm}^2$ である。実は（許容応力設計法では）、鋼構造の設計上の強度には引張強度そのものではなく降伏応力を用いることになっている。それは、軟鋼が降伏すると塑性変形が急増して構造が大きく変形してしまう可能性があるからである。またその方が、弾性計算で設計できるというメリットもある。しかし、ある確率で引張強度に迫る応力状態になるような作用があることは、土木技術者なら最初から想定している。しかしそのとき塑性変形が大きく生じたとしても、橋が落ちることなく設計荷重よりもより大きな作用に抵抗できることが望ましいのは当たり前である。すなわち、降伏応力と引張強度の比 $\frac{\sigma_y}{\sigma_u}$ が小さい方が、降伏応力に達したあとの余裕があることから、万一のときの安全を確保し易いことを意味する。こういう安全性の余裕は一種の冗長性と呼ばれ、この二つの応力の比を降伏比と呼んでいる。上述の軟鋼 SM490 の場合はこの比が 64% と低い。これに対し高張力鋼の降伏比は大きくなる傾向を持っている⁶¹ため、これが低い（80% 以下）高張力鋼も望まれている。そのような降伏比が小さい鋼を低降伏比鋼と呼ぶ。

(7) 延性と延性破壊

最終的に破断するまでに、どのくらいまで伸びることができるのかを表したのが延性である。図 K.10 の中の破断時の伸び ϵ_f の大きさの程度が延性を表していると考えていい。亀裂が存在しないときの常温時の破断は、この延性を発揮し終えた段階の破壊であり、通常の鋼では大きな塑性変形を伴って破壊する。このような破壊を延性破壊と呼ぶことがある。定説では、図 K.12 の下の図のように、単結晶粒内の転位が粒界に集まって蓄積され、空隙や亀裂になった末、それがすべてつながってしまっって延性破壊面になるとしている。したがって、大きな塑性変形が残ってしまうため、その破断面は非常にザラザラ凸凹している。もし材料に最初から亀裂が入っていた場合、その亀裂がどのように伸びていくかは、その亀裂先端付近の微視的な延性で支配されると考えられている。常温の鋼ではその延性はかなり期待できるため、亀裂は結晶のある「へき開」し易い面⁶²に沿っ

⁶¹ よく理解していないが、鋼種表を見る限りはそうに感じられる。

⁶² よく理解していないので、金属工学科の友人に尋ねてください。

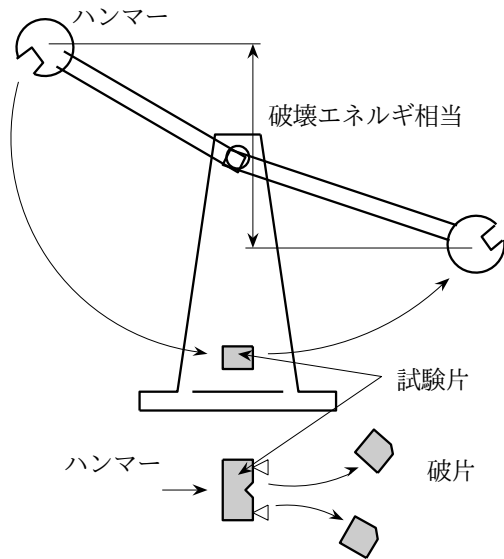


図 K.13 Charpy 衝撃試験

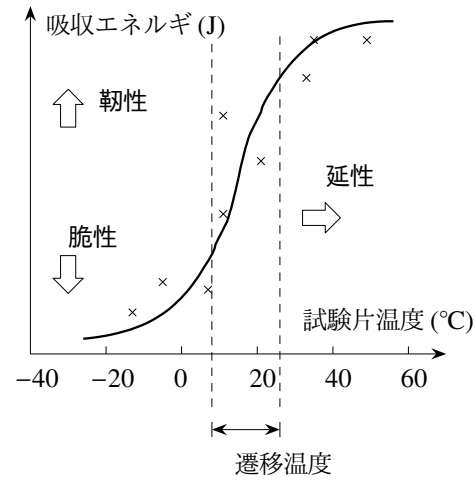


図 K.14 吸収エネルギーと温度

て、塑性変形を伴いながら伸展する。それが図 K.12 の左上 2 番目の図の C のような状況である。

(8) 脆性破壊と破壊靱性

しかし低温の状態で亀裂が存在する場合には、この亀裂先端付近の微視的な延性が極端に小さくなる性質を鋼は持っていることがわかっている。そうすると微視的には、亀裂先端付近では変形がほとんど生じないため、鋼はガラスのような挙動を示し、脆くなる。結果的にガラスが割れるように亀裂が伸展することから、塑性変形をほとんど伴わずに亀裂が伸展して破断することがある。したがって巨視的にもほとんど変形が無いまま、亀裂の伸展経路に沿って破断する。図 K.12 の左上端の図の B のような状況である。このような巨視的な脆さを脆性と呼び、その破壊の仕方を脆性破壊と呼んでいる。そして、破壊させるのに多くのエネルギーが必要な材料は「靱性が高い」材料と呼ばれる。すなわち、材料を破壊するのに必要な「破壊のエネルギー」の大小で靱性を定義している。文字で書くと、亀裂の伸展を伴う破壊に対する「エネルギー的な⁶³粘り強さ」が靱性であると覚えておけばいい。このことから、前節の巨視的な延性と靱性とは、必ずしも直接的には関連していないことが明らかである。あくまでも亀裂先端付近の微視的な延性が脆性や靱性と直接関係していて、巨視的な延性はあくまでも塑性的な伸び能力である。

その靱性を定量化するための代表的な試験は、図 K.13 に示した Charpy 衝撃試験⁶⁴である。試験片の破断前後のハンマーの位置エネルギーの差は、ちょうどその破断に必要な破壊エネルギーに等しいと考えていい。このエネルギーを吸収エネルギーと呼び、それが破壊靱性という一種の粘り強さの程度を定量化するパラメータとして用いられている。教科書の表 3.1 の鋼種表にも記載があるので参照して欲しい。破断面は図 K.15 に示し

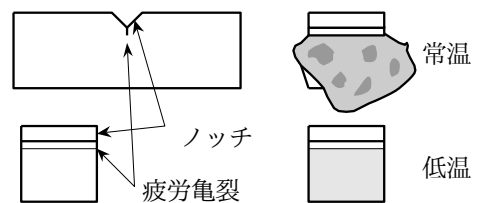


図 K.15 Charpy 試験片の破断面

⁶³ 文献 [193] 著者の宮本博先生が、この「エネルギー的」という言葉をお使いになったと第 1 著者は記憶するが、出展等は不明。

⁶⁴ 注意して欲しいのだが、この Charpy 衝撃試験は名前が示すように衝撃による動的载荷によって行われるため、靱性の定義が誤解されていると感じる。実際、いくつかの教科書で「衝撃荷重への破壊の起こしにくさ」が靱性であるという記述があるが、それは正確ではない。脆性破壊が問題視されるきっかけになった船舶（タンカー）の沈没は、凧いでとても静かな低温下の海で起きた [7] ことを思い出そう。靱性は、破壊までに必要なエネルギーの大きさと定義される粘り強さの特性 [94] である。また、延性と靱性が直接は関係無いことを示すために、図 K.14 では靱性と脆性を上下の矢印（吸収エネルギーの大小）で示し、延性はとりあえず、常温では巨視的な延性を伴いながら破断するため、右向きの矢印で示しておいた。

たように、常温では元の断面の形を保持できない上に破断面が非常にザラザラ凸凹している。これは延性破壊をして、大きな塑性変形を伴いながら引きちぎられたからである。これに対し低温では、断面の形はほとんど元のまま凸凹も無い（ガラス程はツルツルとは言えないが）。これは試験片の亀裂が一瞬にして試験片を貫通したからである。温度と吸収エネルギーの関係は図 K.14 のようになり、韌性の優位性が急に下がる温度帯を遷移温度と呼ぶ。

(9) 疲労

実は鉄道橋は昔から疲労という現象を設計で考慮していたが、鋼道路橋では昔は考慮されていなかった。それが昨今 TV 番組等でも紹介されるように、例えば昭和の東京オリンピック時に建設された鋼道路橋等でそれに関係していると考えられる損傷が顕著になり始め、大問題になっている。この疲労という現象は、例えば初期亀裂等の欠陥が鋼に存在していた場合、静的

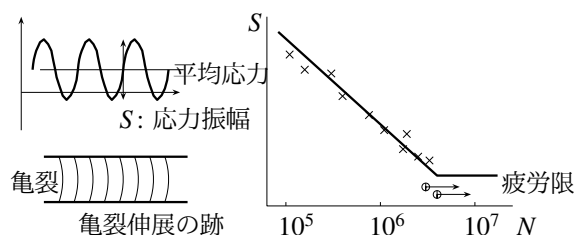


図 K.16 疲労亀裂の伸展と疲労限

な強度よりも小さい応力レベルの繰り返し载荷によって損傷が少しずつ発生して亀裂が徐々に伸びることである。例えば、ボルト孔や昔のリベット孔周辺・溶接部に何らかの欠陥が残ってしまった場合等に、そこから亀裂が伸展する場合がある。しかし、突然構造全体を崩壊させるような亀裂の発達ではなく、繰り返し作用によって徐々に亀裂が伸びることがある。そういった損傷現象を疲労破壊と⁶⁵呼んでいる。1日に千台くらいのトラックが1年間橋梁を通過したとすると、結局ほぼ 3×10^5 回の疲労試験をしたことになるわけだ。その何回か毎に少しずつ亀裂が伸びるため、その破断面を観察すると、亀裂伸展の跡が例えば貝殻の表面の模様や、波打ち際の砂の模様のように残ることになる。

この疲労亀裂の伸びを支配しているのは、繰り返し作用による交番応力の平均値よりはその振幅（応力振幅 S ）の方だと言われている。そこで、破壊までの繰り返し回数 N とこの振幅をプロットした図 K.16 の右図を $S-N$ 線図と呼び、これを用いて設計に役立てている。破壊しない限界を疲労限と呼ぶが、鋼等の金属材料にもそういう限界は無いという研究もある。慣習として、 $N = 2 \times 10^6$ 以上でも破断しない応力レベルを疲労限とするらしい。この疲労限を疲労強度と呼び、例えば継手部の設計で考慮（教科書の p.77 付近）している。

予め亀裂という欠陥が存在する材料の力学を破壊力学と呼んで⁶⁶いる。

図 K.17 のように、長さ $2a$ の亀裂をその法線方向に開こうという応力状態にある場合をモード I の亀裂と呼ぶが、弾性解では図のように楕円状に亀裂が開こうとする。またそのときの（平面ひずみ状態では）亀裂先端付近のみの応力状態は

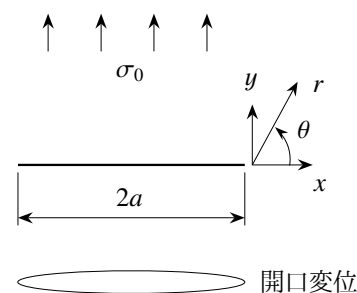


図 K.17 破壊力学

と求められている。この K_I はモード I の応力拡大係数と呼ばれており、これがある限界値に達したときに亀裂が伸展し始めるとするのが最も単純な破壊規準として知られている。ということは、亀裂長が大きいほどその

⁶⁵ 一般の人に疲労という言葉が伝わったきっかけの一つは御巢鷹の尾根に墜落した日本航空の飛行機事故だろう。直接の原因は飛行機後部隔壁が破裂して垂直尾翼を吹き飛ばしたとされるが、その破裂の原因の亀裂は疲労によるものと診断された。客室内気圧を約 1 気圧に保つためにタンクのように造られた客室の後部隔壁には、飛行機の 1 フライト毎に外気圧との大きな気圧差が作用し、フライト回数と同じ回数の疲労試験をしていることになる。そしてその圧力差が徐々に伸展させた亀裂が破裂の原因とされている。

⁶⁶ 付録 E に説明しておいた。

平方根に比例して弱くなるのが最も重要な点である。さらに重要な結論は、応力が \sqrt{r} の特異性を持っていること⁶⁷である。

(10) 環境破壊

鋼の内部や囲む環境によって相乗的に生じる破壊のことであり、材料の脆化を伴う破壊がある。代表的な二つを簡単に説明しておく。

応力腐食割れ: 腐食環境下でさらに負荷が加わることによって、腐食と高応力の相乗効果が生じて、応力負荷後ある程度時間が経ってから起こる破壊である。そのため遅れ破壊とも呼ばれる。

水素脆化: 材料中に残存した微量の水素によって脆化が進むもので、低い応力レベルで破壊することがある。

(11) 降伏現象のモデル化

最後にちょっとだけ簡単な数理物理で遊んでおく。材料が壊れること、あるいは正確には鋼が降伏するという物理現象をいかに数理モデルにしてあるかを説明し、材料がせん断で破壊されることを学ぶ。鋼橋の設計では降伏応力を材料強度として捉えるので、その大事な力学モデルをここで説明しておく。

降伏曲面と降伏条件: まず図 K.10 の O から A の弾性モデルの最も基本的な Hooke の法則が何だったか覚えているだろうか。実は、2 種類の変形で抵抗する材料モデルである。一つは体積弾性係数 K をバネ定数として体積膨張という変形で抵抗するもので、生じる抵抗力は平均応力で

$$\sigma_{\text{AVE}} = K \Delta, \quad \text{ここに} \quad \sigma_{\text{AVE}} \equiv \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}), \quad \Delta \equiv \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$$

という関係になる。 σ_{AVE} が平均応力で負の静水圧に相当し、 Δ が体積ひずみである。そしてもう一つの抵抗は、せん断弾性係数 μ をバネ定数としてせん断変形で抵抗し、抵抗力がせん断応力として発生する。これは

$$\sigma'_{ij} = 2\mu \epsilon'_{ij}$$

という関係になる。ここに σ'_{ij} と ϵ'_{ij} はそれぞれ偏差応力と偏差ひずみと呼ばれる量で

$$\sigma'_{ij} \equiv \begin{cases} \sigma_{ij} - \sigma_{\text{AVE}} & i = j \text{ 直応力の場合} \\ \sigma_{ij} & i \neq j \text{ せん断応力の場合} \end{cases}, \quad \epsilon'_{ij} \equiv \begin{cases} \epsilon_{ij} - \frac{\Delta}{3} & i = j \text{ 伸びひずみの場合} \\ \epsilon_{ij} & i \neq j \text{ 角度変化の場合} \end{cases}$$

と定義されている。「偏差」という言葉は「せん断」と等価だと考えていい。つまり、偏差ひずみが実質的な角度変化であり、偏差応力が実質的なせん断抵抗力であることをまず覚えて欲しい。

では次に、降伏や塑性変形について考察しよう。実験⁶⁸によって

例えば砲丸投げの砲丸を深い海溝に沈めると、静水圧によって直径は小さくなるが、海面に戻すと元の大きさに戻る。

ということがわかっている。つまり塑性変形はせん断変形なのだ。転位はせん断応力状態で移動するのである。これは、鋼の塑性が平均応力 σ_{AVE} とは無関係である⁶⁹ことを示唆する。したがって、図 K.10 の A の応力状態は、材料中の抵抗力のうちの偏差応力がある閾値に達した状態だったことを意味する。

⁶⁷ もちろん亀裂伸展の規準はこのような簡単なものではないことはわかっていて、開口変位による規準やエネルギー的な規準等の数多くの古典的研究がある。しかもこの結果は弾性解であり、亀裂先端付近で（低温の脆性破壊以外では）実際に生じているはずの塑性変形も考慮されていない。しかし破壊力学はものすごく難しいので、これ以上の記述は止めておく。

⁶⁸ もちろん、そんな実験をしたことも見たことも無いが。

⁶⁹ 事実として厳密にはそうではない。塑性論を勉強してください。

ここで「あれっ!？」と思った学生さんはちょっと勉強が足りない。図 K.10 は引張試験の結果でありせん断応力やせん断変形は生じていないじゃないかと。しかし図 K.18 (完全2次元) のように、水平軸方向に単純に σ_H で引張った状況は、45度座標変換した応力成分で眺め直すと、 $\frac{\sigma_H}{2}$ の等方(平均)応力状態と、同じ大きさの純せん断応力状態(偏差応力に相当)の重ね合わせであることがわかる。したがって単純な引張試験片も成分的にはせん断で抵抗している。

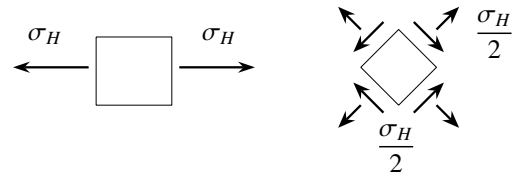


図 K.18 引張試験中に生じるせん断応力

それを踏まえると、応力そのものではなく、平均応力成分を取り除いた偏差応力のノルム(絶対値⁷⁰)のような物理量で、降伏し始める条件つまり降伏条件を定義するのが望ましい。応力はテンソルだが、ちょうどベクトルのノルム⁷¹と同じように、各成分の2乗和でそのテンソルのノルムを定義しよう。具体的には

$$J_2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma'_{ij} \sigma'_{ij}$$

でノルムの2乗を定義して⁷²おいて、これがある値に達したときに降伏するとモデル化するのである。つまり

$$f \equiv \sqrt{J_2} - \tau_Y = 0$$

が基本的・代表的な降伏条件である。 τ_Y は材料特有の降伏応力という材料パラメータである。ノルムに $\frac{1}{2}$ をつけたのは、例えば純せん断状態 $\sigma_{12} = \sigma_{21} = \tau \neq 0$ のみだったときに、降伏条件が

$$\sqrt{J_2} = |\sigma_{12}| = |\tau|, \quad f = |\tau| - \tau_Y = 0 \quad \rightarrow \quad |\tau| = \tau_Y$$

になるように調整したかったからで、この方が物理的にわかり易い。したがって τ_Y はせん断降伏応力と捉えればいい。また $\sqrt{J_2}$ を(あるいはその $\sqrt{3}$ 倍を)相当応力と呼ぶ。引張試験の場合は $\sigma_{11} \neq 0$ のみなので

$$\sigma'_{11} = \frac{2}{3}\sigma_{11}, \quad \sigma'_{22} = -\frac{1}{3}\sigma_{11}, \quad \sigma'_{33} = -\frac{1}{3}\sigma_{11},$$

となることから

$$\sqrt{J_2} = \frac{|\sigma_{11}|}{\sqrt{3}} \quad \rightarrow \quad f = 0 \text{ は } |\sigma_{11}| = \sqrt{3}\tau_Y \text{ を意味するから} \quad \rightarrow \quad \sigma_Y = \sqrt{3}\tau_Y$$

という関係がある。このことから、引張降伏応力 σ_Y はせん断降伏応力 τ_Y の $\sqrt{3}$ 倍であることがわかる。これは鋼のせん断強度を定義するとき用いるので、覚えておくこと。

ところで、上の降伏条件 $f = 0$ は応力の6次元空間における曲面であることはわかってもらえるだろうか。6次元空間の代わりに主応力の3次元空間で描いたのが図 K.19 である。この3軸から同等に離れたベクトル \mathbf{e} の向きは、 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ の状態、つまり平均応力(静水圧)状態の向きである。そして、この \mathbf{e} を法線を持つ平面を π 平面と呼ぶが、その平面は平均応力一定 ($\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \text{一定}$) の面であり、その平面上の降伏条件は円になる。すなわち、この図の円柱の表面が降伏条件を満足する曲面になっている。荷重を受けた鋼は、その内部の応力状態がこの円柱表面(降伏曲面:降伏条件)に達したときに降伏してひずみが急に大きくなる。なぜ無限に長い円柱になっているかというと、静水圧では降伏しないからだ。よくできたモデルでしょ。

⁷⁰ 応力の各成分は図 K.18 のように、用いる座標系で値が異なるから、そのままでは規準や条件には使えず、何らかのスカラー量を用いる必要がある。弾性体力学で習った不変量や主応力がその候補だ。

⁷¹ Euclid 幾何のベクトル \mathbf{u} のノルムは自分自身の内積の平方根で定義され、座標成分で書くと $\sqrt{\sum_{i=1}^3 u_i u_i}$ で定義されるから。

⁷² 弾性体力学で習った、偏差応力の第2不変量である。

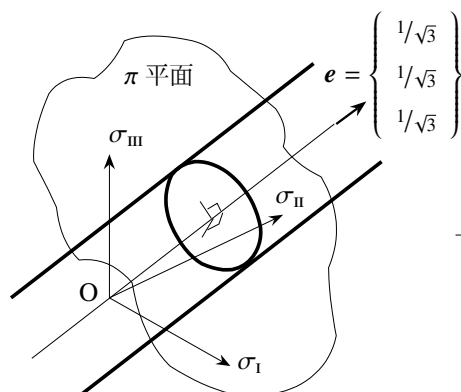
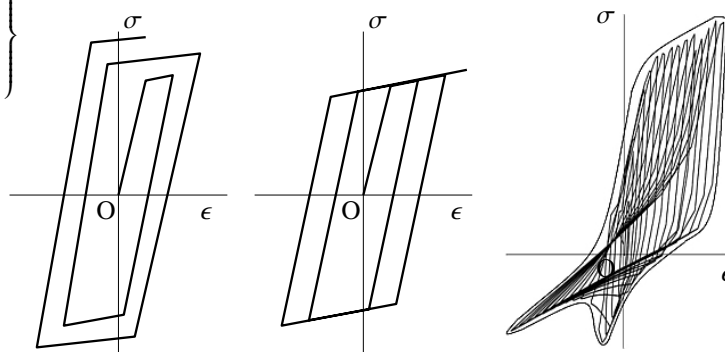
図 K.19 π 平面と Mises の降伏条件

図 K.20 等方硬化と移動硬化そして包絡線

硬化と繰り返し载荷: 降伏後、図 K.10 の D で再度抵抗が上がるのを硬さに関連付けて説明したが、その硬化現象は降伏条件の降伏応力 τ_Y が塑性変形に依存して大きくなるモデルで表現すればいい。ところで兵庫県南部地震のときの橋脚のように、地震時に塑性変形を伴いながら交番荷重にさらされる場合もある。このような状況を試験するために、繰り返し载荷試験を行うことがある。そのとき、図 K.20 の左図のように、降伏応力 τ_Y が徐々に大きくなるような材料もある。このような硬化を等方硬化と呼ぶ。それに対して真ん中の図のように、降伏応力 τ_Y そのものは一定のままに荷重した方向に硬くなる⁷³ような材料もある。このような硬化を移動硬化と呼ぶ。一般に鋼等の多くの材料はこの両方の硬化特性を持っている。繰り返し载荷に対してはこのようにループを描くが、このループの中の面積が塑性変形に伴って失われたエネルギー（非可逆的な変形による損失）に相当すると考えればいい。実際の構造では、局部座屈や内部劣化等により見かけ上の軟化（負の硬化）も生じることがある。そのような繰り返し载荷の応力ひずみ関係（あるいは荷重変位関係）を解釈する場合に、その包絡線（図 K.20 の右図 [110] 参照）を求めて、その面積や形状で延性等の特性を総合判断して議論する場合もある。

K.3 構造設計の考え方

K.3.1 新設の手順

国土計画と地域計画・都市計画に基づいて架設場所がある程度の自由度付きで決定されたあと

1. 路線を決定して形式を選ぶ — 技術者の自由度は無限大
2. 荷重（作用）を選択する — 道路橋示方書（国道用⁷⁴だが一般的な規準である）を用いる
3. 支間を決め、構造モデルを作り、断面を仮定する — 多分、経験が必要
4. 断面力や応力を求める — 構造力学の知識が必要
5. 照査する — 要求されている性能を備えているかどうかの確認
 - (a) 安全性の確保：【断面抵抗 \leq 強度】
 - (b) 使用性の確保 — 走行性や振動（たわみ制限等）

⁷³ 一度ある向きで降伏を経験した材料が逆方向に荷重されたときに、材料本来の降伏応力に達する前に次の降伏が生じてしまう現象を Bauschinger 効果と呼ぶ。

⁷⁴ 東京工業大学の三木千寿先生は道路橋示方書からの飛躍が必要ではないかと文献 [189] に書いておられた。誤解かもしれないが、「守破離」の「離」が昨今の鋼構造技術には不足しているということかもしれない。我々著者自身のことは棚に上げておくが。

(c) 疲労等, その他の限界状態の確認

(d) 経済性の確認

6. すべてが満足されていたら設計は終了; そうでない場合には 1. から 4. のどこかの段階に戻るというステップになる。

K.3.2 安全に対する設計法

(1) 基本的な安全確保規準

最も基本的で重要な要件は, 強度という観点からの安全性の確保である。基本的には, 決められた作用に対して生じる抵抗応力 σ が

$$\sigma \leq \sigma_{\text{spec}}$$

を満足させるのが設計である。ここに σ_{spec} が強度の規準値である。できるだけ等号に近づくようにすれば経済的な構造が設計できたことになる。なお, 上式のような記述を「性能」と呼び, 要求すべき性能をまず規準として定義し, その性能を達成するように設計する。これを総称して性能照査型設計法と呼んで⁷⁵いる。教科書の第 1.1 節の p.4~5 を読む。以下, 代表的な二つの設計法について概略する。

(2) 許容応力 (度) 設計法

鋼構造では降伏応力を材料強度と捉えることから, 原則弾性解析で設計する。したがって上式の基本的な表現を具体的に書き直すと

$$\sigma \leq \sigma_a, \quad \sigma_a = \frac{\sigma_{\text{ult}}}{\gamma}, \quad \sigma_{\text{ult}} = \sigma_Y$$

となる。終局強度 σ_{ult} は降伏応力 σ_Y である。そして σ_a を許容応力と呼ぶ。また γ は安全率で, 設計プロセスや荷重の定義等に含まれる可能性がある種々の不確実性を飲み込むための係数である。例えば次のような要因が考えられる。

- 荷重 (作用) そのもののばらつきや確率論的な発生特性およびそのモデル化に潜在する誤差。
- 材料 (強度) そのもののばらつきと, 長期使用中の劣化特性の不確実性。
- 設計計算に用いる構造力学がそもそも持っている誤差と, 解析するために作成した構造モデルの近似度が持つ誤差。
- 発生確率が非常に小さいと予想される作用に対処するための余裕の確保。橋梁が一生で経験するすべての事実を我々人間が確実にモデル化できていないことへの対処。
- 製作や施工時の誤差。

瑕疵やミスは本来は容認してはいけないので省いた。現在のところ安全率はほぼ $\gamma = 1.7$ という値⁷⁶を用いている。また社会基盤構造では, 引張強度等の終局強度 σ_u に対する安全率はほぼ 3 で⁷⁷ある。このような設計法を許容応力設計法⁷⁸と呼ぶ。

⁷⁵ 多分これは間違いである。多くの研究者や技術者はずっと違う捉え方をしていると感じるが, 著者にはそのニュアンスが理解できないので敢えてこう書いてみた。

⁷⁶ 航空機における同様の考え方で捉えた安全率はやや小さく 1.5 らしい。零戦設計以前は 1.8 だったらしい。

⁷⁷ 確かこの 3 という数値が, 明治時代あたりに「えいやっ」で提案されて現在に至っているとするお話を, 東京大学の伯野元彦先生から (笑い話として) 聞いたような記憶があるが, 多分記憶違いだろう。

⁷⁸ この設計法のときだけ「応力度」という言葉を使い続けているのは多分何か理由があるのだろう。しかし, 種々の教科書で一般的に応力を指すときに「度」は付けられない方が普通のものである。第 1 著者は好きになれないので設計法と呼ぶときも度はずして。羽目をはずすつもりは無いが, ちょっと度が過ぎるような気がする。呵呵。

(3) 荷重係数等を併用した限界状態設計法

荷重係数: しかし、安全率が必要な理由が上述のように多種存在するので、道路橋示方書の随所でそれが個別に定義されていて、統一した考え方で安全の程度を確保できているのかがすぐにはわからない状況にあるのも事実である。少なくとも力学的に合理的ではないように見える（だけで、鋼構造の場合はそんなに問題は無いらしいが）。例えば、水槽を設計する際の水の重量つまり水の密度にばらつきがあるかどうか考えると、それは橋を渡るトラックの重量のようなことはあり得ないということは明らかだ。つまり、荷重それぞれに対して適切な安全率のようなものを個別に定義する必要がありそうだ。前述の許容応力設計法では、このような個々の安全率を考慮した上で荷重（作用）が道路橋示方書に個々に定義されていたことになる。しかし、作用の特性や種々の技術や理論の改善や進歩等を踏まえて、もう少し安全率の設定の仕方を陽な形で規定しておく方が望ましいという考え方にも一理ある。そこで、ある荷重（作用）に対して、そのばらつき等を考慮する係数を乗じて設計荷重とするのが適切だろうと考えた。このような係数を「荷重係数」と呼ぶ。

限界状態設計法: 性能としていくつかの限界状態を定義して、その限界状態における性能確保を規定する設計法が考えられた。これを限界状態設計法と呼んでいる。例えば、上述の許容応力設計の性能規定（強度の確認）に対応した限界状態は終局限界状態⁷⁹であり、その照査を「終局限界状態に対する性能照査」と称するのである。さらに、たわみ制限や振動性能のようなものを「使用限界状態」として設定したり、疲労に対する性能を「疲労限界状態」として設定し、それぞれの性能を照査するといった方法をとっている。

荷重係数を用いた終局限界状態設計法: 上述の許容応力設計法と比較するために、ここでは終局限界状態設計法を概説 [160] しておこう。まず、設計時に考慮すべき N_F 個の荷重 $F_i, i = 1, \dots, N_F$ 毎にそれを割り増す係数つまり荷重係数 γ_i を規定しておく。このような設定のもと、構造解析あるいは非線形の設計計算による解析によって、設計中の構造の抵抗力 S を

$$\sum_{i=1}^{N_F} \gamma_a S(\gamma_i F_i)$$

で算定する。ここにさらに導入された係数 γ_a は、構造解析モデルの誤差や構造力学の近似度を考慮した構造解析係数と呼ばれる安全率である。塑性変形も含む終局状態を構造解析で予測するため、一般的には、 S は応力ではなく断面力の次元を持つものと捉えた方がいいかもしれない。これに対し、材料強度 f_m もばらつくことから、その材料に材料係数と称する安全率 γ_m を規定する。そして設計中の構造に対する総合的な材料強度の限界値 R も、上記の S に対応させた量として

$$\frac{R\left(\frac{f_m}{\gamma_m}\right)}{\gamma_b}$$

のように算定しておく。ここにさらに導入された係数 γ_b は部材係数と呼ばれるもので、部材毎にその重要度や部材解析の不確実性等を考慮して規定される安全率である。最終的な終局強度の性能を

$$\gamma_s \frac{\sum_{i=1}^{N_F} \gamma_a S(\gamma_i F_i)}{R\left(\frac{f_m}{\gamma_m}\right)} \leq 1.0 \quad \text{あるいは} \quad \sum_{i=1}^{N_F} \gamma_a S(\gamma_i F_i) \leq \frac{1}{\gamma_s \gamma_b} R\left(\frac{f_m}{\gamma_m}\right)$$

⁷⁹ 鉸桁を限界状態設計法で設計した場合に、桁高を低く経済的な断面にできることがあり得ることのわかり易い解説が文献 [121] にある。第 1 著者にはなかなか難しい内容だが、実橋の例も紹介されている。

と規定するのである。ここでも、さらに導入された γ_S は構造物係数と呼ばれる安全率で、構造の重要度等を考慮する係数である。このように、荷重や強度等の別々の要因でばらつくものをそれぞれの要因毎にその余裕を陽に定義していることから、許容応力設計法に比べて合理的な⁸⁰設計法であることが明らかである。

(4) 終局限界状態設計法としての許容応力設計法の解釈

道路橋示方書で与えてある荷重 $F_i^{(A)}$ は、既に荷重係数をそれぞれの荷重に対して乗じた $\gamma_i F_i$ そのものである（後述の例えば L 荷重で規定される p_1, p_2 の値そのものには既に荷重係数が乗じられているのではないかと考えれば、前述の S の式は

$$\gamma_a \sum_{i=1}^{N_F} S(F_i^{(A)})$$

となる。弾性解析であることから非線形性はほぼ無視できる。また材料強度も $\frac{f_m}{\gamma_m}$ そのものが道路橋示方書に材料強度しかもそれは許容応力 $f_m^{(A)}$ として与えられるとすれば、前述の R は

$$\frac{R(f_m^{(A)})}{\gamma_b}$$

と考えればいい。これを用いて必要とする性能を書き直すと、ここでも線形解析であることを考慮すれば

$$\sum_{i=1}^{N_F} S(F_i^{(A)}) \leq \frac{R(f_m^{(A)})}{\bar{\gamma}}, \quad \text{ただし} \quad \bar{\gamma} \equiv \gamma_S \times \gamma_a \times \gamma_b$$

と書くことができ、これは取りも直さず許容応力設計法の性能規定に一致している。つまり、許容応力設計法が間違った（劣った⁸¹）考え方というわけでは決してなく、この荷重係数を用いた合理的な設計法を最初から念頭に置いた設計法であって、個々の設計荷重や強度に個々の荷重係数や安全率を乗じたものとして道路橋示方書で（長い研究の歴史に沿って）定義してきたというのが本質的な事実⁸²ではない⁸³だろうか。

K.3.3 信頼性理論と設計法

安全率はもちろん、荷重係数等の係数も、論理的には力学的な信頼性を考慮して決定しておく必要があるだろう。つまり、構造および材料の抵抗 S はある特性を持ったばらつきが存在し、同様に強度 R もばらつき⁸⁴がある。このとき、 $S > R$ という超過の破壊確率があるレベル以下であるようにすれば安全性が確保できた⁸⁵ことになる。この超過確率をうまく設定することによって、こういった係数を規定するのが望ましい⁸⁶のだろうが、現在どのような研究が行われているかは調べていない。

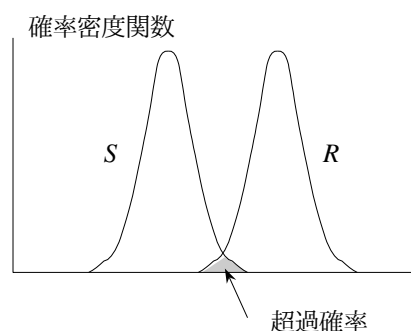


図 K.21 超過確率（破壊確率）の概念

⁸⁰ それなのに線形解析で設計するらしい。なぜ?

⁸¹ 弾性解析だけではやはりまずいことは大昔からもちろん理解されていて、ある程度の塑性解析を併用してさえいれば、特に劣るわけではないという意味である。

⁸² この節は、西野文雄先生の主張を第1著者がいいように誤解して書いたものである。

⁸³ ただ「最小板厚」等のみなし規程は性能照査型とは縁が無いのだから、まずは断面を仮定し易くするためにはとても便利な規定である。手戻りが多くなるとしても、断面仮定のプロセスと照査のプロセスが分かれるだろうから、これはこれでいいようにも思える。

⁸⁴ インターネットでは R は抵抗とあるが、ある作用に対する抵抗と強度と考えるなら Resistance と Strength で逆だ。いつも逆に書いて東北大学の鈴木基行先生に指摘される。実は S は Stress だということを早稲田大学の秋山充良先生に教えてもらった。

⁸⁵ とまかくも第1著者は統計・確率が全くわからず、例えば試験問題の答えを見せてもらってもそれが正しいかどうかともわからないくらいなので、信頼性設計法は大学院で聴講したが、完全に何もわからなかったし、今も理解していない。

⁸⁶ すべての親柱に「この橋梁は○%の確率で崩壊する恐れがあります。」と書いておくのがいいのではないかと、というのは冗談（西野文雄先生がそうおっしゃっていたような曖昧な記憶はあるの）だが、絶対に安全ですと宣言したあの施設があつたわけである。土木技術者は絶対の安全宣言等したことは無いと思うのだが、一般の人にはそうは伝わっていないのだろう。東北大学の鈴木基行先生のご示唆（コンクリートの世界では常識らしいが）では、設計の最後に「ちょっとした念のため」を安価で加えておくのが望ましいし、それが現実的な対応であろうということだった。誤解しているかもしれないが。

K.4 鋼の強度 — 許容応力

K.4.1 引張強度

コンクリートはセメントペーストと骨材が化学反応（水和反応）で付着しているだけなので、圧縮強度は十分に確保できるものの引張強度がほぼ零になるのは理解できる。これに対して鋼はどんな載荷状態でも同じ強度を持っているように思える。しかし残念なことに、鋼部材の寸法が持つ「幾何学的な」特性のために、いくつかの強度を別々に考える必要がある。まずは基本的な引張強度から順に説明しよう。

例えばある種のトラス橋の下弦材は常に引張られているので、それを設計する場合には、鋼の引張強度がわかっていたら十分だ。引張試験で明らかのように、引張強度は引張試験の最大応力でよさそうだ。しかし、よく用いられる軟鋼は降伏後におどり場があってひずみが急増するので、橋梁の大きなたわみにつながる可能性があり、落橋しなくても使用性に悪影響を及ぼすことになる。そういったこと⁸⁷を踏まえ、鋼の引張強度を降伏応力 σ_Y で定義する。したがって、安全率 γ を用いた引張強度つまり引張の許容応力 σ_{ta} は

$$\sigma_{ta} = \frac{\sigma_Y}{\gamma}, \quad \gamma = 1.7$$

で規定される。この文書では tension- allowable という添え字記号を使った。これによって弾性解析で設計ができるわけだが、設計荷重を超えた真の強度が曖昧なままになっていることには注意が必要だろう。安全率は現在のところ 1.7 になっている。例えば SM400 の引張強度が $\sigma_u = 400 \text{ N/mm}^2$ で降伏応力が $\sigma_Y = 245 \text{ N/mm}^2$ になっているから、安全率で除して許容応力が $\sigma_a = 140 \text{ N/mm}^2$ となる。許容応力の 2.86 倍が強度なので、それに対する安全率は 3 くらいである。教科書の表 4.1 を参照して欲しい。

K.4.2 棒の圧縮強度

(1) 単純支持棒の座屈

次にトラス上弦材の設計を考えてみよう。上弦材の多くは常に圧縮されているが、引張強度と同じ応力レベルまで安全だろうか。例えば細長い物差しを引張ってみて欲しい。引きちぎることはほぼ不可能だ。では押しってみて欲しい。あっという間に曲がってしまい、ややもすると壊れてしまうだろう。これは物差しが「薄い」のが原因なのだ。ここで、また「あれっ!？」と思った人は勉強が足りないわけだが、部材の寸法が強度を左右するのを感ずるのも当然かもしれない。実は物差しを押ししたときに急に曲がろうとするのは、いわゆる「座屈現象」なのだ。物差しを押ししたつもりなのに、薄肉断面の細長い棒なので梁のように曲がってしまうのだ。構造力学の授業でトラスを習ったときは、弦材にはすべて軸力抵抗しか生じなかった⁸⁸し、曲がらなかった。しかし実際の物差し、あるいは柱や棒を軸方向に圧縮すると突然曲がってしまう可能性があるわけだ。ここでは、圧縮された柱は曲がるかもしれないと考えてみよう。

トラスの格点をピン接合でモデル化していたから、上弦材 1 本を取り出して圧縮した状態は、単純梁を軸力 P で圧縮した状態とほぼ同じと考えていい。そして図 K.22 のように曲がったとしよう。すると、点 A の断面まわりの曲げモーメント（内力）と外力 P のモーメントのつり合いは

$$M(x) = Pw(x)$$

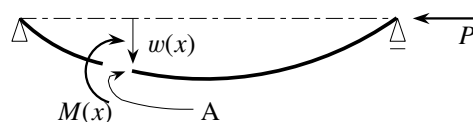


図 K.22 曲がった単純梁のつり合い状態

⁸⁷ 実は本当の理由は知らない。

⁸⁸ トラスの力学では「曲がる可能性」を「とりあえず」無視していたのである。

になることが理解できるだろう。 w はたわみである。一方梁理論から、曲げモーメントは曲率に比例して

$$M(x) = -EI w''(x)$$

という抵抗をすることを知っている。ここにプライムは x による微分を表し、 E は Young 率で I は断面 2 次モーメント、そして EI は曲げ剛性である。これを上式に代入すると、たわみ w で表したつり合い式が

$$EI w''(x) + P w(x) = 0$$

と求められる。ここでは圧縮を正の P としているので

$$\mu^2 \equiv \frac{P}{EI} > 0$$

と定義して微分方程式を解くと

$$w(x) = a \sin \mu x + b \cos \mu x$$

が一般解である。最終的に、両端のたわみが零になる境界条件にこの一般解を代入すると、結局

$$w(0) = b = 0, \quad w(\ell) = a \sin \mu \ell + b \cos \mu \ell = 0$$

であればいい。したがって $b = 0$ であると同時に

$$a \sin \mu \ell = 0$$

が成立していなければならない。

この最後の式は二つの可能性を提供している。一つは $a = 0$ であるが、これだと結局 $w(x)$ が恒等的に零ということになり、曲げ変形は発生しないことになる。もちろんこれはトラスの解であり、また急に曲がる前の解⁸⁹である。今ここで検討しているのは「軸力のみで曲がる解が存在するか否か」であったはずだ。したがって $a \neq 0$ となる解の存在を捜す必要があるが、それは上式の二つ目の可能性、つまり

$$\sin \mu \ell = 0$$

であればいいことがわかる。したがって、もし

$$\mu \ell = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

になるような μ が存在した場合には、 $a \neq 0$ の解を持つことができる。したがって μ の定義式にこの結果を代入すると

$$\mu = \sqrt{\frac{P}{EI}} = \frac{n\pi}{\ell} \rightarrow P = P_{cr(n)} \equiv \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 EI, \quad n = 1, 2, \dots$$

で定義される限界荷重 $P_{cr(n)}$ に外力 P が達したときに $a \neq 0$ でもよくなり、曲がってもいい、つまり座屈⁹⁰が発生する可能性があるということになる。図 K.23 を参照のこと。

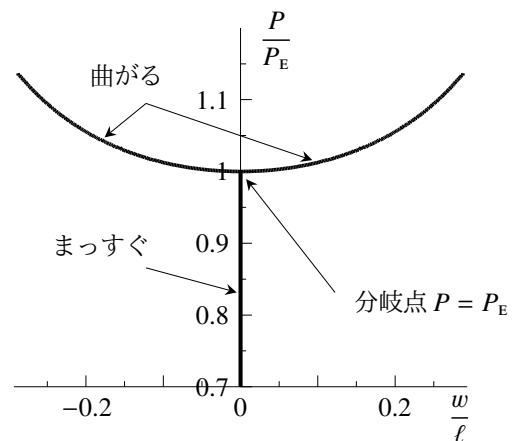


図 K.23 単純梁の座屈

⁸⁹ いわゆる「当たり前の答」「無意味な解」であり、常に解の一つであり得る。

⁹⁰ このような座屈を、軸方向に縮む変形状態から曲がる変形状態へと「枝分かれ」のように状態の急な移動が生じる（図 K.23 は弾性有限変位解析解）ことから、分岐座屈と分類して呼ぶことがある。

通常は零から荷重 P を増加させていくので、最初の分岐座屈点は $P_{cr(n)}$ の最小値、つまり $n = 1$ のときの

$$P_E \equiv P_{cr(1)} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2}$$

が座屈荷重となる。これが基本的な **Euler 座屈** の答であり、この P_E が最も基本的な柱の座屈荷重で、**Euler 荷重** と呼ばれている。結局積分定数 a は不定のままだから、求められたたわみ形状は

$$w(x) = a \sin\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$$

となり、大きさは不定だが sine 曲線の半波長の形状で曲がろうとすることがわかる。このような座屈形状を座屈モードと呼ぶ。この座屈荷重⁹¹に対応する軸応力からその強度を、つまり軸圧縮強度を計算すると

$$\sigma_{cr} \equiv \frac{P_E}{A} = \frac{\pi^2 EI}{\ell^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

となる。ここに A は棒の断面積であり

$$\lambda \equiv \frac{\ell}{r}, \quad r \equiv \sqrt{\frac{I}{A}}$$

と定義した。 r は断面の回転半径と呼ばれ、断面定数だけで計算できる長さの次元を持ったパラメータで、断面寸法を代表する長さと考えればいい。 λ は細長比^{ほそながひ}と呼ばれ、断面寸法と比較したときの棒の細長さの程度を表すパラメータである。このように、部材の寸法によって圧縮強度が違ってくるのだ。

例えば図 K.24 の棒はどれが細長いか判断するのは難しいでしょ? 長さが同じ A と B では B が太いから A が細長いのはわかるが、同じ長さの B と C と D のどれが細長いかは、細長さの定義が無ければわからないはずだ。だからこの細長比という定義が必要になるのである。この強度式から明らかなように、座屈応力は細長比の 2 乗に反比例して

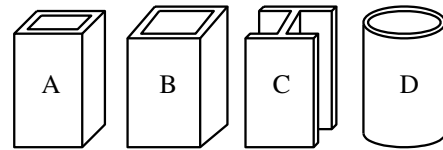


図 K.24 どれが細長い?

いる。したがって、柱が細長くなればなるほど急激に座屈応力は低くなる。結果を図 K.25 に示した。この曲線を **Euler 曲線** と呼ぶ。図 K.23 を見ると座屈後も大きな荷重を支えられるようにも見えるが、横軸のスケールから明らかなように、急激なたわみの増加⁹²があることから Euler 荷重を圧縮強度と考えざるを得ない。

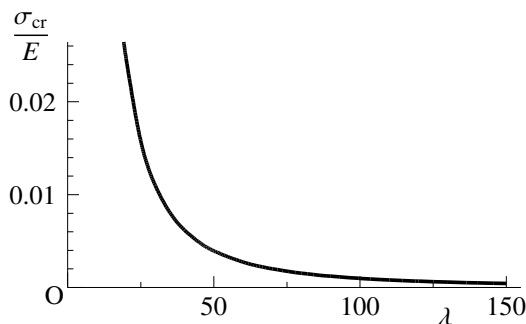


図 K.25 Euler 曲線

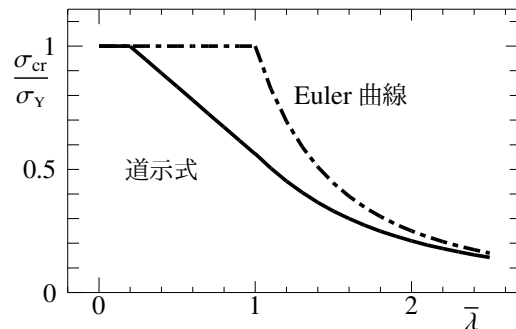


図 K.26 道路橋示方書の圧縮強度

(2) 圧縮許容応力

規定: 材料の降伏応力を σ_Y としたとき、Euler 曲線の縦軸が (σ_Y/E) を超える部分はほとんど意味が無い。そこで上の Euler 荷重の式を降伏応力で割ると

$$\frac{\sigma_{cr}}{\sigma_Y} = \frac{1}{\lambda^2} \leq 1$$

⁹¹ このような考え方の柱の理論を、曲がる柱の理論なので「梁-柱理論」と呼ぶ。

⁹² 後述の板の場合は必ずしもそうではない。

と表現できる。ここに

$$\bar{\lambda} \equiv \frac{1}{\pi} \lambda \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}$$

と定義した量は細長比パラメータと呼ばれる。この関係式を図 K.26 に一点鎖線で示した。これが理論的な圧縮強度であり、理論的にはこの一点鎖線を安全率 γ で割ったものが鋼の圧縮許容応力 σ_{ca} になる。実際には上の理論式そのものではなく、実験結果等を考慮した曲線で許容応力が

$$\sigma_{ca} = \frac{\sigma_{cr}^{(c)}}{\gamma}, \quad \frac{\sigma_{cr}^{(c)}}{\sigma_Y} = \begin{cases} 1.0 & \bar{\lambda} \leq 0.2 \\ 1.109 - 0.545 \bar{\lambda} & 0.2 < \bar{\lambda} \leq 1.0 \\ \frac{1.0}{0.773 + \bar{\lambda}^2} & 1.0 < \bar{\lambda} \end{cases}$$

のように道路橋示方書⁹³では規定されている。教科書の表 4.3 を参照のこと。この強度 $\sigma_{cr}^{(c)}$ の値も Euler 曲線と比較して図 K.26 に実線で描いておいた。

例：長さ $\ell = 5,000 \text{ mm}$ の上弦材の最大軸力が圧縮の $N_{\text{MAX}} = -1.5 \text{ MN}$ だったとして、鋼種 SM490 を用いた断面を図 K.27 のように設計したとする。果たして安全は確保できているだろうか？ 断面定数は

$$A = 11,600, \quad I_h = 75,150,000, \quad I_v = 62,900,000, \quad r_v = 73.6$$

となる。ここに I_h は水平中央軸回りの（強軸）断面 2 次モーメントであり I_v は鉛直中央軸回りのそれである。後者が弱軸なので、断面の回転半径は弱軸に対して算出してある。弦材長さが 5,000 なので細長比は

$$\lambda = \frac{\ell}{r_v} = 67.9$$

となる。これを教科書の表 4.3 の SM490 の規定⁹⁴に代入すると結局

$$\sigma_{ca} = 185 - 1.2 \left(\frac{\ell}{r} - 16 \right) = 123 \text{ N/mm}^2$$

が圧縮許容応力となる。一方、最大軸力から生じている断面の応力を求めると

$$\sigma = \frac{|N_{\text{MAX}}|}{A} = 129 \text{ N/mm}^2 > \sigma_{ca} = 123 \text{ N/mm}^2$$

となってしまうので、この設計は失敗したことになる。断面を決めないと強度が決められないから難しい設計であること、あるいは繰り返しながら⁹⁵設計できないことを学んで欲しい。自宅でこの設計を改善してギリギリ許容応力になるような断面を求めて欲しい。引張弦材の場合は、最大軸力を引張許容応力で割れば必要断面積が求められるので断面設計に繰り返すは要らないのだ。

(3) 座屈モードと高次座屈

ところで、 $n \neq 1$ の場合の座屈荷重は何だったんだろう。例えば $n = 2$ を代入するとそれは Euler 荷重の 4 倍になる。これを 2 次座屈荷重と呼ぶ。つまり、この単純梁を注意深く圧縮していき、例えば棒の中央をちょっ

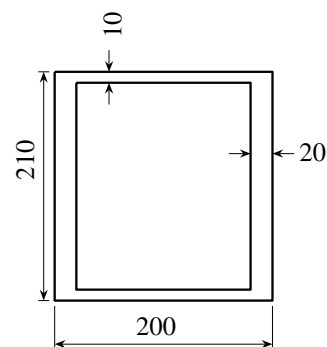


図 K.27 圧縮断面の設計例

⁹³ 溶接箱型断面の場合以外で、しかも SBHS500 と SBHS500W の場合は 0.2 の範囲区切り値が 0.29。

⁹⁴ 教科書の表の 3 列目は SM490 の間違い。

⁹⁵ あるいは仮定断面毎に圧縮許容応力を求めたデータベースがあれば簡単なのかもしれない。

とだけ手で支えておくことによって Euler 荷重後もまっすぐなままで維持できたとすると、その4倍の外力に達したときに座屈することになる。そして、そのときのたわみの解は Euler 座屈モードとは異なり

$$w(x) = a \sin\left(\frac{2\pi x}{\ell}\right)$$

となるので、座屈した瞬間の形状は sine 曲線の1周期分に相当する。手は棒の中央を支えていただけなので、このモードで座屈してしまうことにも注意すること。3次モードまでを図 K.28 に示した。

実際にはこのような高次の座屈は発生しないが、実は、柱の中間にバネ支持等を設けることによってほんのちょっとでも拘束すると、この高次モードに対応する座屈荷重レベルまで強くできることを示唆しているのだ。そういう意味からは、高次のものも含め座屈モードは設計上も非常に重要な概念である。逆に言うと、このモードを知っておかないと、どこのどういう支えが補強に効果的かということが予測できないのである。

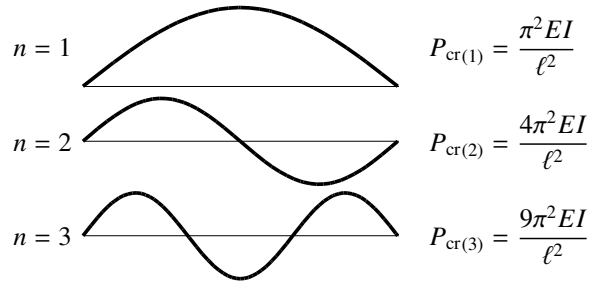


図 K.28 座屈モードと次数

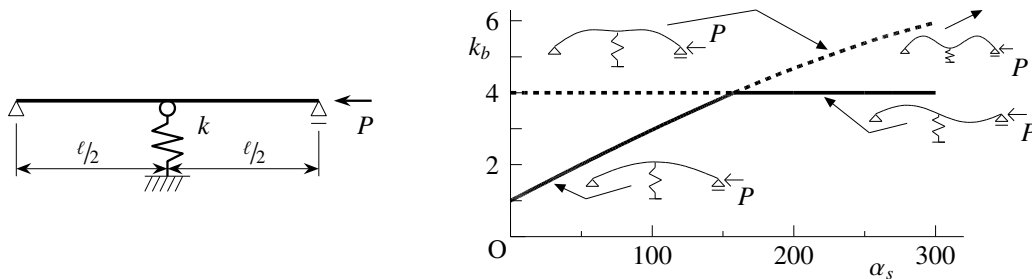


図 K.29 中央をバネ支持された梁-柱

例えば図 K.29 のように、単純梁の中央をゆるくバネ支持する⁹⁶ことを考えてみよう。ちょうど中間に対傾構を配置する等の柔な支持点を設けることに相当する。理論や誘導は割愛するが、結果は図 K.29 のようになる。ここに k_b は座屈係数であり、 α_s は

$$\alpha_s \equiv \frac{k \ell^3}{EI}$$

で定義したバネ剛性を代表するパラメータである。弱いバネでちょっと支えただけで座屈荷重を高める⁹⁷ことができる。このような考察も、高次モードを想像すること等によって容易になるはずだ。

(4) 一般的な境界条件の場合

実はトラスの弦材であっても、格点はガセットプレートで接合されているので純粋な単純支持状態ではなく、ちょっとだけ弾性的に支えられている。それ以外の弦材や床組の各部材でも、一般には両端が単純支持された状態であることはほとんど無い。そこで、その他の境界条件の場合の座屈を考えてみよう。まず片持ち梁の場合の座屈荷重はどうなるかを文献等で勉強する⁹⁸と、最小の座屈荷重が

$$\mu \ell = \frac{\pi}{2} \quad \text{すなわち} \quad P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{4\ell^2} = \frac{1}{4} P_E$$

⁹⁶ 第 6.5.1 節を参照のこと。

⁹⁷ 西野文雄先生が水門ゲートを例にして昼休み等に語ってくださったような記憶がある。

⁹⁸ 第 6 章を参照のこと。

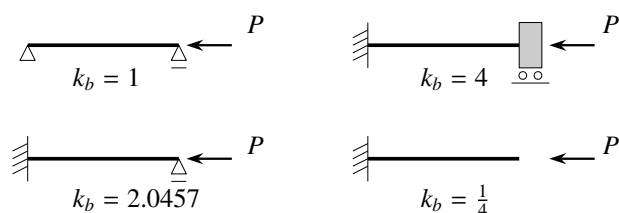


図 K.30 代表的な境界条件の場合の柱の座屈

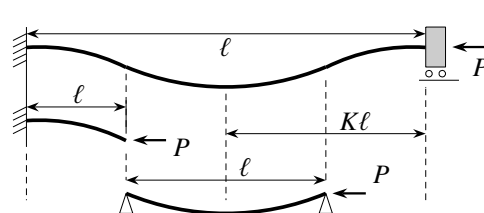


図 K.31 種々の柱の座屈形状

となることがわかる。つまり Euler 荷重の $1/4$ の軸力で座屈するのである。そして座屈モードは sine 曲線の $1/4$ 波長分に相当する。このように、座屈荷重は境界条件に強く支配され、値が大きく異なるのだ。その違いを明確化するために

$$P_{cr} = k_b \frac{\pi^2 EI}{\ell^2} = k_b P_E, \quad k_b = \left(\frac{\mu \ell}{\pi}\right)^2$$

と置き、座屈係数 k_b で境界条件の影響を表現することがある。代表的な境界条件の場合の座屈係数を図 K.30 に示しておいた。しかし座屈係数を直感的に求めるのは難しい。

そこで次のような読み替えをしてみよう。まず Euler 荷重で座屈する単純梁の座屈モードは sine 曲線の半波長分であったのに対し、片持ち梁のモードは $1/4$ 波長分になっている。つまり図 K.31 に示した座屈形状を見て比較すると明らかなように、「長さ ℓ の片持ち梁」が座屈するときの状況は、「長さ 2ℓ の単純支持梁」が座屈するときの状況と一致していることがわかる。

したがって、Euler 荷重公式の ℓ を 2ℓ にした軸力が片持ち梁の座屈荷重になっており、それは Euler 荷重の $1/4$ になる。このことから、上の座屈係数 k_b の見方を変更して

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(K\ell)^2}, \quad K \equiv \sqrt{\frac{1}{k_b}}$$

と読み替えることもできることがわかる。この $(K\ell)$ は有効座屈長と呼ばれ、座屈モードの sine 半波分の長さに相当する。 K は有効座屈長係数と呼ばれる。この $(K\ell)$ の長さは、上の例で述べたように境界条件を考慮してどのような座屈モードで座屈するのかを想像すればおおよそその値を推定できるから、 k_b を求めるよりは推測し易い。表 K.2 に例を示したが、四つ目の境界条件のときには、 $k_b \approx 2.0$ を推測するよりも $K \approx 0.70$ を推測する方が容易だと感じないだろうか。そして圧縮許容応力の規定式の細長比に用いる長さに、この有効座屈長⁹⁹を用いればいいこともわかる。

⁹⁹ 実際の骨組の 1 部材の座屈を考える場合には、部材毎の境界条件が、ここで示したような理想的なものではなく、接合された相隣接する部材同士がお互いにお互いを弾性支持している状態になっていることも頻繁にあり得るので、注意する必要がある。その場合も有効座屈長の考え方でおおよそその座屈荷重を見積もることもできそうだ。

表 K.2 有効座屈長

境界条件		有効座屈長 ($K\ell$)
両端単純支持		ℓ
片持ち		2ℓ
両端固定		0.5ℓ
片端固定片端単純支持		0.699ℓ

K.4.3 梁の曲げ強度

(1) 曲げ引張強度

曲げを受ける部材の引張側は、1軸引張の場合と同様、材料そのものの強度まで耐えられるから、降伏応力を用いて曲げ引張許容応力 σ_{bta} (曲げ引張強度) を

$$\sigma_{bta} = \frac{\sigma_Y}{\gamma}$$

で与えていい。ここに γ は安全率である。

(2) 曲げ圧縮強度

横倒れ座屈: これに対し、曲げを受けた部材の圧縮側の強度は、横倒れ座屈という不安定現象で支配されることがある。例えば2主桁を複数の対傾構でつないだ場合、その対傾構間隔(圧縮フランジの固定点間距離なので)を座屈長 l とする横倒れ座屈の可能性が出てくる。ここではまず、その横倒れ座屈という現象について概説しておこう。

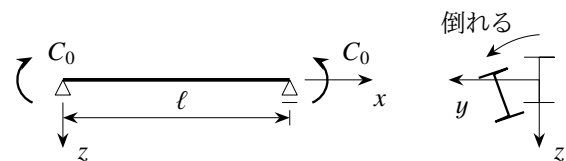


図 K.32 梁の横倒れ座屈

図 K.32 に示したような単純梁に等曲げを作用させた場合には、当然 z - x 面内で曲げ変形が生じると思うだろうが、この外力モーメントがあるレベルに達したときに断面が面外に倒れてしまう現象¹⁰⁰が起こる。これを梁の横倒れ座屈あるいは横ねじれ座屈と¹⁰¹呼ぶ。この座屈荷重は

$$(C_0)_\omega \equiv \sqrt{\frac{\pi^2 EI_y}{\ell^2} \left(GJ + \frac{\pi^2 EI_\omega}{\ell^2} \right)}$$

と求められている。ここに I_y は断面の弱軸 (z 軸) 回りの断面2次モーメントである。

曲げ圧縮強度の規定: このように、曲げを受けた部材の圧縮側の強度は、上述の横倒れ座屈で支配される¹⁰²ことがある。これを踏まえて、長年の研究成果の結果、対傾構間隔(圧縮フランジの固定点間距離なので)を座屈長 l とする横倒れ座屈の可能性に基づく曲げ圧縮許容応力 σ_{bca} (曲げ圧縮強度) が規定されている。例えばI形断面の場合には、Saint-Venant のねじり定数が比較的小さいことから、上式の座屈モーメントから算定できる座屈応力を

$$\frac{\sigma_{cr}^{(bc)}}{\sigma_Y} = \frac{1}{\lambda_b^2}$$

のように近似できる [168] としている。ここに σ_Y は降伏応力であり、 λ_b は横倒れ座屈に関する細長比パラメータで

$$\lambda_b \equiv \frac{2K}{\pi} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}} \left(\frac{\ell}{b} \right), \quad K \equiv \sqrt{3 + \frac{A_w}{2A_f}}$$

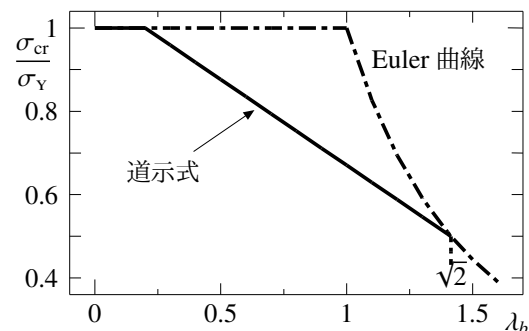


図 K.33 道路橋示方書の曲げ圧縮強度

¹⁰⁰ これも、ある外力レベルまでの曲げ変形とは大きく異なる曲げねじりを伴う変形に突然移行するため、分岐座屈の一つである。

¹⁰¹ どちらかの呼び名が間違いだということを聞いた記憶があるが、どちらだったか覚えていない。

¹⁰² 橋梁の完成系を思い浮かべると、単純桁なら圧縮上フランジの上に床版があるから横倒れ座屈は起きないことが想像できる。架設時や補修時には完成系よりも荷重が小さい(あるいは支保工を設置すればいい)から、設計活荷重で横倒れ座屈を想定した強度を使うのはおかしいようにも思う。文献 [120] にもそれに近いことが書いてある(誤解かもしれないが)。橋梁の設計は難しい。

と定義されている。ここに b はフランジ幅であり, A_w と A_f はウェブとフランジの断面積である。この座屈応力と細長比パラメータの関係は, 形式的には Euler 荷重のそれと同じである。この理論値に対して, 実際の曲げ圧縮許容応力 σ_{bca} は

$$\sigma_{bca} = \frac{\sigma_{cr}^{(bc)}}{\gamma}, \quad \frac{\sigma_{cr}^{(bc)}}{\sigma_Y} = \begin{cases} 1.0 & \lambda_b \leq 0.2 \\ 1.0 - 0.412 (\lambda_b - 0.2) & 0.2 < \lambda_b < \sqrt{2} \end{cases}$$

のように規定 [176] されている。図 K.33 にその関数を, Euler 曲線と比較して描いた。教科書の表 4.4(b) がその圧縮許容応力である。

K.4.4 せん断強度

鋼のせん断試験というものはやらない。その代わりに, 降伏条件が Mises のモデルで精度よく近似できることが多くの実験結果から明らかにされていることを利用している。つまり Mises の降伏条件を説明したときに示した引張降伏応力とせん断降伏応力の関係式

$$\tau_Y = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{3}}$$

に基づいて, 1 軸引張強度 (許容応力) からせん断許容応力を

$$\tau_a = \frac{\sigma_{ta}}{\sqrt{3}}$$

で定義している。教科書の表 4.5 であるが, 数値は丸め¹⁰³である。

K.4.5 複雑な応力状態に対する照査

(1) 曲げとせん断が同等な場合の相関強度

例えば連続桁の中間支点上では, 曲げ等による直応力とせん断応力とが同等なレベルで生じている可能性もある。前節までのそれぞれの強度規定は, この個々の応力成分に対する許容応力の規定だったので, これが組み合わされた場合にそのまま用いるのはやや危険に感じられる。実際, 降伏条件のところで勉強したように, 降伏規準には直応力とせん断応力の両方から算定される偏差応力の絶対値でモデル化していた。したがって多軸応力状態の場合には, Mises の降伏条件に基づいて強度照査をするのが望ましいだろう。そこで, 偏差応力の絶対値を応力成分で表すと

$$J_2 = \frac{1}{3} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2 - \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{11}\sigma_{22}) + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 + \sigma_{12}^2$$

となるので, 降伏条件を τ_Y で除して, $\sigma_Y = \sqrt{3}\tau_Y$ を用いると

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{33}}{\sigma_Y}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_Y}\right)\left(\frac{\sigma_{33}}{\sigma_Y}\right) - \left(\frac{\sigma_{33}}{\sigma_Y}\right)\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_Y}\right) - \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_Y}\right)\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_Y}\right) + \left(\frac{\sigma_{23}}{\tau_Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{31}}{\tau_Y}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_Y}\right)^2 \leq 1$$

となる。あるいは許容応力で書き直して, 組み合わせ荷重と考えて安全率を 1.1 倍に緩和することにすれば, $1.1^2 = 1.2$ なので

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{ta}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{ta}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{33}}{\sigma_{ta}}\right)^2 - \left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{ta}}\right)\left(\frac{\sigma_{33}}{\sigma_{ta}}\right) - \left(\frac{\sigma_{33}}{\sigma_{ta}}\right)\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{ta}}\right) - \left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{ta}}\right)\left(\frac{\sigma_{22}}{\sigma_{ta}}\right) + \left(\frac{\sigma_{23}}{\tau_a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{31}}{\tau_a}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_a}\right)^2 \leq 1.2$$

で照査すればいいことになる。

¹⁰³ 「丸める」という言葉を学生さんは知らない可能性が大きい。

最も単純な応力状態であれば

$$\left(\frac{\sigma_{11}}{\sigma_{ta}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_{12}}{\tau_a}\right)^2 \leq 1.2$$

でいいことになる。正確にはこの降伏条件からの規定であるが、もう少し文学的かつおおざっぱに言うと図 K.34（直曲線から矢印の S 側が安全領域）のように、一つずつだとそれぞれの許容応力までで規定するが、両方が大きくなった 'U' の領域はちょっと危険かもしれないよ、ということでそこは円の内側を安全領域にしてある。

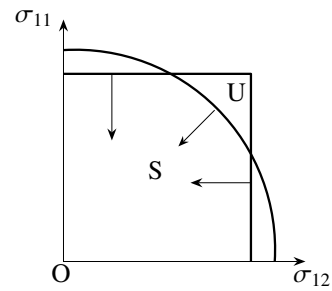


図 K.34 2 応力状態における照査

(2) 大きな軸力と曲げを受ける場合の相関強度

大きな軸力と曲げを受ける梁: 次に、軸力による座屈を考慮しながら曲げ強度を照査する場合を念頭に置いて、端部に集中外力モーメントが作用する図 K.35 のような場合を考えておこう。梁-柱理論で求められる¹⁰⁴曲げモーメントは

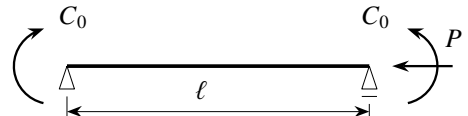


図 K.35 端曲げ外力モーメントの作用

$$M \simeq \frac{4C_0}{\pi(1 - P/P_E)} \quad (*)$$

となる。

軸力と曲げの相関式: 前節の結果を用いて、大きな軸力を受ける場合の曲げの設計で必要となる応力成分を算定しておこう。構造力学で学んだように、梁の最外縁応力は

$$\sigma_{\max} = \frac{P}{A} + \frac{M_{\max}}{W}$$

である。ここに W は断面係数であり、e は断面の中立軸から最も外の縁までの距離である。この式に、上の曲げモーメントの表現式 (*) を代入すると、曲げと軸力を受ける棒に発生する応力は

$$\sigma_{\max} \simeq \frac{P}{A} + \frac{4C_0}{\pi W(1 - P/P_E)}$$

と表すことができる。右辺第 2 項には分母に軸力の項があるが、これが曲げ応力の成分を座屈現象が増幅する係数に相当している。この最大応力を降伏応力 σ_Y で割ると

$$\frac{\sigma_{\max}}{\sigma_Y} \simeq \frac{P}{P_Y} + \frac{4C_0}{\pi M_Y(1 - P/P_E)} \leq 1$$

という関係式が求められる。ここに

$$P_Y \equiv A\sigma_Y, \quad M_Y \equiv \frac{I\sigma_Y}{e}$$

と定義したが、前者は全断面が一様に降伏応力になったときの全断面降伏軸力、後者は最外縁の応力が降伏応力に達した瞬間の初期降伏曲げモーメントである。この式が、設計の照査段階で用いられる軸力と曲げを受ける部材の強度相関式

$$\frac{\gamma P}{P_{cr}} + \frac{\gamma M}{M_{cr}(1 - \gamma P/P_E)} \leq 1$$

の基礎となる式である。ここに γ は安全率で、 P_{cr} と M_{cr} はそれぞれ、軸圧縮のみの場合の耐力、曲げのみの場合の耐力である。

¹⁰⁴ 第 6.4 節を参照のこと。

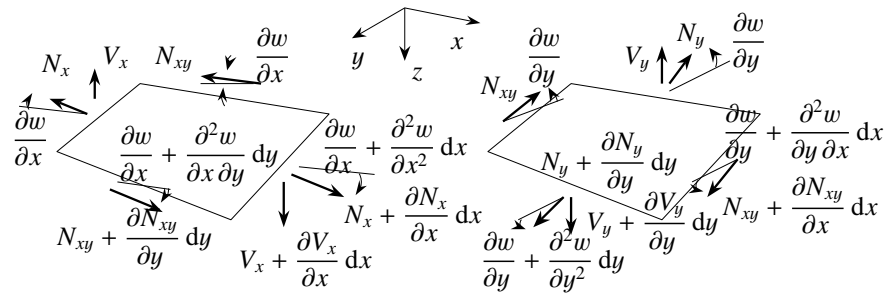


図 K.36 たわんだ状態の微分平板要素のつり合い

K.4.6 板や補剛材等の圧縮強度

(1) 全体座屈と局部座屈

前節までは柱や梁を1方向に長い棒として取り扱っており、座屈もその長い部材全体の現象と捉えた。こういった座屈は全体座屈と呼ばれる。ところで兵庫県南部地震時の橋脚の崩壊例として、橋脚の途中が局部的に座屈¹⁰⁵している写真を見たことは無いだろうか。こういう座屈を局部座屈と呼ぶ。鋼構造の断面は非常に薄い板が溶接等で組み立てられているのが普通だ。この薄い板が局部的に座屈するかどうかを前節までは考えてなかった。この節ではその基礎的な考え方を概説する。なお、プレートガーダのウェブでは曲げとせん断を受けることや、フランジとの相互作用のために非常に難しい理屈によって設計されなければならないらしいので、この節の内容は適用されない。それについては教科書の第8章を勉強して欲しい。

(2) 面内力でたわむ平板の力学

梁の安定問題では梁-柱理論を用いた。板の安定問題を解析するための平板の安定理論は通常 von Kármán の板理論と呼ばれている。図 K.36 のように、面内力 N_x 等が発生しながら曲がる板を考え、少したわんだ状態でたわみ $w(x, y)$ で表したつり合い式を求めると

$$-D \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = 0$$

と¹⁰⁶なる。二つの括弧それぞれが、梁-柱理論のつり合い式 $EI w''(x) + Pw(x) = 0$ を2回微分した

$$EI w''''(x) + Pw''(x) = 0$$

の二つの項に相当しているのがわかると思う。ここに D は板の曲げ剛性で

$$D \equiv \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

と定義されている。 t は板厚で、 ν は Poisson 比である。

最も基本的な例として、図 K.37 のように4辺単純支持された矩形板を、 x 方向にのみ $N_x = -p_{x0}$ で一様に圧縮したときの座屈問題を解いておこう。この場合も固有値問題になり、単位幅当たりの座屈荷重が

$$(p_{x0})_{cr}^{(m)} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(m \frac{b}{a} + \frac{1}{m} \frac{a}{b} \right)^2$$

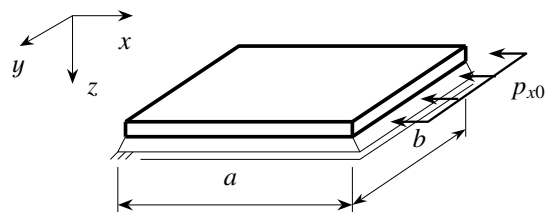


図 K.37 4 辺を単純支持された矩形板の圧縮

¹⁰⁵ その形状から「象の足座屈」と呼ばれたこともある。

¹⁰⁶ 具体的には別途文献あるいは第8章を参照のこと。

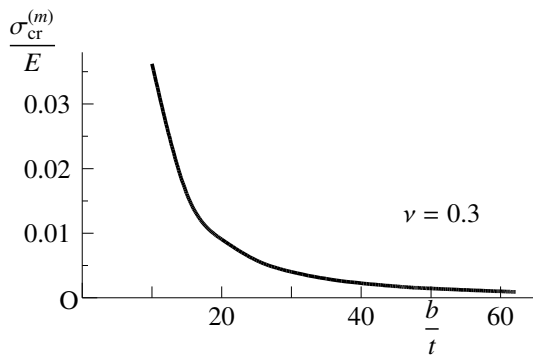


図 K.38 幅厚比と座屈応力

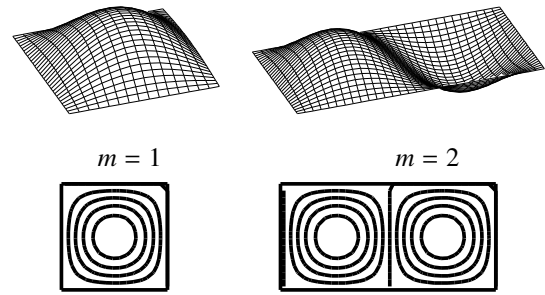


図 K.39 縦横比と座屈モード

と求められる。 m は x 方向の座屈モードの sine 半波の数である。これを応力にするために板厚で除すと、最終的な座屈応力が

$$\sigma_{cr}^{(m)} = k_p \frac{\pi^2 E}{12(1-\nu^2)} \frac{1}{(b/t)^2}$$

と表現できる。ここに k_p は板の座屈係数で

$$k_p \equiv \left(m \frac{b}{a} + \frac{1}{m} \frac{a}{b} \right)^2$$

と定義される。したがって図 K.38 のように、板の座屈応力は (b/t) の 2 乗に比例して減少することがわかる。この (b/t) は幅厚比と呼ばれる寸法比パラメータである。柱の座屈荷重との表現上の比較から明らかなように、この幅厚比は、柱の細長比に対応する重要なパラメータであり、図 K.38 は Euler 曲線と本質的には同じである。一方座屈係数 k_p は板の縦横比あるいは辺長比と呼ばれる (a/b) の関数になっている。図 K.39 に示したように、寸法によって座屈モードが違ってくる。梁の座屈と同じように座屈係数は境界条件に強く依存する。

(3) 板の圧縮強度と最小板厚

柱の座屈と同様、降伏応力を超えるような強度には意味が無いので、前節の座屈応力を降伏応力で除すと

$$\frac{\sigma_{cr}^{(m)}}{\sigma_Y} = \frac{1}{R^2}, \quad R \equiv \left(\frac{b}{t} \right) \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{12(1-\nu^2)}{k_p}} \sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}$$

という関係が得られる。ここに R は幅厚比パラメータと呼ばれる。そして基本的な考え方として、これも柱の圧縮強度と同様

$$\frac{\sigma_{cr}^{(m)}}{\sigma_Y} = \begin{cases} 1 & R \leq R_{cr} \\ \frac{1}{R^2} & R > R_{cr} \end{cases}$$

と考えて、局部座屈を考慮する場合の圧縮強度を規定する。言い換えると

$R \leq R_{cr}$: 局部座屈は生じず、材料強度までの抵抗を期待する。逆に考えると、万一のときに降伏させて塑性変形で強度の余裕を見ようとする設計の考え方であり、十分な塑性状態を期待する断面をコンパクト断面と [121] 呼ぶ。全断面が降伏してしまう前に何らかの座屈が発生してしまうような、ちょっとだけ薄い断面をノンコンパクト断面と呼ぶ。

$R > R_{cr}$: 局部座屈を考慮した上で板厚を薄くしようとする設計の考え方で、スレンダーな部材¹⁰⁷になるが、強度は局部座屈で支配されてしまう。

¹⁰⁷ 弾性座屈するような断面はスレンダー断面と呼ばれる [121] らしい。

上の理論式では $R_{cr} = 1$ であるが、実際に純圧縮板の場合の R_{cr} を 0.7 程度にとるらしい。

最終的に実験等のばらつき等を考慮して、例えば代表的な境界条件の下にある板に対して、教科書の表 4.7, 4.8 のような規定¹⁰⁸ になっている。例えば SM400 の規定は (f は複雑な応力分布を考慮するためのパラメータなのでとりあえず無視すると)

$$\sigma_{cr}^{(m)} = \begin{cases} 140 & \frac{b}{t} \leq 38.7f \\ 210,000 f^2 \left(\frac{1}{b/t}\right)^2 & 38.7f < \frac{b}{t} \leq 80f \end{cases}$$

となっているので解釈すると、ある板厚 $t_{MIN} \equiv \frac{b}{38.7f}$ までは材料強度で抵抗できるが、それよりも薄くなった場合には局部座屈が発生するので、Euler 曲線で強度が規定されていると読むことができる。この t_{MIN} が上述の R_{cr} に相当した、局部座屈を考えないでいい限界の最小板厚と捉えることができる。

K.5 橋梁構造の荷重（作用）

K.5.1 主な荷重の種類

(1) 作用による荷重の分類

教科書の表 2.1 にあるように分類されている。

主荷重: 常に作用すると考えないといけない荷重

従荷重: 必ずしも常には作用しない荷重

特殊荷重: 橋梁によっては考える必要のある荷重

以下、主要な荷重（今はそれを「作用」と呼ぶ）について概説する。

(2) 死荷重

教科書の表 2.2 には材料の単位体積重量が与えられているが、第 K.6 節の設計例では、断面の寸法を決める際に荷重がわかっている方が便利なのが示されている。これは矛盾である。というのも、まだ断面を決定していない段階では死荷重なんかわからないはずだからだ。そこで最初は、図 K.40 のような、経験に基づいて各橋梁形式毎に概算された死荷重を用いることがある。ただし最終的には、全橋梁が設計されたあとの死荷重で再設計が必要になるのは言うまでも無い。

単位面積当り鋼重

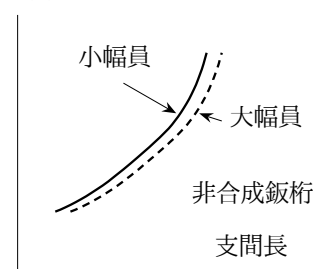


図 K.40 橋長と鋼重の関係概算

(3) 活荷重

自動車荷重: 床版設計のための T 荷重と桁設計のための L 荷重があり、それぞれ A 活荷重と B 活荷重がある。A 活荷重は大型車の走行が少ない状況を対象としており、教科書の第 2.2(3) 節に示されるように、設計対象によって若干の差異がある。この二つは、後ろの節の具体的な使用例のところで説明する。

群集荷重: 歩道には教科書の表 2.5 のような分布荷重を、群集荷重として載せることになっている。

¹⁰⁸ 表 4.6 の最小板厚と表 4.7 の板厚範囲には矛盾を感じざるを得ない。道路橋示方書の解説を読むと、「表 4.7 等は局部座屈を考慮する場合の許容応力であって、照査のときにこれを超えなければいけないというものではない」とある。著者にはその意味はわからない。設計というのは非常に難しい作業のようだ。

高欄への水平荷重： 高欄は群集による押し出し荷重として、高さ 1.10m の位置に水平分布外力 2.5 kN/m を作用させ、それに抵抗できるだけの根入れを地覆に確保することになっている。

(4) 衝撃係数

橋梁に自動車が進入すると動的な効果が加わることは容易に予想できる。そのため、静的な設計だけでは危険である可能性が大きい。現在は、前節の活荷重を動的な効果分だけ割り増す方法を用いている。図 K.41 のインセットに示したような単純梁に、例えば 1 輪車（力 P_0 ）が速度 V_0 で進入したときのスパン中央の変位の時刻歴応答¹⁰⁹が図 K.41 である。

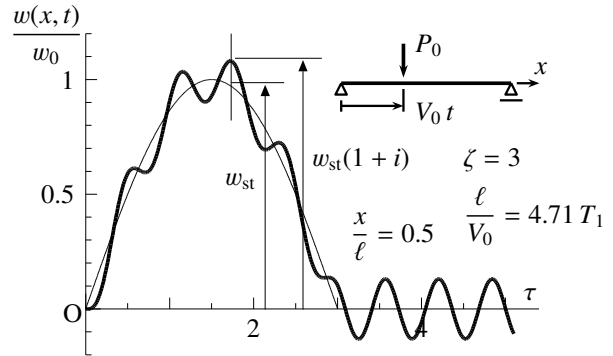


図 K.41 走行荷重による応答

$$\zeta \equiv \frac{1}{\ell V_0} \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad w_0 \equiv \frac{P_0 \ell^3}{48EI}$$

と定義したが、 w_0 はスパン中央に集中外力 P_0 が作用したときの中央のたわみである。この図は少し速い走行を模擬したもので

$$\zeta = 3 \rightarrow \frac{\ell}{V_0} = 4.71 T_1$$

つまり、橋梁の最大周期の約 5 倍程度で走り抜けた場合である。走行速度が遅くなるとこの「ゆらぎ」の大きさは小さくなる。動的な効果を無視した場合には、この応答の「ゆらぎ」の部分が無くなって、細い線のような応答 w_{st} になる。したがって、自動車が進出したことによる衝撃効果は、静的な応答に対するこの「ゆらぎ」の大きさで定量化できることがわかる。つまり図 K.41 に示したように「ゆらぎ」の振幅が静的な応答 w_{st} の i 倍だとしたとき、動的な応答は静的な応答 w_{st} の $(1+i)$ 倍になるので、衝撃の効果は活荷重を $(1+i)$ 倍することによって考慮することになっている。 i を衝撃係数と呼ぶ。動的効果は橋梁の支間長 L (m) に関係すると考えられていることから、現在は

$$i = \frac{20}{50 + L}$$

と規定¹¹⁰されている。

(5) 風荷重

流体力： 風による作用も動的な効果を含んでいるため、例えば 1 自由度系の運動方程式

$$m \ddot{u}(t) + k u(t) = f(t)$$

に対する外部からの動的な外力 $f(t)$ として考慮する必要がある。しかし水理学でも学んだように、定速 U で動く流体が固体表面に与える力としての作用は、抗力 $f_D(t)$ と揚力 $f_U(t)$ がそれぞれ

$$f_D(t) = C_D U^2, \quad f_U(t) = C_U U^2$$

のように、流体の速度 U の 2 乗に比例した大きさ¹¹¹になる。ここに C_D と C_U は抗力係数と揚力係数である。基本的には（長大橋ではない限り）この荷重を横向きに作用させて床組等を設計する。ただし長大橋のように

¹⁰⁹ 第 9.4.6(4) 節参照。

¹¹⁰ 結構大きくないですか。L 荷重は現実よりも大きいという現場の声を聞いたことがあるが、さらにこれに乗じたら、さて。逆の主張もあるらしいが、よくわからない。

¹¹¹ 式(3.166)の Bernoulli の式から明らか。

剛性が相対的に低い場合、橋梁躯体の振動の動き $u(t)$ と流体速度 U の間にも非線形的動的相互作用が存在することがわかっているから、風による橋梁の運動を解析するのはそれほど容易なことではない。もちろん U も時間の関数であるはずで、別途設定された耐風設計指針を用いて設計することになっている。タコマ橋が落ちた以来、こういった風荷重に関する研究¹¹²は、特に吊構造に対して非常に盛ん（重要）になっている。ここでは、その風荷重と橋梁の応答についての代表的な特徴を概説するに留めておく。

振幅は大きい破壊的ではない作用:

バフェティング: ガスト応答（乱れのある突風に対する応答）とも呼ばれる現象で、構造の後流中の乱れによる、風向方向およびその直角方向への不規則な振動のこと。

渦励振: 構造上下面から剥離した Kármán 渦¹¹³のような周期的な渦による、構造直角方向への曲げ振動のこと。渦が上下で交互に現れるから、その周期毎に正負の曲げを受けることになる。

避けるべき破壊的な作用:

ギャロッピング: 曲げの自励振動である。

ねじれフラッター: タコマ橋が落ちたときの状況とされるもので、ねじれの自励振動である。

たいした風速でもないのに、構造と流体との動的相互作用で非線形的な運動が発生し、自分自身を自分が揺らそうとする、ちょうど負の減衰が生じたような運動をするため、非常に危険な状況になる場合がある。

(6) 地震荷重

震度法: 地震に対する応答を 1 自由度系でモデル化すると、図 K.42 に示したように、支点を水平方向に強制的に $w(t)$ だけ変位させた状況であろう。このときの質点の水平変位 $u(t)$ で表した運動方程式は（減衰を無視すると）

$$m \ddot{u}(t) + k \{u(t) - w(t)\} = 0$$

となる。ここで大事なのはバネに生じる内力であり、それがある規準を超えないように構造を設計しなければならないので、重要なのは支点の変位に対する相対的な質点の変位である。そこでその相対変位を

$$v(t) \equiv u(t) - w(t)$$

と定義して、上の運動方程式を書き直すと

$$m \ddot{v}(t) + k v(t) = -m \ddot{w}(t)$$

となる。この式と 1 自由度系の運動方程式を比較すれば明らかなように、支点の強制変位 $w(t)$ に対する相対的な応答 $v(t)$ は、見かけ上

$$f(t) = -m \ddot{w}(t) = -(\text{設計しようとしている構造の質量}) \times (\text{地盤の地震入力加速度})$$

の外力が直接質点に作用したときの強制外力応答と同じであることがわかる。この結論は非常に重要な概念であり、耐震設計において用いられている震度法の根拠になっている。つまり、過去に観測された大地震等の地

¹¹² 空力弾性学という学問分野にあたる。本州四国連絡橋のような重要な長大橋建設に当たっても、多くの実験的研究や数値的研究が積み重ねられてきた。

¹¹³ インターネットで画像を検索すると衛星写真がたくさん出てくる。山越えの風が作った Kármán 渦を雲の様子で魅せてくれる。

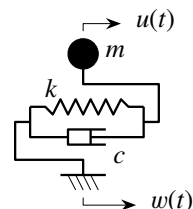


図 K.42 地震動とは

震加速度を参考にして設定された設計入力地震加速度 $\ddot{u}(t)$ に、今設計しようとしている構造の質量 m を乗じることによって、その構造に作用させるべき地震外力を算定できることを、この式は示している。そして、それを作用させたときの構造の抵抗 $\{k v(t)\}$ を照査することによって、耐震設計ができるのである。

設計震度 — 入力加速度： 具体的には、地震の入力加速度を重力加速度 g の k_h 倍に設定して

$$\ddot{u} = k_h g, \quad |f(t)| = k_h m g = k_h W$$

を設計荷重（ W が構造の重量）として構造に静的に作用させ、安全を確認する。この k_h を設計水平震度と呼んでいる。地域によっても地震の大きさは異なるだろうから、教科書にあるように地域を表す効果を別にして

$$k_h = c_z k_{h0}$$

と置くことになっていて、 c_z が地域性を表す 0.7~1.0 のパラメータである。兵庫県南部地震の前までは、この k_{h0} はほぼ 0.2 とされていたが、実はそれまでも 1G や 2G 程度¹¹⁴の加速度も観測されていたのは事実¹¹⁵である。種々の対処法や安全確保の研究が進む中で兵庫県南部地震が発生し、それを機会に耐震設計が以下のように見直された。

地震動の分類と要求性能： 振動解析学でも習ったように共振という現象がある。また地震動にもある固有の周波数分布がある。そのため、震度 k_{h0} は今設計しようとしている構造の固有周期毎に異なる大きさを持つ¹¹⁶ことになる。また地盤の影響も大きいので、一般に 3 種類の地盤種別毎に異なる大きさが規定されている。大雑把に描いたのが図 K.43 である。この図の最大値 k_{\max} が次のように与えられ、それぞれに対して構造の要求性能が規定されている。

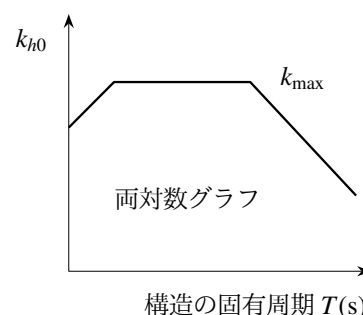


図 K.43 設計水平震度分布の概念

レベル 1 地震動： 発生確率が高い地震動。

- すべての橋梁に対して健全度を損なわない性能が要求される。
- 震度法で設計する。教科書の図 2.8 がその設計震度で、重力加速度 g の 0.2~0.3 程度の震度を設定する。これが兵庫県南部地震以前からの最も基本的な規定である。この程度の地震に対して橋梁には何も起きてはいけない。

レベル 2 地震動： 橋梁の一生に一度くらいの大地震。

- 次の 2 種類の地震動を考える。
 - タイプ I: プレート境界型の地震動のモデルで、大振幅が長時間続く。教科書の図 2.9 にあるように、重力加速度 g 程度の震度の地震動。
 - タイプ II: 内陸直下型の地震動のモデルで、極めて大きい振幅が比較的短時間で終わる。教科書の図 2.10 にあるように、重力加速度 g の 2 倍程度の震度の地震動。

¹¹⁴ 1G ということは、Atlas が橋梁を持ち上げて橋軸回りに 90 度回転させ、横向きに支えても大丈夫かどうかという規準に相当するから驚きではないだろうか。Atlas がタンカーの艦を持ち上げると破壊するという話を船舶の講義で聞いた。船舶を手で持てる大きさに正確に縮小したときの板厚はアルミ箔よりも薄いとのこと。確かにそうだが驚きだ。

¹¹⁵ 東京大学の伯野元彦先生が 1975 年頃、アメリカ等では観測で既にそういうことはわかっていたとおっしゃっていたと思うが、記憶はあまり鮮明ではない。南アメリカのペリカンの糞や毒吹き矢のお話の方は思い出すのだが。呵呵。

¹¹⁶ 第 9.1.4(4) 節参照。

表 K.3 地震動規模の分類と要求性能および設計法

損傷の程度→		無	小規模	中規模	大規模	崩壊	設計法
レベル 1		A 種も B 種も	×	×	×	×	震度法
レベル 2	タイプ I		B 種	A 種	×	×	水平保有耐力法
	タイプ II			B 種	A 種	×	

- 橋梁の重要度毎に次のような性能を要求する。
 - 普通の橋梁 (A 種) : 損傷が致命的でなく、時間をかければ復旧できる性能を要求。
 - 重要な橋梁 (B 種) : 限定的な損傷のみですぐに機能回復ができる性能を要求。
- 水平保有耐力法で設計する。

少し大きさに書くと表 K.3 のようになる。× は絶対に許容できない状況である。損傷が「中規模」であれば復旧がすぐにできることを意味する。損傷が「大規模」であっても崩壊せず、時間をかければ復旧できる性能を保持させることを意味する。

水平保有耐力法: 材料 (橋梁や橋脚) が塑性変形しても崩壊しないかどうかを解析する手法で、耐震工学の授業で習って欲しい。簡単に書くと、ある震度 k_{hc} が規定されており、それに橋梁の質量を乗じて

$$k_{hc} \times M \times g < \text{規定値 } P_Y$$

で安全性を照査しようとする¹¹⁷ものである。ただし、ラーメン橋脚と橋梁が複雑に交差する等の複雑な構造の場合には、さらに動的解析 (数値計算) を要求している。

(7) その他の荷重

これ以外にも、雪や温度変化等もある。教科書および別途文献参照。

(8) 荷重の組み合わせ

設計時に対象とする荷重をできるだけ実際に合わせて設計するのが望ましく、最も不利になるような組み合わせで構造解析等を実施することになっている。また現状では、個々の荷重は個々に考慮するものとして安全率が設定されているため、複数の荷重を同時に考慮した場合にはその安全率を少し下げてもいいことになる。教科書の表 2.7 (表中の記号の意味は表 2.1 に) のように、その緩和係数が規定されている。

K.5.2 床版設計のための T 荷重

(1) T 荷重のモデル

床版を設計する荷重はトラック 1 台が直接載るモデル¹¹⁸である。図 K.44 のように、後輪だけの 10t (100 kN) ずつを、橋軸直角方向に 1,750 mm 離して二つ載せる。また右図のように、地覆からは 250 mm 以上離す。教科書の図 2.2, 2.4 を参照のこと。

¹¹⁷ なぜ線形解析で設計できるのかわからない。種々の教科書を眺めても、何やら 1 自由度系にモデル化された例しか無い。また Newmark のエネルギー一定則に至っては、果たして? という気持ちである。本当は、塑性解析 (上下界定理等) をすべきだと思うのだが。

¹¹⁸ 旧道路橋示方書では 20t トラックであったのが、平成 5 (1993) 年に 25t トラックを模擬したものに改訂された。また、以前は前輪も荷重として考慮していた。ところで、過積載トラックがビュンビュン走っているらしいが、大丈夫だろうか。

(2) 荷重位置と断面力

ところでトラックは床版のどこを走っているだろう。車線変更もするだろうからその位置は任意である。では、そのすべての位置に置いて設計しなければならないだろうか。困ったなあという学生さんはちょっと勉強が足りない。床版のある断面（その断面の鉄筋量等）を設計するとき、その断面が最も危険になるようにトラックを置けば

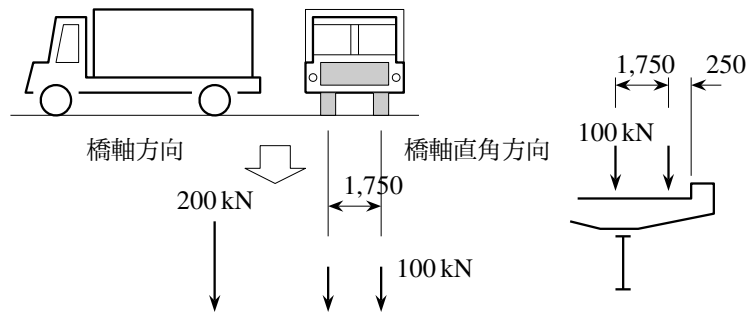


図 K.44 T 荷重

設計ができるはずだ。では、ある断面が最も危険になることは、どうやったら調べられるだろうか。それには、トラックそのものを少しずつ移動させるのではなく、ある基本の刺激つまり単位集中荷重を少しずつ移動させ¹¹⁹て、設計しようとする断面で最も大きな抵抗力が必要になる場所を探せばいいのだ。これを構造力学の授業では影響線という名前の関数として習っている¹²⁰のである。

図 K.45 のような 2 主桁の場合を例として、断面 A と断面 B を設計しよう。まず床版を、主桁だけで支持された梁としてモデル化¹²¹する。つまり横桁部では床版が支持されていないと考える。次に、床版上の任意の位置 x (m) に単位 (1) の集中荷重をかけて、断面 A と断面 B に生じる曲げモーメント \bar{M}_A, \bar{M}_B (m) を求める。これがそれぞれの断面の曲げモーメントの影響線である。

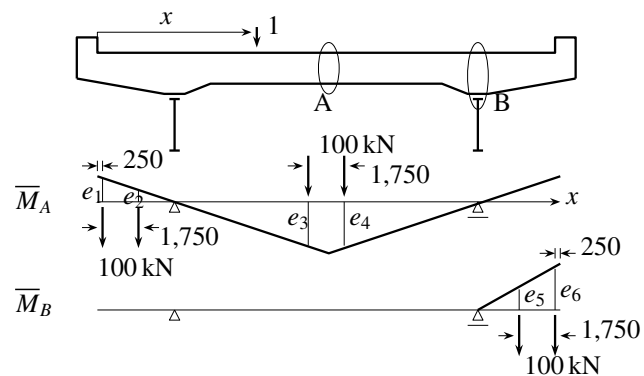


図 K.45 2 主桁の床版の例

図 K.45 にその分布を示した。横軸 x が単位集中荷重の位置であることに十分注意すること。断面 A に着目すると、トラックの位置によって曲げモーメント \bar{M}_A の符号が変わる。つまり、トラックの位置によっては正負の異なる曲げモーメントが生じるわけなので、その両方に対して安全を確保しないとイケない。そしてこの断面の曲げモーメントが最も大きくなる位置、つまりその断面が最も危険になる位置に T 荷重を載せる必要がある。そう考えると、正の曲げモーメントについては、中央をまたぐ¹²²ように T 荷重が載ればいいし、負の曲げモーメントは、できるだけ地覆に近づけたときが危ないことが、この影響線からわかる。したがって T 荷重の規定を考えて、図のような影響線の値を用いて、断面 A に生じる最大曲げモーメント (kN-m) は

$$M_{MAX}^- = -100 \times (e_1 + e_2), \quad M_{MAX}^+ = 100 \times (e_3 + e_4)$$

のように¹²³求められる。この両方の曲げモーメントに耐えられるように鉄筋コンクリート断面を設計する。次に断面 B の影響線を見ると、この断面より地覆側に載った荷重だけを支えればいいことがわかり、それは負の曲げモーメントになる。断面 A と同じようにして、その最大曲げモーメント (kN-m) は

$$M_{MAX} = -100 \times (e_5 + e_6)$$

¹¹⁹ 医者が問診の次にする行為は触診である。手の平で、どこを押すと患者が痛がるかを探すのである。

¹²⁰ 影響線はなかなかわかってもらえない。著者も学生のときはわからなかった。

¹²¹ この図がまず学生さんに理解してもらえない。なぜだろう。でもこれは実は現場を正確にモデル化したものではないのだ。

¹²² 実際には e_3 が e_4 が中央位置でも同じになる。

¹²³ この例では桁より外側に両輪が載るような図にしたが、そうなるとは限らないので注意すること。

となる。これに対して安全を確保する。

もう一つの例として、図 K.46 の 3 主桁の場合の中桁直上の床版断面 C の設計を考えておこう。この場合の影響線 \bar{M}_C でも、正負の曲げモーメントが発生することがわかるので、図のような位置に T 荷重を置かなければならず、結局正負の最大曲げモーメント (kN-m) は

$$M_{MAX}^+ = 100 \times (e_7 + e_8), \quad M_{MAX}^- = -100 \times (e_9 + e_{10})$$

のように求められるので、これに対して鉄筋コンクリート断面を設計することになる。実際に e_9 と e_{10} の位置を求める¹²⁴のは面倒だ。各自図 K.47 を見ながら、右側床版中央の断面 D の設計を試して欲しい。

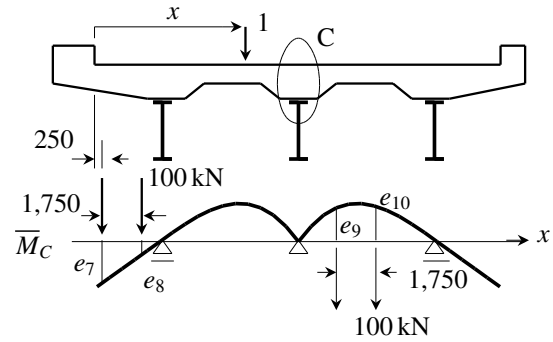


図 K.46 3 主桁の場合の例 1

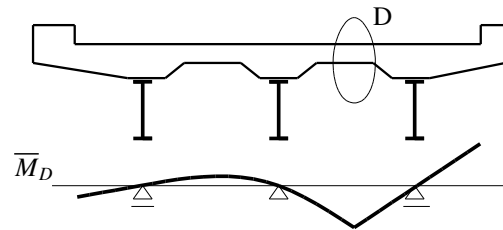


図 K.47 3 主桁の場合の例 2

(3) 平板としての床版

容易に推測できるように床版は橋軸直角方向の梁ではなく、主桁部分で支持された 2 辺 (ほぼ) 単純支持の無限長の、あるいは横桁でも支えられた 4 辺単純支持の平板と捉えるべき¹²⁵だろう。実際の観察でも橋軸直角方向への亀裂進展の報告も多数あった。これに対しては、平板としての挙動を曲げモーメントの分布等でモデル化して設計する手法がある。教科書の表 6.4 等参照。

K.5.3 桁設計のための L 荷重

(1) L 荷重のモデル

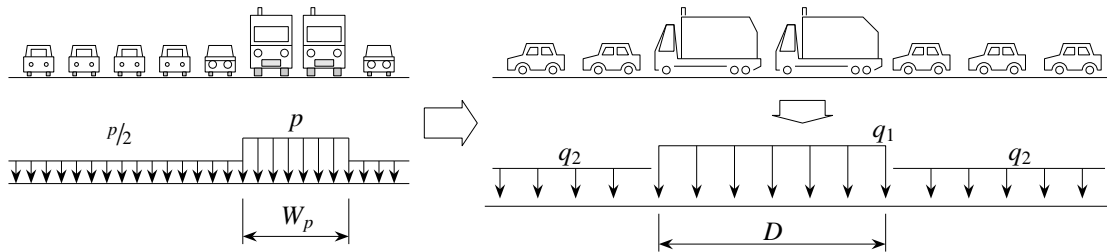


図 K.48 L 活荷重のモデル

主桁を設計するときの L 荷重は、図 K.48 のまず橋軸直角方向の荷重を左図のように渋滞した自動車で捉える。トラックの部分にある p という強度の分布外力として、それ以外の自動車の部分にはその半分 $p/2$ の強度の分布外力としてモデル化する。次に橋軸方向にも右図のように渋滞したトラックの影響があるように捉え、最終的には図 K.49 のような分布荷重でモデル化 [176] している。 D や W_p , p_1 , p_2 の値については、対象とする橋梁によって異なるため、詳細については教科書を参照すること。B 活荷重は、例えば

$$p_1 = \begin{cases} 10 \text{ kN/m}^2 & \text{最大曲げモーメント用} \\ 12 \text{ kN/m}^2 & \text{最大せん断力用} \end{cases}, \quad p_2 = 3.5 \text{ kN/m}^2, \quad D = 10 \text{ m}, \quad W_p = 5.5 \text{ m}$$

のような値を用いることが規定されている。

¹²⁴ この影響線図も適当に描いたものである。

¹²⁵ そんなことは昔からわかっていただろうに、前節のような設計をしたことから床版の損傷が頻繁に報告され、時代と共に床版厚は次第に大きくなってきている。どこかで思考停止したのかもしれない。

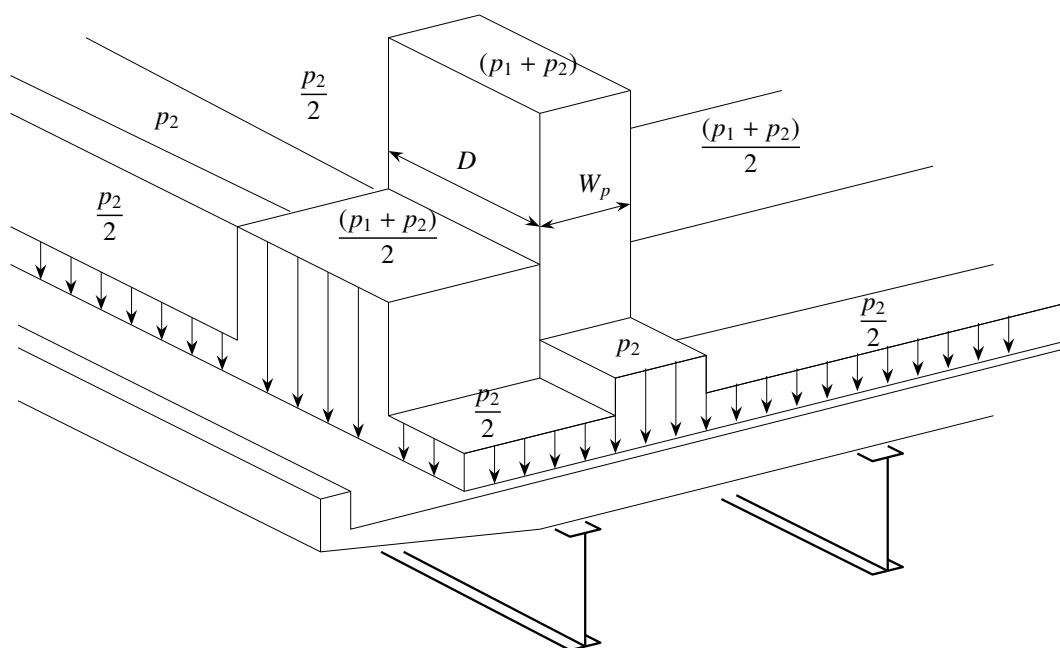


図 K.49 L 荷重の分布パターンの規定

さて図 K.48 にも示したように、橋軸方向のある長さ D の区間にはトラックを想定した大きめの荷重を与えている。また橋軸直角方向にも同様に、幅 W_p の部分には大きめの荷重が分布するとしている。主桁を設計する際に最初に必要なのは、この大きめの分布外力をどの位置に設定するか（どこに置けば設計したい桁にとって最も辛い・危険なのかを決定する）ということである。順番としては、まず着目する設計桁に対する橋軸直角方向の分布位置つまり W_p の位置を決定する。それによって、各着目桁毎に載せるべき橋軸方向の単位長さ当たりの分布外力の強度 q_1 と q_2 が決定される（図 K.48 の左の図から右の図への算定¹²⁶に相当する）。あとは、その得られた分布外力 q_1, q_2 を用いて、着目している桁の中を選択した着目断面を設計することになる。具体例は次の節に示す。

(2) L 荷重と橋軸直角方向の分布設定 — 2 主構トラス橋の例

以下、死荷重による断面力は別途求めることにして、ここでは活荷重のみを対象として、B 活荷重としての L 荷重に対して断面を決定する方法を述べる。まず最初のステップは、橋軸直角（幅員）方向の荷重の載せ方の決定である。図 K.50 に示したように、二つの主構への荷重の分担は、横桁を単純梁と考えたときの支点反力 F_1, F_2 の分担分¹²⁷と同じになる（縦桁のことは面倒なのでちょっと忘れましょう）ことは容易に予想できると思う。例えば左の支点反力 F_1 の影響線は、図の三角形のようになる。したがって、図 K.49 の幅員方向の大きめの荷重を載せる幅 W_p の部分は、できるだけ左に寄せればよいことになる。つまり図 K.50 の一番下に描いたように L 荷重を分布させれば、それが左側の主構にとっては最も辛い（危険な）状態になる。この p は、 q_1 を求める場合には $p = (p_1 + p_2)$ の値を用い、 q_2 を求める場合には $p = p_2$ とする。具体的に $B > W_p$ の場合を算定すると、図 K.50 の影響線の網掛け部分の

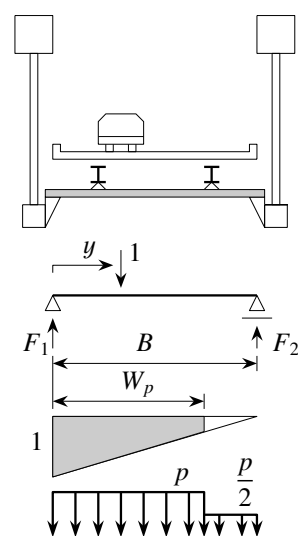


図 K.50 トラスの設計荷重

¹²⁶ 毎年確実に 2 名はこの作業を理解できない学生さんがいる。わからないなら質問してくれよ。

¹²⁷ こも学生さんになかなか理解してもらえない。なぜわからないのかはわからない。

面積とその右の白い三角形の面積はそれぞれ

$$\frac{W_p (2B - W_p)}{2B}, \quad \frac{(B - W_p)^2}{2B}$$

となるので、分布荷重強度の総計は

$$q = p \frac{W_p (2B - W_p)}{2B} + \frac{p}{2} \frac{(B - W_p)^2}{2B} = \frac{p}{4B} (B^2 + 2BW_p - W_p^2)$$

になる。したがって、例えば $B = 6\text{ m}$ として B 活荷重の値を代入すれば、 $q_1 = 40.4\text{ kN/m}$ 、 $q_2 = 10.5\text{ kN/m}$ という値（曲げモーメント算定の場合）が求められる。

(3) L 荷重と橋軸直角方向の分布設定 — 3 主プレートガーダ橋の例

次に、3 主桁のプレートガーダの場合を考えてみよう。ここでは近似的な¹²⁸1-0 法を用いる。具体的に図 K.51 のような場合を対象とする。例えば単位荷重が耳桁の真上に載った場合にはすべてをその耳桁が支え、同様に中桁の真上に載った場合には、二つの耳桁は全く分担しないものとするのだ。また、片方の耳桁と中桁の間に荷重がある場合には、もう片方の耳桁は全く関与しないとする。これが 1-0 法である。したがって、前節のトラスの場合と同様、桁毎の支点反力で荷重の分担を算定すればいいから、耳桁の反力分担を表す影響線 $F_1(x)$ は、図の上方の左端に示したような三角形になり、耳桁直上に載った場合に 1 の値を持つ。さらに、その耳桁よりも外側に向かって、耳桁と中桁の間の影響線をそのまま延長させる。したがって、耳桁よりも外側に載る荷重は、その耳桁にとっては 1 以上の影響を及ぼすことになると考えることにする。この影響線分布を踏まえると、できるだけ地覆側に L 荷重の大きめの力を配置する場合は、この耳桁にとっては最も辛い（危険な）状況になることがわかる。

したがって、右側の断面図と平面図に示したような L 荷重の配置になる。 p_i と q_i 、 $F_i(x)$ の添え字を略すと、図のような桁反力の影響線 $F(x)$ を用いて、最も不利に作用した L 荷重の分布範囲が、例えば p に対して $0 < x < x_1$ 、 $p/2$ に対して $x_1 < x < x_2$ である場合、橋梁の橋軸方向単位長さ当たりの分布設計荷重 q は

$$q = \int_0^{x_2} F(x) p(x) dx = p \int_0^{x_1} F(x) dx + \frac{p}{2} \int_{x_1}^{x_2} F(x) dx = p S_1 + \frac{p}{2} S_2 = p \left(S_1 + \frac{S_2}{2} \right)$$

と求められることになる。 S_i は影響線面積である。具体的にこの耳桁の場合は、 x 軸を図のようにとると $x_1 = 5.5\text{ m}$ であり、影響線面積 $S_1^{(1)}$ は

$$S_1^{(1)} \equiv \int_0^{x_1} F_1(x) dx, \quad S_2^{(1)} \equiv \int_{x_1}^{x_2} F_1(x) dx$$

と定義（図の薄い網掛け部の面積が $S_1^{(1)}$ 、濃いのが $S_2^{(1)}$ ）できる。したがって

$$q_1 = (p_1 + p_2) \left(S_1^{(1)} + \frac{S_2^{(1)}}{2} \right), \quad q_2 = p_2 \left(S_1^{(1)} + \frac{S_2^{(1)}}{2} \right)$$

が、橋軸方向に分布させるべき L 荷重の大きさになる。

¹²⁸ プレートガーダの場合もトラスと同じように、主桁の間に縦桁が配置される場合があり、それが支える荷重は横桁を通して主桁に伝えられる。したがって、床版からの力の伝達は上述のトラスのように単純ではなくなる。つまり、縦桁・主桁が横桁によって連結されているので、格子状になった構造に荷重が作用することになる。そのため、例えば片方の耳桁と中桁の間に単位荷重が作用した場合には、もう片方の耳桁もある程度の荷重を分担して支えている。しかも格子構造は不静定構造であることから、縦桁・横桁と主桁の曲げ剛性やねじり剛性の情報が無いと、この分担率を算定することができない。具体的な様子は教科書の図 8.8 にもある。このように、桁の剛性比によって分担率は変わるのだが、実はこれは困ったことである。つまり、これから設計して断面の形を決めようとしている部材の剛性（まだ設計していないからわからない値）が、荷重を決める際にまず必要になっている。これでは鶏と卵だ。設計の現場では経験的な剛性比の情報の蓄積があるので、ある程度の予測をした上で格子構造として載荷位置を決めることは可能なかもしれない。

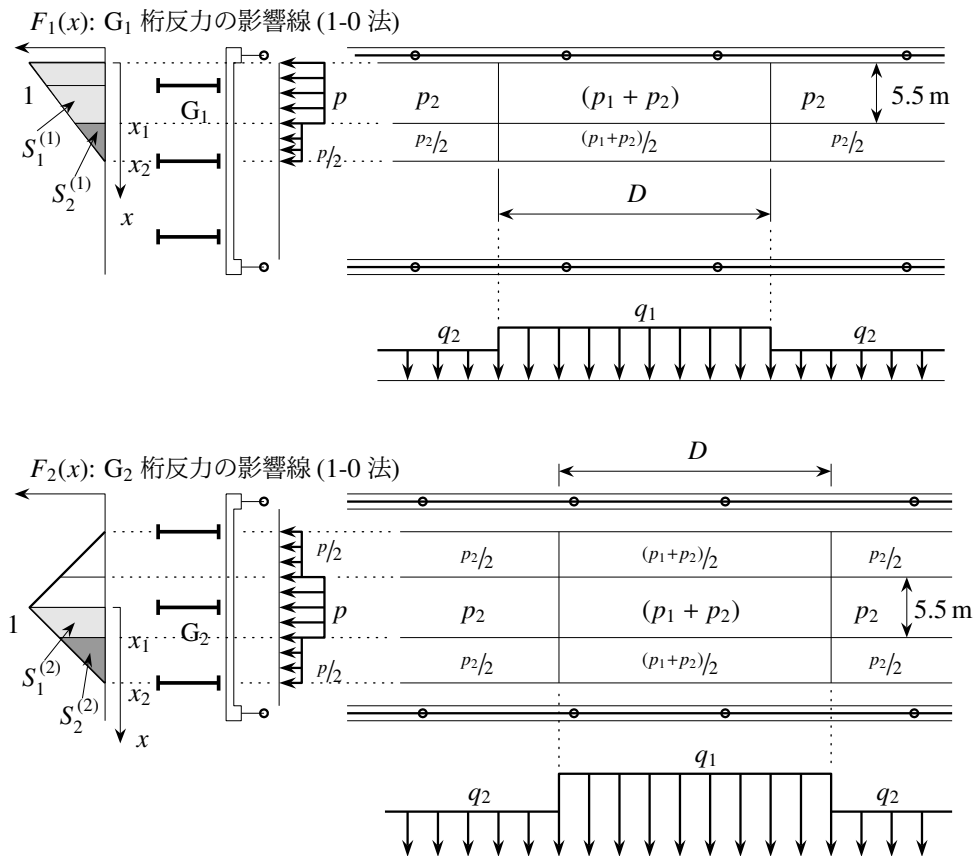


図 K.51 3 主桁の場合の L 荷重の各桁への分配

一方中桁の場合は、図の下方に示したように、影響線 $F_2(x)$ が中桁位置を軸として対称なので、中桁の片側の影響線面積を算定してその 2 倍¹²⁹が総面積になる。したがって、図のように x 軸をとると

$$q_1 = 2(p_1 + p_2) \left(S_1^{(2)} + \frac{S_2^{(2)}}{2} \right), \quad q_2 = 2p_2 \left(S_1^{(2)} + \frac{S_2^{(2)}}{2} \right)$$

となる。ここに $x_1 = 5.5/2 = 2.75$ m であり、影響線面積 $S_i^{(2)}$ は

$$S_1^{(2)} \equiv \int_0^{x_1} F_2(x) dx, \quad S_2^{(2)} \equiv \int_{x_1}^{x_2} F_2(x) dx$$

と定義（図の薄い網掛け部の面積が $S_1^{(2)}$ ，濃いのが $S_2^{(2)}$ ）できる。

数値を求める例¹³⁰として、図 K.52 のような場合を対象としよう。この例では、耳桁が関与する載荷部分の幅は 3.35 m で $W_p = 5.5$ m よりも狭いため、中桁より左側すべてに p を載荷することによって、耳桁を設計するための q_1, q_2 を算定できる。具体的に計算すると、この影響線面積は 1.87 m になるので、B 活荷重の値を代入すれば、 $q_1 = 25.3$ kN/m, $q_2 = 6.55$ kN/m という値（曲げモーメント算定の場合）が求められる。次に中桁

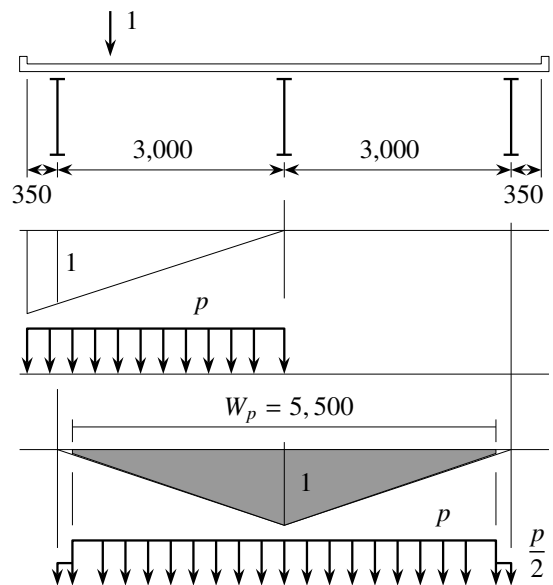


図 K.52 プレートガーダへの設計荷重の決定

¹²⁹ こういった便法のようなことを書くから、影響線を初めて使う学生さんが混乱するのかもしれない。

¹³⁰ 現実的な設定かどうかはわからない。

を設計する場合には、この例からは耳桁間隔が6mになるので、図の影響線に網掛けした幅に p を載せ、その外側に $p/2$ を載せればよいことになる。つまり網掛けした部分の影響線面積に p を乗じたものと、その両側の小さい三角形面積に $p/2$ を乗じたものの和が設計荷重になる。この例では前述のトラスの例と同じ幅なので、結局 $q_1 = 40.4 \text{ kN/m}$, $q_2 = 10.5 \text{ kN/m}$ という値（曲げモーメント算定の場合）になる。

(4) L 荷重の橋軸方向の分布設定と最大断面力（トラス橋の場合）

軸力の影響線： 前節で求めた q_1, q_2 を、今度は橋軸方向のどこに載せるのかを決定しよう。そのために、単位の大きさを持った集中荷重（注意：単位は無い）を床版に載せて、橋軸方向にその位置を移動させたときの、設計しようとしている断面が抵抗する軸力を求めておく必要がある。つまり軸力の影響線である。図 K.53 に示したような、正三角形のパネル¹³¹でできたトラスの部材 U, D, L の影響線を求めよう。求め方は構造力学で習ったと思うので、最終的な結果だけを示したのが図 K.54 である。横軸の x は単位荷重を載せた点であることに十分注意する必要がある。上弦材 U の影響線は常に負の値であることから、荷重がどこに載っても常に圧縮力が生じていることがわかる。逆に下弦材 L は常に引張で抵抗する。これに対し、斜材 D の影響線は $x < \frac{4\ell}{3}$ までは正の値になるので、その範囲に荷重が載ると引張抵抗をすることになる。そして $x > \frac{4\ell}{3}$ の部分に荷重がある場合には圧縮力が生じている。したがって斜材は通常、圧縮および引張の両方に抵抗できるように設計されなければならないことになる。

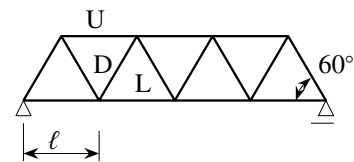


図 K.53 トラス橋の例

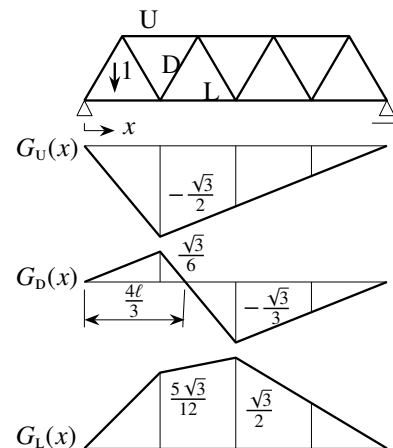


図 K.54 軸力の影響線

最大軸力： 簡単のために $D = 10 \text{ m}$ とし、トラスの1パネルの長さも $\ell = 10 \text{ m}$ とし、影響線が単純な分布をしている上弦材 U を例にして、その設計をしてみよう。単位を揃えるために q_1, q_2 も N/m の単位で与えられているものとする。影響線の面積ができるだけ大きい箇所に強い強度の q_1 を分布させなければならない。そこで図 K.55 に示したように、左端から ζ の位置から q_1 を載せ、図の網掛け部分の面積が最大になるように ζ を決定しよう。この網掛け部分の面積（負）は、例えば

$$A_g = -\frac{1}{2} (10 - \zeta) \left(\frac{\sqrt{3}\zeta}{20} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) - \frac{1}{2} \zeta \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\zeta + 10}{20\sqrt{3}} \right)$$

となるので、 $\frac{dA_g}{d\zeta} = 0$ を計算すると

$$0 = \frac{\zeta}{5\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \zeta = \frac{15}{2} = 7.5 \text{ m}$$

が求められる。すなわち、左端から 7.5 m の位置から q_1 を 10 m 分だけ載せたときに、上弦材には最大の軸力が発生することを意味する。この $\zeta = \frac{15}{2}$ を上式に代入して面積を求めると $A_g = -\frac{35\sqrt{3}}{8}$ になる。また、左の白い三角形の面積は $-\frac{45\sqrt{3}}{32}$ で、右の白い三角形の面積は $-\frac{135\sqrt{3}}{32}$ であるから、合計が $-\frac{45\sqrt{3}}{8}$ になる。したがって、 q_1, q_2 が図 K.55 のように載ったときに最大軸力が

$$(N_U)_{\text{MAX}} = -q_1 \frac{35\sqrt{3}}{8} - q_2 \frac{45\sqrt{3}}{8} \quad (\text{単位は N})$$

¹³¹ p.7 の伊達橋の写真の奥には、あまり面白くないトラスの道路橋（それも伊達橋）が架かっている。近年のトラスは単調な印象がある。

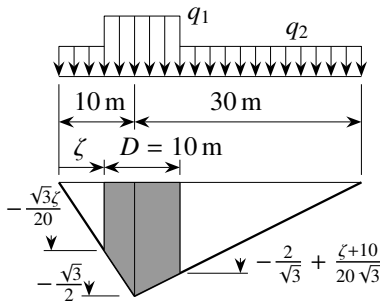


図 K.55 上弦材

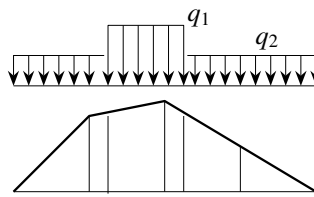


図 K.56 下弦材

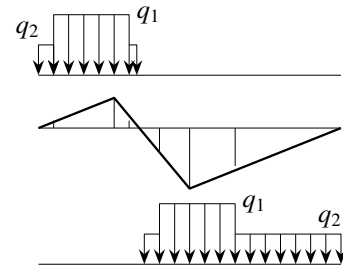


図 K.57 斜材

と求められる。あるいは図 K.55 の影響線の全面積を A_t とすると $A_t = -10\sqrt{3}$ となり、これを用いて $(N_U)_{MAX} = (q_1 - q_2) A_g + q_2 A_t$ でも同じ結果を得る。この算定の仕方の方が、上で $\frac{dA_g}{d\zeta} = 0$ にする意味はわかり易いかもかもしれない。

最終的な安全の照査では、（実際は死荷重による軸力¹³²も加えた上で）使用する材料の圧縮強度（許容応力） $\sigma_{ca}(A_U, I_U, L_U)$ に対して

$$\sigma_{ca}(A_U, I_U, L_U) A_U \geq |(N_U)_{MAX}| \rightarrow A_U \geq \frac{|(N_U)_{MAX}|}{\sigma_{ca}(A_U, I_U, L_U)}$$

になるように断面積 A_U を決定すればいい。ただ注意しないといけないのは、この圧縮強度は断面積 A_U だけではなく細長比によっても値が異なることである。つまり座屈によって強度が支配されるので、断面積だけではなく、部材長 L_U に対して断面 2 次モーメント I_U も（より正確には断面 A_U も含めた無次元量である細長比を）適切に設計しないといけないことには注意すること。したがって上式の強度を A_U と I_U, L_U の関数にしてある。具体的には第 K.4.2 (2) 節の断面設計例を参照のこと。

下弦材の場合にも、影響線が最大になる場所の前後に q_1 の強度の荷重を載せるようにして、影響線面積が最大になるようにその位置を決定すればいい。結局図 K.56 のように載荷する位置を探し出すことができ、影響線面積を用いて $(N_L)_{MAX}$ を算定しさえすれば、上弦材と同様

$$A_L \geq \frac{(N_L)_{MAX}}{\sigma_{ta}}$$

を満足するように断面を設計すればいい。この σ_{ta} は引張に対する材料強度（引張許容応力）である。

一方斜材の場合には、載せる場所によって軸力の符号が変化するため、圧縮と引張に対して別々に最大軸力を求める必要がある。具体的には図 K.57 のようになり、この上の図に示したような載荷状態に対して引張の最大軸力 $(N_D^{(t)})_{MAX}$ を算定し、下の図のような載荷に対して圧縮の最大軸力 $(N_D^{(c)})_{MAX}$ を計算しなければならない。そのようにして引張と圧縮の最大軸力を別々に求めたあと

$$A_D \geq \frac{(N_D^{(t)})_{MAX}}{\sigma_{ta}}, \quad A_D \geq \frac{|(N_D^{(c)})_{MAX}|}{\sigma_{ca}(A_D, I_D, L_D)}$$

の両方が同時に満足されるように、断面積 A_D を決定すればいい。圧縮と引張とでは強度が異なるのでこのような 2 重の確認が必要になる¹³³のである。斜材の場合も圧縮に対しては断面積だけではなく断面 2 次モーメントも設計しなければならないことには注意すること。

¹³² ここに大いなる矛盾を感じて欲しい。まだ断面積が設計・決定されていないのに死荷重を算定しなければならないことに。

¹³³ 本当はそういうことは不要なはずで、断面を決めたあとにコンピュータ等で性能を確認すればいいと思うかもしれない。しかしその入力データの断面をまずどうやって概算するのかということを考えると、力のかかり具合で強度を区別しておくのも便利なのである。

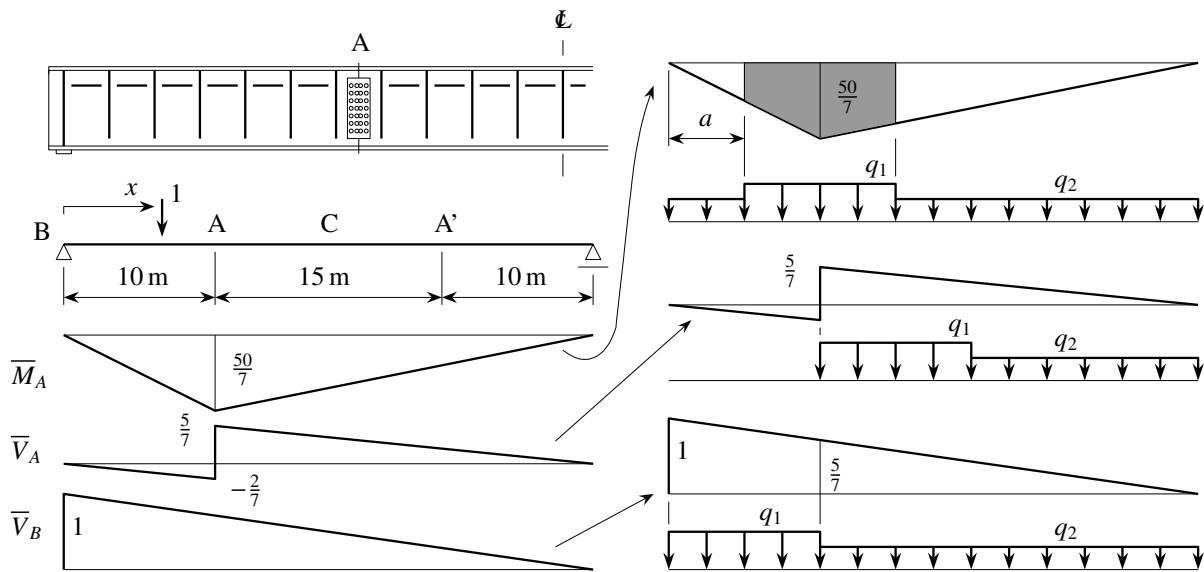


図 K.58 変断面のプレートガーダの設計

(5) L 荷重の橋軸方向の分布設定と最大断面力（プレートガーダ橋の場合）

影響線： トラスと同じように、梁の設計に当たっても、設計しようとする断面力の影響線を事前に求めておかなければならない。しかし梁の場合は、その長手方向に一樣ではない断面力が生じるため、どこの断面を設計すべきかというステップがまず必要なので注意して欲しい。例として図 K.58 の単純プレートガーダを考えてみよう。この左の図の一番上にあるのはそのプレートガーダの左半分の様式図であるが、合理的な（もしかしたら経済的な）断面にするために、スパン中央区間とその外側区間を異なる断面で設計し、図の断面 A で接合することにした。具体的なスパンの様子はその下に示したが、断面 A と A' が接合箇所、中央区間とその外側で断面のフランジ寸法等が異なるように設計しようとしている。ここでは支点に近い方の桁（B-A 区間）の断面を設計することを想定して、まず断面 A に着目して設計してみよう。

左端から x の位置に単位集中荷重（単位は無い）を載せた場合の断面 A の曲げモーメントとせん断力の影響線を求めると

$$\bar{M}_A = \begin{cases} \frac{5x}{7}, & 0 < x < 10\text{ m} \\ \frac{2(35-x)}{7}, & 10\text{ m} < x < 35\text{ m} \end{cases}, \quad \bar{V}_A = \begin{cases} -\frac{x}{35}, & 0 < x < 10\text{ m} \\ \frac{35-x}{35}, & 10\text{ m} < x < 35\text{ m} \end{cases}$$

と¹³⁴なる。曲げモーメントの影響線 \bar{M}_A の単位は m で、せん断力の影響線 \bar{V}_A の単位は無い。図 K.58 の左下に \bar{M}_A と \bar{V}_A を描いた。

最大せん断力と最大曲げモーメント： まず、曲げモーメント抵抗に対してこの左右の区間を設計してみよう。左右区間の場合は、できるだけ支点から遠い断面で曲げ抵抗の安全を確保すべきであることは予想できると思う。したがってこの例の場合は断面 A を設計すればいいので、その曲げモーメントの影響線 \bar{M}_A を用いて、まず荷重位置を決めよう。図 K.58 の左に示したように、影響線 \bar{M}_A の式は三角形分布になるので、図の右上に示したように、左端から離れたある $x = a$ の位置から $D = 10\text{ m}$ の区間に大きめの荷重 q_1 を載せたときが断面 A にとっては最も不利になる。したがって網掛けした部分の影響線の面積 A_g （単位は m^2 ）を求めて、それが

¹³⁴ 直感的に影響線を求める方法については第 4.5.4 (1) 節に一つ紹介してある。

最大になるような位置 a を求めればよいから

$$A_g = \frac{250}{2} - \frac{5}{14} a^2 - \frac{1}{7} (25 - a)^2, \quad \frac{dA_g}{da} = 0 \quad \rightarrow \quad a = \frac{50}{7}$$

となるので、左から 7.1 m の位置から 10 m の区間に q_1 を載荷し、残りの部分全体に q_2 を載せたときに断面 A は最も危険になる。網掛けした影響線面積は $\frac{3000}{49}$ m であり、網掛けしていない部分の影響線面積が $\frac{3125}{49}$ m と算定できることから、断面 A の最大曲げモーメントは

$$M_{\text{MAX}} = q_1 \frac{3000}{49} + q_2 \frac{3125}{49} \quad (\text{単位は N}\cdot\text{m})$$

と求められる。

次にせん断抵抗に対する設計を想定しよう。断面 A のせん断力の影響線 \bar{V}_A は図 K.58 に示した通りであるが、実はせん断力は、当たり前であるが、断面 A よりも支点上の断面 B の方が激しい状況になっていることに注意しなければならない。同じ図 K.58 の左下に断面 B のせん断力の影響線 \bar{V}_B も描いておいた。この面積の方が、その上の断面 A のせん断力の影響線（正負の二つの）面積よりも大きい。したがって、左右区間のせん断抵抗について設計する場合には、断面 B の影響線を用いなければならないことになる。つまり図の右下に示したように、この場合は左に寄せて大きめの荷重を載せればよい。曲げ抵抗の場合と同様の影響線面積（単位は m）の算定をすると、結局、断面 B の最大せん断力が

$$V_{\text{MAX}} = q_1 \frac{60}{7} + q_2 \frac{125}{14} \quad (\text{単位は N})$$

と求められる。左右区間の梁はこの M_{MAX} と V_{MAX} に対して安全でなければならない。

断面の強度と設計： 曲げとせん断に対して設計する。

曲げ強度の確保： 曲げ引張強度と曲げ圧縮強度をそれぞれ σ_{bta} , σ_{bca} とすると、引張側と圧縮側の曲げ強度がそれぞれ $W \sigma_{bta}$, $W \sigma_{bca}$ なので、安全が確保されるためには最大曲げモーメントに対して（実際は死荷重による断面力も加えた上で）

$$W \sigma_{bta} \geq |M_{\text{MAX}}|, \quad W \sigma_{bca} \geq |M_{\text{MAX}}|$$

を満足しなければならない。これから断面は

$$W \geq \frac{|M_{\text{MAX}}|}{\sigma_{bta}}, \quad W \geq \frac{|M_{\text{MAX}}|}{\sigma_{bca}} \quad (2 \text{ 軸対称断面})$$

を満足するように断面の形や寸法が設計されなければならないことになる。トラスの場合と同様、材料強度が圧縮と引張で異なるので注意が必要である。この圧縮強度も座屈で支配されるため、部材の対傾構間隔等の長さを念頭において細長比等を考慮して設計する必要がある。

せん断強度の確保： また同時に、最大せん断力を支えられるように、せん断強度に対して断面¹³⁵は設計されていないなければならない。そのせん断抵抗断面積を A_s とすると

$$\tau_a A_s \geq |V_{\text{MAX}}| \quad \rightarrow \quad A_s \geq \frac{|V_{\text{MAX}}|}{\tau_a}$$

を満足するように断面の形や寸法を決定すれば、安全な設計ができたことになる。例えば I 形断面のような場合はウェブの部分だけの断面積を A_s として用いている。

¹³⁵ せん断力とせん断応力の関係、つまり断面の抵抗係数を知る必要があるが、これは少々難しい。実務上では、せん断力の場合は軸力と同様に何らかの断面積が近似的な抵抗係数になっていると考えることが多いのではないだろうか。

K.6 プレートガーダの設計例

K.6.1 設計例 — 文献から

第 K.5 節で、基本としての死荷重と L 荷重を学んだので、それを元にプレートガーダの着目設計断面の最大曲げモーメントと最大せん断力が算定できるようになったはずだ。また、第 K.4 節では要求性能としての強度を学んだ。そこで、その性能を一つ一つ照査しながら、着目断面の寸法を設計してみよう。文献 [169] の実例がとてわかり易いので、それを資料にして説明する。

おおよそのステップは以下ようになる。

1. 着目している桁の着目した設計断面の最大断面力を求める。
2. この例では対傾構間隔 l を設定し、鋼種を決める。
3. 経験から上フランジの幅 b を仮定する。
4. 各種許容応力を算定しておく。
5. 桁高を経験式¹³⁶で決定する。
6. ウェブ厚を決定する。
7. 上下フランジの断面を決定する。
8. 安全性の照査をする。

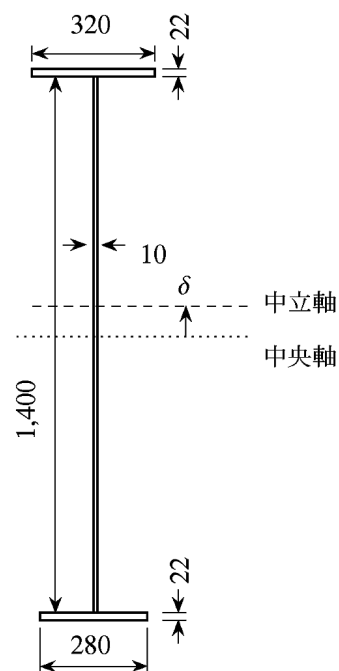


図 K.59 設計された断面の寸法

構造力学の復習として、是非ともこの計算は各自手を動かして欲しい。

K.6.2 補足 I: 垂直補剛材について

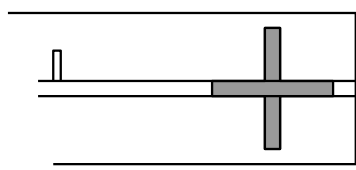


図 K.60 端補剛材

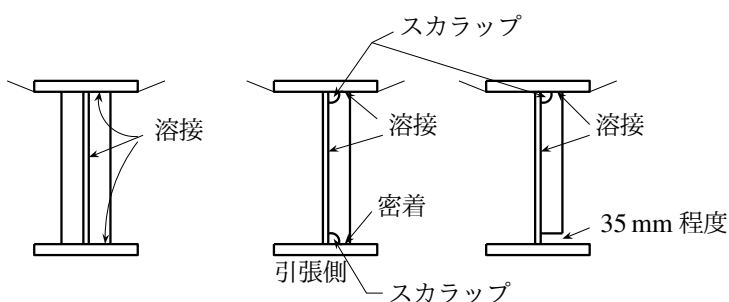


図 K.61 中間補剛材 (左から、支点部・荷重集中点・中間点)

補剛材の設計についても教科書を読んで欲しい。ここには、基礎的な知識として覚えておいて欲しいことだけを羅列しておく。

端補剛材: これは支承にせん断力をきちんと受け渡せるように、支圧を受ける柱として設計する必要がある。図 K.60 の斜線部を参照のこと。

¹³⁶ ここで例に用いた文献以外にも、例えば文献 [166, 181, 192] 等があり、似たような数値だったり少し異なる数値だったりする。

中間補剛材: 図 K.61 に示したように, 設置箇所によって詳細が異なるので注意する必要がある。溶接のこゝ等を頭の中で想像¹³⁷して欲しい。

支点部: 上下共にきちんと荷重を支えるために溶接する。

荷重集中点: 上は溶接するが, 下は応力集中による疲労等の対策のために溶接しない。ただし荷重を的確に伝えるために密着とする。写真 K.24 参照のこと。

中間点: 上は溶接し, 下は防食対策のために 35 mm 程空ける。写真 K.26 参照のこと。

K.6.3 補足 II: せん断遅れについて

昨今の少数 2 主桁橋梁の場合のように床版の幅が広い合成桁の形式をとる場合, 構造解析上で気を付けておく必要のある現象の一つだけコメントしておく。というのも, いわゆる初等梁理論は

1. 断面寸法が梁の長さよりかなり小さく, 細長い棒を対象としているため
2. せん断変形を無視することによって σ_{xx} を精度よくかつ簡便に求めることができ
3. 求められた直応力につり合うようにせん断応力を算定することができる

という 1 次元の力学理論であったのに対し, 模式図 K.62 のように比較的幅広の上フランジ (床版) を持つ断面の梁の場合には, この幅広フランジ部分 (床版) が「平板」として挙動するとき生じるせん断応力 σ_{xy} による影響が無視できない場合があるからである。つまり, 初等梁理論の範囲内で全断面が抵抗すると仮定して求められる直応力分布 (図中の一点鎖線) $(\sigma_{xx})_{\text{beam}}$ よりも大きな直応力 (図の縦軸は圧縮を正にした値である) が主桁部に生じ, 図の曲線のように, その直応力分布は幅方向に一様ではなくなることがわかっている。このような現象をせん断遅れと呼んでいるが, 正確に応力分布を求める方法等については別途文献を参照して欲しい。実際の設計においては, 上フランジの一部を無視し, 各 T 形部分を中心にしてある適当な幅 b_e の上フランジを持つ T 形梁に置き換え, それに初等梁理論を適用して直応力分布の最大値を簡便に計算する手法がよく用いられている。図の上方の水平な実線がその値とみなしたものである。この b_e を有効幅と呼んでいる。これも詳細については別途文献¹³⁸を参照のこと。

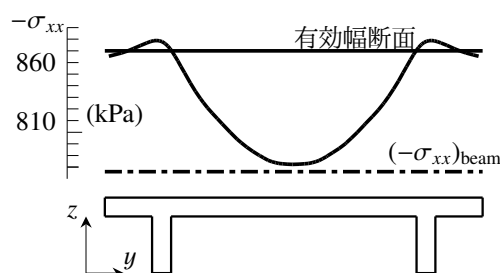


図 K.62 幅広断面の場合の直応力分布

K.7 接合

K.7.1 接合の種類

例えばプレートガーダは形鋼のように圧延して製造するのではなく, 3 枚の板を溶接して造られる。つまりフランジとウェブのところを接合しなければならないわけだ。また 1 本の桁をそのまま工場から現場に搬入で

¹³⁷ スカラップがなぜ必要か (写真 K.24) ということが学生さんは最初はわからない。溶接の実験を大学でもすべきなのかもしれない。

¹³⁸ 幸いなことに, 教科書の第 9 章の箱桁の章に説明してあるので読んでおくこと。

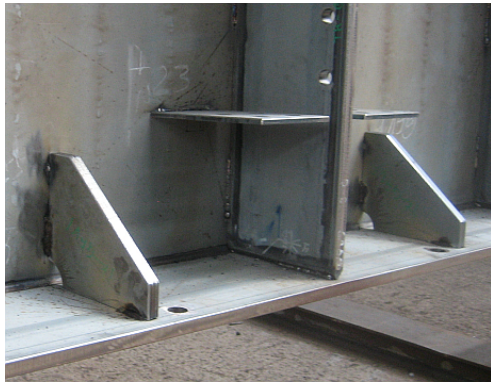


写真 K.24 下フランジ付近のスカラップ等：
KH 社の工場の仮組見学にて

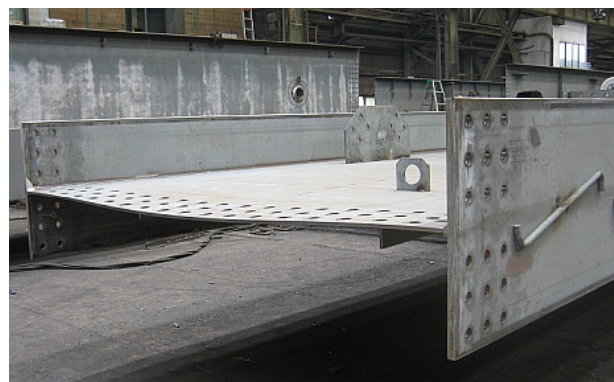


写真 K.25 厚板フランジ溶接後のウェブの残留変形：右側
の上フランジには「スラブ止め」が付いている

きるとは限らず、いくつか分割しないとトラック¹³⁹には載らないのが普通だ。そうになると、分割した桁を現場で接合しなければならない。現在主に用いられる 2 種類¹⁴⁰を説明する。

K.7.2 溶接接合

(1) 仕組み

母材と母材の間に母材と同じ鋼種の溶接金属を溶かし込んで接合する方法である。図 K.63 に示したように、母材の一部も融ける（溶融部）上に、溶融部より外側も熱の影響を受ける。この影響を受けた箇所を熱影響部（HAZ: Heat Affected Zone）と呼ぶ。図中の a の長さをのど厚と呼び、ここが力を伝達する有効な代表長さだと解釈して、その長さを設計することになる。

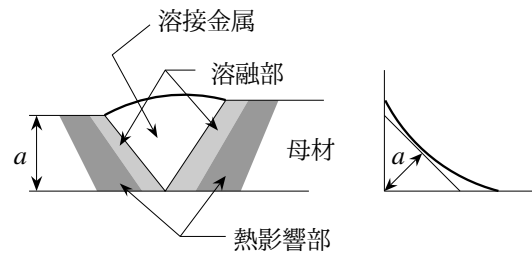


図 K.63 溶接接合の仕組み

- 長所
- 同じ金属で冶金的につながるので、力の伝達がスムーズである。
 - ボルト孔のような断面欠損が無いから、施工をきちんとすれば応力集中等が無い。
- 短所
- 熱処理のような作用をしたことになり、母材材質の変化の可能性がある。
 - 熱ひずみ・残留ひずみ・残留応力¹⁴¹が生じる。写真 K.25 を参照のこと。予熱や入熱制限等の対策が必要な場合がある。
 - 材料や施工法にもよるが、欠陥（亀裂の発生源）等になる可能性がある。

¹³⁹ p.678 の気仙沼大島大橋のような海上橋梁は架設現場近くのヤードで組み立てたあとクレーン船で運搬して直接設置することもある。インターネット上のページ <https://www.ne-con.co.jp/field/bridge/kesenumaoshima-2/> や、同じような施工をした牛根大橋の写真もページ http://kagoshima01.gozaru.jp/ushineoohasi_unpan/ にあるので是非閲覧して欲しい。

¹⁴⁰ 現在は用いられなくなったりリベット接合というのがあり、身の回りの橋梁でも観察することはできる。これは、まずリベットと呼ばれる丸頭のボルトのようなものを真っ赤に焼いておき、それを孔に差し入れる。丸頭側を押さえておいて、反対側をハンマーのようなもので叩いて孔に密着させると同時に丸頭に整形して固定する。これで接合が完了するが、叩くときの騒音が問題になり、維持管理の精度にも不安が残る上に、必要不可欠な熟練工が少なくなったことから次第に使われなくなった。広瀬川の牛越橋は 1953 年竣工なので接合にリベットが用いられ、垂直補剛材としての山形鋼がリベットで取り付けられていたりしている。よく観察すると、一部がボルト接合になっている箇所もあるが、さてそれはなぜでしょう。

¹⁴¹ ここは金属工学系の先生に教えてもらったことをなんとなく理解したような振りをして書いているので注意して欲しい。図 K.8 にあるように、立方晶の fcc と bcc はその基本体積が異なる。そこで、低温でマルテンサイト変態するような溶接棒材料を用い、bcc の方が単位モル当たりの体積が大きいことを利用して冷めたときの体積膨張を期待し、残留応力を少なくするような溶接施工技術もある。この体積膨張は日本刀が反る理由でもある。

(2) 溶接欠陥

教科書の図 5.4 にまとめられているので参照すること。

材質変化: 熱の影響によって生じる可能性がある。

出来形不良: 施工不良による、アンダーカットやオーバーラップ・ブローホール¹⁴²・溶け込み不良等の発生の可能性がある。

亀裂: 特に出来形不良等が主な原因となって応力集中が発生して割れることがある。トウ割れやルート割れ等。

ラメラテア: 熱影響等によって層状の裂け目が（特に厚板）母材中¹⁴³に発生することがある。

施工後の対処法として目視や探傷検査（X線や超音波等を用いた非破壊評価）を実施することがある。

(3) 種類

教科書の図 5.5, 5.6 を参照すること。

グループ溶接: 開先（グループ）を設けて溶接金属を流し込み，母材全体あるいは部分で抵抗する。

全面溶け込み: いわゆるプルペネ（トレーション）と呼ばれているもので，母材の厚さ全体を溶接するもの。引張状態ではこれが原則であり，母材厚で抵抗することになる。

部分溶け込み: 一部分のみの溶接で，のど厚だけで抵抗していることになる。

すみ肉溶接: せん断で抵抗させようとしているもので，のど厚で抵抗するように溶接金属を置く。

現場作業で熟練工が必要なのは容易に想像できる。また工場製作であっても，上向き作業は不可である。箱桁のパネル製作等を是非工場で観て欲しい。

(4) 設計の原理

軸力あるいはせん断力の伝達: 軸力 P あるいはせん断力 V を伝達する必要がある溶接では，のど厚 a を

$$\sigma \equiv \frac{P}{\sum a \ell} \leq \sigma_a, \quad \tau \equiv \frac{V}{\sum a \ell} \leq \tau_a$$

のように設計する。ここに ℓ は溶接長であるが，確実に作用力に抵抗している部分の長さを指す。許容応力は教科書の表 5.1 にあるが，原則

グループ溶接完全溶け込み: これは母材とほぼ同様な抵抗なので

引張: 引張許容応力 σ_{ta} とする。

圧縮: 引張許容応力 σ_{ta} とする。

せん断: せん断許容応力 τ_a とする。

グループ溶接部分溶け込み: のど厚のみで抵抗する場合には，せん断許容応力 τ_a とする。

すみ肉溶接: 同様に，せん断許容応力 τ_a とする。

ことになっている。

¹⁴² 第 3.6.5(2) 節にあるように，球形の欠陥であっても応力集中係数は 2 程度になっている。

¹⁴³ どうやら鋼中の硫黄分が悪影響を及ぼすとされる。そのため，厚板等の入熱量が大きくなるような溶接箇所が見込まれる場合には，硫黄含有量の少ない鋼を母材側に用いることもあるようだ。

曲げの伝達: 基本は, 部材の曲げによる応力を引張の許容応力で

$$\sigma = \frac{M}{I}y \leq \sigma_{ta}$$

となるように設計する。ただし, 溶接の種類によって用いる断面 2 次モーメント I の算定法が異なる。

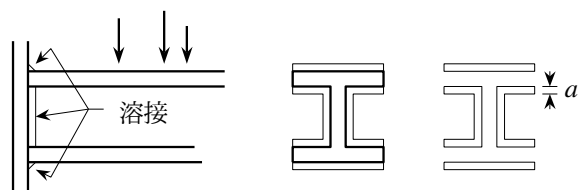


図 K.64 溶接接合による曲げの伝達

全面溶け込み: 母材が抵抗するのと同じなので, 断面 2 次モーメントは母材 (梁部) の I そのものを用いる。

図 K.64 の中央の図にある太い線の断面 2 次モーメント。

すみ肉溶接: 教科書には部分溶け込みが書かれてないが, 図 K.64 の一番右の図にあるように, のど厚 a 分を母材の周囲に展開して, その展開図¹⁴⁴が持つ断面 2 次モーメントを I_d として使い, かつ, せん断許容応力を用いて

$$\sigma = \frac{M}{I_d}y \leq \tau_a$$

となるように設計する。

曲げによるせん断応力の伝達: 最初に例示した, フランジとウェブの接合を考えておこう。曲げによるせん断応力の求め方は構造力学でも習ってないかもしれないが,それほど難しくないので考え方¹⁴⁵で図 K.65 の接合部のせん断応力が

$$\tau_w = \frac{V t_f b h}{2I t_w}$$

となることがわかる。ここに t_f , t_w はフランジとウェブの板厚であり, I はこの梁の断面 2 次モーメントである。 V はせん断力。したがって, この溶接部が伝達すべきせん断応力は $\tau_w \times t_w$ になる。そこでこの部分をのど厚 a のすみ肉溶接 (両側) をしたとすると, 結局

$$\frac{\tau_w t_w}{2a} \leq \tau_a$$

が要求性能になるので, 上式を代入すれば

$$a \geq \frac{V t_f b h}{4I \tau_a}$$

のようにのど厚を設計できることになる。

第 K.6 節で設計した断面を用いて, 簡単に試算してみよう。例は上下非対称断面だったが, やり方だけの例示なので, ここではその中央軸回りの諸量を近似として用いる。つまり

$$V = V_{\text{MAX}} = 360,000, \quad \tau_a = 80, \quad I = 8,959,500,00, \quad h = 1,400, \quad b = 320, \quad t_w = 10, \quad t_f = 22$$

を上式に代入すると

$$a \geq 1.2 \text{ mm}$$

と¹⁴⁶なる。本当かなあ? ま, こういった設計をするということである。

¹⁴⁴ 学生さんは展開図なんて知らないかなあ。

¹⁴⁵ 第 4.6.1 節参照のこと。

¹⁴⁶ こんなに小さいとは思わなかったが。ま, 一つの例である。

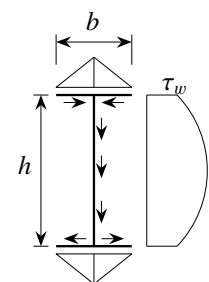


図 K.65 曲げによるせん断応力

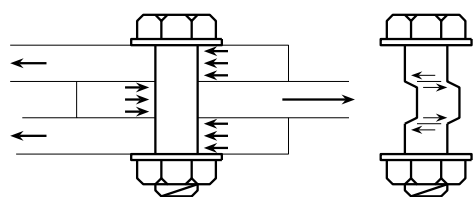


図 K.66 支圧接合と終局状態

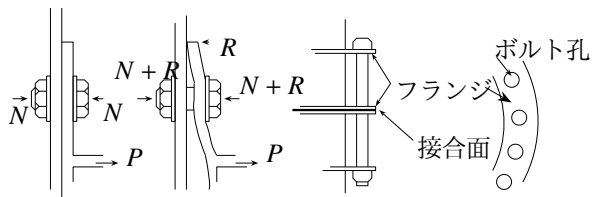


図 K.67 引張接合：左が短締めで右が長締め

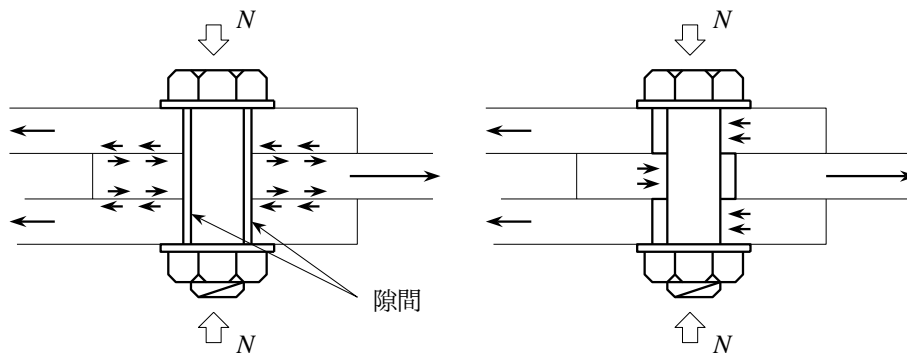


図 K.68 摩擦接合と終局状態

K.7.3 高力ボルト接合の種類

摩擦接合：後述する。

支圧接合：特殊な打ち込みボルトを用いて隙間を無くし、ボルト軸のせん断抵抗で力を伝達する。終局状態がボルトそのもののせん断破壊であることや、孔等の品質管理等が難しいことに注意すること。

引張接合：引張抵抗で力を伝達する接合。短締めや長締め¹⁴⁷があるが、特に前者ではてこ作用¹⁴⁸のことに十分な配慮が必要である。

K.7.4 高力ボルトの摩擦接合

(1) 仕組み

図 K.68 のようにボルトと母材の間には隙間がある。ボルト孔径は、ボルトの呼び径に 3 mm 加えた値としている。ボルトには十分な軸力 N を導入する必要がある、そのため高力ボルトを用いる。その導入した軸力によって添接板と母材の接触面に十分な摩擦¹⁴⁹を発生させて、それが力を伝達することを期待している。終局状態は図 K.68 の右図のような、摩擦が切れてすべってしまった支圧状態とするので、ちょうど降伏応力で引張強度を規定しているのと同じ冗長性を持つ¹⁵⁰ことになる。したがって、管理すべき対象は導入軸力である。

母材が引張られている場合には、孔空き板を引張った状況になるため応力集中が生じる¹⁵¹はずだが、この摩擦接合では、重ねた板の間の摩擦力で抵抗させているため、図 K.69 のように、それほど応力集中は考える

¹⁴⁷ 例えば塔の継ぎ手部にフランジを設置して接合した状況がそれに相当するのだろう。
¹⁴⁸ 図 K.67 の中央に少し大きめに描いた図のように、引張られる部材の「かかと」で生じる反力 R 分だけボルト軸力が大きくなるので問題になると言われている。
¹⁴⁹ 添接板と母材は実は無数の点接触であると 1990 年頃 N 社の方に教えてもらったが、それでも十分な摩擦力が期待できている。しかし 2016 年のニュース番組で取り上げられた活断層の話題で紹介された岩同士の接触大型実験で、点接触なのを驚いていた研究者には驚かされた。表面をどんなに磨いても材料を問わず同じことだと思うのだが。ただし、厚さ t の 2 枚の結晶金属板の表面をナノレベルまで磨いて接触させると、原子同士が結合して連続体になり、板厚も $2t$ より小さくなるらしい。もはや人の力では引き剥がせない。
¹⁵⁰ 正直なところはやや不安である。支圧状態になったあとの挙動がどのくらい研究されて余裕を確保されているのだろう。
¹⁵¹ 式 (3.229) に示したように、3 倍の応力集中が発生する。

必要は無いとされている。ただし、引張を受ける添接板の設計ではボルト孔を控除した純断面積で行うことになっている。長所と短所は溶接のその裏返しになるので次のように考えられる。

- 長所
- 軸力で管理できるので、導入確認をすれば現場施工でも精度を高くできる。
 - 熱処理が無いので材質には変化が生じない。
 - 作業中に亀裂等の欠陥が入り込む心配が無い。
- 短所
- 力の伝達が若干複雑になる。終局状態が曖昧かもしれない。
 - ボルト孔という断面欠損がある。
 - 添接板が別途必要になる。

このような特徴を踏まえて、工場製作では十分な施工管理の下で溶接接合を、現場では高力ボルト接合を用いることが多いことになる。

(2) 特徴

ボルト間隔: ボルトが近づき過ぎる¹⁵²と締め付け作業等が困難になるだけでなく、ボルト同士の相互作用によって図 K.69 のような応力集中の程度が増すため、ある程度以上離れていないといけない。そのため教科書の表 5.3 のような最小中心距離の規程がある。逆に離れ過ぎてしまうと板の密着度の悪い箇所が拡がり、満足な摩擦力が期待できなくなる可能性がある。そのため教科書の表 5.4 のような最大中心間隔も規定されている。

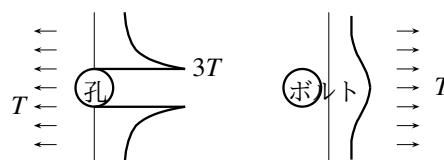


図 K.69 応力集中は緩和されている

応力集中の影響範囲: 1 列目の応力集中がその次の列に及ぼす影響を観察すると、図 K.70 のように、ほぼボルトの横方向間隔程度でその影響が小さくなるのがわかっている。つまり、ボルトは横方向の並びと列の並びは同じくらいにすればいいことになる。

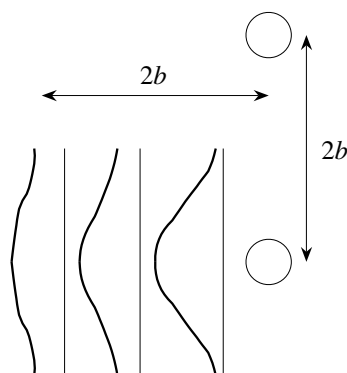


図 K.70 ボルト間隔と応力集中の影響

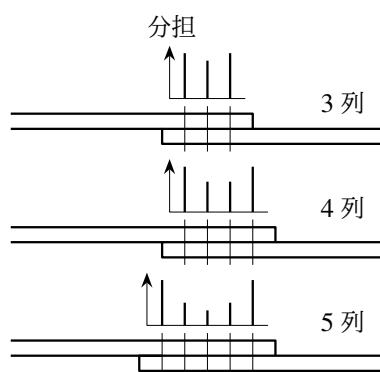


図 K.71 ボルト列数と分担率（誇張してある）

ボルト列数の効果: ボルト列を増やしていくと、図 K.71 のように列の途中のボルトが分担しなく¹⁵³なり、列の端っこのボルトの分担が相対的に大きくなる。したがって、あまり多くしても意味が無いわけだ。現状では片側で 8 列までに留めることになっている。ただし、最小の列数は 2 列である。

¹⁵² 応力集中の問題もあると思う。学生さんの設計では、座金が重なるような距離の場合もあるから面白い。

¹⁵³ 実験や実習のグループの人数が増えるとさぼる学生さんが増えるのと同じかな。

板端部との影響: ボルトの孔が板端部に近づき過ぎると、何らかの応力集中¹⁵⁴が発生する。そのため教科書の表 5.5 の最小縁端距離の規程がある。ただしあまり離し過ぎても、添接板と母材の間に隙間ができる等の不具合（雨水の浸入）がある。そのため、これについても最大縁端距離も規程¹⁵⁵されている。

(3) 設計の原理

1本の抵抗力 — 許容力: まず、ボルトに導入する軸力を N とすると、1本のボルトが抵抗できる最大摩擦力は

$$\mu N$$

である。ここに μ は摩擦係数で、鋼面の場合は $\mu = 0.4$ とすることになっている。導入できる軸力は、鋼構造の強度思想に基づくと本来ならボルトの降伏応力 σ_Y が望ましいが、応力集中のことや腐食に対する余裕を見るのが望ましいとされていて、 $\alpha\sigma_Y$ を最大導入可能応力とすることになっている。よって導入最大軸力は

$$N = \alpha\sigma_Y A_e$$

である。ここに α は 0.75 や 0.85 という値を設定し、 A_e はボルトねじ部の有効断面積¹⁵⁶である。よって、1本が受け持つ最大摩擦力は

$$\mu\alpha\sigma_Y A_e$$

となるから、許容力は安全率を γ として

$$\rho_a = \frac{\mu\alpha\sigma_Y A_e}{\gamma}, \quad \gamma = 1.7$$

となる。これがボルト1本が摩擦1面当りに抵抗できる摩擦力になる。教科書の表 5.2 の ρ_a は、この式から算定された（丸めた）許容力である。したがって、もし摩擦面が m あれば、これを m 倍してもいい。つまり

$$\rho_a = m \frac{\mu\alpha\sigma_Y A_e}{\gamma}$$

が摩擦 m 面当りに1本のボルトが抵抗できる許容力になる。 m は1か2である。

ボルト本数の決定: 作用力と許容力を用いて以下のようにして決定する。

作用力の調整: 設計荷重によって生じる応力、つまり最大軸力や最大曲げモーメントから算定して得られる接合部の応力を作用力と考える。ただしそれが、その材料の全強（許容応力）の75%を下回る場合には、不測の事態に対処するためや、構造全体としての力学的アンバランスを避けるために、全強の75%が生じているものとして設計することになっている。



写真 K.26 添接と水平・垂直補剛材

¹⁵⁴ ルーズリーフのノートの孔が用紙の端に近いことから容易に破れることを経験していると思う。前述の3倍の応力集中はあくまでも無限板の解であり、縁に近い円孔の場合の応力集中係数は大きくなる。

¹⁵⁵ 板厚 t の8倍 ($8t$) か 150 mm の小さい方の値とすることになっている。

¹⁵⁶ 呼び径とねじ山の部分の深さとの関係で調整した面積だと思われる。実は最近の学生さんはタッピングを知らない。ボルト孔との遊びは3 mm である。第1著者留学時に仲よくしてくれたドイツ人の技術職員は、旋盤で指定寸法に合わせたあと「んー、ここで one sixteenth」とか言いながらちょっとだけダイヤルを戻して切削するのがとても面白かった。つまり $1/16$ inch ≈ 1.6 mm だから日本の規定とほぼ同じだ。

軸力やせん断力が作用している場合： 溶接と同様、全ボルトが均等に抵抗しているとみなして、単純な重ね合わせで設計できる。例えば軸力 P が作用している板の接合に n 本のボルトを用いるとすると

$$\rho = \frac{P}{n} \leq \rho_a$$

であれば安全が確保されるので、ボルトの必要本数は

$$n \geq \frac{P}{\rho_a}$$

で求められる。せん断力 V が作用した場合も同様である。

例： F10TM22 を用いて摩擦面を 2 面にした場合、教科書の表 5.2 から

$$\rho_a = 2 \times 48 = 96 \text{ kN}$$

である。もし $P = 1020 \text{ kN}$ が作用している板を接合する場合には

$$n \geq \frac{1020}{96} = 10.6$$

となる。したがって 12 本が適当であることがわかり、例えば 3 本 4 列¹⁵⁷とする。

曲げの作用を受ける場合： 最大曲げモーメントの発生に対して、断面内に線形に分布している応力を図 K.72 のように各層 i （教科書では列と呼んでいる）毎¹⁵⁸に分けて、軸力が作用している場合と同様に本数¹⁵⁹を決定することになっていて

$$\rho_i = \frac{P_i}{n_i} \leq \rho_a$$

によって必要本数を求める。

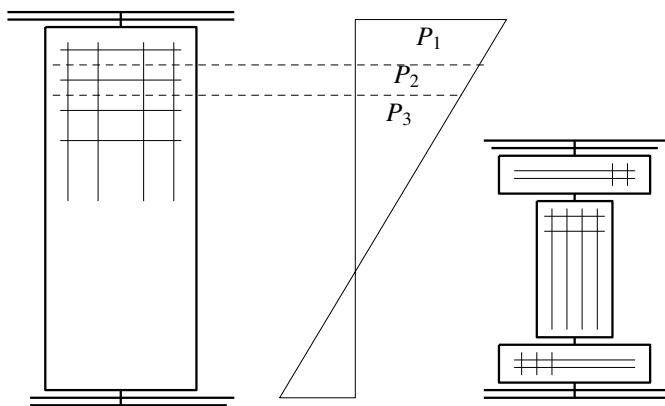


図 K.72 曲げ作用に対してボルト本数を層毎に決める

軸力と曲げとせん断の作用を同時に受ける場合： 軸力と曲げによって生じる直応力に対する抵抗力 ρ_P とせん断に対する抵抗力 ρ_S を合成して

$$\rho = \sqrt{\rho_P^2 + \rho_S^2} \leq \rho_a$$

として照査することになっている。

添接板の設計： 基本的には

$$\sigma = \left\{ \begin{array}{l} \frac{N}{A_e} \\ \frac{M}{I} y \end{array} \right\} \leq \sigma_a$$

を満足するように、断面積と断面 2 次モーメントを設計すればいい。許容応力 σ_a は、引張に対しては許容引張応力とし、圧縮に対しては許容圧縮応力の上限值（材料強度）とする。引張の場合は孔を控除して純断面で抵抗しているものとするが、圧縮の場合は孔控除は行わず全断面で抵抗しているものとする。

¹⁵⁷ 写真 K.26 は東北中央自動車道の尾花沢に架かる桁であるが、下フランジのボルト配置はちょっと面白い。

¹⁵⁸ 最外縁応力の部分で最大本数が決まって、それを全ウェブに並べてはいけないのだろうか。現場見学で、桁高方向に本数が変化した添接は見たことが無いのだが。

¹⁵⁹ 第 1 著者が学生の頃は、図 K.72 の右に小さく描いたようにウェブの添接を 3 層に分けて、上下フランジ付近は曲げに抵抗する接合として最外縁応力相当のボルト本数を設定し、中立軸付近はせん断に抵抗する接合として上下の添接よりもボルト列が少ない設定をしていた。合理的だと思うが、部品が増えるのを嫌がっているのかもしれない。

(4) 設計例

教科書にある例のそれぞれの数値の意味を、プリントに加筆した。

K.8 吊橋の古典的考え方

文献 [174] の丸写しであるが、いずれも今や古典¹⁶⁰である。長大橋が実現するようになった考え方に触れておいて欲しい。

基本的な考え方 — 弾性理論

図 K.73 のようにケーブル形状が $y(x)$ になっているものとする。ここで次の仮定を置く。

1. ケーブルは放物線状¹⁶¹になっていて、死荷重はケーブルが支え、活荷重でその形状は変わらない。
2. 活荷重は補剛桁が支える。
3. 吊材は密に配置しており、膜のように力を伝えているものとする。

死荷重による塔頂の水平反力が H_w で、活荷重 q による反力が H_q だとする。ケーブルは αq だけの活荷重を支え、 $(1 - \alpha)q$ が桁の担当分だとすると、ケーブルの近似のつり合い式は

$$(H_w + H_q) \frac{d^2 y}{dx^2} = w + \alpha q$$

としていいだろう。ただし、死荷重分は

$$H_w \frac{d^2 y}{dx^2} = w$$

である。梁理論から桁の抵抗は

$$-EI \frac{d^4 v}{dx^4} + (1 - \alpha) q = 0$$

を満足する。以上の2式から

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} + H_q \frac{d^2 y}{dx^2} = q$$

あるいは

$$-\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = q + H_q \frac{d^2 z}{dx^2}$$

となる。ここに M は桁の曲げモーメントで、 z はケーブルの垂れ下がり形状で

$$z = h - y$$

と定義した。これを2回積分すると、概念的に

$$-M = -\mathcal{M}_q + H_q z$$

あるいは

$$M = \mathcal{M}_q - H_q z$$

となる。 \mathcal{M}_q は外力 q による曲げモーメントを表す。つまりケーブルサグ形状と水平反力によって、桁の曲げモーメントが $H_q z$ の分だけ低減していることから、長大スパン化が可能になっているように読める。

¹⁶⁰ でも、こういう考え方をする練習は必要ではないだろうか。数値シミュレーションばかりやってると技術は進歩しない。

¹⁶¹ 図 6.54 のように、懸垂曲線との差は非常に小さい。

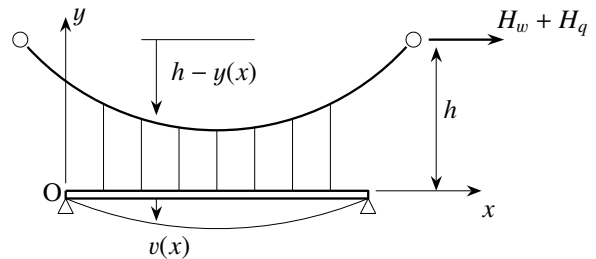


図 K.73 吊橋の弾性理論

柔構造 — たわみ理論

これはいわゆる古典的たわみ理論であるが、弾性理論の仮定の 1. が、長大橋になると成立しないことから始められる。つまり活荷重でもケーブルはたわむだろうから、それを $\eta(x)$ とする。ただしハンガーロープは伸び縮みしないものとする。このように考えると、前節の曲げモーメントは

$$M = \mathcal{M}_q - H_q z - (H_w + H_q) \eta$$

のようになって、さらに曲げモーメントの低減効果が上がるのだ。つまり柔構造にすることによって曲げモーメントは小さくなるから長大化に向いている¹⁶²というのだ。

有限変位理論

昨今はコンピュータ利用によって有限変位理論で設計するのもかもしれない。

MEMORANDUM

¹⁶² アーチではこれが逆に作用する。つまり以上の式中のマイナス記号がプラス記号になる。したがって長大化はどちらかといえば不利であり、剛にする必要もある。

K.9 あの津波による被害状況と仮橋

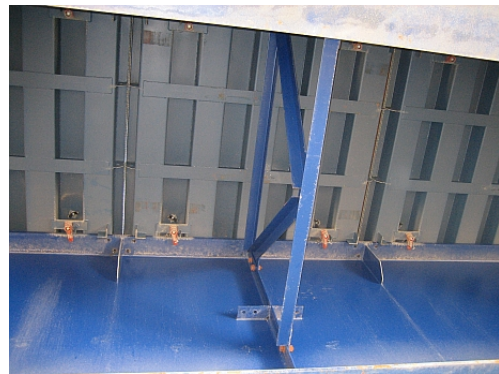
伯野元彦先生の文献[180]のように、被害状況を考察することは設計にとっても重要な作業である。以下は被災から六ヶ月経った2011年9月29日に撮影したもの¹⁶³である。



¹⁶³ 撮影位置情報とその他の写真は <http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/civil/2011-3-11/> からダウンロードできる。



以下は仮橋¹⁶⁴の状況である。



¹⁶⁴ 自衛隊による緊急橋梁は既に撤去されていたことを注記しておく。

付録 L

模型で学ぶ

L.1 橋梁模型

L.1.1 ケント紙を使ったトラス

(1) 概要

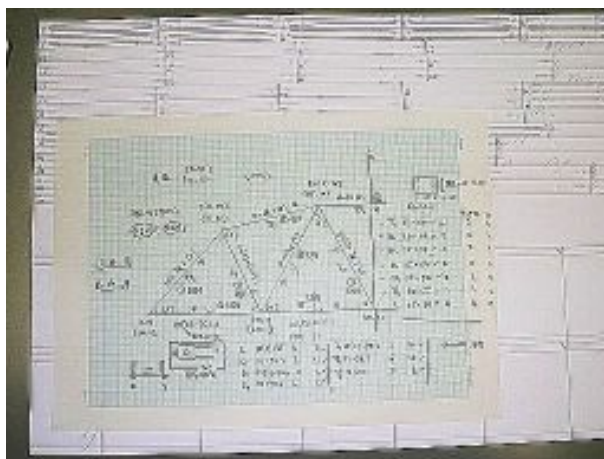


写真 L.1 ケント紙とハトメを使ったトラス模型の型紙の例と载荷条件

東北大学工学部1年生を対象とした「創造工学研修」のテーマとして、トラス橋を見学し、有限要素法でトラスを設計し、それを元に図面を引いてケント紙に寸法を落としたあと、ハトメで組み上げた模型を製作し、载荷して耐荷力と自重の比で競争する研修を設定した。写真 L.1 の左側は、第1 著者が方眼紙上で寸法を求めてそれをケント紙に落としたものを示している。

スパンは下弦材のハトメ間隔で 300 mm に、载荷はスパン中央のハトメ部とし、2 主構間隔は 55 mm (製作時の補助としてハトメに通す綿棒の長さ) と指定し、高さには 300 mm 以内の制限を付けた。写

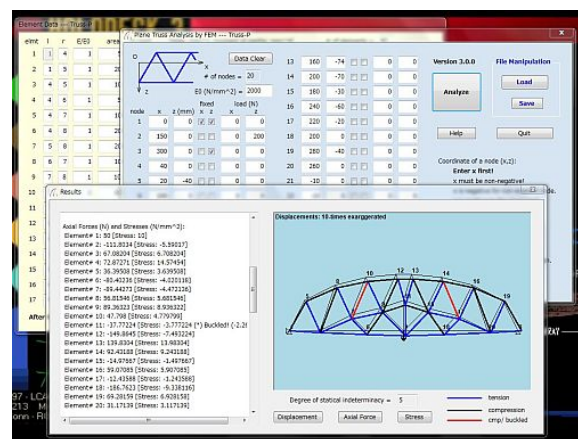


図 L.1 FEM 解析プログラム (Truss-P.exe)

真のトラスでは、圧縮される上弦材は幅 10 mm のケント紙を 3 枚重ねたが、引張側の下弦材は 1 枚のままで 5 mm 幅に細くした。斜材も圧縮・引張を勘案して同様の措置をした。そのできあがりと載荷状態を写真 L.1 の右側に示した。この模型は自重が 24.1 g で 2.8 kg の重りを載せることができた。崩壊は、上弦材のガセット部付近の圧縮局部座屈によって生じた。この載荷時には次に述べるバルサ板は取り付けしていない。

有限要素解析には図 L.1 の自作 Visual BASIC プログラム（第 P.2 節）を使ってもらった。実行すると Euler 座屈する部材を表示できるようにしており、まだ座屈を習っていない学生がそれに留意しながら太く（ケント紙の枚数を増や）すべき圧縮部材を容易に探せるようにした。ただねじれに弱いので、写真 L.1 の模型の斜材のところを見ればわかるように、主構同士は長方形の 1 枚のケント紙で弦材同士をつなぐことにした。また 2007 年度からは局部座屈にちょっとだけ抵抗できるように、1 主構当たり 3 部材だけ選んで、貼り付ける部材と同じ幅の 1 mm 厚のバルサ板を粘着テープで貼って（写真 L.2）ハトメに通した綿棒で反力を取っていいことにした。



写真 L.2 バルサ板による補強

(2) 研修の手順と手引き

研修で配付した資料を若干改訂して以下に記す。

A. 具体的な日程概要:

10月5日（金） 16:40～18:00: ガイダンスと日程調整および質疑応答。

10月12日（金） 16:40～18:00: 橋の力学についての講義 60分程度。

10月13日か20日あるいは27日（土） 14:00～2時間くらい: 赤石橋の現場見学。

10月19日（金）と26日（金） 16:40～18:00: 構造解析ソフトウェアによる設計の仕方と、紙を用いた模型製作の仕方とを説明する。

それ以降: これ以降の作業は各自自宅等（大学で相談に乗ることは可能）でやること。青葉山の演習室が空いていれば、そこで構造解析ソフトウェアは利用できる。

11月末か12月初旬（金）: 見学報告と提案するトラス形式の考え方とその設計過程についてのプレゼンテーションをし、その設計を現実化した模型への載荷試験をして強さを競う。日程は全員の都合で決定する。案は12月7日（金）16:40～18:40である。

なお、次の物品はボックスファイルにまとめて初回に貸し出すので自宅で使用していい。

- 1 mm バルサ板（消耗品）
- ハトメ（消耗品）とハトメ・パンチ
- デザインナイフと替刃（消耗品）
- A4 サイズのカッティングマット
- 鋼製定規
- 橋についての初歩解説 CD 「橋の見方・楽しみ方」 [107]（コピー不可）

ただし最後にはすべてを忘れずに返却すること。なお CD は絶版になっているので注意深く取り扱うこと。

B. 橋の力学: 橋の構造の代表として「桁」「トラス」「アーチ」の力学を60分の講義で説明する。参考資料はこの文書の第1章。トラス橋については、各自図書館やインターネット等で文献調査をして最後の模型作りの基礎資料とし、この文献調査結果も最後のプレゼンテーションに含めること。

C. 現場見学: 赤石トラス橋を例として見学し、習った力学が現場でどのような部材（部品）を通して活かされているのかを想像しながら学ぶ。当日はカメラを持参すること。また集合は川内郵便局の前と（変更される場合もある）しておく。講義で学んだことと現場見学からの情報に加えて、各自書籍やインターネット上の情報を使って、特にトラス形式の橋の力学的魅力や工学的な特徴（審美的なことは含まない）について思うところをまとめる。それをウェブページ（HTML言語）あるいはスライド（パワーポイントのようなもの）上に報告書の形でまとめておく。この報告書は最後のプレゼンテーションで用いる。

D. 30 cm のトラス橋模型の設計: 学んだことに基づいて30 cmのトラス（下路とする）を設計する。設計の目標は、橋全体ができるだけ軽く、かつ、より大きな荷重を支えられるようにすることである。このトラスにはスパン中央の下の格点に荷重が載るものとする。この設計の段階から最終案を決定するまでの過程も、上述の報告書に追加すること。具体的なやり方の例としては、写真 L.1 のように方眼紙にトラスの格点（結合点）の位置を落とし、次の情報を設定する。

- 格点（節点）の番号とその座標値: 座標値は一番左端に位置する節点を x - z 座標の原点とし、右向きに x の正の値をとった上で、下向きに z の正の値をとる。次節で説明するプログラムに添付したデータを参考にするといい。単位は mm とする。
- 要素の番号: 部材（要素）の番号とその両端に格点番号を割り当てる。
- 部材の長さ（格点間距離）と断面積と断面2次モーメント: 1枚のケント紙の厚さは仮に 1 mm としている。例えば、幅 $a\text{ mm}$ の紙を n 枚重ねた場合の断面積 A と断面2次モーメント I を

$$A = n \times a, \quad I = \frac{a \times n^3}{12}$$

とする。例えば幅 10 mm の紙を2枚を貼り合せた場合は、断面積が $A = 20\text{ mm}^2$ であり、断面2次モーメントが $I = 6.667\text{ mm}^4$ となる。


以上の情報を後述するトラス構造解析プログラム‘Truss-p.exe’にデータとして入力し、スパン中央の下の格点に適当な大きさの荷重を載せて各部材の応力を計算する。その結果を見ながら格点の位置や部材の断面寸法を変更して、プログラムを再度利用して、各自が最適だ（軽くて強い）と思う形式を決定する。

E. 構造解析プログラム‘Truss-p.exe’について: このプログラムは、インターネット上のページ

<http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/soft/truss-p/>

からダウンロードして用いる。学科の演習室のコンピュータであれば、ダウンロードしたソフトウェアがすぐに実行できるが、自宅のコンピュータでも利用したい場合には同じページに記述されているライブラリをインストールする必要があるかもしれないので注意すること。また実行する度に「セキュリティの警告」が出る場合には、プログラムのアイコンで右クリックをして「プロパティ」を開き、出てきたタブの一番下の「ブロックの解除」をクリックすれば、それ以降は警告無しで実行できる。



1. アイコン  をクリックして‘Truss-p.exe’を実行する。

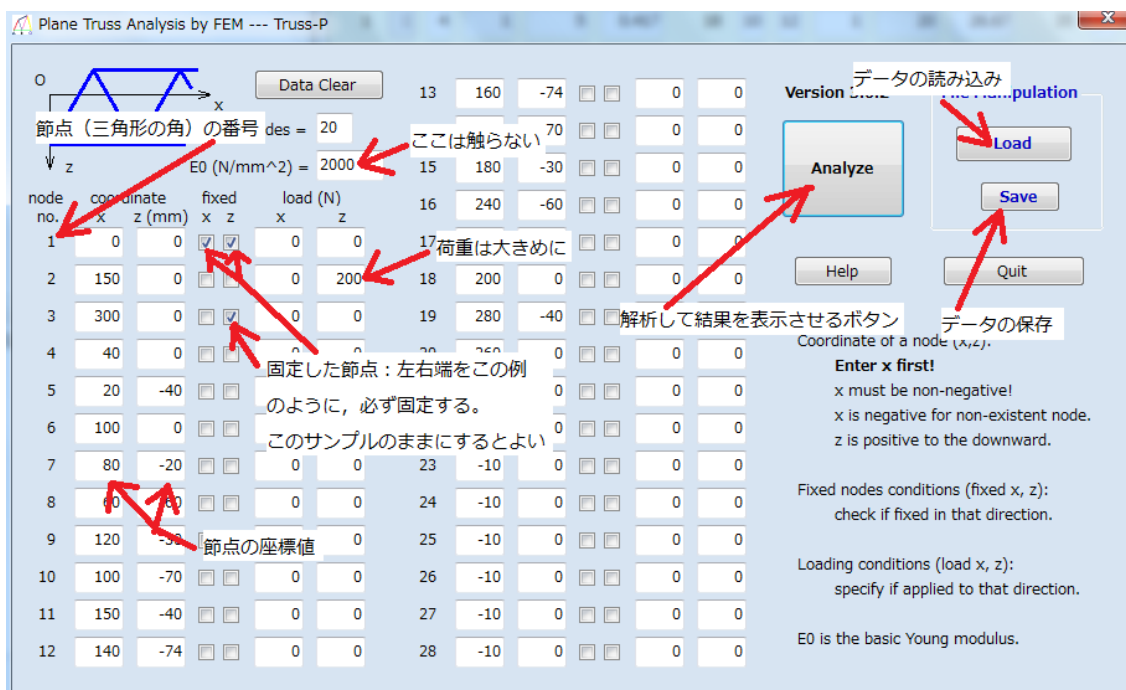


図 L.2 節点入力メイン Window (水色)

2. まず 'Load' ボタンを押してこのプログラムを置いたフォルダを探し、そこにあるファイルの中から一つを選び (例えば 'truss1.dat') 「開く」を押す。これで、そのファイルに保存してあったトラス構造のデータが読み込まれる。あるいは、このプログラムを置いたフォルダを表示しておいて、そこにあるファイル 'truss1.dat' のアイコンをプログラムの水色のメイン Window 中に drag & drop することによっても、データが読み込まれる。
3. 次にボタン 'Analyze' を押すと結果と誇張された変形図が表示されるから、だいたいのはこれで推測できると思う。さて、一旦終了して再度 'Truss-p.exe' を実行し、自分のトラスを作ろう。
4. まず水色の Window 画面で格点 (節点) 情報を入力する。図 L.2 の例では、節点 1 が原点にあって、節点 2 が中央の荷重を載せる点で、節点 3 が右端となっている。座標の原点は左端であり、 x は右向きを正として負は許されない。 z は下向きを正とする。この図 L.2 のデータ例の最初の 3 点のデータをそのまま真似するなら、 x は $0 \leq x \leq 300$ で、また下路としていることから、 z は非正 ($z \leq 0$) になることに注意すること。
5. 最大で 28 節点が定義可能であるが、使わない節点の x 座標値は -10 に固定しておくこと。ただし節点番号は跳び跳びではなく 1 から連続していなければならない。
6. また両端の支持条件も設定する。これも、図 L.2 のデータを参考にすればやり方は明らかだと思う。左端を左右と上下に固定し、右端は上下だけに固定してある。各自の設定でも全く同じにしておけばいい。
7. 同じ水色の Window 画面で、スパン中央 (この例を真似するなら節点 2) の z 方向に荷重を入力する。荷重の大きさは適当でもいいが、できるだけ大きな値を入れておいて欲しい。これは危ない部材を座屈させ易くするためであり、例えば 100 とか 1000 とかでいい。
8. とりあえず、この段階で念のためにデータを保存しておこう。窓の右側にある 'Save' ボタンを押して、例えばこのプログラムがあるフォルダを選んで、そこに例えば 'sozo-1' というファイルで保存しておこ

Element Data --- Truss-P

elmt	l	r	E/E0	area	m-inert	[area: mm ² , moment of inertia: mm ⁴]					# of elements = 42						
1	1	5	1	3.333	0.417	19	10	12	1	20	26.67	35	17	20	1	10	3.333
2	1	5	1	3.333	0.417	19	2	11	1	10	3.333	36	17	16	1	10	3.333
3	4	5	1	3.333	0.417	19	12	1	10	3.333	37	16	20	1	20	26.67	3.333
4	4	6	1	3.333	0.417	21	17	13	1	30	90	38	16	19	1	20	26.67
5	4	7	1	3.333	0.417	22	2	18	1	10	3.333	39	20	19	1	10	3.333
6	4	8	1	20	26.67	23	2	13	1	10	3.333	40	20	3	1	5	0.417
7	5	8	1	20	26.67	24	11	15	1	10	3.333	41	19	3	1	20	26.67
8	6	7	1	3.333	0.417	25	11	13	1	10	3.333	42	6	9	1	10	3.333
9	7	9	1	10	3.333	27	13	14	1	20	26.67	43	-1	0	1	5	2
10	7	9	1	10	3.333	27	13	14	1	20	26.67	44	-1	0	1	5	2
11	7	10	1	10	3.333	28	15	18	1	10	3.333	45	-1	0	1	5	2
12	8	10	1	20	26.67	29	15	17	1	10	3.333	46	-1	0	1	5	2
13	6	2	1	10	3.333	30	15	14	1	10	3.333	47	-1	0	1	5	2
14	2	9	1	10	3.333	31	18	20	1	5	0.417	48	-1	0	1	5	2
15	9	11	1	10	3.333	32	18	17	1	10	3.333	49	-1	0	1	5	2
16	9	10	1	10	3.333	33	14	17	1	10	3.333	50	-1	0	1	5	2
17	9	12	1	10	3.333	34	14	16	1	20	26.67	51	-1	0	1	5	2

After the `left node number is set, the `right node number can be entered. Left node of the element #1 is fixed to be 1.

図 L.3 要素入力 of Window (黄色)

う。実際のファイル名は拡張子付きで 'sozo-1.dat' となる。

- 次に図 L.3 の黄色の Window で弦材 (要素) 情報を入力する。要素 1 の左端の節点は 1 番に固定してあるので、その右端の節点番号と、それ以外の要素の配置を入力する。左端の番号を入力しないと右端の番号も入力できない。またそれぞれの要素毎に、断面積 A と断面 2 次モーメント I も前述の式を用いて計算して設定しておく。使わない要素の左端の節点番号は -1 に固定しておくこと。要素の順番はどうでもいいが、要素番号も跳び跳びではなく 1 から連続していなければならない。
- 必要な情報を入力し終わったら、また水色の Window に戻ってボタン 'Save' を押し、前と同じ 'sozo-1' と入力してデータを重ね書きで保存する。この操作でファイル 'sozo-1.dat' に、設定した情報が保存されるので、万が一コンピュータの電源を切っても大丈夫である。
- ここで、各要素に生じる軸力を計算させるために水色の Window のボタン 'Analyze' を押し。もしエラーメッセージが表示されずに結果を示す Window が現れたら成功だ。そうでない場合にはデータに誤りがある。ほぼすべての誤りの原因は次のようなものであろう。
 - 節点が十分に結ばれておらず、どこかに自由に動ける部材がある。
 - 一つの部材の両端の節点番号が同じになってしまっている等の入力ミス。

エラーのメッセージボックスが表示されたら「続行」を押し、そのあとのメッセージすべてにも 'OK' で応えること。うっかりデータ保存を忘れたままここで「終了」を押してしまうと、せっかく入力したデータすべてを失ってしまうので注意すること。データを修正したら再度 'Analyze' ボタンで解析してみて、エラーが無くなるまで修正作業を続ける。修正の度に忘れずに同じファイル 'sozo-1' に重ね書きで保存

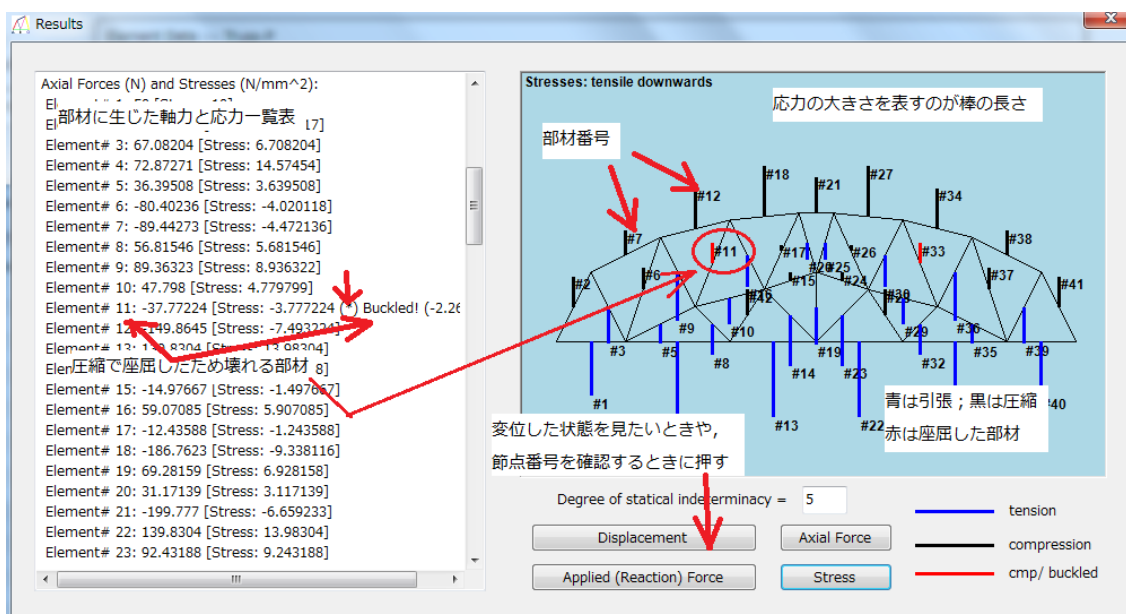


図 L.4 結果表示の Window

しておくこと。エラーの原因がどうしてもわからないときは，データファイルを添付メールで教員に送る等して質問すれば，助言がもらえる。

12. 計算が成功して図 L.4 のような結果表示の Window が現れたら，その ‘Stress’ ボタンを押せば部材毎の応力が図示され，窓の左側にはその数値が表示される。実はこれが橋の抵抗力になっているので，この値の絶対値をできるだけ小さくすれば，強い構造ができることになる。ちょっと詳細なヒントは

- 特に，負の応力（圧縮）の要素（黒か赤い部材）を強くする必要がある。正の応力（青い部材）はある程度までなら薄い部材のままでも大丈夫である。つまり，負の応力になっている要素番号を見て，その部材の紙の枚数を増やす必要があるのだ。
- もし応力の表の数値の右に ‘(*)’ マークがついていて，部材の色が赤だったときには，その部材は壊れる（座屈する）ことを示している。もし ‘(*)’ マークが一つも表示されない場合には，水色のメイン Window で荷重をもっと大きくして解析し直してから，応力値と部材の色を確認する。これを繰り返して，座屈しない状態（赤い部材が無い状況）でできるだけ大きな荷重を支えられるように設計（デザイン）すれば，強いトラスを作ることができるのだが・・・
- 実際には赤い部材を無くすことはできないので，簡単に言えば，負の応力になる赤い部材は太くして応力の絶対値を小さくし，正の応力が生じる青い部材はある程度（？）は応力値が大きくても構わないから少しだけ細くするといった対処しかできない。

ということである。

13. 実際の設計でも，適切な（自分が納得のいく）構造にするために複数の案を比較しなければならない。つまり，水色や黄色の Window に戻って節点位置を変更したり面積と断面 2 次モーメントを変更したりするだけではなく，部材の数も変更する等して，数種類のモデルを作って解析を繰り返して結果を比較する必要があるのだ。このとき応力表示の表に ‘(*)’ マークが表示されるように荷重は常に大きめの値を設定して，すべてのモデルに同じ値を入力して比較しないと意味が無いので注意すること。また各モデ

ル毎に、あるいはやや多めの修正をしたときには、異なる名前のファイルにデータを保存しておかないと後悔することになるので注意すること。

ただし実際に模型を手で作ることを考えると、あまりにも短い要素や細かい要素は避けておかないと、製作精度が出ない可能性があるので、作り易さも想像しながらデザインしておこう。また模型全体がまっすぐでなかったり振れたりしていると、設計で期待した強度に達する前に壊れてしまうことがあるので、丁寧に製作することも重要である。

F. 模型の製作: 最終的なデータを元に、写真 L.1 のように各部材毎の形をケント紙上に落とす（工場における「けがき」作業に相当する）。寸法の制限は次の通りである。

- 長さは最も端にあるハトメの穴の中心位置間の距離であり、それを 30 cm とすること。これを守らないと試験ができなくなる（失格になる）ので十分注意すること。
- 幅（主構間の間隔）は 5.5 cm とする。これは綿棒の長さに関係している。
- 高さは 30 cm 未満とする。つまり $30 \times 30 \times 5.5$ (各 cm) に若干の余裕を含めた寸法の箱の中に模型全体が収まるようにするということである。
- 下弦材には、スパン中央に荷重を載せるための格点（ハトメ穴）を必ず確保する。
- 全く同じ寸法の 2 主構形式とする。
- 1 主構当たり 3 部材だけには 1 mm 厚のバalsa板で補強していい。ただし幅は紙の部材のそれに合わせ、綿棒の間に挟めるような長さにする（実例を教室で見せる）。

幅 1 cm の帯を 3 枚重ねると $A = 30 \text{ mm}^2$, $I = 22.5 \text{ mm}^4$ であり、幅 1.5 cm の帯を 2 枚にすると $A = 30 \text{ mm}^2$, $I = 10 \text{ mm}^4$ なので、面積は同じだが枚数の多い前者の方が圧縮には強くなる。しかしハトメは 15 枚くらいのケント紙を留めるのが限界なので、あまり厚くすると模型が作れなくなるので注意すること。またハトメの穴の中心が設計図に描いた格点になるように製作しなければならないので、図 L.5 のように格点間距離より最低でも 1 cm くらい長い部材

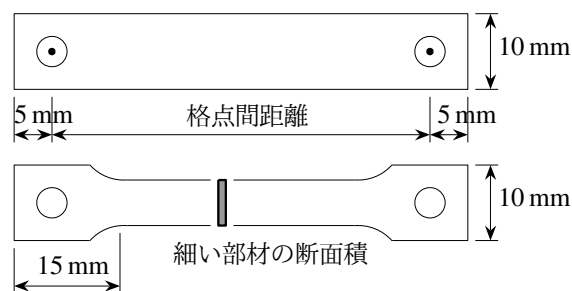


図 L.5 ハトメの周りは 1 cm 四方を確保

を切り出さなければならないことにも注意すること。実際に使うハトメの大きさを勘案すると、ハトメ用の穴を開ける部分は 1 cm 角より大きくするのが望ましい。そのため 1 cm よりも細い（引張の）部材を作る場合には、これも図 L.5 の下側に示したように、穴の部分は 1 cm 角を確保した上で部材の中央部のみ細くして、断面積はこの細い部分の断面積を部材の断面積とする。ケント紙には厚さがあるので、実際の細かい寸法どりについては各自工夫をして欲しい。

また容易には壊れないように、二つの主構を組み上げたあと 1 枚の長方形の紙を用いた「横構」（写真 L.2 参照）で剛結する（これも実例を見せる）必要がある。主構の間隔は 55 mm なので、例えば 80 mm の部材同士を横に結合する横構は、例えば糊しろを 5 mm ずつとって幅 65 mm で、長さはハトメの部分を避けるために若干短くして $80 \text{ mm} - 15 \text{ mm} = 65 \text{ mm}$ 程度の長方形の部品を作成し、糊しろ部分を折り、二つの主構の間を結合すればいい。2 主構の相対するすべての部材同士（特に橋門構）をこの横構でつないでおかないとすぐに壊れてしまうので十分注意すること。

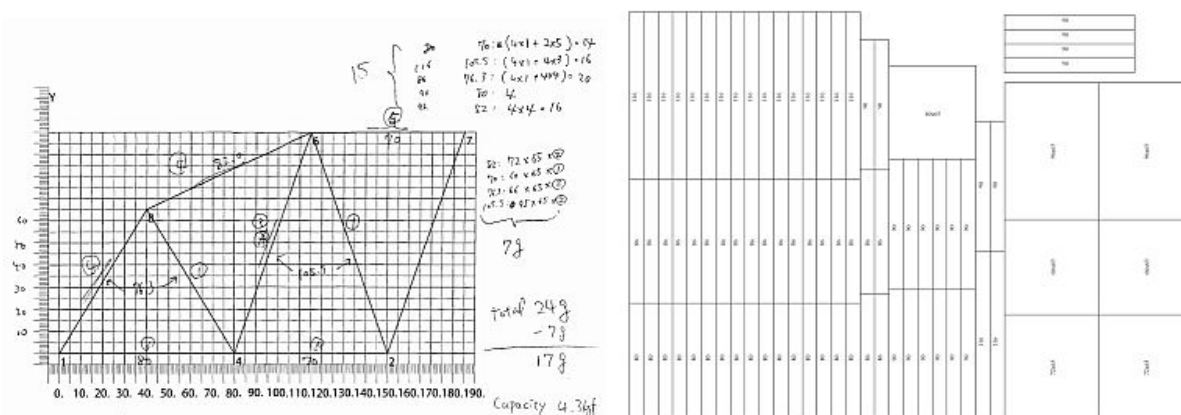


図 L.6 斉木功先生の設計図面とケント紙への割り付け

主構が二つとも完成したら、主構同士を綿棒等の助けを借りて仮に立体化し（工場ヤードにおける「仮組み」に相当する）、その状態で上述の横構を貼り付ける。このとき前述のように全体がゆがまないように十分注意を払うこと。そのあとバルサ板を加工してハトメを通した綿棒に引っ掛け、そこ以外の綿棒を取り外して完成となる。なお一つの部材の中間部に別の部材をハトメで結合することは許容できない。つまりハトメ穴はすべての部材の両端の2箇所のみとする。A3のケント紙が約2枚必要になると思う。糊は普通のスティック糊で構わないが、全面に十分に塗って貼り付け、新聞紙等に挟んだものに辞書等の重しを載せて平らな状態で十分に乾かすこと。糊とケント紙・綿棒等は各自生協工学部の売店等で購入して欲しい。バルサ板も生協にあるが、□○模型（一番町の三越前）か○□模型（青葉通りで西公園通りから200mくらい仙台駅方面）でも入手可能。なお、配付する実験作業規準書をよく読み、作業中のナイフ等による怪我には十分注意する¹こと。設計図と割り付け図 L.6 で示した斉木功先生の模型を写真 L.3 のようにセットして載荷した結果、バルサ板無しで24.0gの橋梁が4.3kgを支えた。



写真 L.3 斉木功先生による模型の例

G. プレゼンテーション: 最後に、次の項目についてパーソナルコンピュータを用いて発表をする。当日は、報告するのに必要なすべてのファイルをメモリ・スティックに保存し、大学のパソコンを用いて発表すればいい。パワーポイントも使える。あるいは自分のコンピュータを持参してもいい。

- 現場のトラス橋の写真を用い、どういう特徴を持っていたかについて、主に力学的観点から説明する。
- また、トラス橋一般について独自に勉強して得た知識を皆に披露する。
- 見学における観察や、図書館やインターネット等から得たその他の情報を踏まえて、最終的に選んだトラス形式を提案する。どの部分がどういう目的で組み立てられているのかについて、その趣旨を述べる。
- 最終的にその形式を選ぶまでの構造解析プログラムを用いた試行錯誤の過程を簡単に説明し、工夫点について説明する。

¹ 仙台市教育委員会開催の行事で1度だけ中学1年生に後述のペーパークラフト桁を数種類作ってもらったが、片刃ナイフの峰ではなく刃の方に指を当てようとしたのには驚いた。最近の小学校では工作はさせないのだろうが、本当にそれでいいのだろうか。

表 L.1 2007 年度 (左) と 2009 年度 (右) の実績

模型	質量 (g)	荷重 (kg)	性能 p
A	27.6	5.7	207
B	28.9	5.2	180
C	29.8	3.2	107
D	24.6	2.3	93.5
E	31.7	2.9	91.5
F	35.9	2.8	78.0

模型	質量 (g)	荷重 (kg)	性能 p
G	38.6	6.3	163
H	19.9	3.2	161
J	25.0	3.0	120
K	56.7	2.8	49.4
L	14.6	0.50	34.3
M	36.1	1.2	33.2

例えば写真等で電子情報になっていないもののスキャンが必要な場合には研究室のスキャナが使えるが、電子化せずに紙にコピーしたものを持参して手に持って示すだけで構わない。

H. 耐荷力試験: 最終的に採用した設計に合わせて製作した紙模型に実際に荷重を載せ、その支えた荷重と橋梁の自重を勘案して競争する。写真 L.3 のように模型をセットアップし、中央の受け皿に重りを徐々に加えていき、耐荷力を測定する。この耐荷力と橋梁の自重の比を用いて

$$p \equiv \frac{\text{支えたおもりの質量}}{\text{模型の質量}}$$

を測定し、これ (性能 performance) が大きい方がいい構造だと判定する。例えば写真 L.1 の模型の質量は 24.1 g で 2.8 kg の重りで壊れたので、この模型の性能は $p = \frac{2800}{24.1} = 116$ となる。過去の実績の一部を表 L.1 に示した。また過去 4 年分²の性能と自重の関係を図 L.7 にまとめたが、一点鎖曲線は全試験結果の平均荷重 $P_{\text{ave}} =$

3.2 kg を用いたもので、実曲線は全結果を双曲線回帰して得た $P_{\text{fit}} = 2.7$ kg を用いたもの、点曲線は荷重が 5 kg 以上の結果だけを双曲線回帰して得た $P_{\text{big}} = 6.1$ kg を用いたものである。どうやら荷重 4 kg 辺りに魔物がいるようだ。二つの例が齊木功先生と第 1 著者の結果である。

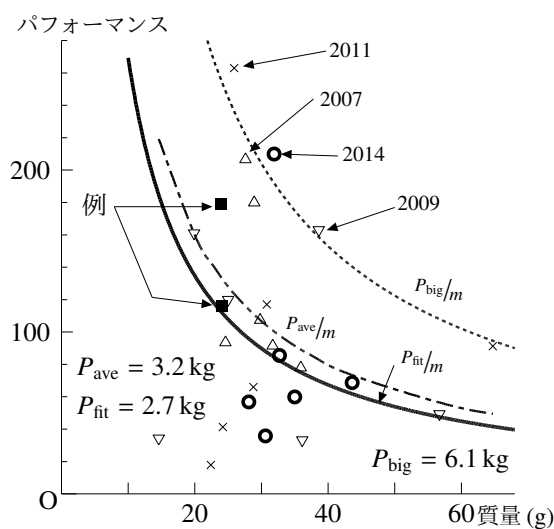


図 L.7 パフォーマンスの整理

I. 成績評価の仕方: 次のようにして求めた得点を成績とする。成績区分は通常の科目のそれと同じとする。

1. 全員の模型の性能 p の値を順番に並べ、その最大・最小値をそれぞれ p_{MAX} , p_{MIN} とする。ただし $p_{\text{MAX}} - p_{\text{MIN}} < \frac{p_{\text{MAX}}}{10}$ の場合には $p_{\text{MIN}} = \frac{9 \times p_{\text{MAX}}}{10}$ とする。
2. プレゼンテーションを 50 点満点で教員が主観的に評価 (o) する。
3. 載荷試験で失格しなければ努力賞として 30 点 ($e = 30$) を与える。
4. 性能 p を用いて設計技術を評価した上で、総合得点を以下の式で決定する。

$$\text{総合得点} \equiv 20 \times \frac{p - p_{\text{MIN}}}{p_{\text{MAX}} - p_{\text{MIN}}} + o + e$$

² 過去の実績は <http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/sozo/> にも置いてある。

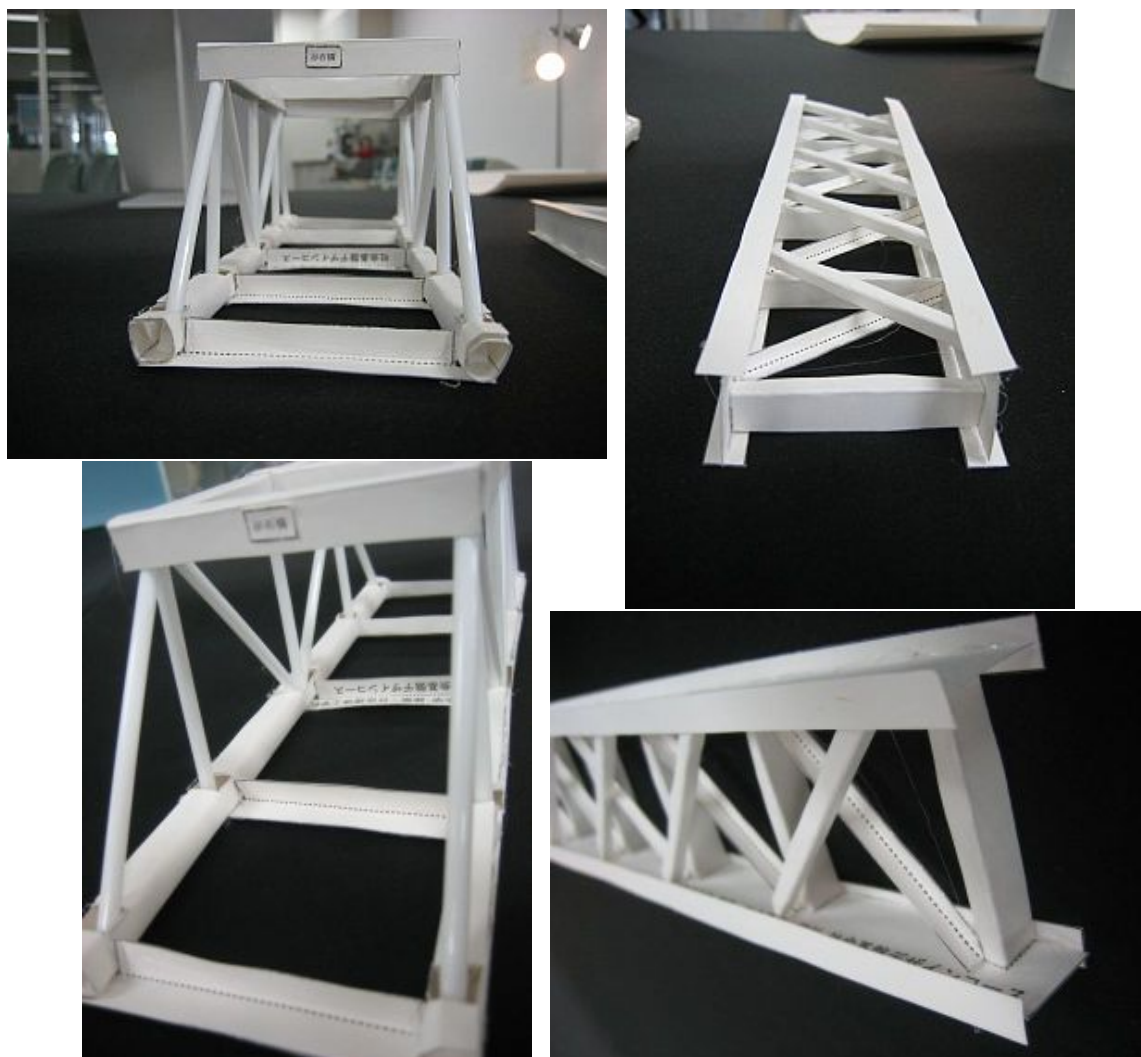


写真 L.4 橋梁のペーパークラフト (<http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/model/>)

L.1.2 トラスと桁のペーパークラフト

オープンキャンパスにおける使用を念頭に置いて東北大学の山田真幸先生がデザインしたオリジナルの型紙を紹介する。どちらも仙台市内の橋をモチーフにし、型紙図 L.8 のトラスは赤石橋を、型紙図 L.9 の桁は牛越橋をイメージした。トラスには橋銘板の見本も部品に入れてあるが、自分の苗字等の好きな名前で作ると楽しい。色も自由に塗って例えば景観の検討等をする面白いかも。型紙の実線は切り、破線は折る。黒い部分は取り去る。ストローには普通の糊よりもグルーガンを使った方が簡単に作れるが、ストロー自体が溶けないように注意しよう。写真 L.4 右上では組み方が見易くなるように上下逆さに置かれているので注意して欲しい。多くのペーパークラフトとは異なりある程度の荷重を支えることができるので、鉄道模型のジオラマ等で使う廉価版橋梁にもなる。ただ本当に支えられるかどうかは予め確かめて欲しいが、オープンキャンパスで橋の中央におもりをぶら下げた実験では、トラスには約 3 kg が、桁には約 1.7 kg が載った。

L.2 自己展開型構造

例えば宇宙空間に巨大な電池パネルを設置するとき、部品をスペースシャトルで運んで人が船外活動で接合していくという方法は効率的ではないし大きな危険も伴う。このような場合、シャトルのペイロードベイに格

納できるくらいの大きさにまで比較的小さな力で畳むことができ、それを宇宙空間に放出したときには、自らの力あるいは非常に小さな力で拡げることができれば便利で安全だろう。このような構造を自己展開型構造と呼ぶ。つまり、例えば図 6.14 の William のトグルで観察されるような座屈の跳び移り現象等をうまく利用しようというわけである。

身近な例だが、写真 L.5 は自動車の横の窓に吸盤で付けることができるシェードである。広がった状態をねじりながら押すことで三分の一のサイズに畳むことができる。右上インセットが畳んだ状態を、左下インセットが展開された状態を示す。このように座屈の飛び移り現象等を利用した構造が特に宇宙構造に関してはいろいろ考案されているようだ。

座屈とは関係無いが、そういった宇宙構造を研究しておられる宇宙科学研究所（現宇宙航空研究開発機構）の三浦公亮先生が考案して実用化された身近なものに「ミウラ折り³」というものがある。これは著作権登録されているが既にインターネット上に多数紹介されているので、以前宇宙科学研究所の名取通弘先生からいただいた資料を図 L.10 に示しておいた。三浦先生は「テニスの科学」という本も書いておられる。このような自己展開型構造を研究しておられる名取通弘先生達は、クラゲを飼っていたり、つぼみやさなぎの中で花びらや羽がどのように折りたたまれているのか等を観察しておられたようだ。さて写真 L.6 がその折り方をした A4 用紙の例である。矢印方向に押すことによって「左下インセット→右上→右下」のように畳むことができる。逆にこの対角箇所を引張れば展開される。さらなる長所は、この折り目が破け難いということである。

例えば地図を普通に直交する方向で折ると、紙の繊維の方向との関係で、何度も開閉しているうちにその折り目に沿って破れてしまうことが多いのだが、この「ミウラ折り」した地図は折り目が破れ難いという特長も持つのだ。図 L.10 の上の横線とジグザグの破線に沿って折れば一応はできあがるので、完成された写真を参考にしながら山谷の区別をつけて折ってみて欲しい。



写真 L.5 日よけシェード

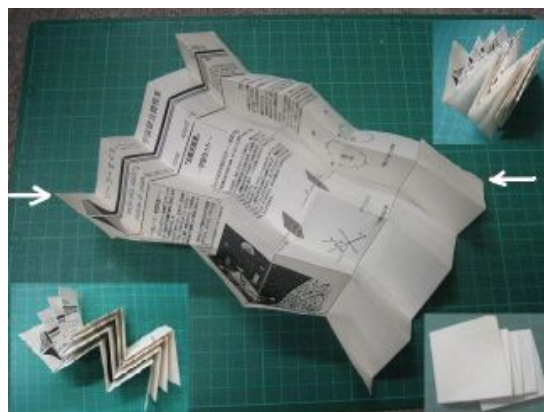


写真 L.6 ミウラ折り

L.3 折り紙やペーパークラフト等

あまりにも唐突で構造力学とは全く関係無いが、名取先生達がさなぎ等の観察をしておられたことから、蝶の折り紙のことを思い出した。30 年以上前に雑誌か新聞で見えて覚えていたものだが、インターネットに置いてみたところアクセスが結構多く、一度だけだがメールでサンプルの送付依頼もあった。なんでも結婚式で使いたいとのことで、とても嬉しい依頼だった。あるとき「面白い動画」の紹介 TV 番組を見ていたら、ある動画⁴にもこの蝶が出てきた。

³ British Origami Society で 'miura-ori' と名づけられたようだ。正確な折り方と著作権については <http://www.miuraori.biz/> を参照のこと。

⁴ 写真ページ <http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/origami/> から YouTube 動画にリンクしてある。

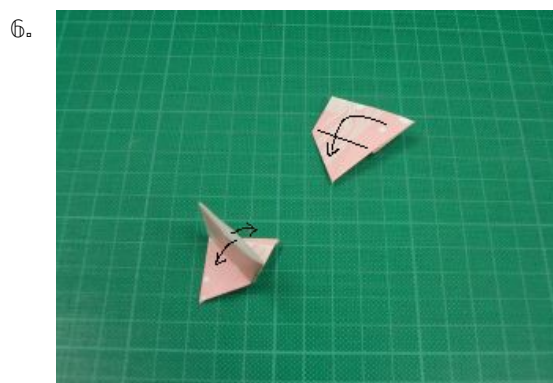
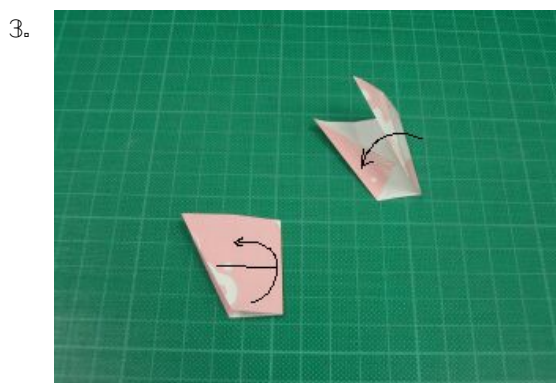
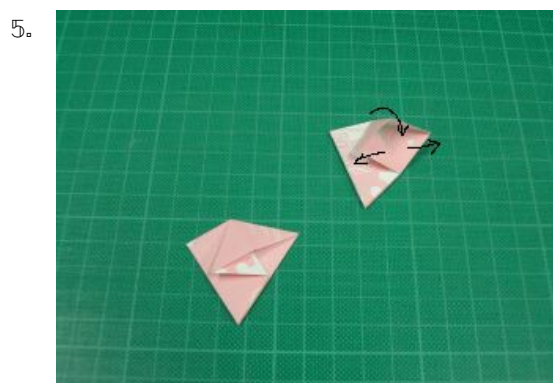
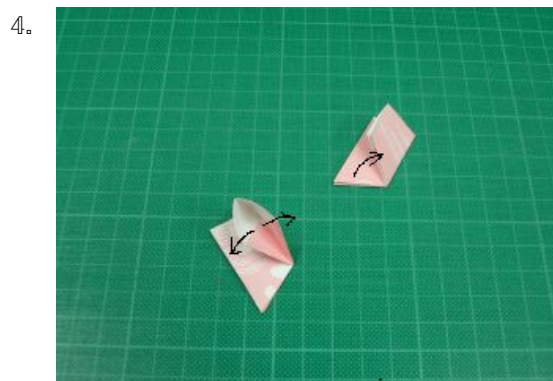
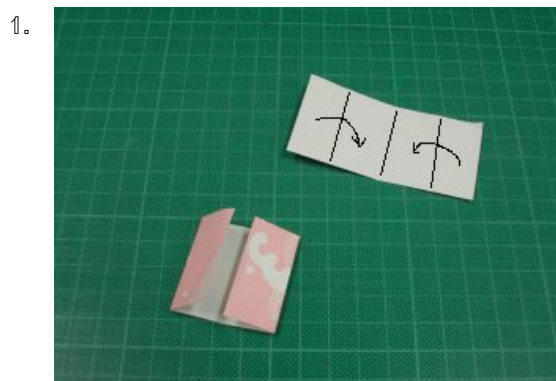


1. 紙の幅と高さを2対1にする。1枚の折り紙を半分に切れば2頭⁵分になる。横長に置いて左右から四分の一の所を折る。
2. 左右から四分の一の縦長の長方形を対角線で折る。両方共折る。
3. それを中央で折って重ねて台形にして、その台形を半分に折り重ねる。
4. 折り重ねた半분을起こす。起こした部分だけを「開く」。ちょうど「鶴」の足を作るところと同様だ。
5. 開いたところを「袋」のようにしてつぶす。
6. それを裏返して、さっきと同じような袋を作るために半分に折り、折り目を入れる。そして、それをまた「開く」。
7. 開いて袋を作ってつぶす。反対側と同じ。
8. ひっくり返す。とがった方の三角形の半分に折り目を入れ、つまり一番上の紙だけをAで折って、その三角の角をとがった先端に持っていきながら、BとCを同時に折る。わかり難いから写真を参考に。
9. 三角の角を先端に持っていくと「えり」が起きてくるので、それをつぶしながら、三角形を重ねる。
10. 反対側も同じようにしてひっくり返す。写真のAの半分よりちょっと深く、つまり($A/2 < x$)で折り目を入れて折り上げる。
11. 折り上げた上の紙だけを元に戻すように開く。一つ前でAの半分より深く折ったために「えり」が立つので、それをつぶす。
12. ほとんど完成。蝶の形をした平らなものができるので、蝶の胴体らしくするために、写真の線のところで「谷」「山」「谷」で折ってつまみ上げる。
13. できあがり。表でも裏でも面白いと思う。



写真 L.7 Spitfire Mk.VII (Hasegawa 02096 1:72) とナガサキアゲハ

⁵ 蝶を1頭2頭と数えることを知ったのは北杜夫氏の随筆だったと思う。



写真L.8 蝶の折り紙



写真L.9 AH-64 Apache (Hasegawa D6 1:72) と Harrier GR Mk.3 (Hasegawa B6 1:72)

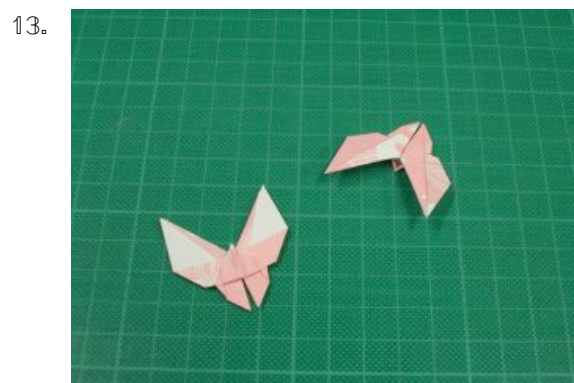
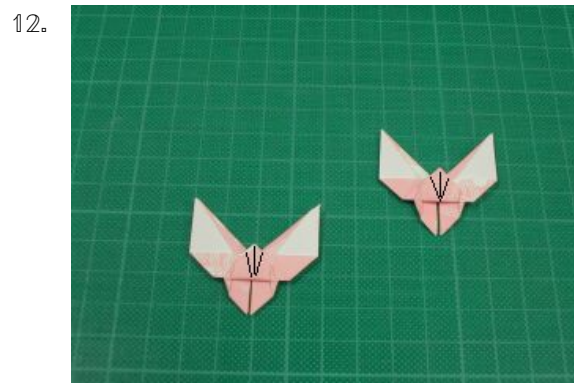
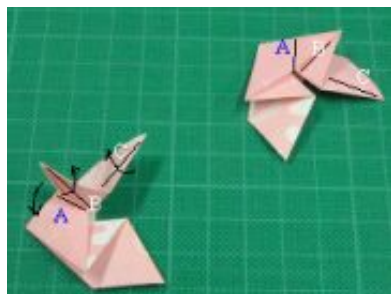
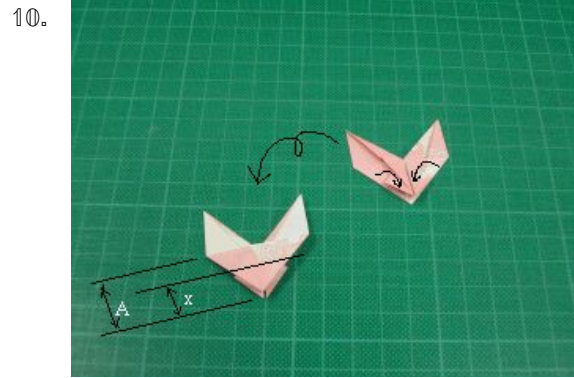



写真 L.10 蝶の折り紙 — つづき

2008年7月30-31日 東北大学オープンキャンパス 建築・社会環境工学科 社会基盤デザインコース

トラス橋 モチーフは赤石橋 宮城県仙台市太白区茂庭字合ノ沢南
名取川を渡り秋保街道-206号線を結ぶ 1937年 下路トラス橋




鋼などで作られた棒状の部材 (パーツ)

この方向に押したり引いたりするには強いけど...

曲げる力には弱い

トラスにすることで部材には曲げ以外の力のみが伝わるので強い



赤石橋はこのトラスを2組で床版を支えている。そのトラスが倒れないためにはここに取り付ける部材が重要 (横門構, 他)

構造のかなめはトラス。軽くて丈夫な構造だよ。

ストロート

上弦材

下弦材

ストロー用型紙

腹材

一本のストローを折る

一本のストローを折る

横門構

グルーガンの熱でストローが溶けるよ。手早く接合しよう!

<http://www.eng.tohoku.ac.jp/ugrad/cea/>

トラス橋

下弦材

上弦材

ストラット

床桁

横門構

銘板

©2008 山田真幸

図 L.8 トラスのペーパークラフトの型紙と解説

2008年7月30-31日 東北大学オープンキャンパス 建築・社会環境工学科 社会基盤デザインコース

東北大学

I けた橋 モチーフは牛越橋 宮城県仙台市青葉区川内 広瀬川を渡り国道48号線へ 1954年 二主桁ゲルバー橋

曲げる力には弱い

立ててみたら、
とっても強い!

圧縮
引張

I 桁が倒れたら大変!
なので桁を互いにつないで倒れないようにしてあります。重要。

この辺の I 構造に注目

鉄筋コンクリート製
床板が乗っている

牛越橋では、
I 桁を二本並べて
二次部材で連結。
倒れないように

横桁 縦桁

構造のかなめは I けた

I けた橋は日本で一番
多い形式の橋です。

力がかかる桁の上下をフランジで補強
弱い方に曲がらないように

この辺りのひろばを
換路広場と呼びます。
古くは高札場や市場
などとして、最近
はちょっとした公園
など人が集まる特徴
を生かして使われ
ます。橋は街と街、
人と人とをつなぐ
土木構造物なの
です。

親柱

<http://www.eng.tohoku.ac.jp/ugrad/cea/>

強いよ!

主桁 フランジ×2

山田真幸
©東北大学 建築・社会環境工学科 社会基盤デザインコース

I 桁橋

横桁×6

さしごめし
銘板

横桁×10

主桁 フランジ×2

©2008 山田真幸

※A4ケント紙にコピーしてお使い下さい。

図 L.9 桁のペーパークラフトの型紙と解説

ソーラーセイル・ニュース 宇宙研公開特集

SOLAR SAIL BULLETIN

OPENING OF SAGAMIHARA CAMPUS SPECIAL ISSUE AUGUST 1988

月レース世話人会

SOLAR SAIL UNION OF JAPAN

c/o INSTITUTE OF SPACE AND ASTRONAUTICAL SCIENCE

YOSHINOBU, SAGAMIHARA, KANAGAWA 229, JAPAN

PHONE: 0427-51-3911 EXT. 2701, 2423

「太陽光推進」

—宇宙ヨットの性能—

太陽光推進—宇宙ヨットの推進は、光子の反動による反作用力（光子の反動）が推進力となる。光子は質量を持たないが、運動量を持つ。光子が物体に当たると、その運動量を物体に伝える。この反作用力が推進力となる。

その際、宇宙ヨットの帆は太陽光を反射する。またSF（超伝導材料）の特性にも利用されている。特にSFは、NASAの「ソールジャー」計画の推進力として、検討が行われた。この計画は、現在の技術では実現が難しいが、将来的には実現可能である。

帆を自在に動かすための機構は、1981年に開発された「A」型の機構で実現された。これは日本製のフランス、アメリカ、イギリスなどとの共同開発で実現されたものである。

宇宙ヨットは、太陽や恒星からの放射線の両方を利用する手段としても開発されている。

「太陽光推進」

—宇宙ヨット—

宇宙ヨットはなぜ進むのか—推進の原理

宇宙ヨットは太陽空間に浮かぶ巨大な帆（セイル）に太陽の光を受けて進む。帆は太陽光を反射し、その反作用力によって進む。帆の面積が大きいほど、進む速度も速くなる。帆の材料は、非常に軽くて丈夫な材料である。帆の形状も、進む方向によって変化する。

帆の面積が大きいほど、進む速度も速くなる。帆の材料は、非常に軽くて丈夫な材料である。帆の形状も、進む方向によって変化する。

$F = P \cdot S \cdot \cos^2 \theta$

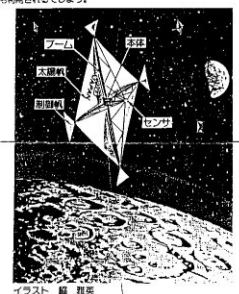
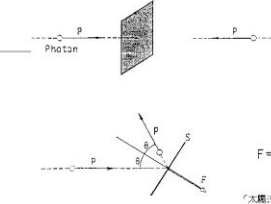
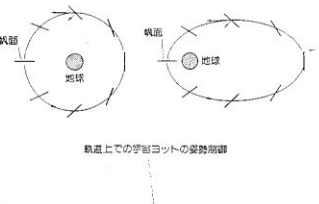
「太陽光推進」の原理

帆の面積を大きくして、かつ質量を出さなければよく（軽くなる）ことが宇宙ヨットの性能アップに必要。

月レースを計画する日本の宇宙ヨットの設計重量は170kg程度。このうち帆の重量は150kg程度。

帆の面積は、太陽光の強度と帆の反射率によって決まる。太陽光の強度は、地球から約1.5kW/m²である。帆の反射率は、0.15程度である。帆の面積は、100m²程度である。帆の質量は、150kg程度である。

帆の面積を大きくして、かつ質量を出さなければよく（軽くなる）ことが宇宙ヨットの性能アップに必要。

宇宙ヨットの構造は—一月に向かう—

基本的には帆の面積に比例した放射線圧力（ベーン）を回転して太陽光の圧力を変化させることによりヨットの姿勢を変えていきます。巨大な帆を動かすための機構は、非常に複雑な構造になっています。帆の面積が大きいほど、進む速度も速くなる。帆の材料は、非常に軽くて丈夫な材料である。帆の形状も、進む方向によって変化する。

帆を自在に動かすための機構は、1981年に開発された「A」型の機構で実現された。これは日本製のフランス、アメリカ、イギリスなどとの共同開発で実現されたものである。

宇宙ヨットは、太陽や恒星からの放射線の両方を利用する手段としても開発されている。

宇宙ヨットの構造

帆の面積を大きくして、かつ質量を出さなければよく（軽くなる）ことが宇宙ヨットの性能アップに必要。

月レースを計画する日本の宇宙ヨットの設計重量は170kg程度。このうち帆の重量は150kg程度。

帆の面積は、太陽光の強度と帆の反射率によって決まる。太陽光の強度は、地球から約1.5kW/m²である。帆の反射率は、0.15程度である。帆の面積は、100m²程度である。帆の質量は、150kg程度である。

帆の面積を大きくして、かつ質量を出さなければよく（軽くなる）ことが宇宙ヨットの性能アップに必要。

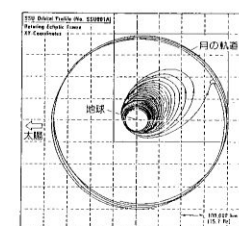
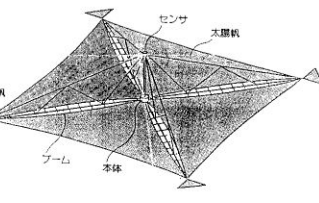
軌道への編成—収納と展開—（ミウラ折り）

帆の面積を大きくして、かつ質量を出さなければよく（軽くなる）ことが宇宙ヨットの性能アップに必要。

月レースを計画する日本の宇宙ヨットの設計重量は170kg程度。このうち帆の重量は150kg程度。

帆の面積は、太陽光の強度と帆の反射率によって決まる。太陽光の強度は、地球から約1.5kW/m²である。帆の反射率は、0.15程度である。帆の面積は、100m²程度である。帆の質量は、150kg程度である。

帆の面積を大きくして、かつ質量を出さなければよく（軽くなる）ことが宇宙ヨットの性能アップに必要。

図L.10 解説にある宇宙ヨット（小型ソーラー電力セイル実証機「IKAROS（イカロス）」）は、2010年5月21日（日本標準時）に種子島宇宙センターから打ち上げられた。



写真 L.11 Sopwith F-1 CAMEL (Schreiber-Bogen 1:20)⁶



‘HD,’ ‘feed’ and ‘substitute.’ これはどうやら正式に ‘Holdings’ の略らしいのだが、‘CM’ や ‘PR’ が何の略なのかについて知っている大学生はほとんどいないのではないだろうか。これは、もう日本語になってしまっているからである。その日本語もときどきおかしい。えさは「やる」ものであって、家族の一員であっても「あげる」ものではない。また式は「代入する」ものであって、「代入してあげる」必要は全く無いのであるが。先日 TV の料理番組で奇怪な調理を指示していた。「〇〇を煮て揚げる^るとおいしくなる」のだそうだ。

⁶ 主翼端部上面の突起は aileron horn と呼ばれるもので、下翼下面の同じ位置にも設置されていて、これをケーブルで引いてエルロンを上下に傾ける。水平尾翼の上下面にも同様の突起があるが、そちらはエレベータ操作用の elevator horn だ。垂直尾翼に付いているラダーも同様の部品を通して操作する。無線操縦模型では今でも同様のものが用いられている。

このドイツのメーカー製のペーパークラフトはかなり精密にできていて、部品に記された番号順に組み立てればプロペラも回るのだが、多少は出来上がりを予想したシミュレーションが必要だ。同じように、p.883 の写真の海外メーカー製のプラスチック・モデルの場合も同様の組み立て前シミュレーションが必要なことが多い。こういった作業は、橋梁の鋼板を組み立てて部材にする場合とほぼ同じで楽しい。また海外のプラスチック・モデルの金型は日本のそれより精度が劣るためか、「ばり」も多く部品の精度もあまりよくないことからヤスリやパテ・コンパウンド等が必要になるが、それがかえってものづくりの真似事としてはいい経験になると思う。もちろんプロペラは回る。

‘glue.’ 留学中の第1著者がスポンジの実験をしたときにお世話になった技術職員の John はドイツ人だ。glue が欲しかったので、地盤工学の勉強を真面目にやっていた第1著者は「‘cohesive material’ が欲しい」と言ってしまった。John は一瞬きょんとしたあと大笑いして、「それは ‘adhesive matter’ のことか?」と。頭のいい人と仕事をするとなだねえ。



写真 L.12 De Havilland D.H.2⁷ (Revell 04677 1:72) と Sopwith F-1 CAMEL⁷ (Revell 04190 1:72)



‘太巻き:’ そんなものは無かった。それに‘肉まん’も無かった。もちろん‘細巻き’も。東京弁文化でそのように呼んでいるものは「海苔巻き」であり「豚まん」である。じゃ東京弁の‘細巻き’・‘海苔巻き’は? それぞれ中身で呼ぶ。「鉄火巻き」「河童巻き」「干瓢巻き」。コンビニエンス・ストアとTV等によって、日本の美しい言葉の文化が乱れてきているような心配がある。‘かたす’なんて品が無く聞こえる。やはり「な^おす」だ! 呵呵。

⁷ De Havilland は操縦席の後ろにエンジンとプロペラがあるので機関銃に工夫は不要だが、ドイツのフォッカーが同調メカニズムを導入するまでは、操縦席の上辺りの翼の上に機関銃を置いたりプロペラに弾が当たってもいいようにしていた。前者だと命中率が下がり、後者だとプロペラが重くなる。Sopwith には Fokker と同じメカニズムが装備されていたらしい。

飛行機の操縦の基本は、スロットルとエルロン・エレベータ・ラダー（あまり使わない）の4チャンネルだ。左に曲がるにはエルロンで機体を左に傾けてエルロンは戻し、すぐにエレベータを引いてスロットルを上げれば曲がっていく。曲がり終わったらエレベータを戻してスロットルを調整するが、すぐにエルロンで機体の傾きを右に傾け戻す操作が必要になる。ハンドルを戻すと元の状態になる自動車運転との大きな違いがこれだ。着陸が一番難しいが、それを除けば四つの操作を動的に同時に行う必要はほぼ無い。これに対しヘリコプター(写真 L.14)も4チャンネル(両手両足)で飛ぶらしいが、一つの操作をしたときに常に残りの三つの微調整が必要になる。例えばメインロータのスロットルを上げただけでは機体が回り始めて、左右前後の傾きも変化するのだろう、多分。これがヘリコプターの操縦を難しくしている。以上は無線操縦模型の話だが、本物(少なくとも小型機)もほぼ同じだと聞いている。



写真 L.13 Tug Michel⁸ (Schreiber-Bogen 1:200) と Messerschmitt Bf109E-4 (Hasegawa 02270 1:72)



‘a couple of days:’ 「2日」ではない。洋画の字幕で間違いが広がったの
 だろうと想像している。高校までには習わない口語が多い。‘a bunch of’ とか
 ね。さて米国映画でちょっとヤクザな人が使う ‘ten grand’ というのは「いく
 ら?」でしょう。えっ!?



写真 L.14 Eurocopter BK-117 (Schreiber-Bogen 1:24)

⁸ 船用機械・船舶工学科等の講義では造船用語が出てくる。例えば船の長手方向の板をロンジ (longitudinal) と呼び、その直角方向の板をトランス (transverse) と呼ぶ。また左舷は港に係留する側なので ‘port side’ であり、右舷は ‘starboard side’ と呼ばれる。後者はてっきりナビゲーションのための星を眺める側だと思っていたら、どうやら ‘steering board’ の側つまり舵取り板が付いていた側が変化したものらしい。そして飛行機も starship も「船」なので同じ呼び方をする。船は国際的に右側通行・優先なので左舷灯が赤で右舷灯が青だ。水泳プールも右側通行の国が多いが、オーストラリアやイスラエルでは左側通行だ。

付録 M

図学って知ってますか？

M.1 それってなあに？

うーむ。図学って何だ。3次元の図化ソフトウェアも充実している現代に、果たしてそういう科目を提供している大学があるのだろうか。調査していない。第1著者が最初に職を得たときに割り当てられた科目が「橋梁力学¹（ま、有限要素法等）」「振動解析」「図学」だった。なぜ僕が？とは思ったが、学部（教養課程）の成績証明書を見ると履修したことがわかってしまう。確か、期末試験は満点に近かったと自慢したい。図学では、45度と30度/60度の目盛の無い直角三角定規一組とコンパス1本を使って、図面上で線分の長さや二つの曲面の交線等を描くのである。多分橋梁の設計図面の読解等が念頭にあって、2次元に表現された3次元の状況を容易に想像できるようになって欲しかったから、この科目が新設²されたのだと思う。

文献[149]が学生のときの教科書³だった。当時は、硯で墨を磨り、烏口の間隙にフィルムで墨を移し入れて線を描く。線の太さは烏口の間隙で設定する。綺麗な線にするためには、先端を砥石で研いでおかなければならない。また消しゴムは使えないため、一旦描いた線を消すにはケント紙ごと両刃の剃刀で薄くそぎ落とすのである。不器用な友人は血まみれだった。呵呵。と、この数行が理解できる読者は皆無だろう。ただ、雲形定規よりも合理的で便利だと紹介された曲線定規⁴は博士論文の図面作成以降もしばらく役立った。

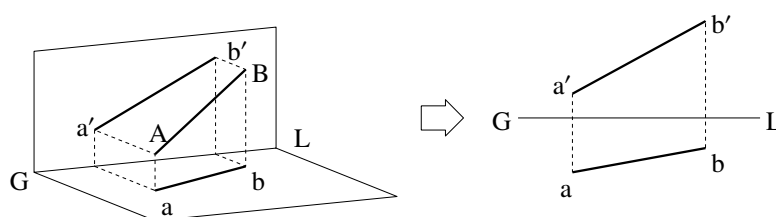


図 M.1 線分 AB の平面図と立面図

M.2 3次元的な線分と平面を2次元で表す方法

まず、どういう図面なのかを説明しよう。図 M.1 の左のように線分 AB が空間に存在していたとき、基線 GL のところで折り曲げた平面図と立面図に投影した影が、線分 ab と線分 a'b' になる。これを押し広げて平面

¹ 「工学」と「力学」は違う学問だったのでこういう科目名になる。今でも異なる学問分野なのかもしれないが。

² 何と！1983年に新設で必修科目だったのだ。暴挙としか思えなかったが。

³ 同じ教科書を使ったのだが、そのお陰で文献[146, 147, 148]を読むことができ、須藤靖先生の楽しい随筆に出会えたわけなので、この科目を担当させられたことは感謝しなければならない。

⁴ 商標かもしれないが「ユニカーブ」という名称だ。

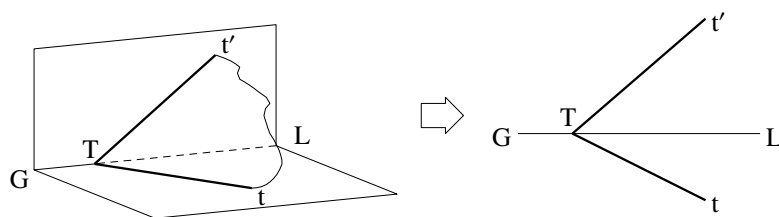


図 M.2 平面 T の平面図と立面図

にしたのが右図である。この右の図面上だけで、例えば線分 AB の実際の長さ（実長）を図面に落とす作業（作業）が図学である。では、平面 T の場合はどうなるかという、それはその平面と平面図・立面図との交線を描くことによって表現する。つまり図 M.2 のようになる。

M.3 代表的な例

おわかりになったでしょうか。いくつか簡単な例を列挙しておく。まず図 M.3 に示した線分 AB の実長を図面上で求めて欲しい。方法は主に二通りある。一つはコンパスを使わない方法。ある線分に直角な線分を立ててその平行線およびある線分の平行線を引き、ある長さを二つコピーして二つの点を結べば完了だ。もう一つはコンパスを使う方法だ。ある線分の端点周りにコンパスで円を描き、ある直線と平行線を引き、ある点から垂線を出し、ある平行線との交点を求め、二つの点を結べば完了だ。おわかりになったでしょうか。次の図 M.4 の場合も同様であり、三角形 ABC の実形を図面上に描いて欲しい。どうだろう。3次元空間で視点を変更する、あるいは図形を移動するという作業を、この2次元の平面上で、目盛の無い直角三角定規2枚とコンパスだけを使って実現するのである。

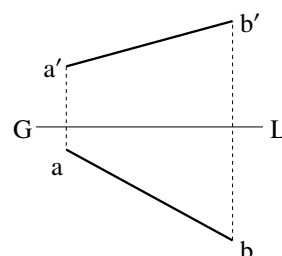


図 M.3 線分 AB

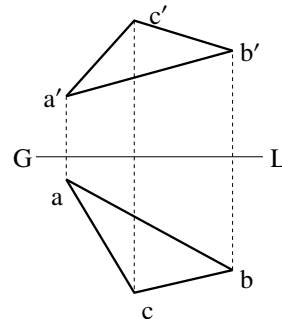


図 M.4 三角形 ABC

では、もう少し面倒な例を示しておこう。図 M.5 では、線分 AB に点 P から下ろした垂線を求める問題だ。次の図 M.6 では、平面 T に点 P から下ろした垂線を求める問題になる。最後の図 M.7 では、平面 T が円錐 V を切断しているわけだが、その円錐の切断面の形を求める問題である。最後の問題は片方が平面なのでそれほど難しくはない。一番難しいのは相貫の問題で、例えば空中に浮かんだ円柱と円錐がお互いを貫いている場合の、その貫いた交線の形を求める⁵問題である。

ちょっと楽しいと思った人は是非独学してみてください。いい頭の体操になると思います。

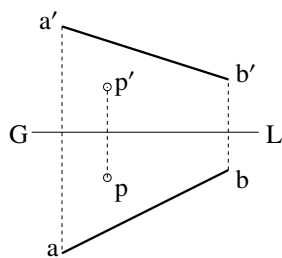


図 M.5 線分に垂線

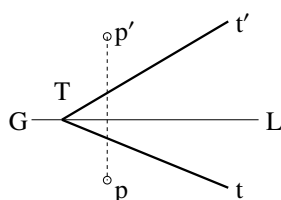


図 M.6 平面に垂線

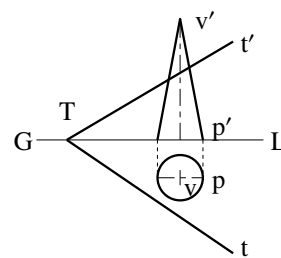


図 M.7 円錐の切断

⁵ 写真 K.2 の円管同士の接合部は立体的にクレーンで支えて空中で溶接したのだが、その孔の位置をコンパスと定規で求められるのだ。

⁶ しかしねえ、1983年の第1著者赴任時、11の小講座に教授（社長）が11名、講師（係長）が僕も入れて2名。二人の講師が1年間の海外研修中。その状況で三つも講義を担当させられることにはかなり抵抗を感じたんですけどねえ。しかも一つが図学、もう一つが苦手中の苦手の振動学ときた。そして一番好きな連続体力学と構造力学を担当させてもらったことは退職まで無かった。なんてこった！

付録 N

情報の表現と伝達，そして処理と倫理

N.1 コマンドライン上のコンピュータとの対話

本題に入る前に、なぜLinux（リナックス¹と読む）で情報関連の演習をするのだろうか、ということを考えておこう。それは、Windowsでワードプロセサや表計算ソフトウェアが使えるだけではコンピュータの仕組みを知っているとは言えないからであり、社会基盤工学や環境工学・都市工学・建設工学・建築学の分野で仕事をして何らかの情報を扱う者として十分なコンピュータの知識を持っているとは言えないからである・・・と、どこかに書いてあるかもしれない。つまりそれは「お茶の作法（にじり口から入ってお茶をいただき、主人や同席の客にお礼を言うまで）の基本動作をたった一度だけ通して経験しておく」のと全く同じ目的だと考えている。全然知らないと恥をかくかもしれない。一部分を忘れてしまってもそれほど問題にはならないかもしれない。逆に、完全に知っていても何の役にも立たないかもしれない。しかし、知っていることが何か他のことに影響を及ぼすことだけは間違い無い。つまり、お仕着せのソフトウェアを使うだけの単なるユーザーになるのではなく、機械にできるだけ「近い場所」でコンピュータに直接命令をすると機械は何をするのか、機械に間違いをさせることはできないのか、間違いが生じたときは何が原因なのか、という経験を一度だけしておいたらどうだろうということである。だからこの講義でコンピュータの使い方を習うとは考えないで²欲しい。終わったらすべて忘れても（多分忘れるだろうから）構わない。さて、お茶を習うと美味しいお茶が飲めるメリットがあるが、それと同じように、演習を楽しんでもらえるだろうか。

ファイル：ワードプロセサ（ワープロ）というソフトウェア³の存在と、その機能を知らない人はほとんどいないと思う。それは、情報を整理して表現し、それを伝達するための文書を作成する手伝いをしてくれるソフトウェアであるが、その文書は、ソフトウェア毎に決められた規則に沿って作られた「ファイル」という形で、コンピュータの中の記憶装置に保存されている。この「ファイル」というイメージを理解できるだろうか。元々は写真 N.1 の左手前の「刈田岳.jpg」の矢印の先にあるような「紙をたばねて綴じたもの」がファイルである。そこで、それに似た電子的なものも「ファイル」と呼ぶようになった。例えば携帯で写真を撮った場合、「保存」という操作をするだろう。これは、カメラのレンズを通して得た画像情報を、ある形式の規則で「ファイル」にして、それを携帯の記憶装置の上書き込んでおくという操作である。

¹ かつてはパーソナルコンピュータ（パソコン）より高性能だったサーバ等のOSのUNIX（ユニックス）を模倣した、原則無料配布のOS。Linus Torvaldsという人が学生だったときに作り始め、その最も基本的なプログラム【教科書にカーネルと書いてある命令群】のソース【コンピュータへの命令書で人が読めるもの】を公開して、世界中のボランティアで作り上げたOSと考えていい。ちなみにOSとは、人からの命令に対するコンピュータの基本的な応答プログラム全体を総称して呼んだもの。

² と第1回目に伝えているのに「この教員は教え方が下手だから宿題はコピーせざるを得ない。」と鬼仏ページに書き込むような学生がいるのが現状だ。そもそも教室で何かを覚えさせようとはしていないと宣言してあって、大学は習うのではなく学ぶ場であって、それは自らの能動的な行為でしかないのにならなくていい。

³ コンピュータへの命令書のうち、機械が読める（実行できる）もの。プログラムと呼んでもいい。近年はアプリとも呼ぶ。

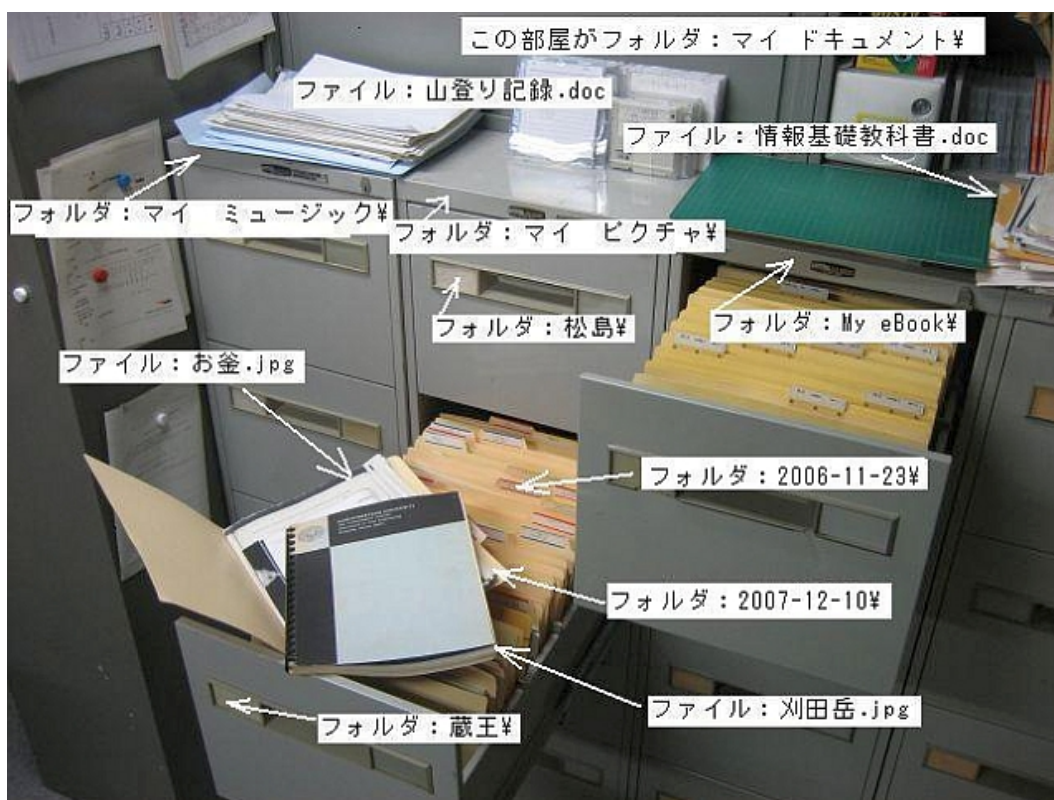


写真 N.1 ファイルとフォルダのイメージ

一般に、単純なテキストファイルと呼ばれるもの以外⁴は、ファイルの中身の最初の部分にそのファイルがどのような形式なのかという情報が書き込まれている。例えば Mac OS の場合はこの情報を読んだ上で適切なソフトウェアを検索し、それを実行し（立ち上げ⁵）てファイルに書かれた情報にアクセスしている。一方 Windows の場合には、ファイルの名前に付けた「拡張子」というものでファイル形式を判断するといった、やや泥臭い方法を用いている。ただ、ほとんどの Windows ユーザーがファイル閲覧ソフトウェアの「フォルダオプション」で拡張子を表示しない設定にしているので、知らない人も多いと思う。演習ではファイル閲覧ソフトウェアのようなものをあまり使わないので、まずその拡張子について説明しておく。例えば前述のテキストファイルの拡張子は「txt」であり、写真画像は「jpg」や「bmp」といった拡張子を持ち、ファイル名が「roses.jpg」のようになる。また某社のワードプロセサの場合は「textbook.doc」あるいは「textbook.docx」等になり、インターネットを通して見ることができるページの場合は「homepage.html」あるいは「homepage.htm」のようなものになる。この拡張子に応じて中身の形式が異なり、ファイル閲覧ソフトウェア（以下「イクスプローラ」と書く）に表示される各ファイルのアイコンも異なる。

ファイルの中身は、テキストファイルだけはその「文字」の電子コード⁶のみでできていて、比較的「軽い」ソフトウェアで直接読むことができる。それ以外のファイルの場合には「文字」だけではならず、意味のある文字ではない制御コード⁷のようなものが多く含まれているのが普通であり、それぞれの形式のファイルに対してその中身を読む専用のソフトウェアが用意されている。演習では、同じ中身のテキストファイルやワードブ

⁴ テキスト形式のファイルにも、その最初の行にファイルの属性をコメントとして書いておくソフトウェアも多い。

⁵ ソフトウェアを実行することを、「立ち上げる」「起動する」等と種々の言い方があるが、この文書では「実行する (execute)」か「立ち上げる」を用いる。英語で「run」も用いるため、「走らせる」と言う人もいるが、第1著者はあまり使わない。

⁶ 例えば半角の英数字の場合、文字「1」は「31_H」（下添え字「_H」は16進数であることを示している）という1-byteのコードであり、「A」は「41_H」という1-byteコードである。また漢字コードはいくつかの異なる表現があって、メールの文字化けの原因になったりしているが、基本的には2-byteのコード（行頭と行末に制御文字が入るものもある）である。

⁷ 「文字」に割り当てられたコード以外のもので、意味のある「文字」としては画面には表示されないもの。

ロセサファイル等を一緒に配ったりするので、そのサイズ等を比較してみても⁸欲しい。

ディレクトリ: では次に、コンピュータ内の記憶装置（「ハードウェア⁹」の一部を指す）に、いろいろな情報がどのように（「ソフトウェア的には」という意味で）整理されて置いてあるのか眺めてみよう。多分、多くの人がWindows という OS のコンピュータを持っているか、あるいは見たことがあると思う。例えばワードプロセッサのようなもので文書を作って保存しようとする時、「マイ ドキュメント」という「フォルダ」にファイルを置こうとするだろう。この「フォルダ」のことを、より広いコンピュータ環境で用いる言葉に直したのが「ディレクトリ」で、両方共同じものである。例えば写真 N.1 の左手前の引き出しには「挟み物」（引き出しの中とその上で開いてあるもので、日本語では「紙挟み」と呼ばれる文房具）が写っている。これが「フォルダ」と呼ばれるもので、その中にいろいろな書類や写真を「束ねて保管するための道具」なのである。

例えば、写真 N.1 の部屋も一つの「すごく大きなフォルダ」と解釈して、そこが「マイ ドキュメント」という名前のフォルダだとしてしよう。その中の棚の上には、「山登り記録.doc」や「情報基礎教科書.doc」といった書類つまり「ファイル」が直に置いてある。また部屋にはキャビネットが三つあり、左のが音楽情報を整理して入れる「マイ ミュージック」という名前の「大きいフォルダ」で、中央のが写真のフォルダ「マイ ピクチャ」、右のが電子ブックのフォルダである。次に、この「マイ ピクチャ」のキャビネットの中にはいくつかの引き出しがついている。上の引き出しは「松島」という名前の「中くらいのフォルダ」であり、2 段階目が「蔵王」というフォルダになっている。この「蔵王」フォルダの中には、さらに日付毎に別々の「小さいフォルダ」が整理されている。その一つの「小さいフォルダ」‘2007-12-10’の中には「お釜.jpg」や「刈田岳.jpg」といったファイルが保管されている、という風にこの写真を眺めて欲しいのだ。このような、部屋からキャビネット・引き出し・フォルダという構造をツリー構造で示したのが図 N.1 である。図中、四角で囲んだのがディレクトリであり、それ以外はファイルである。

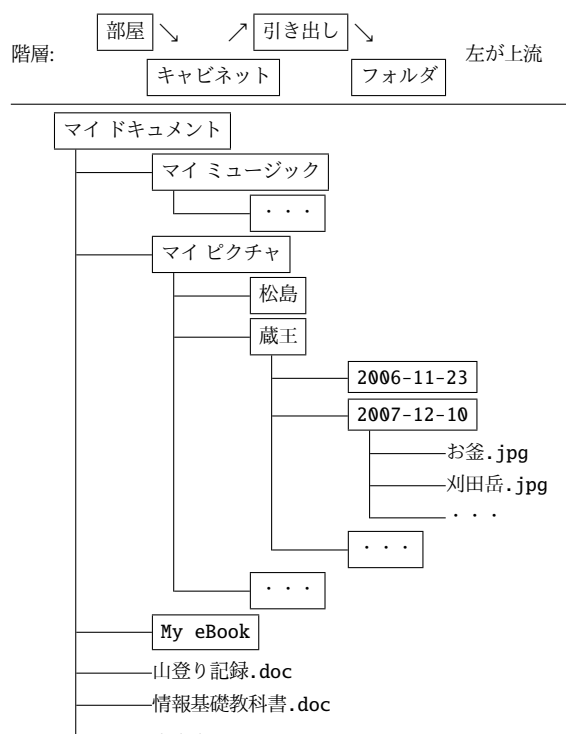


図 N.1 ディレクトリ構造とファイル（一部分のみ）

実行可能なファイル: さて、最後に少し特殊な「ファイル」のことを述べておこう。それは、「コンピュータが実行することができる」「ファイル」である。それを「ソフトウェア」あるいは「プログラム」と呼んでいる。例えばWindows の‘c:\WINDOWS\system32’というディレクトリにある‘notepad.exe’というファイルが「メモ帳」というエディタのプログラムであり、拡張子が‘.exe’の「実行可能なファイル」の一例である。このアイコンをマウスボタンでクリックするとメモ帳そのものが実行される。このように、見た目には、データであろうと文書であろうと、あるいはそれを処理するプログラムであろうと、コンピュータ内の記憶装置の上では、すべてファイルとして保存されているのである。

⁸ もうこのあたりでわかり難くなってきただろう。つまりこの文書そもそもが、興味を持って積極的になれる人だけを対象にした内容になっているわけだ。しかし必修科目なのでなんとかついて来て欲しい。
⁹ 回路とか部品やディスク操作装置等の、手で触れることができる機器類のこと。



図 N.2 GUI とコマンドラインの命令の対比

以下, まず第 N.2 節では「文書ファイル」を作成して『情報を正しく論理的に表現して正確に伝達』する方法について, 次に第 N.3 節では『情報を正しく処理』するための「実行可能なファイル」つまり「プログラム」を作る方法の一例について, 主に概説する。しかしその前に, できるだけ機械に近い場所で機械に命令をする方法を説明し, マウスボタンのクリックという単純な操作を通さない機械との直接対話に慣れて欲しい。

コンピュータへの命令 — GUI とコマンドライン入力: Windows では普段はファイルのアイコンをマウスボタンでクリックすることによってプログラムが実行されたり, そのファイルにアクセスするためのプログラムが実行される。これは「クリック」という操作がコンピュータへの命令になっているからである。このようなイクスプローラを用いたクリックという操作は Graphical User Interface (略して GUI) という方式による命令である。一方, 例えば Windows で「スタート」→「ファイル名を指定して実行」とすることによって, プログラム名をキーボードから入力して立ち上げることもできる。あるいは, 「スタート」→「すべてのプログラム」→「アクセサリ」→「コマンドプロンプト」と操作すれば, キーボードからの命令入力力でファイル処理等ができる窓が開く。この方法をこの文書では「コマンドライン」からの命令¹⁰とか入力と呼ぶことにする。演習室でコマンドラインからの命令を行うためには「KDE コンソール」を立ち上げる。そのやり方は教科書を参照のこと。

その GUI による命令とコマンドラインからの命令との Windows における対比例¹¹を写真 N.2 に示したので, これを用いて説明しよう。一般に, コマンドラインの入力待画面には, 何かしらのプロンプトが

% _ あるいは \$ _ あるいは c:¥Bear¥Work¥BasicIt> _

¹⁰ 教科書には, OS (という表現は正確ではないが) とのインターフェースの「シェル」のことが書いてある。「命令」といっても, OS のそれとシェルのそれがあるが, この文書では区別しない。もしかしたら, カーネル (核) と人の間のインターフェースだからシェル (殻) と呼ぶのかもしれない。

¹¹ この例では, UNIX の主な機能を Windows 用に模擬した Cygwin (シグウィン) と呼ばれるパッケージがインストールしてあるので, コマンドラインに Linux とほぼ同じ命令を用いることができている。

のように表示されている。%や\$がプロンプト¹²であり、_はカーソルがそこにあってキーボードからの入力を待っていることを意味する。このプロンプトはシステムによって異なるので、以下では表示せず、入力する命令のみをEnterキー(↵)と一緒に示すことにする。これ以降の命令については目の前の端末に実際に入力してコンピュータの応答を確認しながら読み進むこと。さて、写真 N.2 の左下方に表示されている、エクスプローラの「アドレス」欄が‘Present Working Directory,’つまり「現在仕事をしている場所」であり、コマンドラインの命令

```
pwd ↵
```

で表示したものと同じになる。例ではここが‘/cygdrive/c/Bear/Work/BasicIt’（これはCygwin上の表示で、Windowsの表記では‘c:¥Bear¥Work¥BasicIT’に相当する）になっている。また同じ写真のそのすぐ上の、「上へ」のボタンをクリックすることがコマンドライン入力の

```
cd .. ↵
```

と同じ操作であり、図 N.1 のツリー構造で一つ上（上流・上位）のディレクトリに移動することを示す。この‘..’は一つ上のディレクトリのこと、‘.’が現在仕事をしているディレクトリである。また、エクスプローラ上では、フォルダは「文房具の紙挟み」をモチーフにしたアイコンで表示されている。そのアイコン（例えば‘WorkX’を）をダブルクリックするとそこに移動できるが、コマンドラインでは‘Change Directory’の

```
cd WrokX ↵
```

と命令することになる。また、エクスプローラ上のファイル等のアイコンの無いところで、右クリック→「新規作成」→「フォルダ」の操作によって‘NewDirec’という新しいディレクトリを作る命令は、コマンドラインでは‘Make Directory’の

```
mkdir NewDirec ↵
```

である。

一方ファイルは、それぞれが関連付けられている「実行プログラムのアイコン」でエクスプローラ上には表示される。これに対し、単純に

```
ls -F ↵   もしかしたら単純に   ls ↵   あるいは   ls -l ↵
```

という‘List’命令で表示した現在のディレクトリの情報のうち、後ろにスラッシュ‘/’が付いたものがディレクトリであり、何も付いてないのがファイルである。実行可能なファイルの後ろには‘*’¹³が付く。ファイル名にあるピリオド以下が、上で説明した拡張子である。この例には写真ファイルの‘Photo-G.jpg’やインターネットのページファイルの‘Page-X.html’が見えている。ディレクトリにはたいていの場合拡張子は付けない。また、現在のディレクトリより「下の（ツリー構造を思い描いて）」ディレクトリの情報の場合は、例えば

```
ls ./DirecA ↵   あるいは単純に   ls DirecA ↵
```

とすれば表示できる。ここのスラッシュ‘/’は階層構造の層の区別を表しており、ピリオド‘.’は現在いるディレクトリであるから省略してもいい。もしこの‘DirecA’のディレクトリの下に、さらに‘direc1’というディレクトリがある場合には、その情報は

¹² 演劇等で台詞を忘れた役者にきっかけ等を教える役をプロンプタと呼ぶ。そういうきっかけを与える役と同じだからプロンプトと呼ぶのだろう。ちなみに、舞台上でプロンプタが隠れる場所の一つが映画 Charade (©1963 Universal Pictures, Inc. & Stanley Donen Films, Inc.) で使われている。

¹³ Cygwinだと若干異なるようである。

表 N.1 Windows と Linux のコマンド比較

機能	Windows コマンドプロンプト	Linux, Cygwin
ファイルのコピー	copy FileA FileB	cp FileA FileB
ファイルの削除	del FileA	rm FileA
ファイルの名前変更	ren FileA FileB	mv FileA FileB
ファイルの移動	copy FileA DirecX のあと del FileA	mv FileA DirecX
ファイルの中身一括表示	type File.txt	cat File.txt
ファイルの中身ページ表示	more File.txt	同左あるいは less File.txt
ディレクトリ表示	dir DirecX あるいは dir /w DirecX	ls DirecX
ディレクトリの作成	md DirecX	mkdir DirecX
ディレクトリの削除	rd DirecX	rmdir DirecX

```
ls DirecA/direc1 ↵
```

で表示される。ということは、現在いるディレクトリと同じ階層にある隣のディレクトリ 'SameLevelX' というディレクトリの情報は、その上流側の階層に一度上がって

```
ls ../SameLevelX ↵
```

で表示することができる。お互いのディレクトリの位置関係と、各命令の指定の仕方が理解できるだろうか。図 N.1 のツリー構造で、「蔵王」のディレクトリから「松島」のディレクトリの中の情報を見たい場合には

```
ls ../松島 ↵
```

とすればいいのである。

またファイルそのものの「プロパティ」は、'ls -l ↵' のようなオプションを使って表示することができる。例えば、日付が最後に更新した日であり、そのすぐ左にある数値がファイルの大きさ (byte) である。このようなファイル操作の比較は表 N.1 に示した。ちなみに 'ls' は list の略であり、'cd' = change directory, 'rm' = remove, 'mv' = move, 'cp' = copy, 'cat' = concatenate, 'mk' = make, 'dir' = directory, 'ren' = rename である。また、異なるディレクトリ間のコピー等は

```
cp Photo-G.jpg DirecA ↵ あるいは cp Photo-G.jpg DirecA/Another.jpg ↵
```

のようにすれば 'Photo-G.jpg' が同じ名前か、あるいは 'Another.jpg' に名前を変えて、'DirecA' の中にコピーされるのだ。後者をイクスプローラでするには、一旦コピーして名前の変更をしなければならないが、コマンドラインではそれが同時にできている。このように、イクスプローラよりもコマンドラインの方が簡単で便利なこともたくさんある。

少し注意して欲しいのは、Linux の場合、あるユーザー自身のホームディレクトリ¹⁴ ('~' の記号で表す) より上流の階層にあるディレクトリには、ユーザーのファイルを書き込んだりできないことである。例えば

```
cp FileA ~/. ↵
```

¹⁴ ログインした時点の最初の作業ディレクトリを、そのユーザーのホームディレクトリと呼ぶ。よくインターネットイクスプローラ等でページを探しているときに、<http://www.abc.defghi.jp/~johndoe/> のように、これと同じ '~' の記号を使う場合があるが、それは、このマシン www.abc.defghi.jp のユーザー johndoe さんのホームページであることを意味する。

に対してエラーが発生する。これは、各ユーザーのホームディレクトリより上流が管理者 (super user) しか維持管理できない階層に当たるため、通常のユーザーには書き込みの許可が与えられていないからである。

この書き込み許可については、次のような試行をすれば理解できるかもしれない。例えば、自分のホームディレクトリに 'Protected.txt' というテキストファイルを

```
ls -la > Protected.txt ↵
```

で作ってみよう。このファイルには、ホームディレクトリ内のファイル等のプロパティが書き込まれる。この '>' という記号は、その左の命令の結果を、画面ではなく右に示したファイルに「出力する」という意味 (リダイレクション操作 — 出力の向きの変更) である。そこで

```
ls -l Protected.txt ↵
```

とすると、その1行は多分

```
-rw-r--r--  1 user  group   620 Apr 27  2008 Protected.txt
```

のようになると思う。この一番左にある変な記号の並び '-rw-r--r--' を見て欲しい。そこで

```
chmod -w Protected.txt ↵
```

と属性変更 (change mode) をして再度 'ls -l ↵' をしてみると

```
-r--r--r--  1 user  group   620 Apr 27  2008 Protected.txt
```

のように、左から三つ目の 'w' が '-' に変化しているはずだ。ここで、このファイルの削除

```
rm Protected.txt
```

を試みて欲しい。きっと

```
rm: remove write-protected file 'Protected.txt'?
```

という警告が出るだろう。つまり、この変な記号の左から三番目の 'w (write-permission)' がはずれて不許可 '- (write-protected)' になったために削除確認が表示されたのである。この '-rw-r--r--' は '-rwxrwxrwx' が元々の形で、最初の '-' は単なるファイルであることを示し、次の三組の 'rwx' のそれぞれが読み・書き・実行の許可状況で、各組はそれぞれ左から「自分 (user)」「同じグループ (group) の他人」「全くの他人 (others)」に対する許可状況になっている。不許可の項目は '-' になっている。次に、そのファイルを

```
chmod -r Protected.txt ↵
```

とすると自分も読めなくなる¹⁵と思う。これは

```
chmod +r Protected.txt ↵
```

で元に戻すことができる。あるいは、自分以外の人が読めないようにするには

```
chmod go-r Protected.txt ↵
```

¹⁵ Cygwin ではそうならない。

とすればいい。‘g’ と ‘o’ がそれぞれ「グループ内の他人」と「全くの他人」の設定変更の指定を表す。課題レポート等は他の人がコピーしないように是非ともこのようにしてくださいな。

さて、GUIと同じことができるなら GUI でいいではないか・・・と、なぜ演習でコマンドライン命令を使うのか、という疑問に戻ってくる。しかし、コマンドラインで命令すると結果がそのすぐ下に表示される。何をするとどうなるかという関係が極めて明快なのである。そして間違ってもできる(呵呵)。これに対して GUI の場合命令は楽であるが、敢えて間違った命令を下すということができないし、結果がどこに現れたのかわからないこともある。また、すべての命令がマウスボタンのクリックという「一つの同じ動作」でできてしまうため、一体何を命令したのか¹⁶が明らかではない。だから同じことができるなら、命令に対するコンピュータの応答がすぐにわかる方法で勉強した方が、コンピュータが実際に行っている処理を明確かつ身近に感じるのではないかと、というのが、その疑問に対する回答ではないかと考えている。

最後に、それぞれの命令のマニュアル (Windows の「ヘルプ」に当たる) について書いておく。Linux および Cygwin にはマニュアルコマンドがある。例えば ‘ls’ の使い方を知りたければ

```
man ls [↵]
```

とするといい。もちろん、‘man’ = manual である。マニュアルはページ表示される。ページ表示の場合にはファイルの中身が 1 画面分毎に止まって表示される。次のページを表示するにはスペースキーを押し、前のページに戻るには p のキー (previous) を押し。1 行下なら Enter キー、半分下は d (down), 半分上は u (up) である。q (quit) で中止だ。わからなくなったら h (help) でキーの使い方が表示される。あるいは

```
ls --help [↵]
```

でも簡単な使い方は表示できるが、長いヘルプの場合には最後の部分しか見えないから、ファイルのページ表示命令を「パイプ」で結んで

```
ls --help | more [↵]   あるいは   ls --help | less [↵]
```

とするといい。この ‘|’ は、その左の命令の結果をパイプの中に一旦入れて、それをその右の命令に渡すという意味の記号である。なお、‘less’ は上下にページを移動できるが、‘more’ は下にしか移動できない。

さて、パーソナルコンピュータを家族で使うときの Windows 上でも、それぞれのメンバーがログインして使うようになっているが、それは複数のメンバーが「同時にログイン¹⁷して」使っているわけではない。それに対し Linux では、複数のユーザーが同じサーバを同時に利用することに注意して欲しい。研究室の数値解析用のコンピュータ環境のほとんどで同様の使い方をしている。演習室で ‘who [↵]’ とすると、同時に使っているユーザー ID が表示されるはずだ。

演習問題 N-1

1. ‘cat’ コマンドを使って新しいテキストファイルを作ってみよう。まず、英語かローマ字で適当な文字列 (半角で 10 文字程度の行を 2 行くらいに留め、ここでは漢字は使わない) を次の例のようにタイプし

```
cat > mymemo.txt [↵]
My name is Bond. [↵]
James Bond. [↵]
```

最後に Ctrl のキー (コントロールキー) を押し下げたまま d のキー¹⁸を押す。これで、キーボードから入力した文字列がファイル ‘mymemo.txt’ の中に記録される。こうやってできたファイルの中身を

¹⁶ つまり、決まりきったことしかししないのなら GUI の方が多くの人にとって易しくて便利だということだけのことである。

¹⁷ ネットワークを使った Windows のリモートデスクトップでは、複数ユーザーの同時ログインが可能である。

¹⁸ まちがって Ctrl と s を押すと何もできなくなる。そのときは Ctrl と s か q を押せば元に戻る。

```
cat mymemo.txt ↵
```

で表示して、入力したのと全く同じものが表示されることを確認する。

2. さらに

```
cat >> mymemo.txt ↵
```

とした上で、1行だけの適当な半角の文字列（まだ漢字は駄目）を入力してみよう。1行書いてEnterキーを押したあとに `Ctrl` キーを押し下げたまま `d` を忘れないこと。中身を確認すれば明らかであるが、その1行が前のファイルの最後には書き加えられているはずだ。この '>>' という記号は、「加筆する」という意味で、記号 '>' 等と一緒に入出力のリダイレクション操作の一つである。

3. このファイルのサイズ (byte 数) を、例えば

```
ls -l mymemo.txt ↵
```

で表示して（日付のすぐ左の数値）確かめよ。半角1文字は1-byteであるから、例えば数行で合計40文字（空白も含む）を入力したとすると、このサイズが $40 + \alpha$ になっていると思う。このサイズと文字数の差の α というのは、一体何か考え、今度は漢字でその根拠を

```
cat > memo1.txt ↵
この差はファイルの・・・である。 ↵
というのも・・・だからである。 ↵
Ctrl キーを押し下げたまま d
```

のように2行以上にして 'memo1.txt' に書き込め。さらに、この漢字が含まれたファイル 'memo1.txt' のサイズを同様に調べて、入力した文字数との関係についても何か考え、それも

```
cat >> memo1.txt ↵
漢字の場合は、漢字が・・・だからである。 ↵
Ctrl キーを押し下げたまま d
```

のように加筆せよ。加筆は '>>' であることに注意すること。ところで、ファイルの文字数や語数は

```
wc memo1.txt ↵
```

でも数える (word count) ことができる。'wc --help' によって使い方を読み、いろいろ試してみよう。実は、'wc' が表示する数値の一つが α に関係がある。最後に、この二つのファイルを

```
cat mymemo.txt memo1.txt > memo2.txt ↵
```

で合体して、このファイル 'memo2.txt' を提出せよ。なお、上の根拠等は間違っても成績には反映されないので、初心者としての答を自由に書いて欲しい。

4. また別に、自分の学籍番号と氏名（漢字でも英語でも可）および生まれた月のカレンダー（嘘でいい；下の例は1990年7月）を

```
echo 学籍番号 氏名 > memo3.txt ↵
cal 7 1990 >> memo3.txt ↵
```

としてファイル 'memo3.txt' に書き込め。'cat' ではなく 'cal' = calendar であることに注意すること。'echo' は、次の文字列を単純に画面に表示する命令である。試しに 'echo How are you?' とやってみよう。正しく氏名やカレンダー等が書き込まれているかどうかは、'cat memo3.txt' で確かめられる。このファイル 'memo3.txt' を提出せよ。誕生日の曜日はあとの略歴書で使う。

5. 次に、演習室の端末から自分の携帯に適当なメール¹⁹を送り、それに携帯から返信せよ。ただその返信には、携帯のカメラで撮影した自分の顔写真（が望ましい。あとで略歴書を作るので）を添付すること。そして、端末で受信したメールに添付された顔写真を、例えば 'myface.jpg' という名前のファイルとし

¹⁹ 建築・社会環境工学科では2,3年生のときに、講義や就職等についての情報を学生さんにメイリングリストで流すことがある。毎年ほとんどの学生さんが携帯でメールを受け取っているようだ。したがって、tohoku.ac.jp というドメイン（ちょうど携帯メールのdocomo.ne.jp等に相当するもの）からのメールを携帯が受け取ることができるように設定しておいて欲しいので、その確認と設定変更を兼ねた課題でもある。

て, 自分のホームディレクトリに保存せよ。なお携帯を持っていない人やカメラが [付いていない | 壊れている] 人は, TA に手伝ってもらえる。

6. その写真ファイル 'myface.jpg' のサイズを確かめ, それがとても大きいことを確認せよ。また, 中身を
- ```
cat myface.jpg
```

によって表示を試み, 意味の無い文字列が出るだけなのを確認せよ。また, なぜそうなるのか想像せよ。

## N.2 HTML と L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X による文書作成の基礎 — 情報の表現と伝達

### N.2.1 文書の記述法

#### (1) 文章そのものについて

**表現と中身:** 我々が書く文書は, 大学では宿題レポートや卒業論文・修士論文・博士論文および原著論文であり, 社会では顧客への提案書とか上司や他者への技術報告書等である。他人に自分の意思を文字で伝えるときに大事なことは何かということを考えたとき, それは

- レイアウト構成なのか?
  - 単なる見え方である。例えば中央揃えや細かいフォント指定。
  - 論理の流れを示す補助にはなるが本質ではない。プレゼンテーション用のスライドがこれに当たる。
  - 伝えたい内容や説得力とは直接の関係は無い。
  - 極端化したものはポスター。
- 論理構成なのか?
  - 章建てや箇条書きで, 内容の意味や段落間の意味的な相互関係を指定。
  - 文書を正確にわかり易く・誤解無くするための最も重要で本質的な点。
  - 見え方が伝えたい内容を左右しない。文章そのものの説得力のために必要。
  - 一種の極端は詩や短歌。

という分類ができそうだ。さて技術的科学的報告書の場合, 最も重要なのは後者の「文書構成」「内容の論理」であって, レイアウトはたいていは定型である。

**論理的な文章:** このように, 我々が書く文書は論理的な文章であればよく, 明確に記述され誤解が生じない限り, 美的である必要も無いし, 感情に訴えるものである必要も無い。

**文節:** 一つの句点を持つ文章基本単位で, 一つの事柄を, 複数の読点で論理を明確にして記述する構造。一つのことを述べる度に文節を改める方が誤解を生まない。

**段落:** 二つ以上の文節ででき, ある一つの論理を示す最小単位。一つの段落では一つのことだけについて書く。なお段落の最初には前の段落との関係を明確にするために, 適切な接続詞を置く必要がある場合が多い。同様に, 文節の間にも適切な接続詞を用いる方がいい場合もある。

**節と章:** 複数の段落を論理的に並べ, ある論理的帰結なり, あるまとまった考えを主張する構造。またその節が何のためにあるのかが明確になるようにするために, 節にはその始まりに見出しを置く。本や長い報告等の場合は, 複数の節をある目的毎に章としてまとめることがあり, その始まりには章見出しを置く。

**文書:** 複数の章や節が論理的に並べられ、その章・節の流れに導かれて、一つ以上の最終的な結論・主張を示すもの。

と考えるといい。特に論文・報告のように科学的・工学的主張を述べる文書の場合、節毎に一つの閉じた論理を構成させ、節の並べ方と内容によって、一つの文書で閉じた論理を構成するようにする。

**よくある間違い等:** ところで残念なことに、今の初等中等教育制度の中の「国語」の科目では細かい書き方も含めた文章の書き方については習っていないため、大学在学中に独学する必要がある。最もわかり易いのは文献 [187] の特に p.28 以降を勉強するといいい。特に表記について、論文の審査等でときどき見つけた気になる・気に入らない点を列挙しておく。ただし横書きを前提としている。

- 横書きの句読点は、全角のコンマとピリオド（いくつかの工学系学会）、あるいは全角のコンマと句点（文部科学省）を用いる。ただし表示ソフトウェアのフォント指定に「P」付きの邪悪な「明朝 P」等が設定してあると正しくならない。
- 中黒「・」等も原則全角ドリである。
- 括弧始めと終わりがあるように、引用マークもきちんと“このようなもの”や ‘this type of mark’ あるいは “a double quotation mark” を用いる。これも表示ソフトウェアに邪悪な「明朝 P」等を設定してあると正しくは表示されない。‘’ というマークは『インチ記号』であり、それを引用に使うのはインチキである。ただし Java プログラミングの節で示すように、いくつかのプログラム言語では、文字列を定義する場合にこのインチ記号を用いることがある。
- 英数字は半角とする。括弧は、半角を囲むときは半角の括弧記号 (parentheses) を、全角を囲むときは（全角の括弧記号）を用いることを原則とする。第 N.2.4 節には全角数字による不具合の例を示した。
- 句読点やコロンの ‘:’ ・セミコロン ‘;’ 等の区切り文字は文頭には決して置かない。
- 区切り文字はすぐ前の文字との間に空白を入れず、全角半角共に必ず密着させる。また半角の区切り文字の場合は、区切り文字のすぐあとには半角の空白を必ず置く。
- 区切り文字と引用記号の順番は、英語の場合「this is “a quoted sentence;” and」のようになる。
- 全角文字中にある半角文字の前後には、この文書にあるような適切な空白（二分・四分アキ）が入るように設定されているはずなので、それを解除しない。
- 単位はローマンの（立った）フォントである。数学記号が斜めのフォントなので、つい単位をイタリックにして ‘ $q = 1.23 \text{ MN/m}^2$ ’ とする人がいるが、間違い。正しくは ‘ $q = 1.23 \text{ MN/m}^2$ ’ である。またできれば数値と単位の間には四分の一角（四分アキ）か半角スペースを入れて欲しい。

## (2) ソフトウェアによる文書作成

**ソフトウェアと記述言語:** 代表的なものを挙げると、それぞれ次のような特徴がある。



- (a) ワードプロセサ: WYSIWYG (What you see is what you get.) 方式の文書整形ソフトウェア。保存ファイル中にはマークアップ（後述）方式情報が含まれる。利用者が組版の知識を持っていないと、とても醜い結果になる場合がある。特に推敲をしている段階で、内容を変更することによって文書のレイアウトも一緒に変化してしまうため、慣れない間はそれが気になり、文書本来の内容そのものに精神を集中できなくなることがある。

- (b) スライドやお絵描き: 単なる整形でポスター作成とほぼ同じ。論理より直感 (視覚) 的に情報を示すもの。これは視覚に訴えて, 必要最小限の情報を伝達することが目的。プレゼンテーションのスライドの各ページもほぼこれに当たる。顧客への提案書概要等もこの方式の方が望ましい場合もある。まずは読み手・顧客の心をつかんで概要を理解してもらうのが目的。
- (c) マークアップ言語: 身近な代表例が Hyper Text Markup Language (HTML) である。これは Standard Generalized Markup Language (SGML) の一種。HTML はインターネット上の使用が前提のようだが, 論理的記述もできる。
- (d)  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  あるいは  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ <sup>くみほん</sup>: 組版ソフトウェア。内容の論理構成を指定する言語。 $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  は定型文書用。論文等の定形文書の場合, ワードプロセサと違ってレイアウト等の余計なことを考える必要が全く無いので, 文書の内容と論理構成だけに精神を集中できる。そういう意味で論理的記述・科学的文書に向いている。
- (e) プリンタ記述言語: PostScript や LIPS 等で, 通常はページ記述言語と呼ばれ, 出力の頁毎のレイアウトのみを記述する。プリンタ制御用の言語等が該当する。

ワードプロセサよりも  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  の方が, 多くの試行錯誤の中で, 論理的な構造を持った文書までに推敲し易いという例を, この節の最後 (2 段組の p.943) に示しておいた。

ワードプロセサによる文書作成と出力: ワードプロセサは画面で見たままのものが出力される。不思議なことに, 某社のワードプロセサの場合, 同じファイルを異なる機種で印刷すると結果が同じにならないことがあったらしい。不思議だ。今はそういうことは無いのかもしれないが。

**HTML と  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  の文書作成と出力:** HTML と  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  の文書の場合には, エディタ<sup>20</sup>で文書の「ソースファイル」を作成しなければならない。エディタというのは Windows の「メモ帳」と同じもので, 単純な文字列のファイルを作るプログラムである。演習室には 'kwrite' というソフトウェアがある。作るファイルの名前は内容を反映した方があとでわかり易いので, 例えば略歴書を作るなら, HTML の場合は 'vita.html' とし,  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  の場合には 'vita.tex' としておこう。これ以降も, Linux あるいは Cygwin におけるコマンドラインからの入力を示すことによって, 何をしているのか明らかにしておきたい。まずエディタを

kwrite vita.html    あるいは   kwrite vita.tex 

で立ち上げ<sup>21</sup>, 次の節以降にある約束に従って, 文書ファイルを作成すればいい。作成後の, 文書の表示と印刷については以下のようにになっている。

**HTML:** ブラウザ<sup>22</sup>と呼ばれるソフトウェアが HTML の記述を解釈できるから, そのファイル 'vita.html' をそのままブラウザで読めば, 表示・印刷できる。そのため, HTML のタグをレイアウト命令と思う人がいるが, 本来は論理構成を定義するのがタグである。したがって, ブラウザのサイズやフォント設定を変更してレイアウトがどんなに変化しても, 表示される文書の論理と内容が変わらないような HTML 文書を作成するのが望ましい。なお, 演習室における HTML ファイルの作り方やブラウザの具体的な使い方については演習問題 N-2 の 7 番のところで説明する。

<sup>20</sup> エディタには通常スペルチェック機能が無いため  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  文書作成を嫌う人もいるが, ソースファイルはテキストなので, ワードプロセサに一度読み込ませればそのチェック機能が使える。

<sup>21</sup> 実際にどのように実行するかについては, 教科書等を自分で調べること。

<sup>22</sup> Windows であればインターネットイクスプローラがそれに当たる。

**L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X:** 残念なことに、L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X で書いたファイルをそのまま読んで最終的な組版された文書を表示するソフトウェアはなく、それを一旦「コンパイル」して、DVI ファイルと呼ばれるファイルに変換する必要がある。多くのコンピュータ環境<sup>23</sup>では

```
platex vita.tex ↵
```

とする。L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の書き方に間違いが無ければ 'vita.dvi' というファイルができる。この DVI とは DeVice Independent という意味で、作成した機種や OS に依存しないファイルになるため、他の種類のコンピュータでも読むことができるという portability を持った、一種のページ記述言語（バイナリ）である。これを表示・印刷するには dviware と呼ばれるソフトウェアが必要で、ある種のコンピュータ環境では

```
xdvi vita.dvi ↵ あるいは pxdvi vita.dvi ↵
```

とすると組版された文書が表示できる。また PostScript や pdf にも変換できる。演習室で推奨している PostScript ファイルへの変換等については教科書を参照すること。ただし、演習課題はファイルでのみの提出とするので印刷の必要は無い。具体的な使い方は演習問題 N-2 の 10 番のところで説明する。とりあえず簡単な例（これは L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X ではなく plain-T<sub>E</sub>X ではあるが）として

```
This is a pen.
 $\int_0^a f(x) dx$
Hello.
That is a pencil.
\end
```

← [この行には何も書かない]

といった内容のファイル 'uhodai.tex' を 'kwrite uhodai.tex ↵' で作成してみよう。第 2 行の  $\int$  と最終行の  $\end$  の記号  $\int$  は、キーボード上では ¥ キーで入力できる。そしてファイル保存したあと

```
tex uhodai.tex ↵ あるいは ptex uhodai.tex ↵
xdvi uhodai.dvi ↵ あるいは pxdvi uhodai.dvi ↵
```

としてみる（今は 'platex uhodai.tex ↵' とするとエラーになるので注意して欲しい）と

```
This is a pen. $\int_0^a f(x)dx$
Hello. That is a pencil.
```

という文が表示されると思う。一体何が起こったかちょっと想像してみたい。

**T<sub>E</sub>X と L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X に関するトリビア:** ところで、T<sub>E</sub>X は Knuth 先生 [54] が作った組版ソフトウェアであるが、それは先生が、当時の出版社による論文の組版の出来を不満に思ったためとされている。そのためフォントを作るソフトウェア METAFONT も作った。したがって数学記号組版の出来はとても美しく、アメリカ数学会の登録商標になっているのもうなずける。元々のローマンのフォントは 'A quick brown fox jumps over the lazy dog.' のようなものだが、この文書では 'txfonts' という代替フォントを用いているので、同じ文は 'A quick brown fox jumps over the lazy dog.' となる。微妙な差でしかないが、後者の方がいわゆる Times Roman に近いことから好まれている。またワードプロセサでは 'To' となるものが、'To' のように 'o' が 'T' 側に若干潜り

<sup>23</sup> 実は第 1 著者は、最初に使ったコンピュータ環境が原因で NTT L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の方を使っている。一度それを好きになってしまうと、なかなか乗り換えられないのがソフトウェアである。

込むことを許している。さらに合字と呼ばれる ‘Office’ のようなフォント利用<sup>24</sup>はワードプロセサでは実現できず ‘Office’ のようになる。結局、ワードプロセサはタイプライタを組版に近づけたものと捉えればいい。また日本語  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  の場合は、 $\text{pT}_{\text{E}}\text{X}$  と  $\text{JT}_{\text{E}}\text{X}$  で若干違うが、英数字のフォントと日本語のフォントが美しく整合するように日本語のサイズを調整してある。これも、ワードプロセサに対して日本語  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  が優れている点の一つである。某社のワードプロセサを初期設定のまま用いると、いわゆる 10 ポイントと呼ばれる大きさ<sup>25</sup>の英数字を用いる文書と同じ 10 ポイント角の漢字フォントを用いているため、前者が後者よりも文字の高さが小さくなり、埋もれた印象を与えてしまうことがある。組版技術は長い歴史の中で作られた芸術でもあり、某社のコンピュータ上のフォント等に頼らないで済む場合には、美しいものを用いるように（特に建築分野の方々には）心掛けて<sup>26</sup>欲しい。

第 1 著者が使っている 2005 年上半期版では、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  は Version 3.141592, METAFONT は Version 2.71828 である。もちろん、完成したときには前者は Version  $\pi$ , 後者は Version  $e$  になる。ちなみに  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  は Lamport 氏 [56] が  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  のマクロを組んで定型文書を作り易くしたものである。公開以来長い間 Version 2.09 が使われていたが、それを Version 3 にするプロジェクトが発足し、その準備に  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X} 2_{\epsilon}$  が 1994 年に公開され、現在、年 2 回改訂され続けている。 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  類はすべて無料で入手できる。Linux だけでなく Windows でも使うことができるパッケージをインターネットからダウンロードしてインストールすることができる（から、著者はこの文書をパーソナルコンピュータ上の  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  で作ることができている）。

なお、Windows で  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  のソースファイルを単純なテキストファイルにすることは比較的容易である。 $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  を使わない友人に  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  で書いてしまった文章をメールしたいような場合、例えば第 1 著者の

<http://www.civil.tohoku.ac.jp/bear/node14.html#sec003006>

が参考になるかもしれない。この方法では、マークアップ言語と同じような命令によって整形する ‘xtrnt’（前述の ‘xtr’ の Windows 版）という文書整形ソフトウェアと ‘tbl’ という表整形ソフトウェアを利用している。こういった文書整形ソフトウェアは、かつてワードプロセサが異常に高価だった頃パソコン通信の社会で開発利用されていたものである。実は UNIX<sup>27</sup>にも同様の文書整形ソフトウェア ‘nroff’, ‘troff’ があり、初期のマークアップ言語と考えられている。このソフトウェアは数式も組版（写植）できたが、 $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  の出現で今は使われていないと思う。

また、 $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  文書を HTML 文書に変換するソフトウェア ‘latex2html’ がある。図表や数式もすべて HTML 文書中に配置される。Perl や種々の画像処理ソフトウェアも一緒にインストールしておく必要があるが、日本語の文書も処理できるようになっている。例を p.916 の図 N.5 に示した。さらに、もし写真を並べるだけの HTML 文書でいいなら、画像処理ソフトウェア ‘IrfanView’ のサムネイル機能で簡単な表示 HTML 文書を作ることができる。ここで紹介しているソフトウェア類もインターネットからパッケージをダウンロードしてインストールすることができる。自宅で使ってみようと思った人は、それぞれのソフトウェアの名称で検索してみたい。

<sup>24</sup> ‘ffi’ が一つの文字フォントになっており、自動的にそれを使うようになっている。

<sup>25</sup> 約 3mm くらいで、この文書がその 10 ポイントの設定である。ただし、これはアスキー  $\text{pL}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  ではなく  $\text{NTT J}_{\text{L}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ 。

<sup>26</sup> 実は  $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  も使うことができる理学部のある先生がワードプロセサで作った文章は非常に完成度が高いものであった。ワードプロセサの出力結果には使う人の技量が現れるようだ。

<sup>27</sup> 実は Cygwin にも ‘troff’ がある。また ‘tbl’ も元々は UNIX の作表ソフトウェアである。パーソナルコンピュータ用の ‘fin’ や ‘xtr[nt]’ も含めて、ピリオド ‘.’ で始まるタグで書式指定がなされている。なぜならピリオドで始まる文章はあり得ないからである。



## N.2.2 HTML と L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の基本

### (1) ソースコードの入力支援について

なおこれ以降のソースコードは、各自がそれぞれのファイルにすべてを入力する必要は無く、その代わりに、各端末からアクセスできるサーバからサンプルをダウンロードして作成できる。そのサーバにはこの文書そのものの pdf ファイルと、演習問題等で使える未完成ソースコードのテンプレートとが置いてある。端末でブラウザ 'mozilla' を立ち上げてそのサーバにアクセスし、ダウンロードしたこの文書の pdf ファイルの中からか、あるいは部分的なソースコードを画面に表示させておいて、そこからエディタ 'kwrite' で開いたファイルにコピー & ペーストしてソースコードを作り始めれば、入力ミスを減らすことができる。講義中にやり方を何度か説明をするので早めに慣れて欲しい。

### (2) 書き出しと最終行

まず、それぞれのソースファイルの書き出しと終わりには次のような「おまじない」が必要で

```
<html>
<head>
<title> ページのタイトル</title>
</head>
<body>
 文書本体
<address>
 金毘悠太, 日付
 うほ大学
</address>
</body>
</html>
```

```
\documentclass[a4]{jarticle}
\usepackage{graphicx}
%
\title{題目}
\author{著者名}
\date{日付} % 略すとコンパイルした日付
\begin{document}

 文書本体

\end{document}
```

とする。左側が HTML で右側が L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X であるが、わけはわからなくていい。T<sub>E</sub>X 命令の頭の記号 \ は ¥ のキー入力で、画面上也そのように表示される [ことがある | のが普通である]。HTML の場合、ヘッダ部のタイトルがブラウザの上のバーに表示されるので略さないこと。L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の場合、\begin{document} より前の部分をプリアンブルと呼ぶが、ここはタイトル等の定義の他に、オプションとして利用するスタイルファイル等の指定にも用いる。例えばこの例では、PostScript の図や写真を読み込むために

```
\usepackage{graphicx}
```

の行がある。HTML の場合の最終行には、その文書の責任上、署名と作成日を明確にしておくことが望ましい。ただし、メールアドレスを表示してしまうと SPAM メールが来るようになるので避けよう。

以上で明らかなように、HTML では原則として <tag> で始まったものが </tag> で終わっている。この組み合わせが順番通り並んでいないと、期待した出力は得られない。ただし <br> は改行を意味し、単体で用いられる。また L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X では、ある \begin{abc} で始まる部分を「abc 環境」と呼び、その abc 環境は \end{abc} で終わることになる。したがって、コンパイル時のエラーで

```
! LaTeX Error: \begin{center} on input line 16 ended by \end{flushright}.
```

のようなメッセージは、center 環境が終わる前に flushright 環境が終わっていることを示している。つまり下に示したように、最終的には右側に示したどちらかのようになろうとしたところを、間違っ、左側のようにしたために発生したエラーである。

こちらは間違い

```
\begin{flushright} % ->+ flushright
 This is a pen. % |
\begin{center} % --|--->+
 That is a book. % | |
\end{flushright} % <-+ |
 The pen is mine.% | center
\end{center} % <-----+
```

```
\begin{flushright} % ->+
 This is a pen. % | flushright
\end{flushright} % <-+
\begin{center} % ----->+
 That is a book. % | | center
 The pen is mine.% |
\end{center} % <-----+

\begin{flushright} % ----->+
 This is a pen. % flushright |
\begin{center} % ->+ |
 That is a book. % | center |
\end{center} % <-+ |
 The pen is mine.% |
\end{flushright} % <----->+
```

### (3) 本文本文の記述法

文書の題目周辺: すべての文書に題目のようなものが必要であるとは限らないが, 例えば上司に命令された技術調査報告書のことを念頭に置いて, まずは題目部分について書いておく。それは例えば

```
<h1> タイトル</h1>
<big> だれそれ</big>

 いつの記述

```

```
\maketitle
[空行]
```

のようにする。HTML の場合, 上の「おまじない」の <title> 部分は本文中には反映されないのので, 例えば, このようにヘッダタグ <h1> で再度記述する必要がある。<strong> は強調文字を意味し, <big> は少し大きめのフォント指定であり, ここは好きに設定すればいい。なお [空行] とは何も入力しないまま Enter キーを押したことを意味する。

節建て: 節は次のようにして階層を設ける。HTML でもそうするのが望ましい。

```
<h2> まず節タイトル</h2>
<h3> 小節タイトル</h3>
<h4> 項タイトル</h4>
```

```
\section{まず節タイトル}
\subsection{小節タイトル}
\subsubsection{項タイトル}
```

この例の HTML の場合には前述のように, ページのタイトルに <h1> を使ったので, <h2> よりも下の範疇のヘッダを用いた。L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X では自動的に節番号が振られるが, HTML では付かない。HTML の場合, 見る側の個々のブラウザの設定で表示は異なるが, 例えば次のようになる。また, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X でどのようになるかについては, p.943 の右段上下に示した例のソースと出力を参照すればわかるが, 例えば次のようになる。

```
まず節タイトル
小節タイトル
項タイトル
```

```
2 まず節タイトル
2.1 小節タイトル
2.1.1 項タイトル
```

ここから本文が始まるが, 節建てをして始める

```
<h2> 第 1 節のタイトル</h2>
[空行]
<p> さて, ここでは・・・
と, いくつかの段落がくるだろう。</p>
[空行]
<h2> 第 2 節のタイトル</h2>
[空行]
<h3> 第 2 節の小節タイトル</h3>
[空行]
<p> ところで・・・
と, さらに続くのだろう。
```

```
\section{第 1 節のタイトル}
[空行]
さて, ここでは・・・
と, いくつかの段落がくるだろう。
[空行]
\section{第 2 節のタイトル}
[空行]
\subsection{第 2 節の小節タイトル}
[空行]
ところで・・・
と, さらに続くのだろう。
```

とでもすればいい。なおここも [空行] とは, 何も入力しないまま Enter キーを押したことを意味する。



とする。左右のマージンが本文より少し大きくなる。第 1 著者はこれを HTML 文書のレイアウトに使うことがあるが、本当はよくない（論理とは関係無い）のかもしれない。

**LaTeX の脚注:** LaTeX の場合は `\footnote{...}` を用いて脚注を入れることは可能であるが、論文・報告では原則として用いない方がいい。HTML には脚注そのものは無い。ただし、前述のソフトウェア ‘`latex2html`’ で LaTeX 文書を HTML 文書に変換すると、脚注だけを別ファイルにまとめて次に説明するアンカータグを付ける等、ちょっと面白いことをしてくれる。

**HTML の参照 (アンカー):** HTML の場合には、引用する側とされる側にアンカータグを付せば単純な参照ができる。例えば

例えば `<a name="xref">` ここを引用する `</a>` として  
 文章がつつらつら続いていて  
 . . . . .  
 ある所で `<a href="#xref">` 上で示したように `</a>` という  
 引用をする

のようにする。ブラウザで表示したとき、この `href` で示した「上で示したように」の部分をクリックすれば、その上の `name` で定義した箇所にブラウザの表示が移動する。前述のソフトウェア ‘`latex2html`’ で LaTeX 文書を HTML 文書に変換すると、例えば目次から各節題目には自動的にアンカーが付されるので便利である。もちろん HTML で最もよく用いられるのは、他のリソースへのアンカーである。例えば

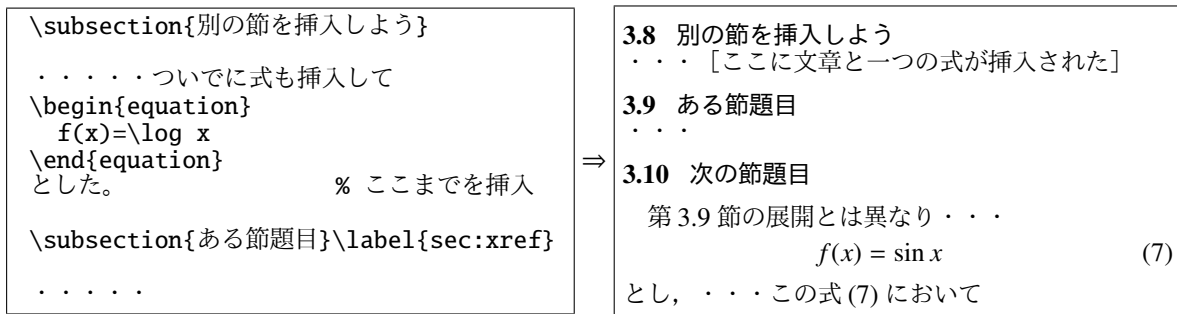
`<a href="http://www.uhoday.ac.jp/uhoday.html">` うほ大学のページ `</a>` では . .

という風に使うと、他のリソースとのリンクができる。

**LaTeX の相互参照:** 「相互参照」は、式や図表の番号等を他の場所で引用する機能のことである。ワードプロセッサにもこの「相互参照」の機能はついているらしいが、それを使いこなせる人はあまりいない。この機能は LaTeX のメリットの一つであるが、HTML のアンカーと同様、ある文章や式に「名前 (ラベル)」を付けておけば、それを引用するときにその「名前」を「参照」することができるというものである。したがって、論文を書いているうちに、例えば式の順番を何度変更しても、その式の式番号とそれを引用している部分の式番号は、常に自動的に変更されるのである。例えば

<pre> \subsection{ある節題目}\label{sec:xref} . . . . . \subsection{次の節題目} 第 \ref{sec:xref} 節の展開とは . . . \begin{equation} f(x)=\sin x \label{eq:example} \end{equation} とし, . . . この式 (\ref{eq:example}) において </pre>	⇒	<pre> 3.8 ある節題目 . . . . . 3.9 次の節題目 第 3.8 節の展開とは異なり . . . f(x) = sin x (6) とし, . . . この式 (6) において </pre>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---	----------------------------------------------------------------------------------------------------------

という風にできる。ラベルは、節見出しには `sec:` を、式には `eq:` を使うようにすると、区別し易くなる。つまり、節番号や式の番号を引用される側には `\label{name}` でラベルを付け、引用する側では `\ref{name}` でラベルを引用することによって相互参照ができるのである。この場合には 2 回 (場合によっては数回) コンパイルしないと、きちんとした相互参照はできないので注意すること。例えば上の例の `\subsection{ある節題目}` の行の前に、次の左側に示したような節と一つの式を挿入すると、2 回のコンパイル後には節と式の番号が右側に示したように変更される。



もし `\label` で指定していない名前を `\ref` で引用すると、コンパイルは一見エラー無く終わるものの、ログファイル（ソースファイルと同じファイル名で拡張子が `'log'` のファイル）には、その引用の箇所に次のような警告メッセージ

LaTeX Warning: Reference 'sec:introduction' on page 2 undefined on input line 65.

が書き込まれる。さらに、そのログファイルの最後にも警告

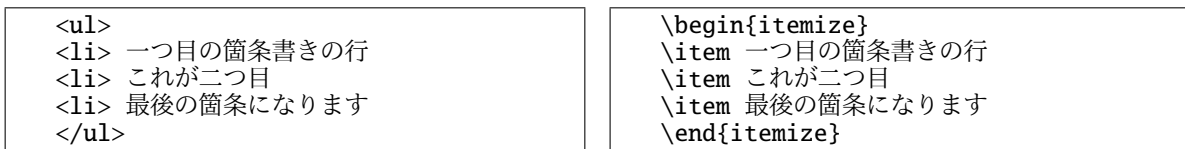
LaTeX Warning: There were undefined references.

が書き込まれる。結局、本文中の `\ref` のところは `'?'` マークになったままになるので注意すること。

箇条書き: まずは単純な箇条書き, すなわち

- 一つ目の箇条書きの行
- これが二つ目
- 最後の箇条になります

の場合には



とする。この箇条の頭の記号は変えられる。なお L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X では、`\item` のようなコマンドの次には「半角のスペース」が必要であることに注意する必要がある。ここが「全角スペース」だと

```

! Undefined control sequence.
1.123 \item 一つ目の箇条書きの行
 [↑ここが全角スペース]

```

のようなエラーが生じる。つまりこれが、定義されていない「`\item 一つ目の箇条書きの行`」というコマンドとみなされるからである。心配なら



のようにすると安全かもしれない。

また、順番の数字付きの箇条書き, すなわち

1. 一つ目の箇条書きの行
2. これが二つ目

## 3. 最後の箇条になります

の場合には

```

 一つ目の箇条書きの行
 これが二つ目
 最後の箇条になります

```

```
\begin{enumerate}
\item 一つ目の箇条書きの行
\item これが二つ目 \label{en:2nd}
\item 最後の箇条になります
\end{enumerate}
```

とする。開始番号や表示は、例えば p.897 のようなアルファベット順の記号にも設定できる。L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の場合には、箇条の数字（上例の二つ目の箇条の \label で使ってみた）が相互参照の対象になる。

最後に、語句の意味を説明するような見出し付きの箇条書きの場合、あるいは演習問題の略歴の列挙を例として示した（左側が HTML, 右側が L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X）

2000/4/1:

△○高等学校入学

2005/3/31:

△○高等学校卒業

2006/4/1:

東北大学工学部建築・ . . . . .

2000/4/1: △○高等学校入学

2005/3/31: △○高等学校卒業

2006/4/1: 東北大学工学部建築・社会環境工学科  
入学

の場合には

```
<dl>
<dt> 2000/4/1:
<dd> △○高等学校入学
<dt> 2005/3/31:
<dd> △○高等学校卒業
<dt> 2006/4/1:
<dd> 東北大学工学部建築・
</dl>
```

```
\begin{description}
\item[2000/4/1:] △○高等学校入学
\item[2005/3/31:] △○高等学校卒業
\item[2006/4/1:] 東北大学
工学部建築・社会環境工学科入学
\end{description}
```

とする。空白に見えるのはすべて半角のスペースであることに注意して欲しい。HTML の場合は見出しと箇条の間は改行されてしまうが、見出しにするものが 2 文字程度の場合には、<dl compact> を用いると改行されない。

## (4) レイアウトやフォント指定

レイアウトやフォント指定は、特に論文や報告では可能な限り使わない。論文や報告は内容を論理的に記述して伝えるためのものであり、見た目や情報を伝えるものではないからである。ただ、基本的なものだけを以下に列挙する。

位置決め: まず、中央揃え（文字列を中央に配置する）の場合には

```
<center>
最初の行

次の行
</center>
```

```
\begin{center}
最初の行 \\
次の行
\end{center}
```

とする。<br> と \\ は改行である。これに対し、左揃えの場合には

```
<p align="left">
最初の行

次の行
</p>
```

```
\begin{flushleft}
最初の行 \\
次の行
\end{flushleft}
```

とする。右揃えの場合には上記の `left` が `right` になる。HTML でこの位置決めをする場合には、`</p>` は省略できない。

コメント： 表示されないコメントをソースファイルに入れておくことができる。

```
<!-- の記号から右の記号まで -->
```

```
% %マークで始まる行
```

という行が表示されない、あるいはコンパイルされないコメント行になる。ただし、これを多用すると見通しの悪いソースになる。可能な限りコンパクトに、かつ必要な部分にのみ用いる。

文字指定（強調のため）： 通常は2種類のフォント（日本語は明朝とゴシック、英語の場合はローマンとゴシック）で十分である。普通の報告書等の本文中でそれ以上の種類が必要になったときは、実は論理的に異様なことをしている可能性があると考えよう。ポスターではなく、論文・報告を作成していることを忘れないこと。それを踏まえた上で、もしかしたら必要かもしれないものを列挙しておく。

まず、参考文献欄でちょっとだけ使うかもしれないイタリック (*Italic*) の場合には

```
...
<i>.....</i>
```

```
\textit{...} あるいは
{\it ...}
```

とする。`<em>` の方は「強調」という意味である。あるいは、ゴシック (**Gothic**) の場合には

```
...
.....
```

```
\textbf{...} あるいは
{\bf ...}
```

とする。`<strong>` の方が論理的な指定。また、あまり使わない方がいいと思うが、下線を引く場合には

```
<u>....</u>
```

```
\underline{....}
```

とすればいい。L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の場合、2行以上にわたる下線は普通はできず、オプションのパッケージ（後述のスタイルファイル）が必要になる。最後に、等間隔文字（タイプライタ様の）を用いる場合には

```
<tt>....</tt>
```

```
\texttt{...} あるいは {\tt ...}
```

とする。普通が‘Typewriter’で、これが‘Typewriter’のような等間隔文字列になる。

文字サイズ： L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X で作る論文・報告で文字サイズをどうこうする必要は滅多に無い。ただ HTML の場合は、メリハリを付けるのに多少の工夫は必要だろう。基本的には

```
<big>....</big> や <small>....</small>
```

で十分であり、`<font size=.....>....</font>` 等を多用するのはあまり好ましくない。

Java 等のプログラムソース等を表示する： 改行を入れた文をそのままのイメージで出力する場合には

```
<pre>
ここに書く（ただし、タグは有効）
</pre>
```

```
\begin{verbatim}
ここに書く（LATEX の命令は無効）
\end{verbatim}
```

とすればいい。例えば、Java のプログラムソース等をそのまま表示させたいときに使う。

```
<pre>
import java.io.*;
class algebra
{
 public static void main....
 {
 double a, b, c, d, x, y;

 }
}
</pre>
```

```
\begin{verbatim}
import java.io.*;
class algebra
{
 public static void main....
 {
 double a, b, c, d, x, y;

 }
}
\end{verbatim}
```





<pre style="margin: 0;">\begin{eqnarray} f(x) &amp; = &amp; ax^3 + b + \frac{bx+a}{c} \\ &amp; &amp; -bx^2 + \log(x) \\ &amp; &amp; -cx \end{eqnarray}</pre>	⇒	$f(x) = ax^3 + b + \frac{bx+a}{c} \quad (\text{N.4})$ $-bx^2 + \log(x)$ $-cx$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---	-------------------------------------------------------------------------------

という風になり, ‘-cx’ の行が正しい。マイナス記号前後の空白の幅を, すぐ上の ‘-bx<sup>2</sup>’ の部分と比較して欲しい。\\nonumber はその行の式には式番号が不要であるという意味である。

記号で式を参照したい: 式を番号ではなく記号で区別したい場合には, plain-T<sub>E</sub>X の命令 \$\$ を用いて

<pre style="margin: 0;">\$\$ f(x) = a \left\{ x^3 + b \left( cx^2 + d \right) \right\} \eqno{(*)} \$\$</pre>	⇒	$f(x) = a \{ x^3 + b (cx^2 + d) \} \quad (*)$
--------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---	-----------------------------------------------

とするといい。ただし, この式記号(\*)は相互参照できない。この例では括弧の使い方も示した。括弧始めと終わりに付ける \\left や \\right を省くと

<pre style="margin: 0;">\$\$ f(x)=a \{x^3+b(cx^2+d)\} \eqno{(*)} \$\$</pre>	⇒	$f(x) = a \{ x^3 + b (cx^2 + d) \} \quad (*)$
-----------------------------------------------------------------------------	---	-----------------------------------------------

となってしまうので, とても読み難くなる。また \\left と \\right は必ず対で使わないとエラーになる。

## (6) 図表と写真

**HTML の場合:** 図と画像等のデータは, そのファイルを文中に <img> タグで指定することによって配置できる。例えば

```

```

といったようなタグを使う。alt は目の不自由な人等にとって重要なので省略しないようにする。width 等は写真のサイズ指定である。図や写真のファイル形式はブラウザに依存しないようにすべきであり, jpg 形式か gif 形式 (滅多に使わないだろうが xbm 形式) が標準であろう。HTML でも次に示す L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X のフロートのような利用法は可能である。窓 (複数) システムを使っているんだったら, フレームを使ったり単にリンクするのはもったいない。例えば

```
 この写真では
```

とすると, photoswindow という名前付きの窓が別に開いて, そこに画像が出力される (ブラウザの設定によってはそうならない)。もちろん直接画像ファイルではなく, 他の HTML ファイルでもいい。

表は HTML にタグが用意されている。非常に面倒だが <table> の中に, <tr>, <th>, <td> 等を使って書く。使い方は各種文献を参照して欲しい。

**L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X のフロート:** L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の場合は, 図表は figure か table 環境の中に配置する。この二つの環境はフロート (浮き) という分類に属しており, ソースファイル中の位置とページのレイアウトの状態とを勘案して, 複数のページ内をあちこち「漂う箱」と考えなければならない。つまり, どこに配置するのか決めるのは T<sub>E</sub>X そのものであり, 利用者は DVI ファイルを見ながら, 欲しい位置に来るように調整する必要がある。これはたいの出版物 (辞典のようなものではなく) の場合, 図表は上や下にまとめてあることを思い出せば納得がいくのではないだろうか。面倒ではあるが, 文章の読み易さを損ねないための工夫と考えて欲しい。

次の具体例では, 左側が図で右側が表の例であるが



写真 N.2 現場視察用 (んなわけはないが, 呵呵)  
UH-60A Blackhawk (Hasegawa D3 1:72):  
PostScript の写真の例

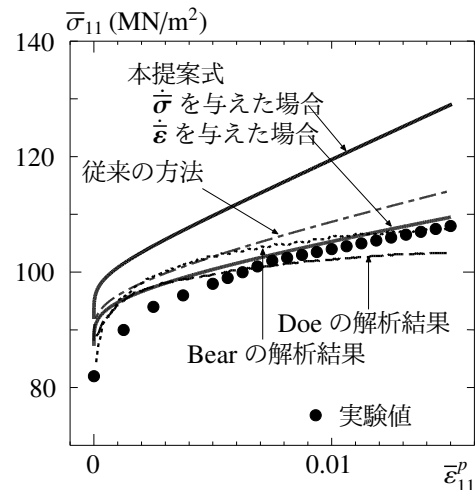


図 N.3 図化ソフトウェアからのインポート

```
\begin{figure}
\begin{center}
\includegraphics*{uho1.ps} \\
\includegraphics*[width=4cm]{uho2.ps}
\end{center}
\caption{キャプション}\label{fig:hoge}
\end{figure}
```

```
\begin{table}
\caption{実験値}\label{tab:hogege}
\begin{center}
\begin{tabular}{|l||r|r|} \hline
..... 表そのもの
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}
```

のようにする。「キャプション」というのは図表の見出しのことで、例えば写真 N.2 の「PostScript の写真の例」という文字列のことを意味する。キャプションにも順番に図表番号を付けるのが慣わしである。また、図のキャプションは図の下に、表のキャプションは表の上に配置する決まりがある。また、キャプションのところまで中央揃えの指定をする人が多いが、不要である。PostScript ファイルを読み込むには、プリアンブルで

```
\usepackage{graphicx}
```

のように、スタイルファイルというパッケージの利用を宣言する必要がある。なお、例の最初の図 (第 3 行) はその図の幅指定をしないで読み込んでいるが、それは元々の図の幅がページからはみ出さないように作られているからである。一般には美しい仕上げになるように、図は大きめに描くことが多いので、その PostScript ファイルの横幅がページ幅くらいまで大きいことがある。そのため、例の二つ目の図 (第 4 行) では、その幅を `width=4cm` で指定して読み込み、縮小している。原則として後者が望ましく、例えば論文集に投稿する図のような場合で版下を提出する必要が無い場合 (レイアウトを出版社がしてくれるような場合) には、1 ページいっぱい描けるくらいの大きさの図のファイルを提出する方がいい。

$\LaTeX$  で直接図を描くことも可能ではあるが、別パッケージ<sup>29</sup>を利用したとしても限界がある。したがって、図 N.3 のようなグラフそのものは、某社の表計算ソフトウェア等いろいろな図化ソフトウェア<sup>30</sup>で描くことになる。 $\LaTeX$  では、いくつかの方法で図のデータをインポートすることができるが、出版のことを考えて汎用性を持たせるためには、最終的には PostScript ファイルに変換して上述の方法を用いるのがいい。なお、 $\LaTeX$  の初期設定では「写真環境」は用意されていない。この文書ではそれを新しく定義しているので、写真 N.1 のキャプションが「写真 N.1」になっている。

表そのものを  $\LaTeX$  で作成する場合には、`tabular` 環境を使うといい。

<sup>29</sup> 例えば図 N.1 のツリー図では後述のスタイルファイルを用い、図 N.8 は C 言語で書かれた 'flow' というソフトウェアを利用した。

<sup>30</sup> 教科書には 'gnuplot' が紹介されている。第 N.3.3 節で例の一つを紹介する。

```

\begin{table}
\caption{2次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の根}
\begin{center}
\begin{tabular}{|c|c|c||c|c|}\hline
a & b & c & x_1 & x_2 \\ \hline
1 & 2 & 1 & -1 & -1 \\ \hline
1 & -2 & -3 & 3 & -1 \\ \hline
\end{tabular}
\end{center}
\end{table}

```

⇒

表 1.2 次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  の根

$a$	$b$	$c$	$x_1$	$x_2$
1	2	1	-1	-1
1	-2	-3	3	-1

& が縦にそろえる位置を指定している。負の数だけを \$ で囲んでいるのは、正しいマイナス記号にするためである。もしこうしないとハイフンになってしまう。例えば、'-2' は '-2' に、'\$-2\$' が '-2' となる。当然後者が正しい。ワードプロセッサや某社のプレゼンテーションのソフトウェアを用いる人達が、よく間違っハイフン記号をマイナス記号として使ってしまうことがあるので注意すること。

### 演習問題 N-2

7. ファイルを 'vita.html' とし、「略歴と趣味」をヘッダ <h1> で本文最初の行に表示する HTML 文書を作成せよ。第 N.2.2(1) 節に書いたように、ソースの未完成テンプレートはサーバーからダウンロードできる。また文末には適当な <address> も付けよ。ブラウザでそのファイルを読んでみて、確かに期待したページが表示されることを確認せよ。作成している最中は次のようにすると便利 (GUI の場合にどうなっているのか理解するために) である。まずエディタは

```
kwrite vita.html & ↵
```

として立ち上げる。最後に '&' がある命令は、いわゆるバックグラウンドで実行される<sup>31</sup>ので、コマンドプロンプトへの別の命令の入力が続けて可能になる。この状態で文書を作りながらある程度できたところで一時的にファイルを保存し、ブラウザをコマンドラインから

```
mozilla & ↵
```

で立ち上げ、先に保存した文書を表示することができる。文書が思ったような出来になっていない場合には、エディタで加筆修正をした上で再度一時保存し、ブラウザでも読み直すという操作を繰り返せばいい。ただし、後述の L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 文書や Java プログラムのコンパイルとは異なり、エラーメッセージは出ないので、画面の表示が設定した通りになっているかどうかを目で確認する必要がある。その間は常にこの二つのプログラムは実行したままにすればいい。つまり、GUI で二つのプログラムを実行しているのと全く同じ状況である。

8. 同じファイル 'vita.html' に、さらに次のような追加をせよ。

- ヘッダ <h2> を用いて「略歴」という節題目を宣言し、その次の行に、事前にメールから取り出した自分の顔写真 'myface.jpg' を右詰めで配置せよ。ただし、写真のサイズについては <img> タグのオプションの中で、例えば width=250 あるいは height=300 くらいにしておけばいい。
- 次に、小学校卒業以来の略歴を箇条書きにして並べよ。もちろん事実でなくていい、呵呵。

<sup>31</sup> 第 1 著者が学生だった頃のメインフレームでは Time Sharing System (TSS) と呼んで、複数のジョブが同時に (ちょっとずつ順番に) 実行されていたが、その命令と考えればいい。この方法は覚えておいて欲しい。卒業研修等で数値シミュレーションをする場合には、多分、計算は数時間以上かかるのは当たり前である。研究室の計算用のサーバでは、一人一人の計算はバックグラウンドでやらせるのが普通である。例えば、ファイルからデータ入力し、結果を別ファイルに書き込むシミュレーションプログラム 'mysimulation' を

```
mysimulation & ↵
```

のようにして実行し、システムからはログアウトするのである。コンピュータが計算をしている間は、学生さんは自分の頭を使った別のもっとクリエイティブな仕事ができるのである。ちなみに '&' はアンパサンドと呼ぶが、ラテン語の 'et' の合字が元だと思われていて、手書きの場合は 'et' のようにも書く。

- その次には, 別の節題目「趣味」をヘッダ `<h2>` で立てて, さらに `<h3>` で小節題目「趣味一覧」として, まず自分の趣味 (敢えて複数にせよ。呵呵) を, 一番好きなものから順に, 番号付きの箇条書きで並べよ。そのあとには `<h3>` で小節題目「一番熱心な趣味について」として, 一番好きな趣味について, それに興味を持った経緯や, どういうことをしているのか, 面白おかしく「起承転結」で, 少なくとも三つの段落を用いて説明せよ。ここも事実ではなくていい。説明では写真を使ってもいいが, 必ず自分が撮影したものだけにすること。インターネット上の写真であれば, それにアンカーするだけ (`<a href=http://...>○さんの作品</a>`) にせよ。どうしても他人が撮った写真 (インターネットからダウンロードした画像等も含む) を使いたい場合には, 必ずメールや電話・手紙で事前にその許諾を得ておくことと, その出典 (誰がどこで公開していた写真なのか) と許可を得たことを, 写真のキャプションに書くこと【情報倫理の遵守!】。

最終的に, 図 N.4 の左側のようなページができることをブラウザで確認したあと, 本文 `'vita.html'` と, 顔写真の `'myface.jpg'` の二つのファイルを提出せよ。もし趣味の説明に写真を使った場合には, そのファイルも提出せよ。

9. 自分の顔写真のファイル `'myface.jpg'` を, 適切なソフトウェア ('Gimp' がインストールされていると思う) で PostScript ファイル `'myface.ps'` に変換せよ。もし趣味の説明で写真を使っている場合には, それもすべて変換せよ。'Gimp' もインターネットからダウンロードして自宅のコンピュータにインストールすることができる。
10. 上の 8 番で作った HTML ファイルの中身とほぼ同様の `'vita.tex'` という  $\text{\LaTeX}$  のファイルを, 図 N.4 の右を参考にして作れ。ただしそのときに使う写真は PostScript ファイルの方を用いること。また, HTML ファイルでインターネット上の写真等へのアンカー『`<a href=http://...>○さんの作品</a>`』を使っている場合には,  $\text{\LaTeX}$  ファイルでは『`○さんの作品({\tt http://...})`』とするだけでいい。完成したら, 下に書いた方法で pdf ファイルを作成し `'vita.pdf'` を提出せよ。

まず最初の数行については

```
\documentclass[a4]{jarticle}
\usepackage{graphicx}
\title{略歴と趣味}
\author{情報基礎 B}
\begin{document}
\maketitle
\begin{flushright}
\includegraphics*[height=3cm]{myface.ps}
\end{flushright}
\section{略歴}
.....
```

として始めればいい。ヘッダには節見出し `\section, \subsection` を用いよ。最終的には pdf ファイルに変換したファイル `'vita.pdf'` の方を提出せよ。このときも HTML ファイルを作ったときと同様に

```
kwrite vita.tex & ↵
```

でエディタをバックグラウンドで実行して文書を作成し, 一時保存をした上で, コマンドラインから

```
platex vita.tex ↵ [これには & はつけないよ]
```

でコンパイルする。このとき, エラーの検出で中断されることがある。例えば

```
Runaway argument?
{itemize \end {itemize}
! Paragraph ended before \end was complete.
<to be read again>
\par
```

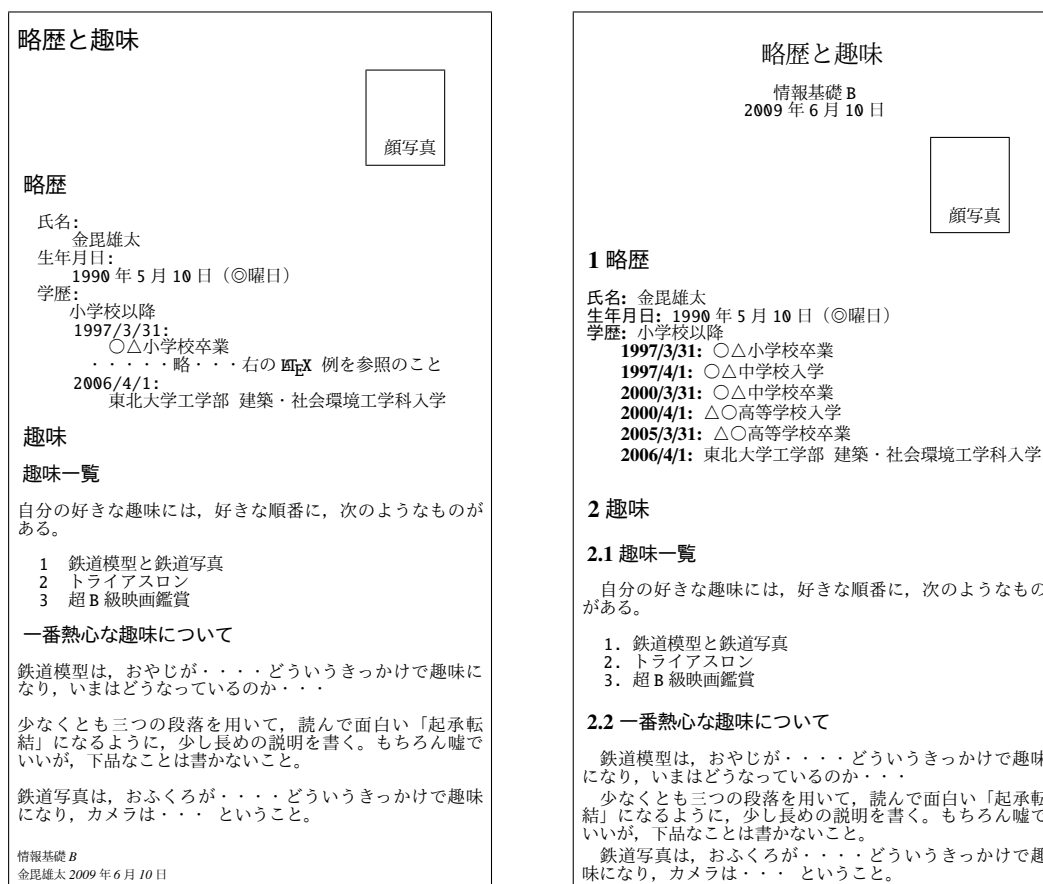


図 N.4 略歴と趣味というページと文書 — 左側が HTML で右側が L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X による結果・・・に似せたもの

?

のように表示されたままになる。第 29 行で変なこと (itemize 環境の設定か何かの間違いかスペルミスや、{と}の括弧の不整合) が発生したことを示している。あるいは

```
! Undefined control sequence.
1.53 f=\sqr
 {x}
```

?

のようになる。第 53 行で、定義されていない命令 `\sqr` (正しい平方根は `\sqrt` である) を使ったことを示している。このように、L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の使い方を間違っているためにエラーが発生している。このときにはエラーメッセージを読み、'? ' マークのプロンプトに対して '`x`' と入力<sup>32</sup>して一旦コンパイルを中止し、ソースファイルを修正する必要がある。このような修正作業を「虫取り」と呼んでいる。よくあるエラーについては pp.901-908 にもいくつか例示した。

何もエラーが無くなったら、バックグラウンドで表示ソフトウェアを実行し

```
xdvi vita.dvi & あるいは pxdvi vita.dvi &
```

で表示し、できあがりを確認する。不適切な箇所があれば、再度エディタで修正し、一時保存とコンパイル・再表示を繰り返せばいい。最終的な文書が完成したら

```
dvipdfmx vita.dvi
```

を実行して pdf ファイルを作成する。

<sup>32</sup> 慣れてきたら '`r`' と入力して全部のエラーをログファイル (この例では '`vita.log`') に書き出させ、そのあとで虫取りをするのも効率的である。

演習問題に関連したトリビア: pdf 形式のファイルは, 無料で配布されている Adobe Reader をインストールしたコンピュータではもちろん, 最近では携帯端末でも表示できる。大学でレポートを電子的に提出する場合も, pdf ファイルにすることによって自分と異なるコンピュータ環境にいる友人や教員でも全く同じ文書を読むことができるようになる。また, 文書中の文字列の検索もできるし, 文書内の相互参照 (HTML のアンカータグの利用や L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の相互参照とほぼ同じ機能) も可能である。さらに, 某社のワードプロセッサ等と同様, 表示される URL<sup>33</sup>部分をクリックすればブラウザが立ち上がり, そのページに直接アクセスできる。

ところで, バックグラウンドで何かを実行しているときには, コマンドプロンプトに対し

```
jobs ↵
```

とすれば, 多分

```
[1]+ Running kwrite vita.html &
[2]+ Running mozilla &
```

のように表示される。もしブラウザをコマンドラインから中断する (そんな人いないって) には

```
kill %2 ↵
```

とすればいい。%2 の '2' は, 上の '[2]+ Running' の括弧の中の数字である。

## N.2.3 プログラムやパッケージを使う

### (1) JavaScript の利用 (HTML)

HTML のページの場合, JavaScript というプログラミング言語を用いて, 少し面白いことができる。文法や例については, いろいろなページ (次の例の中にも URL がある) で探して, そして見て欲しい。「あなたは〇人目の訪問者」といったアクセスカウンタもそうだが, 例えばヘッダ部に

```
<script language="Javascript">
<!--
// please keep these lines on when you copy the source
// made by: Nicolas - http://www.javascript-page.com
var image = "http://www.uho.tohoku.ac.jp/images/new.gif"
// ある期日までは, 指定した画像 (上の行で指定) を表示
function expnew(when) {
when = new Date(when)
date = new Date()
if (when.getTime() > date.getTime()) {
document.write("
</script>
```

のように, 関数 'expnew' の定義をしておいて, 本文では

```
新しい箇条 (1/1/2009)
<script language="Javascript">
<!--
expnew("2/10/2009")
/-->
</script>
```

のようにすると, この「新しい箇条」の右には, ある期日までは指定した画像 'new.gif' が表示される。

また, 例えば

<sup>33</sup> インターネット上の情報のある場所を表す方法。例えば p.900 の <http://www.civil.tohoku.ac.jp/bear/...> のような表示。

```

この文書は
<script language="Javascript">
<!--
// please keep these lines on when you copy the source
// made by: Nicolas - http://www.javascript-page.com
document.write(" "+document.lastModified+"")
//-->
</script>
に改訂されています。

```

のように、この HTML ファイルの更新日を表示するプログラムを本文中に置くこともできる。

## (2) スタイルファイルの利用 (L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X)

PostScript ファイルを読み込むのに ‘graphicx.sty’ というスタイルファイルを利用していた。これを使うと、回転 ‘ῶuoiM!’ とか鏡像 ‘ιomim’ のようなこともできる。同じように、L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の機能を拡張した各種スタイルファイルを使うといろいろなことができる。例えば、この文書中の罫線で囲んだ例等は

```
\usepackage{boxedminipage}
```

と指定して、新しい boxedminipage 環境を使っている。また、表 N.1 の 2 重罫線と、前節の p.911 の例にある標準的な 2 重罫線とは若干違っているが、これも

```
\usepackage{hhline}
```

として水平罫線を拡張している。さらに図 N.1 のツリー図も

```
\usepackage{eclclass}
```

というスタイルファイルを使って描いている。いろいろなスタイルファイルについては、例えば

<http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/bear-collections/index-j.html>

のガイドが参考になるかもしれない。

## (3) L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 文書を HTML 文書に変換する

先に紹介した ‘latex2html’ の例を図 N.5 に示した。この例では、変換のときに節番号も表示するようにしており、式番号については L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の相互参照機能が HTML のアンカー機能に自動的に変換されている。他にもページのナビゲーション等多種多様な設定ができるようになっている。

### N.2.4 悲しいワードプロセサ

残念なことに、テンプレート（定型下敷き）の無い場合で、ワードプロセサで作られた美しい（内容ではなく）文書に出会ったことは数回しか無い。「これは L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X で書いたのかな」と思うようなワードプロセサによる文書を見たこともあるが、単なる偶然か、その作成者は L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の使い手でもあった。その悲しい出力を少し例示しておきたい。ただし一部分は L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X ユーザーも注意すべき点でもある。最近では経済的な理由から、多くの論文集で版下原稿（そのまま印刷してしまう元版）の提出を要求することが増えている。できれば組版の規則に従った版下に近づけたい。

組版では英数字は半角指定である。表 N.2 の左側の例は、主にその英数字の間違いである。節見出しの番号が全角数字である。全角数字の西暦は途中で改行されてしまう。最初の「2008」は英数字用のきちんとしたフォ

```

\documentclass{jarticle}
\title{{\tt LaTeX2Html} の例}
\author{筆者}
\date{2008年5月11日}
\begin{document}
\maketitle
\section{最初の節}
{\tt LaTeX2Html} の例を示す。例えば式は
\begin{equation}
\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) \delta(x-a) dx = \phi(a)
\end{equation}
\label{eq:1}
\end{equation}
となる。この式 (\ref{eq:1}) を引用してみた。表は
\begin{center}
\begin{tabular}{|c|c|c|} \hline
a & b & c \\ \hline
0.1 & 0.5 & 1.2 \\ \hline
\end{tabular}
\end{center}
となる。
\end{document}

<HTML>
<HEAD><TITLE>LaTeX2Html の例</TITLE></HEAD>
<BODY>
<H1 ALIGN="CENTER"><TT>LaTeX2Html</TT> の例</H1>
<P ALIGN="CENTER">筆者</P>
<P ALIGN="CENTER">2008年5月11日</P>
<H1>
1 最初の節</H1>
<TT>LaTeX2Html</TT> の例を示す。例えば式は

<DIV ALIGN="RIGHT"><TABLE WIDTH="100%" ALIGN="CENTER">
<TR VALIGN="MIDDLE"><TD ALIGN="CENTER" NOWRAP
<IMG WIDTH="195" HEIGHT="45" BORDER="0"
SRC="img1.gif" ALT="EQ"></TD>
<TD WIDTH=10 ALIGN="RIGHT">
(1)</TD></TR></TABLE>
<BR CLEAR="ALL"></DIV><P></P>
となる。この式 (1) を引用してみた。表は
<DIV ALIGN="CENTER"><TABLE CELLSPACING=3 BORDER="1">
<TR VALIGN="BASELINE"><TD ALIGN="CENTER">a</TD>
<TD ALIGN="CENTER">b</TD><TD ALIGN="CENTER">c</TD></TR>
<TR VALIGN="BASELINE"><TD ALIGN="CENTER">0.1</TD>
<TD ALIGN="CENTER">0.5</TD>
<TD ALIGN="CENTER">1.2</TD></TR>
</TABLE></DIV>
となる。
 <HR>
<ADDRESS>
<I>John Doe
 Sun May 11 15:15:56 JST 2008</I>
</ADDRESS>
</BODY>
</HTML>

```

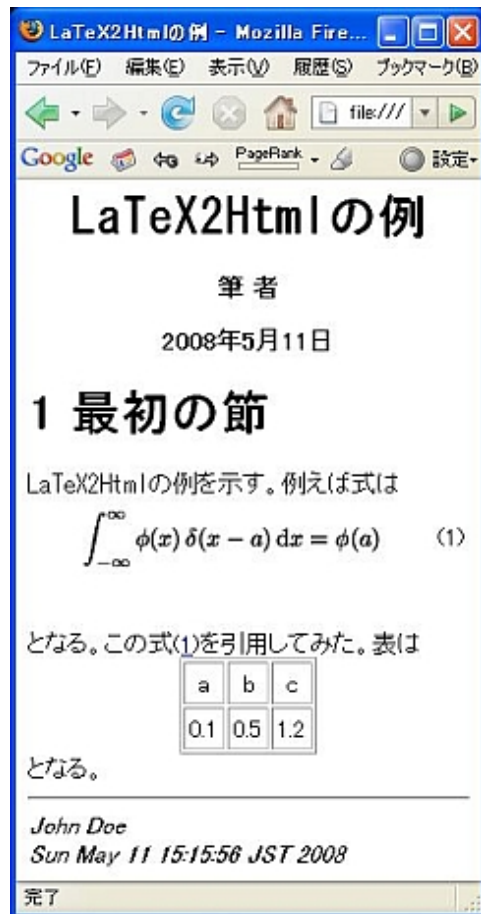


図 N.5 'latex2html' の例 — 式は gif 画像に変換される (ただし左下の HTML 文書は若干整理してある)

ントを用いているが、第2行のそれは、漢字フォントの明朝の半角(全角のデザインを半分にしただけの醜いもの)を用いているため、あまり美しくない。また二つの「5種類」の数字の一つが全角数字になっているが、どちらかわかるだろうか。さらに、「ところで」には段落始めの字下げが無い。前の行末処理を間違ったのか、字下げを忘れたのか不明なため、文章の論理を正しく伝えることができていない。ただし、英数字に半角を用いることについては、 $\text{\LaTeX}$  を使う場合にも十分な注意が必要である。

表 N.2 の右側の例は、学協会の文章等でも見たことがある曖昧な表現である。この例を好意的に解釈すれば、最初の二つの箇条がある一つの目的で列挙され、その後ろの「その次に・・・」のところでは一旦本文に戻っていて、そのあとに別の目的の二つの箇条が並んでいると考えられる。しかし、これはもしかしたら四つの箇条書きなのかもしれない、という曖昧な結果になっている。この部分は、各箇条の第2行以降が、記号「●」と小空白の幅だけ確実に字下げされてさえいれば、こんな曖昧な文章構成にはならない(p.897の箇条書きを参照のこと)のである。さらに、下の二つの箇条の記号には醜いフォント(明朝P)を使っているため、明確な箇条書きには見えない。某社のプレゼンテーションソフトウェアを使った、卒業研修等の発表スライドによく見られる悪い例である。 $\text{\LaTeX}$  を使えば、このあたりはほとんど何も考えないでいい。

さて、なぜ演習では、こんな面倒な HTML や  $\text{\LaTeX}$  を使うのか。ウェブページはもっと簡単に、しかも美しいものを作るソフトウェアがあるじゃないか。数式エディタを使えばワードプロセサに含むことができる綺麗な数式を書くことができるし、ワードプロセサでも多くの人が論理的な科学的文章を書いているじゃないか。確かにそうである。しかし、実はそのワードプロセサの文書ファイルの中には、HTML のタグや  $\text{\LaTeX}$  の命令



表 N.2 何度か見たことのある、ワードプロセサ等による出力例で悪い点

<p>3 歴史的背景</p> <p>この構造物は2008年に竣工予定で・・・2004年には・・・2008年には・・・さらに、・・・と新しい段落の文章が続き、いくつかの文節が終わったとしよう。ところで、・・・となっている。そこで、5種類のプランを・・・さらに5種類の色を・・・</p>	<ul style="list-style-type: none"> <li>● 箇条書きがここから始まる。それが1行を超えているとしよう。</li> <li>● 次の箇条書き。ここに節がある。いくつかの文節が並ぶ。</li> <li>● その次に、字下げが無いまま、また何らかの文章が続いている。それが2行続いたあとに</li> <li>● このような箇条書きが、ちょっとばかり長く長く続いていたり</li> <li>● このような箇条書きがあったとしよう。</li> </ul>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

に相当する制御コードがたくさん入っている。違いは、ソフトウェアにタグを付けさせるのか、作文する本人が付けるのかの差でしかないのである。そしてHTMLや $\text{\LaTeX}$ では、そのタグを自らが指定することによって、文章の論理構造を自分自身で明確に認識・指定できる点が、ワードプロセサには無い強みなのである。文書作成の段階毎の推敲の進行例をp.943に示したが、できあがりのレイアウトを全く意識せずに、文節の移動や変更が容易にできていることを示したつもりである。また $\text{\LaTeX}$ の場合には相互参照機能があるため、この文書のように、目次や参考文献リスト・索引をととても簡単に間違い無く作ることができることも等も実務的なメリットである。

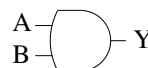
### N.3 プログラミング — 情報処理

#### N.3.1 数値の表現とコンピュータへの命令

##### (1) なぜ2進法

10進法の例えば「2314.6<sub>10</sub>」という数値<sup>34</sup>は、具体的には  $[2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 4 \times 10^0 + 6 \times 10^{-1}]_{10}$  である。では同じ表現「2314.6<sub>16</sub>」が16進法である場合には、その数値は  $[2 \times 16^3 + 3 \times 16^2 + 1 \times 16^1 + 4 \times 16^0 + 6 \times 16^{-1} = 8980.375]_{16}$  という値になることは簡単に予想できる<sup>35</sup>と思う。ただこの16進法の場合には、0から15<sub>16</sub>までを一桁の数字(文字)で表す必要があるので、10以上の数字をそれぞれAからFで表す。したがって、「29<sub>16</sub>」という数値は  $[1 \times 16^1 + 13 \times 16^0]_{16}$  となるから、「1D<sub>16</sub>」と表現される。では2進法の場合はどうだろう。最後の「29<sub>16</sub>」は  $[1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 1 \times 2^0]_{16}$  であるから「11101<sub>2</sub>」と表現されることになる。これも簡単にわかるように、2進法では数字は0と1しか使えない。

では、コンピュータの仕組みを考えると、どうして2進法を使うのか。それは、最も基本的な回路である論理回路<sup>36</sup>の働きに依存している。例えば端子AとBにそれぞれ、ほぼ0Vの電圧と、例えば2V程度<sup>37</sup>の電圧をかけると、端子Yにはほぼ2V程度の電圧が発生するといった論理回路がある。こういう動きをするのは「OR回路」か「EXCLUSIVE OR回路」



A		0	0	1	1
B		0	1	0	1
Y	AND	0	0	0	1
	OR	0	1	1	1
	XOR	0	1	1	0

図 N.6 論理回路の働き

である。これに対し「AND回路」の場合には三つ目の端子はほぼ0Vのままになる。この「ほぼ0V」というのを「0」で表し、「ほぼ2V」を「1」で表して、電気回路にいろいろな働きをさせたものがコンピュータで

<sup>34</sup> 数字の最後に「b」がある場合は10進法。「h」と「b」はそれぞれ16進法と2進法であることを示す。

<sup>35</sup> 第1著者は大学3年生のときに友人に初めて教えられてとても驚いた。

<sup>36</sup> 論理回路毎に記号は異なるため、図N.6中の記号は、敢えて、実際には用いないもので表した。

<sup>37</sup> 実際の電圧がいくつかだったか忘れた。

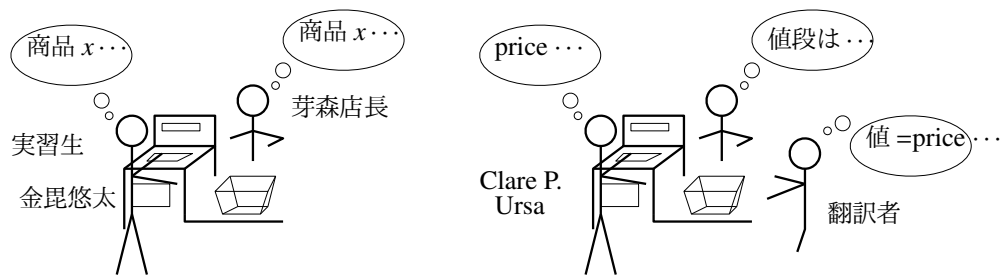


図 N.7 スーパーのレジ係の実習風景

ある。したがって、コンピュータにやらせる命令はこの「0」と「1」の並びで表現することになる。この命令の「言葉」あるいは「言語」を「機械語」と呼ぶ。

では、「 $1+1$  は?」という仕事をコンピュータにやらせるときには、どんな命令を下せばいいだろう。多分、「1」という数値を教えることはできそうだ。しかし「+」とは何。もし機械語に足し算という言葉があればその命令を下せばいい。しかし「 $\sin 1$ 」はどうだろう。sin という論理回路があるのだろうか。多分、無い。そこで、この「正弦」の計算をコンピュータにやらせるための「命令書」が必要になる。そのような命令書を「ソフトウェア」あるいは「プログラム」と呼んでいる。このソフトウェアをどうやって機械に実行させるのか概説する前に、2進法の面白い例を一つだけ挙げておこう。それは「 $0.1_b$ 」を2進法で表すことだ。各自でやってみれば明らかだが、この数値は  $[1 \times 2^{-4} + 1 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-8} + 1 \times 2^{-9} + 1 \times 2^{-12} + 1 \times 2^{-13} + \dots]_b$  となる。つまり、小数点以下が  $[.0001100110011\dots]_b$  のような循環小数になるのだ。面白いでしょ。

## (2) 人の言葉と機械の言葉

例えば、図 N.7 に示したように、スーパーのレジのアルバイトの金毘君の実習を芽森店長が実施している場合は二人とも日本語で話することができるから、店長「商品  $x$ 」、金毘「(バーコードから<sup>ピツ</sup> 153 円)、これでレジ表示が 

1	5	3
---	---	---

 になる。店長「商品  $y$ 」、金毘「<sup>ピツ</sup> 94 円」とでレジ表示が 

9	4
---	---

。店長「合計は」、金毘「計<sup>ピツ</sup> 247」とでレジ表示は 

2	4	7
---	---	---

 となる。ところが、外国人の Ursa さんが実習するときは、最初は翻訳者が必要になるだろう。つまり、命令する店長と実行する実習生との間で使える言語が異なるため、その間の翻訳をする「人」が必要になる。

人がコンピュータに命令するときも、これと同じようなことが起こる。人はコンピュータに対して、例えば「 $x = 153, y = 94, x + y$  を表示」という people-readable な (人が読める) 命令をしたいだろう。しかし、コンピュータは '0' と '1' だけの並びでできた機械語、つまり machine-readable な (機械しか読めない) 命令でないと理解できないから、人が作ったままの命令文は実行できない。したがって、この「人の言葉 (高レベルプログラム言語)」を「機械の言葉」に翻訳する「ソフトウェア」が必要になるのである。この状況を、かなり低レベルな言語であるニーモニック (アセンブリ言語) による表現例で示そう。

コンピュータの CPU<sup>38</sup>の中には、A や B という名前のついた「レジスタ」と呼ばれるものがいくつか並んだ計算用紙のようなものがある。その一つ一つのレジスタはそれぞれが、ちょうど1本の「一つ珠の算盤<sup>そろばん</sup>」と考えればいい。珠が下なら '0'、上なら '1' というわけである。機械語には、このレジスタに置いてある値同士の足し算くらいの命令は存在するものとしよう。それを利用して、この計算用紙の上で例えば、人の言葉で表したときの「 $x + y$  を計算して、 $x$  の値をその答に変更する」という操作、あるいはもう少し機械の言葉に近い表現では「 $x$  の値を記憶しているメモリから値を取り出しレジスタ A に置く。同様に  $y$  の値をレジスタ B に置く。レジスタ B の値をレジスタ A の値に足すと、その答がレジスタ A に入るので、それを  $x$  の値を記憶する

<sup>38</sup> 中央処理装置のことで、機械語の命令を実際に実行する回路群のこと。

表 N.3 ニーモニックとそれを翻訳した機械語との対比

ステップ	ニーモニック	[ その実際の働き ]	機械語	レジスタの値								
1	MOV A, D123	[ $x$ の値をレジスタ A に置く ]	B0 <sub>H</sub> 23 <sub>H</sub> D1 <sub>H</sub>	A: <table border="1"><tr><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>0</td><td>1</td></tr></table>	1	0	0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0	0	1					
2	MOV B, D265	[ $y$ の値をレジスタ B に置く ]	B2 <sub>H</sub> 65 <sub>H</sub> D2 <sub>H</sub>	B: <table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0					
3	ADD B	[ レジスタ B の値を A に足す ]	85 <sub>H</sub>	A: <table border="1"><tr><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td></tr></table>	1	1	1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	0	1	1	1					
4	MOV D123, A	[ レジスタ A の値を $x$ に格納 ]	C0 <sub>H</sub> 23 <sub>H</sub> D1 <sub>H</sub>	B: <table border="1"><tr><td>0</td><td>1</td><td>0</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>1</td><td>0</td></tr></table>	0	1	0	1	1	1	1	0
0	1	0	1	1	1	1	0					

メモリに書き込む」という操作をやらせたのが、表 N.3 の命令<sup>39</sup>である。ここでは、 $x$  の値 153 (10011001<sub>B</sub>) がメモリの ‘D123<sub>H</sub>’ 番地に、 $y$  の値 94 (01011110<sub>B</sub>) がメモリの ‘D265<sub>H</sub>’ 番地に記憶されているとした。左から二番目の欄が people-readable なニーモニックと呼ばれる表現言語で表した命令で、次の欄にその働きを説明した。このニーモニックを機械語に翻訳するソフトウェアを「アセンブラ」と呼んでいる。右から二番目の欄が、ニーモニックを翻訳した機械語である。アセンブルされた数字の羅列『B0<sub>H</sub> 23<sub>H</sub> D1<sub>H</sub> B2<sub>H</sub> 65<sub>H</sub> D2<sub>H</sub> 85<sub>H</sub> C0<sub>H</sub> 23<sub>H</sub> D1<sub>H</sub>』（1011 0000 0010 0011 1101 …: 2V 0V 2V 2V 0V, …）が、CPU が理解できる命令文<sup>40</sup>なのである。各命令の実行後にレジスタに置かれている値の変化を一番右の欄に示したが、3 行目のレジスタ A に答の 247 (11110111<sub>B</sub>) が現れている。「プログラム」とは「実行可能なファイル」として記憶装置に保存されていると第 N.1 節で述べたが、そのファイルの中身が、順番に並んだこのような機械語の ‘0’ と ‘1’ の数字の列（CPU のある端子に順番に与える電圧の大きさの列）なのである。

我々がよく使う高レベルのプログラム言語の FORTRAN 言語 (FORmula TRANslation) や C 言語の場合には、ニーモニックよりもっと人にわかり易い表現で命令を書くことができる。例えば上の例の、メモリのどの番地に  $x$  を保存するか等を考える必要は無い。その命令文を機械語の命令文に翻訳するソフトウェアを「コンパイラ」と呼び、翻訳することを「コンパイルする」と称する。これに対し、BASIC 言語 (Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code) のような場合には、極端な言い方をすると、人が読める命令文の 1 行 1 行を順番に機械語で「解釈」しながら実行するという方式をとる場合が多い。こういう「解釈ソフトウェア」を「インタプリタ」と呼んでいる。次の節で例として用いる Java 言語の場合は、ある中間的な実行支援プログラムを作ることを「コンパイル」と呼び、その中間的な支援プログラムを用いて「インタプリタ」が命令を実行するという方法をとっているようだ（正確ではないが・・・）。

### 演習問題 N-3

11. 10 進法では、例えば「0.0105<sub>D</sub>」を ‘10’ 倍すると「0.105<sub>D</sub>」になる。では 2 進法で「0.25<sub>D</sub>」は「0.01<sub>B</sub>」と表すことができるが、その ‘2’ 倍を計算せずに求めて 2 進法で表示せよ。

## N.3.2 Java 言語を例としたプログラミング

### (1) 人が読める例として

FORTRAN や C は Cygwin のパッケージにも含まれているので、自宅のパーソナルコンピュータにインストールすることができる。同じように Java の処理パッケージもインターネットからダウンロードできる。ところで、

<sup>39</sup> ある種の CPU に対応したニーモニックには、‘MOV (move)’ や ‘ADD (add)’ という命令が実際に存在するが、このニーモニックも機械語の数値も、イメージを示したもので、いずれも似て非なるものである。また足し算等も実際にはエラー処理等が必要になるが、それは省略した。


<sup>40</sup> 確か、昔のマイクロコンピュータ (マイコン) のキーボードには、‘0’ から ‘F’ までのキーと Enter キーくらいしか付いてなかったような気がする。

なぜ演習では Java を使うのか。実は、この Java を使えるようになって欲しいとは考えていない。比較的使いやすい一例として用いていると考えて欲しい。計算のフロー制御や判断を正確にコンピュータにやらせるプログラムを作る経験を（失敗を）することが、この演習の目的である。だから宿題が解けなかったり間違ってもめげする必要は無い。単に「今は」わからなかっただけだから。この言語に接して経験さえしておけば、FORTRAN も C もすぐに使えるようになるはず<sup>41</sup>だ。お互いの言語には、例えばインドヨーロッパ語系とラテン語系の間の違いのような差異は無く、どれもほぼ同じ系列の言葉だからである。後述のアルゴリズムについても、もう少し学科の専門の知識を得たあとで勉強した方がいいので、ここでは簡単な例を示すに留める。また「オブジェクト指向」というキーワードがあるが、それについても残念ながら第 1 著者は理解していないのと、その説明文にあることがあまり役に立つとは思えないので、敢えて解説はしないことにした。例えば FORTRAN なら、「フィールド」は「配列」に置き換えればいいし、「メソッド」は「サブルーチン」と「関数」でいい（専門家は違うと言うが）。


まず、HTML や L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X と同様、人が読めるプログラムそのもののソースファイルをエディタで作成する必要がある。代表的なプログラムで、どんな本にも載っている例に

```
// 文字列の表示
class Hello {
 public static void main(String[] args) {
 System.out.print("Hi, I am OK!");
 }
}
// <---- 処理系によっては空行必要
```

というのががあるので、ファイル名を 'Hello.java' として作って<sup>42</sup>みよう。そこでエディタ 'kwrite' を、ここもバックグラウンドで

```
kwrite Hello.java & 
```

とコマンドラインから立ち上げ、上のプログラムの 7 行を入力する。ファイル名と class の名前は同じにする必要がある（この例の Hello のこと）ようだし、大文字小文字の区別には十分注意すること。これをコンパイルするには、エディタ側でファイルに一旦保存したあと、コマンドラインで

```
javac Hello.java 
```

とすればいい。ただし、文法の間違い等があるとコンパイラはエラーメッセージを表示する。そのメッセージを読んで間違いを探し出して修正しなければ実行できない。例えば、'Other.java' というある別のプログラムのソースファイルのコンパイル中の

```
Other.java:22: ';' がありません。
 stra = br.readLine();
 ^
```

は、21 行末にセミコロン ';' を忘れていたエラーであり、あるいは変数が初期化されていないような場合には

```
Other.java:34: 変数 x は初期化されていない可能性があります。
 if (x == y) {
 ^
```

のようなメッセージが表示される。また

<sup>41</sup> 少しだけ嘘。第 1 著者は C には強い拒否反応を示す。いまだに理解できないし、使えない。ただ、この文書の演習問題程度であれば、どれも C に変換するのは比較的容易だった。ほぼ、文字列の入出力を scanf と printf で置き換えるだけで済んだ。

<sup>42</sup> 演習室における作業の場合、ファイルの最終行に空行が必要らしい。多分 EOF (end-of-file) の認識に関連しているのだろう。

```
Other.java:4: \12288 は不正な文字です。
 System.out.print("Guess what!");
 ^
```

のようなエラーは、全角のスペース「 」をプログラムの演算部分（行頭の空白の部分も含む）に使った可能性を示している。このような修正作業もやはり「虫取り」と呼んでいる。

すべてのエラーが無くなったなら、‘Hello.class’ という中間的な実行支援プログラムができるので

```
java Hello
```

で、このプログラムが実行できて、端末画面には

```
Hi, I am OK!
```

という文字列が表示されるはずだ。二つの " で挟まれたものは単なる文字列である。ただし、コンパイル時にはエラーが無くても実行時にエラーが生じることもある。その場合も、そのメッセージを読んでソースファイルの修正をしなければならない。実行時のエラーの原因は初心者にはなかなかかわからないと思うが、演習でよく起きるのはファイル名と class 名が違っていることが原因になったもの等である。最悪なエラーは、実行時にもエラーが発生しない代わりに、得られた結果がどう考えても変だという間違いである。卒業研修等のプログラムで頻繁に起こるエラーであるが、この虫はナナフシやコノハチョウのように、なかなか見つからないよ。

#### 演習問題 N-4

12. 自分のホームディレクトリ ‘~’ に、‘Java’ というディレクトリを作り、そこに移動せよ。
13. そこに、上の例 ‘Hello.java’ を作り、コンパイルして実行せよ。試しに

```
cat Hello.class
```

を実行し、クラスファイルが単純なテキストファイルではないことを確認せよ。

#### (2) 文法の基本

始まりと終わり：例えば ‘Program.java’ というファイルのプログラム ‘Program’ は、HTML や  $\LaTeX$  と同じようなおまじないとして

```
import java.io.*;
import java.math.*; // これはしばらくは不要かもしれないが入れておこう

class Program
{
 public static void main(String[] args) throws IOException
 {
 int a, b = 0;
 String stra, strb;

 【プログラム本体】
 }
}
```

のようにする。public static ... の行までのわけはわからなくていいが、{ で始まったものは必ず } で終わる。これも HTML のタグや  $\LaTeX$  の環境と同じと考えればいい。プログラム本体の最初には、そこで使う変数を宣言（定義）する必要がある。上の例では、a と b という二つの整数 (integer) と、stra と strb という二つの文字列 (string) を定義している。実数については後述する。また、変数 b はプログラム中で明示的には数

字が代入されていない可能性<sup>43</sup>があり, ここでは零を初期値として代入してある。もしコンパイラが「初期化されていない」と警告してきた場合には, このように初期値を設定すればいい。もちろんプログラム本体で値を代入してもいい。以下, 原則として変数の定義と【プログラム本体】の部分だけについて説明し, 始まりと終わりのおまじないは省略する。

**演算:** 四則演算では, 掛け算が\*であり, 割り算が/, 余りの計算が%でできる。各文の最後にセミコロン';'が必要な点, なかなか煩わしい。また, 前の例でも使ったが, '// 'という記号は, その行のそれより右が単なるコメントであることを示している。ところで, 前の節の説明例で, 「 $x = 153, y = 94, x + y \rightarrow x$ 」というのを使ったが, この最後の式をプログラムにすると, 実は

```
x = x + y;
```

となる。これはもちろん, 方程式と考えると ' $y = 0$ ' になってしまうが, そういうことではない。このような式は「代入文」と呼ばれるもので, 「 $x$  と  $y$  の値が格納されているメモリから値を取り出し, 右辺の計算をしたあと, その値を左辺の  $x$  に代入する ( $x$  の値を記憶しているメモリに書き込む)」ということであることを注意すること。かつて BASIC 等では, この等号の部分を

```
x := x + y
```

と書いて区別していたこともある。等号というより, 左向きの矢印 ' $\leftarrow$ ' と考えて欲しい。だから, ' $x+y=z-a$ ;' といったように左辺に演算が来ることは決して無い。プログラミングの勉強でほぼ全員が悩む最初の難関であるから, たった今は理解できなくても心配する必要は無い。後述の源吾君のお小遣いプログラムで再度解説するが, 結局は慣れるより他には道は無い。

**キーボードからの入力と画面への出力:** 文字の入力と画面表示については, 一時的記憶場所 (バッファ) を設けたりして, たいへん面倒である。例えば

```
int a, b, add, sub, mul, div, rem;
String strx;

BufferedReader br = // 何かキーボードから入力した文字のバッファ
 new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));

System.out.println("Solution of a linear equation: a*x + b = 0");
System.out.print("Enter a: ");
strx = br.readLine();
a = Integer.parseInt(strx);
System.out.print("Enter b: ");
strx = br.readLine();
b = Integer.parseInt(strx);

add = a + b;
sub = a - b;
mul = a * b;
div = a / b;
rem = a % b;
```

とすれば, キーボードから入力した数字 (どうやら Java はそれを文字列と認識するらしい) が, 二つの整数  $a$  と  $b$  の値として代入される。わけはわからなくてもいいからこの通りにする。実数の場合は次の第 N.3.2 (3) 節

<sup>43</sup> 言語やシステムにも依存して, プログラムが実行された直後に変数領域をすべて零で初期化してくれるかどうかは曖昧である。ある変数を記憶するメモリに偶々保存されていた数値が, その変数の初期値として設定される場合もあるので, 必ず自らのプログラム中で適切な値で初期化すべきだろう。

の例を参照のこと。System.out.println は 1 行の表示で改行される。一方、System.out.print の方は改行無しの表示なので、この例のように、入力する値のプロンプトに使うときには便利である。最後の 5 行は、それを用いた四則演算と余りの計算である。

さらに、上のようにして演算した変数の数値を画面に出力するためには

```
System.out.println("a = " + a + ": b = " + b);
System.out.println(" addition = " + add);
System.out.println(" multiplication = " + mul);
System.out.println(" remainder = " + rem);
```

のようになると、例えば

```
a = 5: b = 3
addition = 8
multiplication = 15
remainder = 2
```

のように画面には出力される。System.out.println の括弧の中の + の記号は、1 行に並べる個々のものを一つの文字列（数値のときはその数字でできた文字列）と考え、+ の左にある文字列にその右の文字列を「くっつける」という命令を表している。数字の本当の足し算ではないので注意すること。つまり

```
System.out.println("a = " + a + ": b = " + b);
System.out.println(" addition = " + a + b);
```

のようになると、例えば

```
a = 5: b = 3
addition = 53
```

にしかならない。よおーく見て何がおかしか理解して欲しい。いろいろ試してみて、この機能を理解して欲しい。他にも、「タブ」のような「コントロール文字」\t 等も定義されているが、特に使う必要は無い。その一例は次の第 N.3.2 (3) 節に示した。

**フロー制御:** さてシミュレーション系プログラミングの場合には、計算の流れ（フロー）は大局的には上から下への直線的な流れが主であるが、部分部分では小規模なフローの制御が必要ではある。そのフロー制御のうち、まず繰り返しというのは

```
for (初期値; 継続条件; 値更新)
{
 プロセス
}
```

というコーディング<sup>44</sup>で行い、それは図 N.8 のような処理のフローになる。例えば

```
for (i=1; i<=50; i++)
```

というのは、「i の初期値を 1 にして、それを 1 ずつ増やし (i++)<sup>45</sup>ながら、i が 50 以下の間は繰り返す」という意味になる。i<=50 は実際には  $i \leq 50$  と書きたいのだが、 $\leq$  という文字がキーボードには無いので、不等号と等号を横に並べてある。左向きの矢印ではないよ。

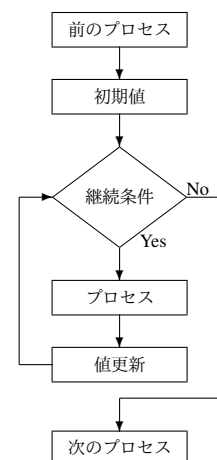


図 N.8 繰り返し

<sup>44</sup> ソースプログラムを書くことを指す。

<sup>45</sup>  $i=i+1$  と同じこと。これで「代入文」の意味を理解してもらえらるだろうか。

簡単な例として, 足し算ができるようになった蛇馬家の小学生の源吾君のお小遣いについて, お父さんが「源吾の月々の小遣いは, 前の月の1日に1円, 2日に2円というように日付の額ずつお父さんが貯金して, それをその月にあげよう。さて5月の小遣いはいくらか。」と訊ねたとして, そのまま計算するには

```
int i, total;
total = 0;
for(i=1; i<=30; i++)
{
 total = total + i;
 System.out.println(i + "日までの貯金は" + total + "円");
}
```

とすればいい。答は465円である。30日分の繰り返しと, 代入文の意味が理解できるだろうか。代入文では例えば `total` を「貯金箱」と考えてみるといい。まず月初めには空 (`total = 0`) にする。そして式は「前の日の貯金箱の中身 (右辺の `total`) に, その日付のお金 (右辺の `i`) を加えると, それがその日の貯金箱の中身 (左辺の `total`) になる」という風に読むのである。

この代入文は左辺と同じ変数が右辺にもあるので初心者がまず戸惑う箇所である。その代入文の理解のために, 是非次のような作業をして欲しい。まず紙の一番上の行に `total=0` と書く。次の行に, `i=1` と書いて, そのときの計算 `total=total+i` を自分でやって, その段階の `total` の値をその右に書く。次に `i=2` と書いて・・・という風に, コンピュータがやることと全く同じことを自分の手で実行するのである。こういった練習を数回すると, そのあとは疑問無く代入文が書けるようになる。

$$\begin{array}{l}
 \text{Total} = 0 \\
 i=1 \quad \text{Total} = \text{Total} + i = 0 + 1 = 1 \\
 i=2 \quad \text{Total} = \text{Total} + i = 1 + 2 = 3 \\
 i=3 \quad \text{Total} = \text{Total} + i = 3 + 3 = 6 \\
 i=4 \quad \text{Total} = \text{Total} + i = 6 + 4 = 10 \\
 \vdots
 \end{array}$$

次に, フロー制御のうちの判断と分岐というのは

```
if (分岐条件) {
 プロセス A
} else {
 プロセス B
}
```

というコーディングで行い, それは図 N.9 のような処理のフローになる。もしプロセス B が不要な場合には

```
if (分岐条件) {
 プロセス A
}
```

だけでいい。具体的には, 例えば

```
if (index == 100) {
```

というのは, `index` という変数が 100 のとき (条件の等値を表すためには等号が二つ必要であることに注意) に分岐しろという制御になっている。前述の源吾君のお小遣いの例で「5と0の日だけは50円入れてやろう」という変更を加えると

```
for(i=1; i<=30; i++)
{
 if (i % 5 == 0) { // 5 で割り切れた日だけ
 total = total + 50;
```

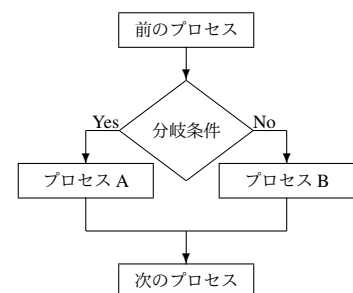


図 N.9 判断と分岐



```

 } else {
 total = total + i;
 }
}

```

のようにすればいい。答は 660 円である。

ところで、繰り返し制御の場合に、途中で分岐条件を設けて中断させたい場合もあるだろう。そのときには、例えば

```

for (初期値; 終了条件; 値更新)
{
 プロセス C
 if(中断条件) {
 break; // loop を中断しプロセス E にジャンプ
 }
 プロセス D
}
プロセス E

```

のような中断をすることが可能である。以下のいくつかの演習問題では、この方法が便利かもしれない。

**配列等:** 実は配列と呼ばれるものの利用や、class を複数用いたプログラミングをすると、複雑な処理を効率的にやらせることができるようになる。しかしここではまず、代入文やフロー制御といった基本的なことの理解を深めるために main のみを用い、単純な変数を用いた例と演習に限定してある。もし Java を積極的に使いたい人は、別途独学して欲しい。ただし、多分今後は FORTRAN を用いることの方が多くなると思うので、それを学ぶ際にサブルーチンと関数の副プログラムや配列について勉強すればいい。

**実数計算:** さて、実数計算について少し補足しておく。実数を使うときは例えば

```
double trial, target, x, f;
```

のように宣言しておく必要がある。Java の実数は原則として倍精度になっている。この倍精度の意味については後述するが、通常は、一つの数値を 64 ビット (8-byte) に記憶している。一方、その半分 32 ビット (4-byte) で記憶するものを単精度の実数と呼んでいる。Java プログラム中に、例えば '4.5' という数値を使うと、それは倍精度の数値である。これを強制的に単精度にするためには '4.5f' のようにしなければならない。また、正弦や余弦・対数等の関数は倍精度を前提として定義されているため、単精度計算をしようとする結構たいへんになるようだ。特に必要が無い限り倍精度の実数計算をすればいい。

また倍精度であったとしても、後述するように、任意の実数を正確に記憶することは不可能なので注意する必要がある。例えば分岐条件で、実数の変数 trial に対して

```
if (trial == 1.2345) {
```

といった判断をさせてはいけない。それは、'1.2345' という実数を正確に記憶することは不可能だからである。前に示したように、0.1 が 2 進法では循環小数になることを思い出して欲しい。ここは、例えば絶対誤差を用いて

```
if (Math.abs(trial - 1.2345) < 0.0000001) {
```

のようにするべきであろう。Math.abs(a) は実数 a の絶対値を求める関数である。もっと一般的に、零ではない任意の実数 target との一致性を判断させたい場合には

```
if (Math.abs((trial - target) / target) < 0.0000001) {
```

のように相対誤差を用いた方が望ましい。

## 演習問題 N-5

14. 1 から 10 までの整数の階乗を求めるプログラムのソースファイル `Factorial.java` を, `Java` のディレクトリに作って, それ<sup>46</sup>を提出せよ。源吾君のお小遣いプログラムと  $n! = n \times (n - 1)!$  がヒント。結果は

```
1! = 1
2! = 2
3! = 6
...
10! = 3628800
```

のように画面に表示すること。もし 20 までの整数の階乗を求めようとするとうまくいかなくなることを確認し, その理由を考えてみよ。わからなくてもいいが。

15. 1 から 50 までの整数に対して, その数値と, 各数値毎に決められた言葉を発するゲーム (`NA beats U!`) を模擬し, 各数値に対応した文字列を 1 行に出力するプログラムのソースファイル `Nabeatsu.java` を, `Java` のディレクトリに作って, それを提出せよ。

- その数値が 3 および 5 の倍数のときには `[gee]`
- それ以外のときで, その数値が
  - 3 の倍数のときには `[bowwow]` という文字列
  - 5 の倍数のときには `[mew]` という文字列
  - それ以外なら空白 (数値のみ)

つまり, 結果は次のように表示されることになる。表示する文字列は変更しても構わない。

```
i = 1
i = 2
i = 3 [bowwow]
i = 4
i = 5 [mew]
...
i = 15 [gee]
....
```

16. 乱数で 100 未満の整数 `target` (0 を含む) を発生させるには

```
target = (int) (100. * Math.random());
```

とすればいい。では, コンピュータが設定した 100 未満の一つの整数を 10 回以内に人が当てるゲームを作って, そのファイル `Hilo.java` を提出せよ。ただし, 間違った予想値の入力に対しては, それが設定された数より「大きい (`Your guess is high!`)」か「小さい (`Your guess is low!`)」かの情報 (日本語英語や表現は自由) だけは, コンピュータが表示して教えてくれるものとする。10 回以内に当たったら「ビンゴ! (`Bingo!`)」と表示してプログラムを終了させる。また 10 回以内に当てられなかった場合には「君の負け! (`You lose!`)」と画面表示して終了すること。情報理論の情報量を知っていれば負けるはずはないが, プログラムが正しいことを確かめるために一度はわざと負けて確認すること。

17. 3 以上で 50 以下の素数を取り出して出力するプログラムのファイル `Primenumber.java` を作って, それを提出せよ。ある整数  $n$  が, 2 から  $n - 1$  の数による割り算において一つでも余りが零になるなら, その数  $n$  は素数ではないと考えてみたらどうだろう。もっと洗練されたアルゴリズムもあるが, ここは泥臭い方法でいい。

18. 正弦関数は, 倍精度の変数  $x, y$  に対して

```
y = Math.sin(x);
```

<sup>46</sup> ソースの未完成テンプレートはサーバーからダウンロードできる。

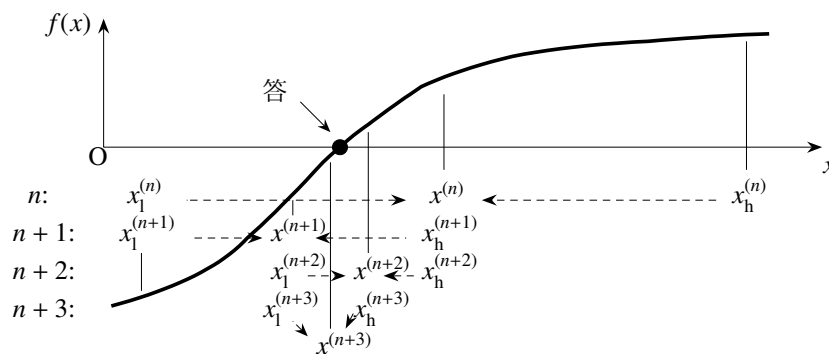


図 N.10 2分法の考え方 — 各ステップ毎に大きい予想  $x_h^{(n)}$  と小さい予想  $x_1^{(n)}$  の中央値  $x^{(n)}$  を新予想とし、次のステップの予想の上下限値のどちらかを改善していく方法で、非効率的ではあるが精度を容易に上げることができる方法

で計算できる。では、 $3 \leq x \leq 4$  の間で  $f(x) \equiv \sin(x) = 0$  になる  $x$  (つまり  $x = \pi$ ) を、2分法 (図 N.10 参照; 上の 16 番の問題のゲームと同じく、情報量に基づく方法) で、有効数字五桁の精度で求めるプログラムを作れ。ファイル名は 'Bisection.java' とする。

図 N.10 を用いて、答の探索の仕方を説明しよう。まず、1 回目の計算を、 $x_1^{(1)} = 3$ ,  $x_h^{(1)} = 4$  と置いて始めるのだが、一般性のある記述をするために、繰り返しのある場面 ( $n$  ステップ目) の考え方を以下に説明する。第 1 回目の計算の場合は、以下の説明で  $n = 1$  と考えればいい。さて、 $x_1^{(n)}$ ,  $x_h^{(n)}$  がわかっているとす。これを零にしたい関数  $f(x)$  にそれぞれの  $x$  を代入して関数の値、 $f_1^{(n)} = f(x_1^{(n)})$ ,  $f_h^{(n)} = f(x_h^{(n)})$  を求めておく。そして、第  $n$  回目のループは次のようになる。まず

$$x^{(n)} = \frac{1}{2}(x_1^{(n)} + x_h^{(n)}), \quad f^{(n)} = f(x^{(n)}) \tag{N.5a, b}$$

として、もし  $f_1^{(n)} \times f^{(n)} > 0$  なら解は  $x^{(n)}$  より右にあり、そうでないなら左にあるはずだから

$$\begin{aligned} \text{もし } f_1^{(n)} \times f^{(n)} > 0 \text{ なら小さい方の } x \text{ を改善: } & x_1^{(n+1)} = x^{(n)}, f_1^{(n+1)} = f^{(n)}, x_h^{(n+1)} = x_h^{(n)}, f_h^{(n+1)} = f_h^{(n)} \\ \text{そうでないなら大きい方の } x \text{ を改善: } & x_h^{(n+1)} = x^{(n)}, f_h^{(n+1)} = f^{(n)}, x_1^{(n+1)} = x_1^{(n)}, f_1^{(n+1)} = f_1^{(n)} \end{aligned} \tag{N.6}$$

のようにする。この計算が終わったら、 $n = n + 1$  とした上で式 (N.5) に戻るという繰り返しが、第  $n$  回目のループになる。これを、ある精度で  $x^{(n)}$  が得られるまで続ける。精度は例えば相対誤差を用いて

$$\frac{x^{(n)} - x_1^{(n)}}{x_1^{(n)}} < \epsilon, \quad \text{例えば } \epsilon = 0.000001 \tag{N.7}$$

のような判断を、ループの中のどこかですればいい。

具体的には、変数対応を  $x_1 := x_1^{(n)}$ ,  $x_h := x_h^{(n)}$ ,  $f_1 := f_1^{(n)}$ ,  $f_h := f_h^{(n)}$ ,  $x := x^{(n)}$ ,  $f := f^{(n)}$  のように<sup>47</sup>しておいて

```
double x1 = 3., xh = 4., f1, fh, x = 0., f, eps = 0.000001;
int n;
```

といった変数宣言でプログラミングできる。また簡単のために、2分試行のループ回数は 1000 回くらいの大きい値にしておき、目的の精度が得られたときにそのループを **break** で終わるようにすればいい。

ヒントを書いておくと

```
f1 = Math.sin(x1);
fh = Math.sin(xh);
```

<sup>47</sup> 記号 ':=' は置き換えを定義しているものとする。

```

for(n=1; n<=1000; n++)
{
 x = (x1 + xh) / 2.; // 中間の値
 if ((x - x1) / x1 < eps) {
 break; // 式 (N.7) の判定で所定の精度が得られたので探索を中断!
 }
 f = Math.sin(x); // 式 (N.5)
 // 次の (n+1) ループ用の x1, xh, fl, fh を式 (N.6) で求めて次の探索!
 if (fl * f > 0.) { // 小さい方の x を変更
 x1 = x;

 } else { // 大きい方の x を変更

 }
}
System.out.println("Answer: x = " + x); // 答が出たよ

```

のようにすれば, ループの外に出たところで所定の精度の答が得られる。ループの中の試行の度に, 例えば試行回数  $n$  と  $x^{(n)}$  等を表示するようにすると, 答が次第に  $\pi$  に近づくのを

```

.....
11: 3.14111328125
12: 3.141357421875
13: 3.1414794921875
14: 3.14154052734375
15: 3.141571044921875
.....

```

のように画面で確認できる。正しい答が出るようになったら

```
java Bisection > Results.txt ↵
```

のようにして実行すると, ファイル 'Results.txt' に結果が保存される。最終的に, ソースファイルと結果のテキストファイルを提出せよ。ちなみに, 骨組構造の設計で重要なある種の強度を求めるときに  $f(x) \equiv \tan(x) - x = 0$  を解く必要が生じる場合がある。この解も  $\pi$  と  $3\pi/2$  の間にあることはわかるので, 2 分法で求めてみよう。正接は  $\text{Math.tan}(x)$  で計算でき, 答は  $x = 4.4934$  である。

### (3) 正しい公式は正しい答を出すか

さて, コンピュータはいつも正しい答を出してくれるのだろうか。簡単な例として, 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (\text{N.8})$$

の根を, その公式の

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{N.9})$$

から求めてみよう。これを正しくそのままプログラム 'Quad.java' にしても何も問題は無いだろう。

```

// 2 次方程式の根を, 根の公式で求めることができるか
import java.io.*;

class Quad
{
 public static void main(String[] args) throws IOException
 {
 // int i; // big loop 1
 double a, b, c, d, x, y; // 倍精度にしよう
 String strx;

 BufferedReader br =
 new BufferedReader(new InputStreamReader(System.in));
 }
}

```

表 N.4 FORTRAN 倍精度による 2 次方程式  $x^2 - bx + 1 = 0$  の根

$b$	根の公式による $x_1$	根の公式による $x_2$	工夫して得た $x_2$ (後述)
$10^1$	9.89897948556635576267E+00	1.01020514433644237329E-01	1.01020514433643807117E-01
$10^2$	9.99899989997999512070E+01	1.00010002000487929763E-02	1.00010002000500142216E-02
$10^3$	9.999989999900034222E+02	1.0000100002262115595E-03	1.000010000200006431E-03
$10^4$	9.9999989999988823E+03	1.0000001111766323447E-04	1.000000100000014349E-04
$10^5$	9.999999989999966146E+04	1.00000033853575587273E-05 (Δ)	1.0000000010000011393E-05
$10^6$	9.99999999899992386E+05	1.00000761449337005615E-06 (Δ)	1.0000000000100008890E-06
$10^7$	9.99999999989941716E+06	9.96515154838562011719E-08 (×)	1.0000000000001001326E-07
$10^8$	1.000000000000000000E+08 (Δ)	7.45058059692382812500E-09 (×)	1.0000000000000002092E-08 (Δ)
$10^9$	1.000000000000000000E+09 (Δ)	<b>0.000000000000000000E+00 (×)</b>	1.0000000000000006228E-09 (Δ)

```

System.out.println("Solutions of a quadratic equation: a*x*x + b*x + c = 0");

// for(i=1; i<=1000; i++) // big loop 2
// { // big loop 2

System.out.print("Enter a: "); // x-loop
strx = br.readLine();
a = Double.parseDouble(strx);
System.out.print("Enter b: "); // x-loop
strx = br.readLine();
b = Double.parseDouble(strx);
System.out.print("Enter c: "); // x-loop
strx = br.readLine();
c = Double.parseDouble(strx);

// if (a == 0) // big loop 3
// { // big loop 3
// break; // big loop 3
// } // big loop 3
// System.out.println("a = " + a + ": b = " + b + ": c = " + c); // big loop3

d = b * b - 4.0 * a * c; // 実は 4.0 は倍精度
d = Math.sqrt(d);
x = (-b + d) / 2.0 / a;
y = (-b - d) / 2.0 / a;

System.out.println("Solutions by the formula:" + "\t" + x + "\t" + y);

// } // big loop 4
}
}

```

この例では簡単のために、判別式が負であることの判定は行っていないから、根が複素数になるような問題は解けず、'nan' あるいは 'NaN' つまり 'Not a Number' という解しか表示されない。では、簡単な例を実行してみよう。例えば  $a = 1, b = -2, c = -3$  のような場合には、そのまま正解の  $x = 3$  と  $y = -1$  が出てくる。

では次に、 $a = 1, c = 1$  のまま、 $b$  の絶対値を次第に大きくしてみよう。表 N.4 は

$$x^2 - bx + 1 = 0 \quad (\text{N.10})$$

の場合の根である。表中の数値の 'E-02' は ' $\times 10^{-2}$ ' のことを示す。表 N.4 に示したように、 $b$  の値が大きくなるにつれて根の公式による小さい方の根  $x_2$  の値は 0 に近づいていくが、特に  $b = 10^5$  あたりからは精度が悪

くなっている。また元の方程式からは、 $x(x-b) = -1 < 0$ であり、また  $\frac{x^2}{b} = x - \frac{1}{b} > 0$  でなければならない (グラフを描けば明らかだ) から、根は  $b > x > \frac{1}{b}$  を満たすはずだ。しかしこの条件と比較すると、 $b = 10^7$  くらいでは小さい方の根  $x_2$  はもはや間違いである。さらに  $b = 10^9$  になると小さい方の根  $x_2$  は零そのものになってしまっていて、もうどうしようもない大間違いである。正しい公式で命令しても、コンピュータが間違っているのである。だからコンピュータと活字 (新聞雑誌等; 最近はインターネット上の情報も) は信じてはいけないのだ。

なぜこのようなことが発生するのだろうか。それは、公式を使ったときの分子の引き算に現れる  $b$  とその後ろの  $\sqrt{b^2 - 4ac}$  の値との両方が非常に大きい上にお互いに近接していることが原因なのである。表 N.5 に示したように、 $b$  が大きくなると、この二つの数値の差は有効数字の 16 桁目以降に初めて現れるくらいに小さい。この差をコンピュータが単純に計算すると、16 桁目以降が計算誤差と区別できなくなって、値そのものがいよいよ加減なものになってしまうのだ。このような現象を「桁落ち」と呼んでいる。

つまり、正しい式を正しくプログラムにしても、その正しいプログラムが間違っただけで出さず可能性があるということには、十分注意しなければいけない。ただこれは、コンピュータが間違っただけではなく、コンピュータの働きを十分理解していないプログラマ (人間) が間違っただけで誘導したということに他ならない。コンピュータが出す答がおかしいとき、ほぼ 100% の学生がまずコンピュータを疑うが、それは 120% 意味が無い。コンピュータは人が命じたことをそのまま実行するだけだからである。プログラムが間違っているか、(滅多に無いが) コンパイラに間違いがある<sup>48</sup>かのいずれかである。

表 N.5  $b$  と判別式の値の比較

$b$	$\sqrt{\text{判別式}}$
$10^6$	9.99999999997999984771E+05
$10^7$	9.999999999980069697E+06
$10^8$	9.99999999999850988E+07
$10^9$	1.000000000000000000E+09

**実数の表現:** なぜ桁落ちが生じるのかについて知るためには、実数がコンピュータの中でどのように記憶されているのかを知っておく必要がある。一つの実数値を格納するメモリの 1 個分のビット構成は



のようになっている。仮数部は小数点以下の有効数字に相当し、その値が  $a$  で、指数部が  $b$  である場合には、10 進法で簡単に言うと、その記憶している実数値が  $a \times 10^b$  であることを意味する。もちろん本当は 2 進法で記憶されている。大事なことは、このメモリの桁数が有限であるということである。前に示したように 0.1 は 2 進法では循環小数になり、有限な桁数では決して正確には表すことができないことはすぐ理解できると思う。処理系にも依存するが、原則として通常の 4-byte の単精度の実数は、指数部が 8 ビットで仮数部が 24 ビットの合計 32 ビット表現になっている。仮数部の 1 ビットを符号 ( $\pm$ ) に使うものとすれば、数値は 23 ビットの桁数でしか記憶されない。一番大きいビットが  $2^{-1} = 5 \times 10^{-1}$  だったとして、一番小さい最後のビットの値は  $2^{-23} \approx 1.19 \times 10^{-7}$  となる。したがって、10 進法上の有効数字の桁数では七桁目の精度は怪しいことになる。一方 8-byte の倍精度実数は、指数部は単精度と同じなのが普通で、仮数部が符号 1 ビットと数値 55 ビットになる。これを 10 進法の有効数字桁数に換算すると、 $2^{-55} \approx 2.78 \times 10^{-17}$  であるから、17 桁目の精度は既に怪しいということになる。したがって、16 桁目くらいの数値はゴミであるのが普通なのである。

大規模な計算をするシミュレーション系のプログラムの場合、とても複雑な計算をしていることから、単純な実数の精度の半分程度の桁程度、つまり単精度では三桁程度が、倍精度でも六〜七桁程度が有効数字の精度の限

<sup>48</sup> 第 1 著者は大学の計算機センター (俗称) のコンパイラのミスを見つけたことがある。へそ曲がりだから、普通の人がやらないようなコーディングをしたことが幸いしたわけであるが。

界と考えた方がいい。また指数部のメモリの桁数も有限であるため、記憶できる数値の大きさにも限界がある。例えば Java や Cygwin の FORTRAN では、単精度で  $10^{38}$  程度、倍精度で  $10^{308}$  程度のような。それ以上の場合には 'Infinity' あるいは 'inf' か 'INF' と表示される。また小さい数値も、単精度で  $10^{-39}$  程度、倍精度で  $10^{-317}$  程度より小さいと精度が悪いか零になる。

#### (4) アルゴリズムの変更

さて、前節の 2 次方程式の根の求め方で絶対値が大きい方の根  $x_1$  は公式で求めてもよさそう。一方、絶対値が小さい方の根  $x_2$  で桁落ちさせないためには、別の方法（アルゴリズム）を考えなければいけない。例えば大きい方の  $x_1$  はほぼ正しいと考えて、小さい方の根  $x_2$  は根と係数の関係から

$$x_2 = \frac{c}{a x_1} \quad (\text{N.11})$$

で求めればいいのかも。このような工夫を、アルゴリズムの変更と呼ぶ。

```
// 桁落ちをさせないための工夫
if (b > 0.0) {
 x = (-b - d) / 2.0;
}else{
 x = (-b + d) / 2.0;
}
y = x / a;
x = c / x;
```

表 N.4 の一番右の列がその工夫した根である。この表中の (Δ) マークを付した答も、精度はそれほどよくはない。それは上述のように、コンピュータの中の有効数字の桁数が有限だからである。しかし、 $b > x > \frac{1}{b}$  の条件は満足していることと、零になったりしていない以上、近似的には答が出ていると考えるのである。他に、演算効率を上げるためにもアルゴリズムを検討する必要がある、ということは各種文書に書いてあるので、省略する。

#### 演習問題 N-6

19. 2 次方程式の根を、公式で解くプログラム 'Quad.java' と、桁落ちが起きないようなアルゴリズムで解くプログラム 'Betterquad.java' とを、'Java' のディレクトリに作り、 $b$  が大きいときに桁落ちするか、あるいは正しく答が出るかどうかを確認した上で、そのソースファイル 'Betterquad.java' を提出せよ。
20. 2 次方程式の根を公式で解くプログラム 'Quad.java' を 'Quadx.java' にコピーし、その新しいプログラムの class 名を 'Quadx' に変更せよ。そうした上で、判別式が負になるときも根（実部と虚部）を求め表示できるように修正し、そのソースファイル 'Quadx.java' を提出せよ。

#### N.3.3 計算結果を可視化して文書にする

計算しただけでは情報を効果的に伝達することはできないことが多い。そのため、その結果を表にしたり図にする。ここでは演習室にあるソフトウェアの 'gnuplot'<sup>49</sup> を使って図を含む文書を作る例を示しておく。ま

<sup>49</sup> Windows で使える 'gnuplot' は、<http://www.gnuplot.info/download.html> から、'gp423win32.zip' のような名称のファイルをダウンロードできる。

ず, 一例として

$$y = \begin{cases} -1, & \text{if } 0 < x < \frac{1}{2} \\ +1, & \text{if } \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$$

という関数を Fourier-sine 級数に展開すれば

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \left\{ 2 \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 1 - \cos(n\pi) \right\} \sin(n\pi x)$$

となるので, その 30 項で近似計算した結果を求める。特に工夫をしないプログラムは

```
import java.io.*;

class Fsine
{
 public static void main(String[] args) throws IOException
 {
 int i, n;
 double x, y, np, cn;
 for(i=0; i <= 300; i++)
 {
 x = i / 300.;
 y = 0.;
 for(n=1; n <= 30; n++)
 {
 np = n * Math.PI;
 cn = 2. / np * (2. * Math.cos(np / 2.) - 1. - Math.cos(np));
 y = y + cn * Math.sin(np * x);
 }
 System.out.println(x + " " + y);
 }
 }
}
```

といったものになるので, これを 'Fsine.java' というファイルに保存する。これをコンパイルして実行し, 結果を 'sample.dat' というファイルに保存しよう。つまり

```
javac Fsine.java
java Fsine > sample.dat
```

を実行する。これで Fourier-sine 級数の近似結果の  $x$  と  $y$  の値がファイル 'sample.dat' に書き込まれる。もし表計算ソフトウェアで描画するのが得意な人の場合は, プログラムの出力部分を

```
System.out.println(x + ", " + y);
```

のようにコンマを加え, 実行した結果を

```
java Fsine > sample.csv
```

のようにして CSV (Comma-Separated Volume) ファイル 'sample.csv' に保存すれば, 表計算ソフトウェアに直接読み込ませることができて, さらに図化もできる。んっ, スペースのままでもいいか。

もう一つの例として表計算ソフトウェア等で作ってみてもいいが, 例えば  $y = \exp(-x) \sin(6\pi x)$  を

```
import java.io.*;

class Esine
{
 public static void main(String[] args) throws IOException
```



```

{
 int i;
 double x, y;
 for(i=0; i <= 100; i++)
 {
 x = i / 100.;
 y = Math.sin(6.*Math.PI*x) * Math.exp(-x);
 System.out.println(x + " " + y);
 }
}
}

```

というプログラムファイル 'Esine.java' に保存して、コンパイル・実行し

```

javac Esine.java ↵
java Esine > sample2.dat ↵

```

とすると、結果が 'sample2.dat' に保存される。練習として、計算する関数等は各自適当に変更するといいい。あるいは表計算ソフトウェアで作成してテキスト (CSV) ファイルで保存したあと、コンマをスペースで置き換えればいい。

ここではまず  $\LaTeX$  文書について述べるが、ワードプロセサに対する設定は後述する。さてデータから図化するプログラム 'gnuplot'<sup>50</sup>を立ち上げる。

```
gnuplot ↵
```

とすると、プロンプトが 'gnuplot>' になるので、これに対し次のようなコマンド<sup>51</sup>を1行ずつ入力する。ただし、日本語の部分はコメントであり、それは入力しないこと。なお 'gnuplot' を使いたい人以外は、中身はわからなくていいのでそのままコピー % ペーストする。

```

gnuplot> set terminal postscript eps enhanced "Times-Roman" 18 ↵
 ここで何か設定が表示される
 これは出力形式を eps (Enhanced PostScript) にする設定
gnuplot> set output "sample.eps" ↵
gnuplot> set size square ↵
gnuplot> set grid ↵
gnuplot> set xrange [0:1] ↵
gnuplot> set yrange [-1.3:1.3] ↵
 この上の2行を省いてもいいが余白が無くなる
 一度はこの設定無しで描いてから範囲を決めるのが楽だろう
gnuplot> set xlabel "X" ↵
gnuplot> set ylabel "Functions" ↵
gnuplot> set key 1, -0.5 ↵ 判例の右上の座標 (グラフ目盛上の)
gnuplot> plot "sample.dat" with lines lt 1 lw 4, \ ↵
> "sample2.dat" title "f(x)" with lines lt 2 lw 4, \ ↵
> exp(-x) title "exp fn" with lines lt 4 lw 4, \ ↵
> sin(x) title "sine fn" with lines lt 5 lw 4 ↵
gnuplot> quit ↵

```

この例では、上の二つの結果ファイルのデータと  $\exp(-x)$  と  $\sin(x)$  も同時にプロットしている。'plot' コマンドにあるマーク '\ ' (バックスラッシュあるいは円マーク '¥') は、命令の行が長くなるのを避けるために入れてあって、そこで改行できる。次の行には自動的にプロンプト '>' が現れる。この例では、線の属性を 'lt' の数値で具体的に指定したが、省略してもいい。ただし、1, 2, 4, 5, 7, 8 の6種類の中から指定した方が区別し易いかもしい。また線の太さをせいぜいこのくらい ('lw 4') にしておくのが望ましい。判例の位置は指定しないとグラフの右上角になる。これで、画像の PostScript ファイル 'sample.eps' ができあがる。

最後に、次のような  $\LaTeX$  ファイル 'sample.tex' を作ってコンパイルして表示する。

<sup>50</sup> Windows 上では 'wgnuplot.exe' というファイルを実行する。

<sup>51</sup> 使い方については <http://t16web.lanl.gov/Kawano/gnuplot/index.html> 等が参考になる。

```

\documentclass{jarticle}
% これは gnuplot で作ったグラフのファイルを読み込んだ文書 sample.tex
\usepackage{graphicx}
\begin{document}
ある関数
\begin{displaymath}
y=-1, \mbox{ if } 0 < x < \frac{1}{2}, \quad \mbox{and} \quad
+1, \mbox{ if } \frac{1}{2} \leq x < 1
\end{displaymath}
の Fourier-sine 級数の近似を計算し, gnuplot を使って
グラフにし, それを PostScript ファイルにしたのが次の図。
\begin{center}
\includegraphics*{sample.eps}
\end{center}
\end{document}

```

これでコンパイルして

```

platex sample.tex ↵
pxdvi sample.dvi ↵

```

のように画面表示をすれば, 図 N.11 に示したグラフが文中に入った文書ができているはずだ。

もちろん 'gnuplot' の命令で, 最初の出力指定を省いて

```
plot "sample.dat" with lines ↵
```

だけにすると, 図をファイルには出力せずに, 結果が画面に表示されるので, それを見ながら種々の細かい設定をするといいい。

もしワードプロセッサや HTML 文書中でこのグラフを使いたい場合には, 'gnuplot' の命令の最初の部分にある出力指定を

```

set terminal jpeg ↵
set output "sample.jpg" ↵

```

とすれば, jpeg 画像ファイル 'sample.jpg' (カラー) ができる。例えば HTML 文書なら

```

<html>
<head>
<title>gnuplot と Jpeg</title>
</head>
<body>
gnuplot で描画したグラフ

</body>
</html>

```

で表示できる。カラーの場合は線の太さを指定する必要は無いだろう。

もちろん, いろいろなワードプロセッサの文書中にも, この jpeg ファイルを用いてグラフとして貼り付けることができる。ただし, ワードプロセッサで作る論文等でカラーの図を多用するのは好ましくないの

```

set terminal jpeg giant font arial \ ↵
x000000 x000000 x000000 \ ↵ <- 背景を白, 枠と軸を黒
x000000 x000000 x000000 x000000 ↵ <- この例では四つの line type を黒
set output "sample.jpg" ↵

```

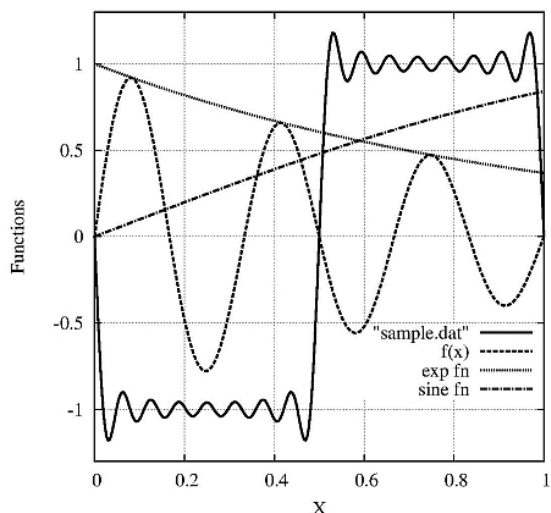


図 N.11 'gnuplot' で描いたグラフ

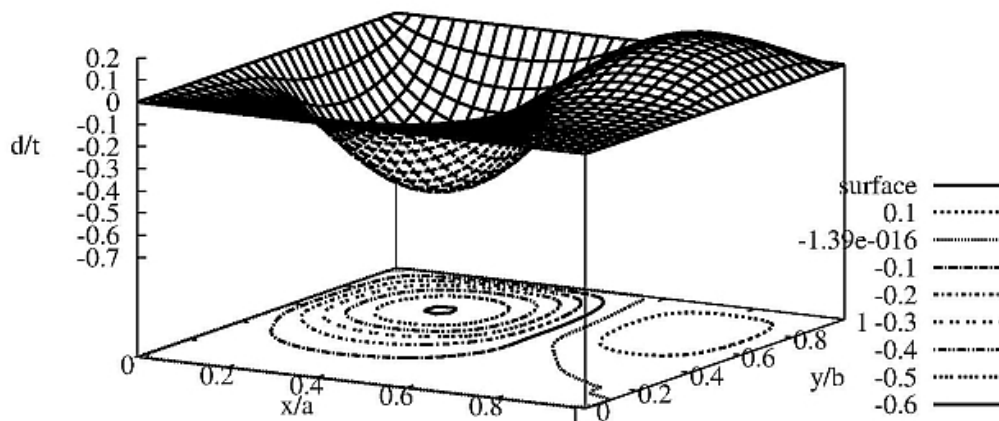


図 N.12 ‘gnuplot’ で描いた 3D グラフと等高線

として黒線にすることができる。このままでは 4 本のデータ線がすべて黒の実線になって区別できないので、描画のコマンドでは二つ目以降のデータは記号付きの線にして

```
plot "sample.dat" with lines lw 4, \ ↵
"sample2.dat" with linespoints, \ ↵
x with linespoints, \ ↵
sin(x) with linespoints ↵
```

とすればいい。これで jpeg ファイル (モノクロ) ができあがる。

また、図 N.12 は、 $(x, y, z)$  の組のデータ ( $x : y = 32 : 32$ ) を記憶するファイル ‘sample3d.dat’ (単なるテキストファイルで、プログラムや表計算ソフトウェアで作ればいい) を ‘gnuplot’ で

```
set hidden3d ↵
set contour ↵
set cntrparam levels 10 ↵
set view 64, 16 ↵
splot "sample3d.dat" title "surface" with lines lw 4 ↵
```

のようにして描いた 3 次元グラフと等高線である。なお、出力設定以外の ‘gnuplot’ の描画コマンドは

```
save "sample.plt" ↵
```

で保存できるので、設定を微調整しながら何度も描き直したい場合や、途中で作業を中止する場合には便利である。保存した設定は

```
load "sample.plt" ↵
set terminal jpeg ↵
set output "sample.jpg" ↵
replot ↵
```

で読み込むことができ、再プロットとファイル保存ができる。ただし、quit しないと出力ファイルにはアクセスできないことには注意すること。

### 演習問題 N-7

21. [Optional]<sup>52</sup> 上の 19 番で作った二つのプログラム ‘Quad.java’ と ‘Betterquad.java’ のソースを表示する  $\LaTeX$  文書ファイル ‘quad.tex’ を、自分のホームディレクトリ ‘~’ に作成せよ。つまり、‘quad.tex’

<sup>52</sup> この [Optional] 表示付きの演習問題は興味のある人だけが提出すればいい。最終的な成績に努力賞として若干の加点をする。

というファイルを作成した上で, 第(2)節で説明した  $\LaTeX$  の文頭と最後のおまじないを入力し, 二つのソースファイルの中身を `verbatim` 環境の中に (p.907 参照) コピー & ペーストすればいい。

```
\documentclass[a4j]{jarticle}
\title{2 次方程式の根を求める}
\author{金毘悠太}
\begin{document}
\maketitle

\section{二つのプログラム}

2 次方程式の根 x_1 と x_2 を, 根の公式で求めるプログラムは次のようになる。
\begin{verbatim}
... % ここに Quad.java のソースファイルの中身を挿入する。
\end{verbatim}
次に, 桁落ちしないようにしたプログラムは次のようになる。
\begin{verbatim}
... % ここに Betterquad.java のソースファイルの中身を挿入する。
\end{verbatim}

% 次の問題に対する回答はここに挿入する

\end{document}
```

ただし, ソースの各行頭の字下げに「タブ」を使っている場合には, 一つの「タブ」を例えば「半角スペース 2 個」くらいに置き換えてから, コピー & ペーストした方が見易いものになる。もちろんそのまま, 字下げが無くなっても構わない。

22. [Optional] そうした上で, 桁落ちする例題を自分で計算した結果や, それが生じる理由とその解決方法等についてのレポートを, 同じ `'quad.tex'` のファイル中に加筆して作成し, その文書をコンパイルしてエラーが無くなって完成した DVI ファイルを pdf ファイルに変換して提出せよ。やり方は演習問題 N-2 の 10 番のところで説明した。すなわち

```
\section{上の二つのプログラムによる計算結果}
..... ここに, 結果を表にしたりして, 結果の事実を報告する。

\section{桁落ちする理由と解決方法}
```

```
..... ここには, なぜ桁落ちするか, 回避する方法は何か, 式を使ったりして報告する。
```

といった文章を, 前問の例の最後にある `\end{verbatim}` と `\end{document}` の間に挿入せよ。ただし本文中には, 式番号の付いた数式を二つ以上, キャプションの付いた表を一つ以上含むレポートにせよ。 $\LaTeX$  で式や表を作るための命令については, 第 N.2 節の例の中にすべてヒントを示してあるので, 教科書や文献の命令等を探する必要は無いはずだ。もちろん, 第 N.3.2 (3) と (4) 節で説明されている内容を自分のプログラムで確認しさえすれば, レポートする内容の要旨はこの二つの節のものと同じで構わないが, その文章をコピーするのではなく, 表現には自分自身の言葉を使うこと【情報倫理の遵守!】。

多分計算結果をレポートに含めたいと思うが, 次の方法をお勧めしよう。p.928 にあるソースプログラムの中にある 4 箇所コメント, `big loop 1` から `big loop 4` の行頭のコメント設定をはずす。全部で 9 行ある。これで, 最大 1000 組の係数  $a, b, c$  の数値の入力に対して, プログラムが終わることなく計算が続くようになる。途中でやめるためには, 係数  $a$  に零を代入 (もはや 2 次方程式ではなくなる) すればいい。さらに, 計算したい係数の組を順に並べたデータファイルを作成する。例えば,  $(a, b, c) = (1, 2, 1), (1, -2, -3), (1, -1000, 1), (1, -1000000, 1), (1, -1000000000, 1)$  に対する計算をする場合には, `'Quadata.txt'` というファイルを

```

1
1
-2
-3
1
-1000
1
1
-1000000
1
1
-1000000000
1
0
1
1

```

のように作っておく。最後の  $(a, b, c) = (0, 1, 1)$  でプログラムは終了する。必ず3の倍数行のデータが必要である。そこで、このプログラム 'Quad.java' をコンパイルしたあと

```
java Quad < Quadata.txt
```

で、きちんとした結果が画面に表示されることを確認したあと

```
java Quad > Results.txt < Quadata.txt
```

と実行すれば、このデータファイル 'Quadata.txt' から係数の値を入力し、結果を 'Results.txt' というファイルに出力してくれる。記号 '<' は、p.893で説明した '>' とは逆に、左にある命令に対する入力ファイルを指定するリダイレクション操作である。この方法を用いるときには、p.928にあるソースプログラムの中の x-loop というコメントを付けた出力3行をコメントアウトしておく方が、'Results.txt' の中身がわかり易くなる。同じようなループを自分のプログラム 'Betterquad.java' でも設定すれば、同じデータファイルを使って

```
java Betterquad > BetterResults.txt < Quadata.txt
```

によって、改善された結果がファイル 'BetterResults.txt' に出力される。

### N.3.4 C と FORTRAN77 や BASIC の例

2次方程式を根の公式で解くCのプログラム 'quad.c' は

```

/* C Program */
#include <stdio.h>
#include <math.h>

main()
{
 double a, b, c, d, x, y;

 printf("Solutions of a quadratic equation: a*x*x + b*x + c = 0\n");
 printf("Enter a: ");
 scanf("%lg", &a);
 printf("Enter b: ");
 scanf("%lg", &b);
 printf("Enter c: ");
 scanf("%lg", &c);
 printf("a = %g, b = %g, c = %g\n", a, b, c);

 d = b * b - 4.0 * a * c;
 d = sqrt(d);
 x = (-b + d) / 2.0 / a;
 y = (-b - d) / 2.0 / a;

 printf("Solutions by the formula:\n %.20e : %.20e\n", x, y);
}

```

```
}

```

のようになるだろう。入出力命令部分以外は Java にそっくりである<sup>53</sup>ことがわかると思う。Linux では

```
gcc -o quad quad.c ↵
```

でコンパイルされ、実行可能なファイル 'quad' (Cygwin の場合は 'quad.exe' というファイル) を実行して係数の値を入力すれば、答が表示される。

さて実際に、コマンドラインで

```
quad ↵
```

と命令したとき、もしかしたら

```
-bash: quad: command not found
```

のように「'quad' というコマンドが見つからない」と表示され、実行できないかもしれない。今そこにあるプログラムなのに、それが実行できないなんておかしいと思うかもしれない。では

```
set | grep PATH ↵
```

としてみたい。すると

```
PATH=/usr/kerberos/bin:/usr/local/bin:/bin:/usr/bin
```

のようになっていないだろうか。この 'PATH' という環境変数は、実行可能なファイルが置いてある場所を指定しているのであるが、このリストに「現在仕事をしているディレクトリ」つまり '.' が入っていないのである。Windows のコマンドプロンプトをよく使う人は変に思うかもしれないが、Linux の初期設定ではそうになっている。したがって、「現在仕事をしているディレクトリ」にあるプログラムを実行するためには、明示的に

```
./quad ↵
```

とする必要がある。ちなみに、'ls' というコマンドがどこにあるのか (どのファイルを実行しているか) を見るには

```
which ls ↵
```

とやればいい。これに対して

```
/bin/ls
```

等と表示され、それが PATH のうちの '/bin' にあることがわかる。したがって、'PATH' に指定されていない現在仕事をしているディレクトリに置いたプログラムを

```
which quad ↵
```

で探しても

```
/usr/bin/which: no quad in (/usr/kerberos/bin:/usr/local/bin:/bin:/usr/bin)
```

となり、見つからないというメッセージが表示されることになる。

同様に FORTRAN77 で 2 次方程式を解くプログラム 'quad.f' は、例えば次のようにできる。

---

<sup>53</sup> Java が C を真似たのかな。

```

c FORTRAN Program
 program quad
 implicit real*8(a-h,o-z)
c
 write(*,*) "Solutions of a quadratic equation: a*x*x+b*x+c=0"
 write(*,*) "Enter a:"
 read(*,*) a
 write(*,*) "Enter b:"
 read(*,*) b
 write(*,*) "Enter c:"
 read(*,*) c
 write(*,200) a,b,c
200 format(' ', 'a = ',1pd15.7, ', b = ',d15.7, ', c = ',d15.7)
c
 d=b*b-4.0d0*a*c
c
 if (d.ge.0.d0) then
 b=- (b+sign(1,sign(1,b)+.5d0)*sqrt(d))/2.d0
 a=b/a
 if (b.ne.0.d0) then
 b=c/b
 else
 b=a
 endif
 write(*,100) a,b
 else
 d=sqrt(-d)/2.d0/a
 a=-b/2.d0/a
 write(*,300) a,d
 endif
c
 stop
100 format(' ', 'Solutions by the formula: '/' ',1p2d30.20)
300 format(' ', 'Solutions by the formula: '/'
* ' ',1pd30.20, ' +/- i * ',d30.20)
 end

```

ここでは判別式が負の場合も解けるようにしてみました。Linux では

```
g77 -o quad quad.f
```

でコンパイルされ、実行可能なファイル 'quad' (Cygwin の場合は 'quad.exe' というファイル) を実行して係数の値を入力すれば、答が表示される。Java や C とは少し違って見えるが、`i++` といったような省略が無く、わかり易いと思う。卒業研修等では多分この FORTRAN の方がよく使われると思う。

さらに Visual BASIC の場合には、例えばあるコマンドボタンの Click イベントを次のようにすればいい。

```

Private Sub cmdSolve_Click()
' Visual BASIC Program
 Dim a As Double, b As Double, c As Double, d As Double
 a = Val(txtA.Text)
 b = Val(txtB.Text)
 c = Val(txtC.Text)
 d = b * b - 4# * a * c
 b = -(b + Sgn(b) * Sqr(d)) / 2#
 a = b / a
 If b <> 0# Then
 b = c / b
 Else
 b = a
 End If
 lblX1.Caption = a
 lblX2.Caption = b
End Sub

```

係数の入力を三つのテキストボックス 'txtA', 'txtB', 'txtC' から得, このコマンドボタン 'cmdSolve' をクリックしたら計算し, 二つのラベル 'lblX1', 'lblX2' に答が表示される。この Visual BASIC は FORTRAN とよく似て<sup>54</sup>いる。

#### N.4 情報取り扱いマナー — 情報倫理

倫理は道德であろう。まずいかなとちょっとでも思ったことはしない。法律で禁止されていることは, 詭弁でそれに挑むことなく実行しない。そうじゃないのだろうか。とはいえ, たいていのことは倫理というよりマナーじゃないだろうか。最近, 倫理という言葉の間違って拡大解釈して使用しているんじゃないだろうか。じゃ, マナーとは何か。他人が不愉快になるかもしれないことをしない, とされている。ともかく大原則は

1. 他人が不愉快に思うであろう行為, 他人が困りそうな行為はしない。
2. 公共のものと自分のものを区別する。そして, 公共のものの方が自分のものよりも大事であるということに自覚し行動する。

であろう。しかし, 二番目はいいとして, 一番目については困ったことに個人個人で価値観が違うことから, やはり解は唯一ではないのではないか。

インターネット上の場: いろいろな人がいる社会だからねえー

- 触らぬ神に祟り無し。
- 昔から活字もそのまま信じてはいけないのは常識であったが, インターネットの情報はもっと信頼性が無いものとするのは当たり前だろう。

メール: 某大学の事務は, 文書サーバがあるのに, しょっちゅう添付ファイルを送ってきて困るのだが

- 不特定多数にメールを送らない。全く興味の無い情報を受け取った相手が一人でもいる場合のことを予想しよう。ただし, 職務上敢えてそうする必要のある場合もあることは認めよう。
- 嘘の差出人, あるいは特定できない差出人のメールを送らない。誰か知らない人から受け取った相手の行動を想像してみよう。
- 件名には必ず意味のある言葉を書こう。件名の無い受信メールを自動的に削除している人もいる。
- 知人からのメールには, 可能な限り一言「受領した。ありがとう。」でいいから返信しよう。
- 知らない人からのメールは読まないで捨てよう。暇なら読んでもいいが, 添付ファイルは開かない。
- 相手のコンピュータ環境を確かめずに添付ファイルを送らない。読めないファイルを受け取った相手のことを考えよう。
- メールソフトウェアが自動的に変換した HTML のメールを送るのは絶対にやめよう。図や写真・罫線付きの表がある文書をどうしてもメールで送りたい場合には, pdf ファイルを添付しよう。

自分の使っているワードプロセサで作る文書を pdf ファイルに変換できない人で, お金が無い人は, そんなワードプロセサは捨ててしまって, 後述の 'LibreOffice' パッケージをダウンロードして使おう。

<sup>54</sup> BASIC が FORTRAN を真似たのかな。



**個人情報:** これは難しい。まず自分が知られたくない情報を把握する。自分の友人や家族等、できるだけたくさんの人に訊ねて、どんな情報は知られたくないのか把握する。その和集合を「僕／私の個人情報（以下、略して『私情報』）」の定義とする。それ以外の情報項目が、もし他の人にとっての「私情報」に含まれていたとしても、それはもう仕方がないだろう。

- 自分の『私情報』を極力公開しない。相手はその公開を強要し、それに従わなければ自分が不利益を被る場合には、その相手とは決別しよう。それに従ったとしても、そんな相手から得るかもしれない利益は、自分にとっては取るに足らないものである。たとえその相手が指導教員であっても。
- 自分の『私情報』にはアクセスできないようにする。
- 他人の『私情報』については見ても／見えても／聞いても／聞こえても、すぐに忘れよう。
- 他人の『私情報』にアクセスしない、教えてくれとは言わない、手をつけない。
- ただし、自分の価値観を他人には押し付けけないこと。つまり、ここに書いてあることも、認めたくない人は認めなくていい。

**著作権:** プログラムも写真も図も表も音楽も、すべて八百屋で売っている野菜と同じと考えてはどうか。作った人への称賛や感謝をお金で表すことは恥ずべきことではない。もちろん作った人がタダでくださるのであれば、農家が野菜をくださるときと同様、お礼を述べてありがたくいただければいい。

- 自分が好きなアーティストの曲を友人も好きだからといって、そのCDをコピーして友人に渡したとすると、そのアーティストが受け取るはずだった何らかの権利が損なわれる。つまり君はその大好きなアーティストを不愉快にしてさしあげたことになるのではないか。
- 他人が一所懸命考え抜いて作った図表は、多分、説得力のあるものになっている可能性がある。それを、そのままコピーして用いるのは、その作成者の努力に敬意を表さなかったことにならないか。野菜を作った農家の努力を無視して、畑でそれを盗むのと同じではないのか。
- プログラムも、作成者の能力と努力の賜物であることは置いておいたとしても、その開発にはコンピュータやOS・開発ソフトウェア等の経費がかかっている。それを無断でコピーして他人に渡すのは、やはり野菜を盗むのと同じではないのか。
- 有料のソフトウェアは通常「1 CPU 1 ライセンス」が原則で、バックアップも含めた自宅の2台あるいは、自宅と職場の個人的な利用の場合に「2 CPU 1 ライセンス」に緩和されることがある程度である。これを守らない行為は絶対にしてはならない。また、shareware<sup>55</sup>を試行期間が過ぎても支払い無しで使うことも絶対にしてはならない。

ちなみに、パーソナルコンピュータを使う場合でLinuxのOSを使うのは嫌だと思った場合には、OSだけはきちんと購入しなければならない。しかし、第1著者のようにワードプロセッサが嫌いな場合には、適切なエディタがfreewareにもあるし、あるいはshareware等の中から購入しさえすれば、他のツールはほとんどfreewareだけで仕事はできる。またワードプロセッサも、某社のワードプロセッサ等との完全な互換性を保持しなくてもいいのなら、'LibreOffice'というパッケージが無料で使える。某役所や某大学の事務のように、某社のソフトウェア使用を強要するような環境にいる場合には、このパッケージがある程度は使える。

<sup>55</sup> 継続して利用したいと判断したユーザーが、作成者に比較的少額の使用料を払って使うソフトウェア。

ついでに、宿題やレポート： レポートは自分の能力を教員に確認してもらうためのものである。したがって他人のそれを写すことは、マナーのレベルではなく、カンニングと同じ違法行為である。どのような詭弁も、これを許すことにはつながらない。しかし、持込禁止の試験ではないレポート類は、ある程度、他人からの情報入手を容認していると解釈しても構わないと思う。実際、第1著者が留学していたとき、同じオフィスにいた米国人学生と宿題について次のようなやりとりをしたことがある。その学生曰く「自分はこう思うが、その方向で解いていって答が出ると思うか。」と。それに対し「それでもできるけど、別の・・・」と言いかけたところで、その学生は制止し「それ以上は言わなくてもよろし。」と。

- 写すことは違法行為である。
  - 他人に意見を求めることは許容されるが、答を教えてもらってはならない。
  - 答ではなく、ヒントをもらったときは、できればそのことをレポートには明記するのが望ましい。例えば「友人の金毘君からこのヒントをもらった」と。
- ・・・と、これ自体が、第1著者のみの価値観か。こんな文章はほとんど意味が無いよなあー。あーあ。



Chicago Art Institute, Illinois 州<sup>56</sup>



‘Say when!’ これに ‘When!’ と答えるのは違反だが、冗談ではよく使う。どういふ状況の問いかかわかるだろうか。

<sup>56</sup> シカゴの美術館では写真撮影は許されていた。

## 【 $\text{\LaTeX}$ は楽し】 エディタを用いて文書を作ることの有利な点

報告書・提案書をどうやって作ると便利か。ワードプロセサを使わない強みとは何か。 $\text{\LaTeX}$  を例にして示してみる。報告書を作るときは、まず、気付いた点の列挙から始めるだろう。

```
\documentclass[a4j]{jarticle}
\title{仙台駅前再開発}
\author{宮城桃太郎}
\date{\today}
\begin{document}
\maketitle

問題はありや

仙台ホテルはどうする

ロフトは大丈夫か
\end{document}
```

次に、それぞれの内容を、思い付いただけまず列挙。さらに、その後に思い付いた問題を加筆。文書の整形は  $\text{\LaTeX}$  にやらせるので、入力は短い文章を改行を多用してぶった切り、ピンパンと並ぶだけでいい。ここではまだ順番は考えない。

```
問題はありや
歴史的に、継ぎ足しをやっただけで、人の動線を
考えていない。
古いものと新しいものの混在。

仙台ホテルはどうする
一度倒産 \mbox{}?

ロフトは大丈夫か
バルコどう共存

長距離バス停はどうする
そもそも今のバス停は大丈夫か

あのパチンコ屋さんはどうよ。
```

ある程度、アイデアや現状が出た段階で、論理的な説得の項目を順に並べてみる。ここでも整形は不要である。

```
まず仙台駅前再開発についての問題を抽出
ここは区画整理をしてないまま
古いものと新しいものの混在
景観的な問題や利用者の動線の問題

次に、機能の再配分を考えるか
長距離バス停の位置は
パチンコ屋さんは
ホテルはどうする、商業機能はどうする。

個々の機能はどうなる

★交通機能
今のバス停配置と、長距離バス停

★商業機能
デパートの競合あるいは共生

★宿泊機能
三つのホテルの共生によって、より良いサービス

★景観対策
パチンコ屋さんを隠せるか
```

この説得力のある、論理的な文章にするための推敲を何回もやったあと、どこを箇条書きにするか、どの順番が説得力があるのかを考えて、その最終原稿にしていく。こうすると、ワードプロセサのようにレイアウト込みで加筆修正していくよりも、エディタを用いて、純粋に中身の言葉や表現に精神を集中できる。そして最終的に

```
\section{仙台駅前再開発に対する問題}
ここは区画整理をしないまま、存在するものを接ぎ足し・・・

\section{動線を考えたゾーニング}
JR および地下鉄の仙台駅から出発する人・・・
\begin{itemize}
\item 長距離バス停は東口にまとめる。
\item 仙台ホテルは・・・
\end{itemize}
のようにして区画整理をしたらどうか。

\section{個々の機能の改善と充実}
\subsection{商業機能}
サクラノとロフトおよび・・・

\subsection{宿泊機能}
三つのホテルが近接することにより、・・・

\subsection{交通機能}
今のバス停配置を、・・・

\subsection{景観対策}
パチンコ屋さんを・・・
```

というように修正されていって、できあがりか次のようになる。

```
1. 仙台駅前再開発に対する問題
 ここは区画整理をしないまま、存在するものを接ぎ足し・・・
 そのため古いものと新しいものの混在が見られ、景観的にも・・・といった問題が・・・また、目的別に、利用者の動線を
 考えているとは・・・

2. 動線を考えたゾーニング
 JR および地下鉄の仙台駅から出発する人の目的・・・
 と考えてくると
 ● 長距離バス停は東口にまとめる。
 ● 仙台ホテルはメトロポリタン H の西側向かいへ。
 ● パチンコ屋さんは、その仙台 H のさらに西へ。
 ● 現仙台 H の場所は・・・
 のようにして区画整理をしたらどうか。

3. 個々の機能の改善と充実
3.1 商業機能
 サクラノとロフトおよびバルコが・・・といった観点から
 共存しつつ・・・
3.2 宿泊機能
 三つのホテルが近接することにより、競争というより共生に
 よって、より良いサービスを・・・
3.3 交通機能
 今のバス停配置を、目的別にさらに合理化し、かつ長距離
 バス停を東口に移動することにより・・・
3.4 景観対策
 パチンコ屋さんを 1 区画裏に移動し、県外からの観光客が最初
 に目にする風景を・・・
```

結局、できあがりの映像的なイメージ (レイアウト) を一切考えること無しに、中身の論理的な流れを考え、どこを「節」にして、どれを「その下の小さい節」にするのか、どこを「箇条書き」にすると効果的なのかについて精神を集中して文書を作り上げることがができるメリットがある。もちろん、ワードプロセサに慣れてくれば、同じようなことはできるが。

## キーボード [に慣れる | を覚える]

今後、配置が変わるかもしれないが、今覚えておく将来が楽です。休み時間等マシンが使えるときは、エディタかワードプロセサを立ち上げて練習する。キーボードが無い場所では、次ページの拡大コピー（110%でB5ノートサイズコンピュータに相当。120%で標準的なサイズ）を使って練習しよう。

- まず、左の人差し指を「F」に、右を「J」に（ここをホームポジションと呼ぶ）置いて、残りを、その横並びの列に軽く置く。このホームポジションのキーそのものには、突起が付いていたり、若干深くなっていたりして、触るだけでわかるようになっている。これが「基本の『き』」である。
- 各指の守備範囲を覚える必要があるが、それは次ページの写真のようにになっている。

左小指:	Q, A, Z	右人差し指:	Y, H, N, U, J, M
左薬指:	W, S, X	右中指:	I, K, コンマ';
左中指:	E, D, C	右薬指:	O, L, ピリオド'.'
左人差し指:	R, F, V, T, G, B	右小指:	P, セミコロン';', '?'
	左右の親指:	スペースキー	
左小指:	右手担当文字のシフトキー	右小指:	左手担当文字のシフトキー

一番上の数字のキーの守備範囲は多分「1」が左小指で「0」が右小指だと思う。Enter キー (↵) は右小指。これが「基本の『ほ』」。『ん?』な表現は無いか・・・

- 大事なものは「指に文字の配置を覚えさせる」こと。練習は次のようにする。ここが『ん!』とがんばるところ。
  1. まず人差し指。頭の中で文字を呼びながら（最初は声に出してもいいかもしれない）FGHJ, FGHJ, ... を順に押し下げるといって単調な仕事を数分繰り返す。次に RTYU, そして VBNM も同様。もしかしたら RFV のような縦もやるといい。
  2. 次は中指。文字を呼びながら EDC, EDC, ... を順に押し下げる・・・を数分繰り返す。次に、右手の IK コンマの列。
  3. 同様に薬指と小指もやる。薬指と小指は辛いよお。
  4. ときどき、スペースキーを親指で押す。
  5. 慣れてきたら、例えばアルファベット順に押してみる。できなければ、また FGHJ からの練習を繰り返す!
- 頭でちょっと考えながらだけど、80%程度の確率で指が文字を当てることができるようになったら、英語の教科書か何かの段落一つを入力してみる。
- あとは、FGHJ から任意文章の入力の練習の繰り返しあるのみ!
- もちろん、最初はキーボードを見ながらでいいが、最終的には画面だけを見、そこに出てくる文字と自分が頭の中で指に命令した文字が一致するようにならないと駄目。
- 守備範囲を覚えずに、ゲームのようなソフトウェアでいくら練習してもあまり意味が無い。

がんばりましょう。今苦労すれば、あとが楽です。





「小春日和にふたり・・・」(天童高原)

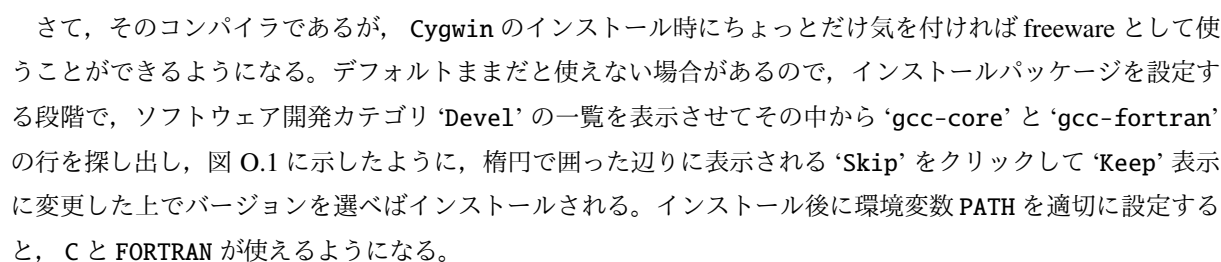
2007年青葉工業会写真コンテスト一般部門入賞

## 付録 O

# 独断と偏見に満ちた FORTRAN 入門

### O.1 はじめに

一般にプログラムはこの章の例題のように人が読める形で書かれる。これを計算機が実行するためには、機械が読める形に書き直さなければならない。この作業を「コンパイル」と呼ぶが、これはもっぱら機械（毎に専門家が作ってくれたソフトウェア「コンパイラ」）が自動的にやってくれるので、ここでは「人が読める」プログラムの書き方を示す。このようなプログラムを書く規則（言語）には種々あるが、その中で科学・技術計算に適用し易い FORTRAN (FORmula TRANslation) 言語について説明する。よく使われる BASIC (Beginner's All-purpose Symbolic Instruction Code) 言語に似ているところがあるが、重要な部分で違っているので注意が必要である。ここでは第 1 著者自身の失敗経験と独断および偏見に基づき、間違いの無いプログラミングができるような鉄則（のようなもの）を示す。もちろん文法的には、必ずしもここに書かれたことを遵守する必要は無いが、計算機が一体何をしているのか正確に理解できるまでは、ここに書かれた制限を守った方が間違いが少ないと思う。文献や土木工学関連の例題を含んだ書籍<sup>1</sup>も多数ある。

さて、そのコンパイラであるが、Cygwin のインストール時にちょっとだけ気を付ければ freeware として使うことができるようになる。デフォルトのままだと使えない場合があるので、インストールパッケージを設定する段階で、ソフトウェア開発カテゴリ 'Devel' の一覧を表示させてその中から 'gcc-core' と 'gcc-fortran' の行を探し出し、 O.1 に示したように、楕円で囲った辺りに表示される 'Skip' をクリックして 'Keep' 表示に変更した上でバージョンを選べばインストールされる。インストール後に環境変数 PATH を適切に設定すると、C と FORTRAN が使えるようになる。

### O.2 文法の基本

#### O.2.1 プログラムの書き方と変数および算術代入文

ともかく実際にプログラムを作って実行してみよう。次の例題 1 は四角形の縦と横の長さを入力して、その面積を求める簡単なものである。プログラムは、まずエディタでこのような「ソースファイル」を作成しなければならない。どんなエディタが使い易いのか等については回りの人に尋ねること。ここでは簡単のために、名称が edit というエディタがあるものとする。

ファイルの名前は内容を反映させた方があとでわかり易いので、例題 1 の第 1 行の program 文の名前に使う area1 を選んでおこう。まず、このファイルが FORTRAN プログラムのソースであることを明示するために、括

<sup>1</sup> 例えば「『土木情報処理の基礎』土木学会, 1988。」等。

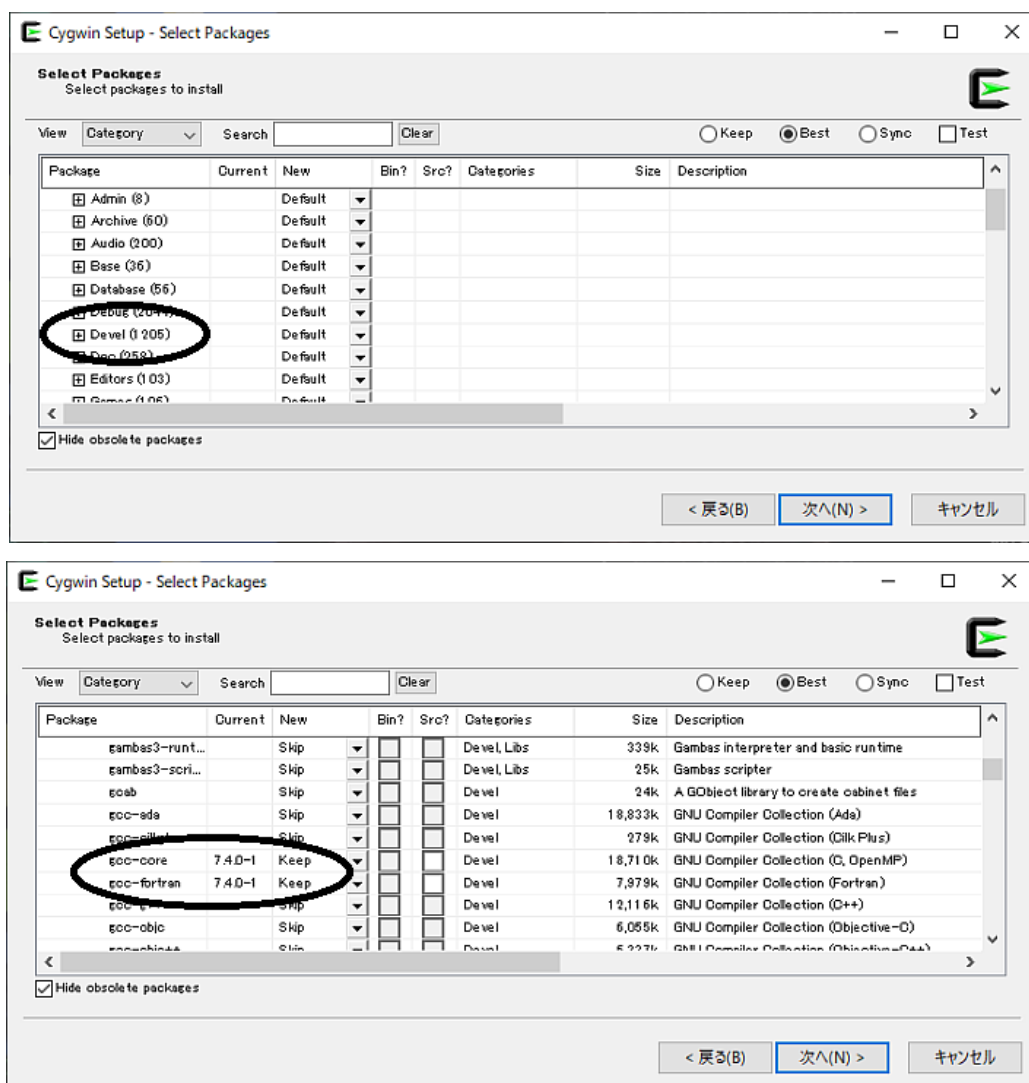


図 O.1 Cygwin で C と FORTRAN を使えるようにするときの注意

張子を付けて 'area1.f' というファイル名<sup>2</sup>にする。以下、Linux あるいは Cygwin におけるコマンドラインの入力を示すことによって、何をしているのか明らかにしておきたい。Windows では、「スタート」→「すべてのプログラム」→「アクセサリ」→「コマンドプロンプト」とし、まず、エディタを

```
edit area1.f ↵ (↵ は Enter キーの押し下げ)
```

で立ち上げ、下の例の program 行から end 行までの全部を入力する（コメント行<sup>3</sup>は省いていい）。これを機械語に変換するには、例えば

```
gfortran -o area1 area1.f ↵
```

とすればいい。OS によっては 'g77' や 'f77' かもしれないが、いずれもコンパイラである。オプション等については、Cygwin の場合は通常のマニュアルコマンド

```
man gfortran ↵ あるいは g77 --help | less ↵
```

<sup>2</sup> 今の世の中、大学生なら英語を使おう。ローマ字 'menseki.f' とか間違ったスペルの 'eria.f' は見苦しい。漢字を使うのは論外。

<sup>3</sup> 行頭に 'C' あるいは '\*' のある行はコメントとみなされプログラムとは関係が無い。



で確認することができる。さて、この文書の pdf ファイルから以下の例のプログラムをエディタにコピー & ペーストしてソースファイルを作成しよう。ただし、コメント行以外には行頭に適切な数<sup>4</sup>のスペースを入れて、例題に表示されているような形式にしてからコンパイルすること。

## 【例題 1】

```

program areal
c
c ex1: 四角形の面積を求める
c 縦と横の長さを入力し、面積を出力
c ← 1 桁目が 'c' の行はコメント行 (プログラムとは無関係な文)
c | ← 1 ~ 5 桁が行番号の桁
c | ← 7 桁目から 72 桁目までがプログラム本体 (73 桁以降は無視) → |
c read(5,100) a,b
c write(6,200) a,b
c a=a*b
c write(6,300) a
c stop
c
c 100 format(2f10.0)
c 200 format(' ', 'a =', 1pe15.7, ' b =', e15.7)
c 300 format(' ', 'A =', 1pe15.7)
c
c 5, 6 は標準入出力装置番号
c キーボードと画面が 5 と 6, あるいは
c areal <inarea.dat >outarea.txt
c ファイル 'inarea.dat' の例
c -----1-----2 <- これは位置決め用スケール
c 1.2 2.7 <- この 1 行のみを 'inarea.dat' に書き込む
c -----1-----2 <- これは位置決め用スケール
c
end

```

ソースに間違いが無ければ、コンパイル後には 'areal' というファイル<sup>5</sup>ができる。これが実行形式のプログラムであり、機械には読めるが人間は読めないプログラムである。実行するには

areal  あるいは ./areal

と<sup>6</sup>すればよく、キーボードから縦横の長さを例えば

~~~~~3.4~~~~~2.

と入力すれば (f 形の 10 が桁数なので空白を入れてある。~ は空白を示す。小数点を忘れずに), 答が端末画面上に 6.8 と出るはずである。面積を計算している行の `a=a*b` は「算術代入文」と呼ばれ、右辺を計算したあと左辺の a に値が代入される。この代入文が理解できない読者は第 N.3 節の Java プログラミングの例を勉強して欲しい。

**鉄則 1:** プログラムの内容がわかるような名前 (6 文字以内) を program 文 (本質的には不要な文) には必ず付け、ファイルの名前もわかり易いものにする。

データ入力は read 文で行なっている。この例の `read(5,100)` は、5 番の入力装置 (標準ではキーボード) から 100 で示した「形式」で入力する、という意味である。そこでこの 100 という数字のついた format 文 100 format を見ると `2f10.0` となっている。つまり「1 行当たり十桁で示した実数を二つ入力する」ということなので、入力する時の数字の位置をきちんとしていないとエラー<sup>7</sup>が出る。したがって、上の入力例のように適当な数の空白が必要になるわけである。ただし `read(5,*)` とすると、二つの値を空白一つ以上離して入力すればよくなる場合もあり、簡単にはなる。

一方出力は write 文で 6 番の出力装置 (標準では端末画面) に対して行う。その形式は例えば `300 format` を見ると `1pe15.7` となっている。これは「実数を 15 文字表示とし、小数点以下七桁、小数点上一桁で指数表

<sup>4</sup> この文書の pdf ファイルが置いてあるウェブページから例題のソースコードのファイル 'f3ple.txt' がダウンロードできる。

<sup>5</sup> あるいは a.out というファイルかもしれない。Windows (Cygwin) の場合には a.exe や areal.exe かもしれない。

<sup>6</sup> OS の環境変数 'PATH' にカレントディレクトリ '.' が含まれていないときには後者。

<sup>7</sup> OS によっては、スペースやコンマで二つの数値が離れていれば、エラーにならない場合もある。

示する」ことである。つまり、例えば 123.45678 は 1.2345678E+02 と表示される。他に f 形や g 形があるが、慣れれば e 形の方が間違いの無い表示法である。またあとで出てくる整数は、入出力共に i 形 (i5 や i10 等) を使う。注意: 100 format の二つ目の b の出力の e15.7 の頭に 1p を付けるととんでもないことになる。小数点より上の桁数を指定する p は最初の 1 箇所だけに付ける。

あるいは予め別のファイルを作成し、そこに入力するデータを書き込んでおいて実行させることもできる。それには、例えば 'inarea.dat' というファイルに数値が 1 行で 3.4 と 2. が上の例の通りに書き込まれていれば

```
area1 < inarea.dat ↵
```

で、5 番の入力はこのファイルからということになり、結果はやはり画面に出る。出力の 6 番を画面ではなくファイルにする場合には

```
area1 < inarea.dat > outarea.txt ↵
```

として実行すると、結果が、つまり 6.8 という文字がファイル 'outarea.txt' に出力される。この <や> は情報の入出力の向きを指定するのに用いられ、「リダイレクション」と呼ばれる操作である。

**鉄則 2:** 精度が必要無い実数入力は、f10.0 形にする。整数は i5 か i10。

**鉄則 3:** 実数の出力は、普通は e15.7 形にする。あるいは en.m ( $n = m + 8$ ) くらいにする。感覚的には 1p を付けた方が読み易いだろう。ただし p の有効範囲はその format 文の文末の括弧) までであり、(1pe15.7, ' b=', f12.3) のように 1p が有効な部分で f 変換や別の e 変換を用いると、一桁ずれて表示されるので注意すること。

**鉄則 4:** 入力 (read 文) は 5 番のファイル識別番号から format 付きで行なう。

**鉄則 5:** 出力 (write 文) は 6 番のファイル識別番号へ format 付きで行なう。

入力を format 付きで行なうとキーボードからの入力は煩雑になって間違い易い。だから format 無しで読み込む read(5,\*) の方が好ましい場合がある。しかしあとで述べるように、通常のプログラムではファイル入出力を標準としており、その場合には format 付きのほうが便利であると同時に、内容の理解が容易になる。したがって、ここでも format 付きを推奨している。

もう一つ、面積と断面 2 次モーメントを計算する例題 2 を考えてみよう。

#### 【例題 2】

```

program area11
c ex1_1: 四角形の面積と
c 断面 2 次モーメントを求める
c 縦と横の長さを入力
 read(5,100) a,b
 write(6,200) a,b
c A= a*b
c I= a*a*a*b/12.
 b=a*b
 a=a*a*b/12.
 write(6,300) b,a
 stop
c
100 format(2f10.0)
200 format(' ','a =',1pe15.7,' b =',e15.7)
300 format(' ','A =',1pe15.7,' I =',e15.7)
end

```

例題2ではまず、面積を  $b$  で計算したあとの  $a*a*b/12.$  で断面2次モーメントが求められるのは理解できるだろうか。プログラムの内容を1週後に理解し直す観点からはよくない方法だが、代入文の意味を考えてもらうためにわざとやってみた。こういう文に抵抗が無くなるのが望ましい。さて通常  $I$  で表示する断面2次モーメントを  $a$  として計算している。しかし変数の記号は、あとで読んだ時にすぐ内容が解るようにした方がいいので、慣例の記号を用いた方がよさそうだ。そこで、次の例題3のように書き直してみよう。

## 【例題3】

```

program area12
c
c ex1_2: 四角形の面積と
c 断面2次モーメントを求める
c 縦と横の長さを入力
c
c read(5,100) a,b
c write(6,200) a,b
c
c A= a*b
c I= a*a*a*b/12.= a**3*b/12. べきには ** を使う
c
c area=a*b
c I=a**3*b/12.
c
c ↓実行するとエラー
c write(6,300) area,I
c stop
c
c 100 format(2f10.0)
c 200 format(' ', 'a =', 1pe15.7, ' b =', e15.7)
c 300 format(' ', 'A =', 1pe15.7, ' I =', e15.7)
c
c ↑頭文字が'i'から'n'までの変数は
c 通常は整数として解釈される
c 一つの解決策: program文の次に'real i'の1行を入れる
c
end

```

ところが、これは実行するとマークのある箇所エラーが起こる。これは次に説明するように、変数名が一般に「暗黙の型宣言」に従っているからである。

変数の頭文字が  $i$  から  $n$  までの変数以外は暗黙のうちに実数変数として解釈されるが、 $i$  から  $n$  までの頭文字を持つ変数は整数として解釈されてしまう。したがって、上の例題3の中の  $I=b*a**3/12.$  の計算では、右辺が例えば 12.345 という値を持っていても整数化されてしまい、12 という値を変数  $I$  は持ってしまう。しかも整数を実数の形式  $e$  形で出力しようとする箇所でエラーが発生してしまう。それを避けるために、上の例のような場合には変数を  $I$  の代わりに  $aI$  等として使わないといけないのだ。

ところで、算術代入文や `format` 文は1行(72列まで)に書ききれないこともある。この場合は例題4のように `&` を用いて継続した複数行にできる。

## 【例題4】

```

program area13
c
c ex1_3: 長い計算
c
c read(5,100) a,b
c write(6,200) a,b
c
c x = a * b**3 + b * sin(a)
c y = x * (a * cos(b) - exp(a) / 2.4) / (120.9 * tan(a/b) -
c & 23.03) - x
c ↑
c 6桁目に '&' を入れると、継続行とみなされる。
c write(6,300) x,y
c stop
c
c 100 format(2f10.0)
c 200 format(' ', 'a =', 1pe15.7, ' b =', e15.7)
c 300 format(' ', 'x =', 1pe15.7, ' y =', e15.7)
c end

```

この例の `sin` や `cos` 等は数学のそれと同じ関数で、コンパイラは既にこういった基本的な関数(組み込み関数)を知っているのだから、普通に使えばいい。

**鉄則6:**  $i$  から  $n$  までの頭文字を持つ実数を使用しない。



```

do while(a.gt.0.)
 write(6,200) a,b
 a=a*b
 write(6,300) a
c 次の入力をして
 read(5,100) a,b
end do
c ----- ここまでがループ
close (5)
close (6)
stop
c
100 format(2f10.0)
200 format(' ','a =',1pe15.7,' b =',e15.7)
300 format(' ',15x,'A =',1pe15.7)
c 5, 6 を明確にファイルに割り当てる
c 入力: inarea.dat 出力: outarea.txt
c ファイル'inarea.dat' の例
c ----+----1----+----2
c 1.2 2.7
c 2.3 8.1
c -1. 8.1
c ----+----1----+----2
end

```

つまり縦の長さ  $a$  が零か負なら計算を終わらせようというのだ。この `do` から `end do` までが複数のケースに対処するためのループで、`while` の後ろの括弧内がループの継続条件である。条件中の演算子 `.gt.` は  $>$  の代わりで、次の対照表のように定義されていて、これはあとで出てくる `if` 文でも使う。

`.gt.`  $>$  | `.ge.`  $\geq$  | `.eq.`  $=$  | `.le.`  $\leq$  | `.lt.`  $<$  | `.ne.`  $\neq$  | `.and.` AND | `.or.` OR

AND と OR は例えば `((i.gt.10.and.j.le.5).or.k.ne.4)` のように複数の条件を並べるときに使う。

また、円の面積の場合も同様 (例題 7) に

#### 【例題 7】

```

program area4
c ex4: 円の面積を求める
c 半径を入力し、面積を出力
data pi / 3.14159265 /
c
open(5,file='inarea.dat')
open(6,file='outarea.txt')
read(5,100) r
c ----- ここから
do while(r.gt.0.)
 write(6,200) r
 a=pi*r*r
 write(6,300) a
c 次の入力をして
 read(5,100) r
end do
c ----- ここまで
close (5)
close (6)
stop
c
100 format(f10.0)
200 format(' ','radius =',1pe15.7)
300 format(' ',15x,'A =',1pe15.7)
c ファイル'inarea.dat' の例
c ----+----1----+----2
c 1.2
c 2.3
c -1.
c ----+----1----+----2
end

```

のようにすればいい。この場合は半径  $r$  が零か負なら計算を終わらせるのだ。

あり得ないデータで入力を制御できることになれば、例題 6、例題 7 の二つのプログラムも合体させることができそう（例題 8）だ。つまり、横の長さ  $b$  が零の場合には円の計算だと判断するのだ。同じような内容の計算をするプログラムを種々の対象に対して使えるようにすると非常に便利ことが多い。そのようなプログラムを「汎用性を持った」プログラムと呼ぶ。例えば、片持ち梁は解けるが単純支持梁は解けないプログラムよりは、両方共解ける方が便利だろう。

## 【例題 8】

```

program area5
data pi / 3.14159265 /
c
open(5,file='inarea.dat')
open(6,file='outarea.txt')
c
read(5,100) a,b
c
do while(a.gt.0.)
c 入力の数で円か四角か判断
 if(b.gt.0.)then
c 四角
 write(6,400) a,b
 a=a*b
 write(6,300) a
 else
c 円
 write(6,200) a
 a=pi*a*a
 write(6,300) a
 end if
 read(5,100) a,b
end do
c
close (5)
close (6)
stop
c
100 format(2f10.0)
200 format(' ', 'radius =', 1pe15.7)
300 format(' ', 15x, 'A =', 1pe15.7)
400 format(' ', 'a =', 1pe15.7, ' b =', e15.7)
c ファイル'inarea.dat'の例
c -----1-----2
c 1.2 0.
c 2.3 4.5
c 3.6 .45
c .2 0.
c -1. .45
c -----1-----2
end

```

処理系に寄るかもしれないが三つ目の入力データ表示では桁落ちが生じている。これは後述する倍精度指定によって改善できる。

さらにプログラムを読み易くするためには、異なる場合の計算は別の場所でやらせるようにしたい。これには *subroutine* と呼ばれる副プログラムを使用すればいい（例題 9）。そうすると将来、例えば台形の計算もしたいといった場合にもとても簡単にプログラムの加筆・修正ができる。

## 【例題 9】

```

program area6
common / const / pi
pi=4.*atan(1.)
c
open(5,file='inarea.dat')
open(6,file='outarea.txt')
c
read(5,100) a,b
do while(a.gt.0.)
 if(b.gt.0.)then

```

```

 call rect(a,b)
 write(6,200) a
c ~~~~~ rect を call したあとには a の値が変更されている !!!
 else
 call circle(a)
 end if
c
 read(5,100) a,b
 end do
c
 close (5)
 close (6)
 stop
c
100 format(2f10.0)
200 format(' ', '> call されたあとのメインプログラムの a の値は',
& 1pe15.7, ' になっている <')
 end
c -----
 subroutine circle(r)
c 円
 common / const / pi
 write(6,100) r
 a=pi*r*r
 write(6,200) a
 return
c
100 format(' ', 'radius =', 1pe15.7)
200 format(' ', 15x, 'A(circle) =', 1pe15.7)
 end
c -----
 subroutine rect(a,b)
c 四角
 write(6,100) a,b
 a=a*b
 write(6,200) a
 return
c
100 format(' ', 'a =', 1pe15.7, ' b =', e15.7)
200 format(' ', 15x, 'A(rectangle) =', 1pe15.7)
 end

```

`subroutine` を呼ぶプログラム側では `call` 文で呼び出すが、このときメインプログラムと `subroutine` の間で適切に変数の値の受渡しをしなければならない。上の例では「引数」と呼ばれるもの（括弧書きの中の並び）と、`common` 文によるものを用いた。落ち着いてよく見ると、`common` で渡しているのは  $\pi$  つまり値を変えない変数<sup>9</sup>であり、引数では変化する変数を受渡している。特にこうしなければならないことは無いが、最初のうちはこのような区別をしておく間違いが少ない。

各 `subroutine` およびメインプログラムはそれぞれ独立した「プログラム単位」であり、引数と `common` で受け渡される変数の値以外は、それぞれのプログラム単位内のローカル変数であり、同じ記号であっても個々に独立した変数である。したがって、上の `circle` という `subroutine` 中の変数 `a` はメインの `a` とは全く関係が無い。しかしながら、`rect` という `subroutine` の中の変数 `a` は、メインの `a` と引数を通して授受されてしまうことには注意すること。したがってこの例では、メインプログラムでこの `rect` を `call` したあとの `write` 文で出力される `a` の値は、その `subroutine` の中で計算された `a` の方、つまり面積 ( $a*b$ ) の値に置き換わってしまっていることに注意すること。上の例ではその `a` の値も出力されているので確認しておいて欲しい。

**鉄則 10:** 入出力はファイル使用を標準とし、プログラムは多くの場合の計算を連続して行えるようなフローにする。入力 of 終了を制御する適切な方法を考える。

**鉄則 11:** 必要ならば可能な限り汎用性を持ったプログラムを作る。

<sup>9</sup> 円周率  $\pi$  は定数だが FORTRAN には「定数」という別の定義があるので、ここでは「変数」と書いた。その「定数」については第 O.2.5 節で説明する。

**鉄則 12:** 種々の場合を計算する汎用プログラムでは、場合の異なる計算を `subroutine` で行なっておくと、あとで追加・削除が容易である。

**鉄則 13:** `subroutine` へは引数で変数を引き渡す。円周率等のように値が変化しない変数だけを `common` 文で引き渡すようにすると最初は間違いが少ない。

**鉄則 14:** `common` 文は、できるだけ明確な名前付き（上の例では `const`）で用いる。また同じ名前を持った `common` 文に実数と整数を並べない方がいいが、もし並べたい場合には、実数を先に並べる（倍精度実数を用いる場合の機械依存性の問題点）。

### O.2.3 文字変数と倍精度実数

通常の実数計算は4バイト32ビットで計算しているため、機械の中は七桁くらいの表現になる。したがって、複雑な演算を行なうと、有効数字でせいぜい三桁くらいの精度しか得ることができない。これを8バイト64ビットでやらせれば、精度が倍になり、約六桁程度の有効数字精度を得ることができる。現在、単精度・倍精度計算で実行速度の差は無く、C言語がそうであるように科学・技術計算はすべて倍精度で行なうのが普通である。これを簡単に行なうためには、単に各プログラム単位で暗黙の型宣言文 `implicit` 文を挿入するだけでいい。

また、多くの場合を連続して計算する場合の制御に、文字変数を使用したタイトルを利用すると、出力結果の整理にも役に立ち便利だ。例題 10 では76文字のタイトルを使って入力制御を行なっている。つまり宣言文の `character*4 title(19)` は、4バイト（4英数字）ずつの文字変数を19個連続して並べて（後述の「配列」）あるという意味なので、合計  $4 \times 19 = 76$  文字に相当する。その最初の4文字を `title(1)` という変数として扱い、この最初の4文字で入力を制御するのである。つまりプログラムを終了させるには `end_` の4文字（最後の `_` は半角スペース）を用いるのだ。

#### 【例題 10】

```

program area7
implicit real*8(a-h,o-z)
c 倍精度 (8 バイト実数)
character*4 title(19),aend
common / const / pi
data aend / 'end ' /
pi=4.d0*atan(1.d0)
c
open(5,file='inarea.dat')
open(6,file='outarea.txt')
c タイトルで終了制御
read(5,100) title
do while(title(1).ne.aend)
 write(6,200) title
 read(5,300) a,b
 if(b.gt.0.)then
 call rect(a,b)
 else
 call circle(a)
 end if
 read(5,100) title
end do
c
close (5)
close (6)
stop
c
100 format(19a4)
200 format(//',',19a4)
300 format(2f10.0)
c ファイル'inarea.dat'の例
c -----1-----2
c Problem No.1 --> title は全部 76 文字より長くする

```



```

c 1.2 0.
c Next Problem
c 3.6 .45
c Last Problem
c .2 0.
c end_ <-- 4 文字目はスペース！
c -----1-----2
c end
c -----
c subroutine circle(r)
c 円
c implicit real*8(a-h,o-z)
c common / const / pi
c write(6,100) r
c a=pi*r*r
c write(6,200) a
c return
c
c 100 format(' ', 'radius =', 1pd15.7)
c 200 format(' ', 15x, 'A(circle) =', 1pd15.7)
c end
c -----
c subroutine rect(a,b)
c 四角
c implicit real*8(a-h,o-z)
c write(6,100) a,b
c a=a*b
c write(6,200) a
c return
c
c 100 format(' ', 'a =', 1pd15.7, ' b =', d15.7)
c 200 format(' ', 15x, 'A(rectangle) =', 1pd15.7)
c end

```

ここでは倍精度にしたので、例題 8 とは異なり二つ目の入力データ表示には桁落ちが生じていない。

**鉄則 15:** 入力制御はタイトル（文字変数）を利用する。

**鉄則 16:** 実数計算はすべて倍精度で行なう。implicit real\*8(a-h,o-z) を、必要なメインプログラムと subroutine や後述の function 等に忘れずに付ける。

**鉄則 17:** 倍精度変数の出力には、d15.7 あるいは dn.m ( $n = m + 8$ ) を使用する。

## O.2.4 1次元配列

上の title(19) という変数は実は「配列」と呼ばれるもので、19 個の変数を同じ変数名で定義する代わりに、その何番目の変数かでそれぞれを区別している。これを使うと、ベクトルや行列の計算が非常に簡単に行えることがわかると思う。まず、ベクトルの内積の計算を例にして 1 次元配列を使ってみよう。

### 【例題 11】

```

c program inprod
c ex8: 2つのベクトルの内積を求める
c character*4 title(19),aend
c dimension a(3),b(3)
c data aend / 'end ' /
c
c open(5,file='invec.dat')
c open(6,file='outvec.txt')
c read(5,100) title
c do while(title(1).ne.aend)
c write(6,200) title
c
c read(5,300) (a(i), i=1,3)
c read(5,300) (b(i), i=1,3)
c write(6,400) (a(i), i=1,3)
c write(6,400) (b(i), i=1,3)
c 内積の計算
c prod=0.

```



**鉄則 18:** 変化させない変数か、初期値を適切に設定したい変数だけを **data** 文で定義する。

**鉄則 19:** **data** 文はメインプログラムの最初だけで定義する。

さて FORTRAN では変数の他に「定数」も定義できる。これは **parameter** 文で行なうのだが、この性質について見てみよう。

**【例題 13】**

```

c program param2
c
c parameter (n=5)
c write(6,100) n
c n = 2
c write(6,100) n
c stop
c
c 100 format(' ',i5)
c
c
c end

```

ex10: データのやりとりと宣言について

このプログラムは  
第 5 行の 'n=2' が文法違反です。  
なぜでしょう?

ここもなぜエラーになるのかわかるだろうか? それは、**parameter** 文で定義される「定数」（本質的には「文字」に過ぎない!）というのが、数字の代わりにプログラムを書く時点だけで用いられるものだからである。つまりプログラムの実行とは全く無関係にコンパイルの段階で処理されてしまう。したがって、上の例題のエラーが生じる行  $n = 2$  は、本質的には

$$5 = 2$$

という文を書いたことに相当するから、文法違反となるわけである。

これが理解できたのなら、次の例題 14 もおかしいことがわかると思う。というのも、**n** は変数ではなく 5 だからである。「変数」と「定数」が違うことを理解しておく必要がある。

**【例題 14】**

```

c program param3
c
c parameter (n=5)
c common n
c write(6,100) n
c call suba
c stop
c
c 100 format(' ',i5)
c
c
c end
c -----
c subroutine suba
c common n
c return
c end

```

ex11: データのやりとりと宣言について

このプログラムは  
第 4 行の 'common n' が文法違反です。  
なぜでしょう?

あるいは、前述の **data** 文の使い方にも注意が必要である。

**【例題 15】**

```

c program param4
c
c common n
c data n / 5 /
c write(6,100) n
c call suba
c stop
c
c 100 format(' ',i5)
c
c

```

ex12: データのやりとりと宣言について

このプログラムも



```

 common n
 n=5
 write(6,100) n
 call suba(n)
 write(6,100) n
 stop
c
100 format(' ',i5)
 end
c -----
 subroutine suba(k)
 k=2*k
 call subb
 return
 end
c -----
 subroutine subb
 common j
 j=j/2
 write(6,100) j
 return
100 format(' ',i5)
 end

```

とすることは可能である。つまり `call` する側の引数が `common` にあってもいい（例題 17 のメインプログラム）が、`call` された側の重複（例題 16 の `suba`）は不可なのである。またこのプログラムを実行すると、すべての `write` 文は 5 を出力するが、その理由も理解できるだろうか。このように、同じ変数を異なった方法で授受するのは不節操であり、将来の修正が困難になるので避けるべきである。

**鉄則 22:** 鉄則 13 を再度強調したいが、変数のうちのどれを `common` で引き渡すのかの自分なりの思想を持つ。

**鉄則 23:** 内容を間違わないためにも `common` 中の変数名はすべての箇所と同じものに統一しておく。つまりエディタの機能を用いてコピー & ペーストするのがベストである。

### O.2.6 2次元配列

次に、2次元の配列を用いて行列計算を試みる。簡単のために、 $2 \times 2$  の逆行列を求める。

#### 【例題 18】

```

 program inv22
c ex14: 2x2 の逆行列
 character*4 title(19),aend
 dimension a(2,2),b(2,2),c(2,2)
 data aend / 'end ' /
c
 open(5,file='inmat.dat')
 open(6,file='outmat.txt')
c
 read(5,100) title
 do while(title(1).ne.aend)
c write(6,200) title
c
c do i=1,2
c read(5,300) (a(i,j), j=1,2)
c write(6,400) (a(i,j), j=1,2)
c end do
c
c det=a(1,1)*a(2,2)-a(1,2)*a(2,1)
c write(6,500) det
c
c b(1,1)=a(2,2)/det
c b(1,2)=-a(1,2)/det
c b(2,1)=-a(2,1)/det
c b(2,2)=a(1,1)/det
c

```



## O.2.7 2次元配列の受渡しと上手なメモリの使い方（整合配列）

次に、行列の積を計算してみよう。次の例題 19 では、せいぜい  $8 \times 8$  の行列までしか計算しないものと規定している。行なう計算は、 $d = A^T B A c$  である。

## 【例題 19】

```

c program matprd
c ex15: 行列の積 {d} = [A(T)] [B] [A] {c}
c implicit real*8 (a-h,o-z)
c character*4 title(19),aend
c dimension a(8,8),b(8,8),c(8),d(8),e(8,8)
c data aend / 'end ' /
c
c open(5,file='inmatp.dat')
c open(6,file='outmatp.txt')
c
c read(5,100) title
c do while(title(1).ne.aend)
c write(6,200) title
c
c read(5,600) mat
c if(mat.le.8.and.mat.gt.0)then
c
c write(6,500) mat
c do i=1,mat
c read(5,300) (a(i,j), j=1,mat)
c write(6,400) (a(i,j), j=1,mat)
c end do
c write(6,350)
c do i=1,mat
c read(5,300) (b(i,j), j=1,mat)
c write(6,400) (b(i,j), j=1,mat)
c end do
c write(6,450)
c read(5,300) (c(i), i=1,mat)
c write(6,400) (c(i), i=1,mat)
c
c do i=1,mat
c d(i)=0.d0
c do j=1,mat
c d(i)=d(i)+a(i,j)*c(j)
c e(i,j)=0.d0
c do k=1,mat
c e(i,j)=e(i,j)+a(k,i)*b(k,j)
c end do
c end do
c end do
c
c do i=1,mat
c c(i)=0.d0
c do j=1,mat
c c(i)=c(i)+e(i,j)*d(j)
c end do
c end do
c
c write(6,550)
c write(6,400) (c(i), i=1,mat)
c
c else
c write(6,700)
c close (5)
c close (6)
c stop
c end if
c read(5,100) title
c end do
c
c close (5)
c close (6)
c stop
c

```

```

100 format(19a4)
200 format(//',',19a4)
300 format(8f10.0)
350 format(' ',',', [B]')
400 format(' ',8(' |',1pd15.7),', |')
450 format(' ',',', {c}')
500 format(' ',',',Size of matrices =',i5//',',Given matrices:'/
 & ' ',',', [A]')
550 format(' ',',',Obtained vector:'/',',', {d}')
600 format(i5)
700 format(' ',',',***** Data error : 0<mat<9 *****')
c ファイル'inmatp.dat'の例
c -----1-----2-----3
c Problem No.1 --> title は全部 76 文字より長くする
c 2
c 1.2 2.2
c - 3 3.9
c 2.3 -4.5
c 8.1 .34
c .55 -2
c Next Problem
c 3
c .2 2.1 - .4
c -1.1 -3.2 2.7
c 1.2 2.2 - .9
c - .3 3.9 5.7
c 7.1 8.8 - .8
c 3.2 -1.2 1.
c 1. - .5 2.
c end_ <-- 4 文字目はスペース！
c -----1-----2-----3
end

```

転置行列との掛け算もちゃんと理解できただろうか。試しに `subroutine` を使ってみると

#### 【例題 20】

```

program matprd
implicit real*8 (a-h,o-z)
character*4 title(19),aend
dimension a(8,8),b(8,8),c(8),d(8),e(8,8)
data aend / 'end ' /
c
open(5,file='inmatp.dat')
open(6,file='outmatp.txt')
c
read(5,100) title
do while(title(1).ne.aend)
write(6,200) title
c
read(5,600) mat
if(mat.le.8.and.mat.gt.0)then
write(6,500) mat
do i=1,mat
read(5,300) (a(i,j), j=1,mat)
write(6,400) (a(i,j), j=1,mat)
end do
write(6,350)
do i=1,mat
read(5,300) (b(i,j), j=1,mat)
write(6,400) (b(i,j), j=1,mat)
end do
write(6,450)
read(5,300) (c(i), i=1,mat)
write(6,400) (c(i), i=1,mat)
c
call prod(a,b,c,d,e,mat)
c
write(6,550)
write(6,400) (c(i), i=1,mat)
else
write(6,700)
close (5)
close (6)

```



```

 stop
 end if
c
 read(5,100) title
end do
c
 close (5)
 close (6)
 stop
c
100 format(19a4)
200 format(//' ',19a4)
300 format(8f10.0)
350 format(' ',' [B]')
400 format(' ',8(' |',1pd15.7),' |')
450 format(' ',' {c}')
500 format(' ','Size of matrices =',i5/' ','Given matrices: '/
 & ' ',' [A]')
550 format(' ','Obtained vector: '/' ',' {d}')
600 format(i5)
700 format(' ','***** Data error : 0<mat<9 *****')
end
c -----
subroutine prod(a,b,c,d,e,mat)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension a(8,1),b(8,1),c(1),d(1),e(8,1)
c
do i=1,mat
 d(i)=0.d0
 do j=1,mat
 d(i)=d(i)+a(i,j)*c(j)
 e(i,j)=0.d0
 do k=1,mat
 e(i,j)=e(i,j)+a(k,i)*b(k,j)
 end do
 end do
end do
do i=1,mat
 c(i)=0.d0
 do j=1,mat
 c(i)=c(i)+e(i,j)*d(j)
 end do
end do
return
end

```

のようになる。ここで一つ重要なのは、`subroutine` で

```
dimension a(8,1),b(8,1),c(1),d(1),e(8,1)
```

と宣言したことである。これは、当然

```
dimension a(8,8),b(8,8),c(8),d(8),e(8,8)
```

でもいいが、大事なのは多次元の配列の最後の添え字以外の正確な宣言のことだ。つまりその値（この例の‘8’）は、呼んでいるルーチン側と同じ数値で宣言しなければならないことである。この例では、 $a(i,j)$  の  $i$  側の上限値はきちんと呼ぶ側の宣言と同じサイズで宣言しなければならないのである。1次元の場合と右端のサイズが1でいいのは、引数がある変数の最初の番地だけを受け渡すからであり、その先頭の番地が呼ぶ側の変数の先頭の番地に等しいことを示すだけでいいからである。なぜ、右端のサイズ以外をきちんと宣言しなければならないかという、実は多次元の配列はメモリの中では、例えばこの2次元の場合

```
a(1,1),a(2,1),a(3,1),,,,a(8,1),a(1,2),a(2,2),a(3,2),,,,
```

の順番に記憶されているからなのだ。これはC言語の順番と逆だ。3次元の例えば  $c(2,3,4)$  の場合は

```
c(1,1,1),c(2,1,1),c(1,2,1),c(2,2,1),c(1,3,1),c(2,3,1),c(1,1,2),,,,
```

の順になっている。

さて、上の例題ではサイズ `mat` 分の配列だけを `subroutine` に渡せばいいはずだから

```
dimension a(mat,mat),b(mat,mat),c(mat),d(mat),e(mat,mat)
```

あるいは

```
dimension a(mat,1),b(mat,1),c(1),d(1),e(mat,1)
```

としたいというのは、多くの人間が考えることであろうが、実はとんでもないことが起こる。これをコンパイルしても全くエラーは検出されず、実行してもエラーが起こらない。しかし結果が目茶苦茶になる。それに気付けばいいが、大ボカをすると人身事故にもつながりかねない。つまり、例えば `mat=2` だったとすると、メモリ内の変数の配置は呼ぶ側と呼ばれる側とで、次のような対応になってしまうからである。

```
呼ぶ側: a(1,1) a(2,1) a(3,1) a(4,1) a(5,1) a(6,1)
 0k 0k ? ?
呼ばれる側: a(1,1) a(2,1) a(1,2) a(2,2)
```

ところが、これを次のように `subroutine` にして書き換えてしまうと、当たり前だが正解が求められるから(初学者には)不思議なのだ。理由は後述するが、まずじっくり腰を下ろして考えてみるといい。

#### 【例題 21】

```
program matprd
implicit real*8 (a-h,o-z)
character*4 title(19),aend
dimension a(8,8),b(8,8),c(8),d(8),e(8,8)
data aend / 'end' /

c
open(5,file='inmatp.dat')
open(6,file='outmatp.txt')

c
read(5,100) title
do while(title(1).ne.aend)
 write(6,200) title

c
 read(5,600) mat
 if(mat.le.8.and.mat.gt.0)then
 write(6,500) mat

c
 call matin(a,b,c,mat)

c
 call prod(a,b,c,d,e,mat)

c
 call matout(c,mat)
 else
 write(6,700)
 close (5)
 close (6)
 stop
 end if

c
 read(5,100) title
end do

c
close (5)
close (6)
stop

c
100 format(19a4)
200 format(//',',19a4)
500 format(' ', 'Size of matrices =',i5/ ' ', 'Given matrices: '/
& ' ', ' [A]')
600 format(i5)
700 format(' ', '***** Data error : 0<mat<9 *****')
end
```

```

c -----
 subroutine matin(a,b,c,mat)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 dimension a(mat,1),b(mat,1),c(1)
c
 do i=1,mat
 read(5,300) (a(i,j), j=1,mat)
 write(6,400) (a(i,j), j=1,mat)
 end do
 write(6,350)
 do i=1,mat
 read(5,300) (b(i,j), j=1,mat)
 write(6,400) (b(i,j), j=1,mat)
 end do
 write(6,450)
 read(5,300) (c(i), i=1,mat)
 write(6,400) (c(i), i=1,mat)
 return
300 format(8f10.0)
350 format(' ', ' [B]')
400 format(' ', 8(' | ', 1pd15.7), ' |')
450 format(' ', ' {c}')
 end
c -----
 subroutine prod(a,b,c,d,e,mat)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 dimension a(mat,mat),b(mat,mat),c(mat),d(mat),e(mat,mat)
c
 do i=1,mat
 d(i)=0.d0
 do j=1,mat
 d(i)=d(i)+a(i,j)*c(j)
 e(i,j)=0.d0
 do k=1,mat
 e(i,j)=e(i,j)+a(k,i)*b(k,j)
 end do
 end do
 end do
 do i=1,mat
 c(i)=0.d0
 do j=1,mat
 c(i)=c(i)+e(i,j)*d(j)
 end do
 end do
 return
 end
c -----
 subroutine matout(c,mat)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 dimension c(mat)
 write(6,550)
 write(6,400) (c(i), i=1,mat)
 return
400 format(' ', 8(' | ', 1pd15.7), ' |')
550 format(' ', 'Obtained vector: '/' ', ' {d}')
 end

```

変更したのは、入力から計算・出力までをすべて `subroutine` でやるようにしたところだけである。この理由が明確に把握できるまでは・・・

**鉄則 26:** 呼ぶ側と呼ばれる側とで配列の宣言は完全に一致させる。

BASIC では配列の宣言を変数で行える。しかし上の例でサイズが8を越える行列を扱うためには、すべての `dimension` 文を書き改める以外には手が無い。これでは汎用性が無くなる。そこで次の例題 22 のように、メインプログラムでは実際の計算を一切行わず、大きくとった配列 `a(8000)` (これを各機械に合わせて最大限とっておけばいい) を切り刻んで、実質的なメインプログラム `matcal` で使用する各配列のメモリ上の格納場所を決めるだけにしてみる。こうすれば配列のサイズを変数で宣言できる。このように配列名とサイズの両方が引数に含まれていれば変数サイズの配列宣言ができ、これを「整合配列」と呼んでいる。

## 【例題 22】

```

program matprd
implicit real*8 (a-h,o-z)
character*4 title(19),aend
common / dtarea / a(8000)
data aend / 'end ' /
c データ用メモリの最大 = 8000 とした
lasta=8000
open(5,file='inmatp.dat')
open(6,file='outmatp.txt')
c
read(5,100) title
do while(title(1).ne.aend)
 write(6,200) title
c
 read(5,300) mat
 mmat=mat*mat
c 各配列の番地を設定する
 addr1=1
 addr2=addr1+mmat
 addr3=addr2+mmat
 addr4=addr3+mat
 addr5=addr4+mat
 lastad=addr5+mmat-1
c 最後の番地が許容できるか?
 if(lastad.gt.lasta)then
 write(6,400)
 close (5)
 close (6)
 stop
 end if
c 本当のメインへ
 call matcal(a(addr1),a(addr2),a(addr3),
& a(addr4),a(addr5),mat)
c
 read(5,100) title
end do
c
close (5)
close (6)
stop
c
100 format(19a4)
200 format(//' ',19a4)
300 format(i5)
400 format(' ','***** Data error : mat is too large! *****')
c
end
c -----
subroutine matcal(a,b,c,d,e,mat)
implicit real*8 (a-h,o-z)
dimension a(mat,mat),b(mat,mat),c(mat),d(mat),e(mat,mat)
c
write(6,100) mat
do i=1,mat
 read(5,200) (a(i,j), j=1,mat)
 write(6,300) (a(i,j), j=1,mat)
end do
write(6,400)
do i=1,mat
 read(5,200) (b(i,j), j=1,mat)
 write(6,300) (b(i,j), j=1,mat)
end do
write(6,500)
read(5,200) (c(i), i=1,mat)
write(6,300) (c(i), i=1,mat)
c
do i=1,mat
 d(i)=0.d0
 do j=1,mat
 d(i)=d(i)+a(i,j)*c(j)
 e(i,j)=0.d0
 do k=1,mat

```



```

 if(nlast.gt.dtmmaxa) stop
c
 call sub1(a(n3),a(n1),a(n4),a(n5),a(n6),n,m)
c
 n6=n5+m*m
 nlast=n6+m-1
 if(nlast.gt.dtmmaxa) stop
c
 call sub2(a(n3),a(n4),a(n2),a(n5),a(n6),n,m)
c
 nlast=n3+m*m*n-1
 if(nlast.gt.dgmaxa) stop
c
 call sub3(a(n1),a(n2),a(n3),n,m)
c
 stop
100 format(2i5)
 end
c -----
 subroutine sub1(a,b,c,e,f,n,m)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 dimension a(n,n),b(n),c(m,n),e(n),f(n,m)
c
 return
 end
c -----
 subroutine sub2(a,c,d,e,f,n,m)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 dimension a(n,n),c(m,n),d(m),e(m,m),f(m)
c
 return
 end
c -----
 subroutine sub3(b,d,e,n,m)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 dimension b(n),d(m),e(m,m,n)
c
 return
 end

```

メインプログラムでは番地の処理以外のいかなる作業もしてはならないことに注意すべきである。

**鉄則 27:** 大人になったら整合配列。

### O.3 いくつかの応用例

#### O.3.1 ソーティングと最小 2 乗法

まず最初に、実験データ等の整理で  $(x, y)$  の組を  $x$  の小さい順に並べ変えたり、 $x$  と  $y$  の関係を最小 2 乗法で求める場合を想定する。ソーティングは最も簡単な、一つ一つ比較して並べ代える最も時間のかかる方法を示した。最小 2 乗法にも種々あるが、ここでは最も簡単な、 $x$  を真値とした線形回帰を行なう。例えば、 $N$  組のデータ  $(x, y)$  に対して、 $y = ax + b$  で回帰するためには

$$\text{誤差}_n \equiv y_n - (ax_n + b), \quad n = 1 \sim N \quad (\text{O.1})$$

で定義された誤差を最小にすればいいから

$$\sum_{n=1}^N (\text{誤差}_n)^2 = \sum_{n=1}^N \{y_n - (ax_n + b)\}^2 \rightarrow \text{最小} \quad (\text{O.2})$$

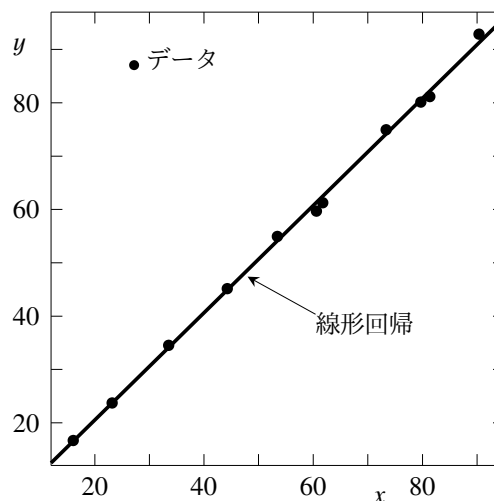


図 O.2 データの並べ替えと線形回帰

とすればいい。したがって

$$\frac{\partial}{\partial a} \sum_n \{y_n - (a x_n + b)\}^2 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial b} \sum_n \{y_n - (a x_n + b)\}^2 = 0 \quad (\text{O.3a, b})$$

から  $a$  と  $b$  が

$$\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \sum x_n^2 & \sum x_n \\ \sum x_n & \sum 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \sum x_n y_n \\ \sum y_n \end{Bmatrix} \quad (\text{O.4})$$

のように求められる。

**【例題 24】**

```

program l_regr
 c ex17: ソートと最小2乗法
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 character*4 title(19),aend
 common / dtarea / a(8000)
 data aend / 'end ' /
 c
 c lasta=8000
 open(5,file='regrin.dat')
 open(6,file='regrout.txt')
 c グラフィックス用ファイル
 open(1,file='regrph.dat')
 c
 read(5,100) title
 do while(title(1).ne.aend)
 c write(6,200) title
 c タイトルもグラフィックス用ファイルに
 write(1,500) title
 read(5,300) nn
 addr1=1
 addr2=addr1+nn
 lastad=addr2+nn-1
 if(lastad.gt.lasta)then
 c write(6,400)
 c close (1)
 c close (5)
 c close (6)
 c stop
 end if
 c
 call regr(a(addr1),a(addr2),nn)
 read(5,100) title
 end do
 c
 close (1)
 close (5)
 close (6)
 stop
 c
 100 format(19a4)
 200 format('// ' ,19a4)
 300 format(i5)
 400 format(' ','***** Data error : nn is too large! *****')
 500 format(' ',19a4)
 c
 end
 c
 subroutine regr(x,y,nn)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 dimension x(nn),y(nn)
 c
 write(6,100) nn
 do i=1,nn
 c read(5,200) x(i),y(i)
 end do
 c 小さい順に並べる
 do i=1,nn-1
 do j=i+1,nn
 if(x(i).gt.x(j))then

```

```

 xy=x(i)
 x(i)=x(j)
 x(j)=xy
 xy=y(i)
 y(i)=y(j)
 y(j)=xy
 end if
end do
end do
c グラフィックスデータ用出力も
do i=1,nn
 write(6,300) x(i),y(i)
 write(1,600) x(i),y(i)
end do
c 最小 2 乗法の係数計算
sumxx=0.d0
sumxy=0.d0
sumx =0.d0
sumy =0.d0
do i=1,nn
 sumxx=sumxx+x(i)*x(i)
 sumxy=sumxy+x(i)*y(i)
 sumx =sumx +x(i)
 sumy =sumy +y(i)
end do
c
a=sumxy/sumxx
write(6,400) a
c
det=sumxx*float(nn)-sumx*sumx
a=(float(nn)*sumxy-sumx*sumy)/det
b=(-sumx*sumxy+sumxx*sumy)/det
write(6,500) a,b
c
return
c
100 format(' ', 'Number of data =',i5/' ', 'Sorted data (x,y):')
200 format(2f10.0)
300 format(' ',5x,'x=',1pd15.7,': y=',d15.7)
400 format(' ',2x,'Linear regression : y = (',1pd15.7,') * x')
500 format(' ',2x,'Linear regression : y = (',1pd15.7,') * x + (',
 & d15.7,')')
c グラフィックス用は例えば E 形式出力
600 format(' ',1p2e15.7)
c
data example
c -----1-----2
c Data No.1 --> title は全部 76 文字より長くする
c 11
c 23.186 23.754
c 81.354 81.192
c 73.363 74.974
c 44.265 45.186
c 61.761 61.290
c 33.535 34.550
c 16.067 16.713
c 60.598 59.715
c 79.709 80.166
c 90.358 92.894
c 53.447 54.974
c end_ <-- 4 文字目はスペース！
c -----1-----2
end

```

### O.3.2 2 分法による求解

片端固定・片端ローラー単純支持柱の弾性圧縮座屈荷重  $P_{cr}$  は

$$f(x) \equiv \tan(x) - x = 0 \quad (\text{O.5})$$



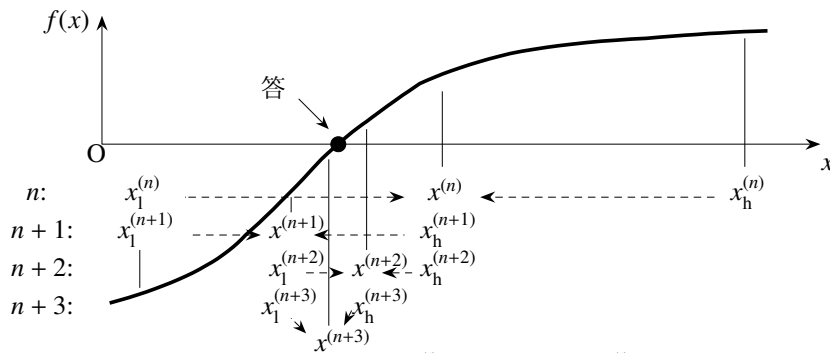


図 0.3 2分法の考え方—各ステップ毎に大きい予想  $x_h^{(i)}$  と小さい予想  $x_l^{(i)}$  の中央値  $x^{(i)}$  を新予想とし、次のステップの予想の上下限値のどちらかを改善していく方法で、非効率的ではあるが精度を容易に上げることができる方法

で求められる。ここに  $x^2 \equiv \frac{\ell^2 P_{cr}}{EI}$  であり、最小の1次モードの値は  $x = 4.493$  で2次モードの値は  $7.725$  である。この特性方程式の解を2分法で求める。2分法は解を挟む領域を探し、最も情報量の大きい中間点を領域の修正点として用い、その領域を小さくしていく方法(図 0.3 参照)である。簡単な計算である上に、会話型で行なった方が便利であるため、入出力は標準入出力のキーボードと画面とする。この場合、ほとんどの計算機ではファイル番号を指定せずに `read(*,*)`, `write(*,*)` 等とすればいい。

【例題 25】

```

program bisect
c ex18: f(x)=tan(x)-x=0 の解は?
implicit real*8 (a-h,o-z) キーボード入力・画面出力
c
do
c
write(*,510)
read(*,*) eps
if(eps.le.0.d0.or.eps.ge.1.d0) stop
write(*,520) eps
c
diff=1.0d1*eps
do while(diff.gt.eps)
write(*,530)
read(*,*) xl
write(*,540) xl
write(*,550)
read(*,*) xh
write(*,560) xh
dx=(xh-xl)/1.d1
c
do i=0,10
x=xl+float(i)*dx
write(*,600) x,f(x)
end do
c
fl=f(xl)
fh=f(xh)
if(fl*fh.le.0.d0)then
do while(diff.gt.eps)
x=(xl+xh)/2.d0
fc=f(x)
diff=abs((xh-xl)/x)
if(fc*fl.le.0.d0)then
xh=x
else
xl=x
fl=fc
end if
end do
else

```



```

 nmax=20
c
 do
c
 write(*,510)
 read(*,*) eps
 if(eps.le.0.d0.or.eps.ge.1.d0) stop
 write(*,520) eps
 error=1.d1*eps
c
 do while(error.gt.eps)
 iter=0
 write(*,530)
 read(*,*) x
 write(*,540) x
c
 do while(error.gt.eps.and.iter.le.nmax)
 iter=iter+1
 dx=-f(x)/df(x)
 x =x+dx
 error=abs(dx/x)
 write(*,570) iter,x,f(x),error
 end do
c
 if(error.le.eps)then
 write(*,550) x,f(x)
 else
 write(*,560) nmax
 end if
 end do
c
 end do
c
510 format(/' ', '**** Newton-Raphson method to solve f(x)=0 ****'/
& ' ', 'Tolerance (Enter 0.0 to stop) ?')
520 format(' ', 'Tolerance =',1pd15.7)
530 format(' ', 'First trial value for x ?')
540 format(' ', 'First trial value =',1pd15.7)
550 format(' ', ' >>> Possible solution =',1pd15.7, ' <<<',
& ' 5x, (f(x)=',d15.7,')')
560 format(' ', 'No convergence within iteration ',i5,
& ' !!! Try again !!!')
570 format(' ', ' iter=',i5,': x=',1pd15.7,': f(x)=',d15.7,
& ': error=',d15.7)
 end
c -----
 real*8 function f(x)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 f=tan(x)-x
 return
 end
c -----
 real*8 function df(x)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 df=1.d0/cos(x)/cos(x)-1.d0
 return
 end

```

これも初期値の与え方によっては答が求められない場合がある。特に接線  $\left(\frac{df}{dx}\right)$  が零に近づくととても困ったことが起こる。

### O.3.4 連立方程式の Newton-Raphson 法

次に連立方程式に Newton-Raphson 法を用いてみよう。例えば

$$f_1(x, y) = x^2 - 3xy + 8.1 = 0, \quad f_2(x, y) = y^3 - 2x^2y - 5x - 15.8 = 0 \quad (\text{O.8a, b})$$

を対象としてみた。これも同様に Taylor 展開して

$$f_k(x_{n+1}, y_{n+1}) = f_k(x_n, y_n) + \frac{\partial f_k}{\partial x}(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) + \frac{\partial f_k}{\partial y}(x_n, y_n)(y_{n+1} - y_n) = 0, \quad k = 1, 2 \quad (\text{O.9})$$

を解けばいいので

$$\begin{Bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_n \\ y_n \end{Bmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(x_n, y_n) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(x_n, y_n) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(x_n, y_n) \end{pmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} f_1(x_n, y_n) \\ f_2(x_n, y_n) \end{Bmatrix} \quad (\text{O.10})$$

を繰り返せばいい。

一般に Newton-Raphson 法は、繰り返す度に次の探索のための接線係数つまり上式の関数の微係数でできた行列を更新する。そのため、いわゆる 2 次の収束となって比較的速く正解に近づいていく。これに対し、何らかの理由で接線係数を更新したくない場合には、例えば、繰り返しの 1 回目の接線係数だけを用いて（プログラム中の `call tangnt` を 1 回だけしか計算しないで）漸化式を近似的に解くこともできる。この場合は一度だけ逆行列を計算すれば済むというメリットもあるが、収束は遅くなる上

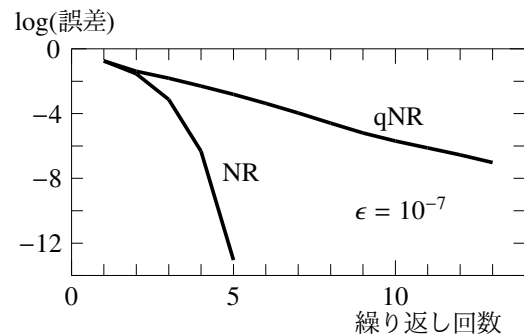


図 O.4 Newton-Raphson 法の収束

に、収束半径が小さいことから収束するような初期値を選ぶのが比較的難しくなる。図 O.4 は連立方程式の場合の一例で、繰り返す度の誤差（前回の近似解との差）の変化が示してある。図中の ‘NR’ で示した線が正しい Newton-Raphson 法の場合の収束の様子で、精度（プログラム中の `eps`）を  $10^{-7}$  としたときに 5 回で近似解が得られていることを示している。これに対し、接線係数を更新しない場合の結果が ‘qNR’ で示した線であるが、かなり収束は遅くなり、13 回でようやく所定の精度が得られている。

#### 【例題 28】

```

program nwrph2
c
c ex20: 連立 f(x)=0 の解は?
c by Newton-Raphson method
c
c implicit real*8 (a-h,o-z)
c dimension a(2,2),x(2),f(2),dx(2)
c
c nmax=20
c
c do
c
c write(*,510)
c read(*,*) eps
c if(eps.le.0.d0.or.eps.ge.1.d0) stop
c write(*,520) eps
c error=1.d1*eps
c
c do while(error.gt.eps)
c iter=0
c write(*,530)
c read(*,*) x(1),x(2)
c write(*,540) x(1),x(2)
c
c do while(error.gt.eps.and.iter.le.nmax)
c iter=iter+1
c f(1)=f1(x)
c f(2)=f2(x)
c call tangnt(a,x)
c do i=1,2
c dx(i)=0.d0

```

```

 do j=1,2
 dx(i)=dx(i)-a(i,j)*f(j)
 end do
 end do
 do i=1,2
 x(i)=x(i)+dx(i)
 end do
 error=sqrt((dx(1)**2+dx(2)**2)/(x(1)**2+x(2)**2))
 write(*,570) iter,x(1),x(2),error
end do

c
 if(error.le.eps)then
 write(*,550) x(1),x(2)
 write(*,580) f1(x),f2(x)
 else
 write(*,560) nmax
 end if
end do

c
end do

c
510 format(// ' ', '*** Newton-Raphson method to solve f(x,y)=0 ***'/
& ' ', ' Tolerance (Enter 0.0 to stop) ?')
520 format(' ', ' Tolerance =', 1p15.7)
530 format(' ', ' First trial value for x & y ?')
540 format(' ', ' First trial value (x,y) =', 1p2d15.7)
550 format(' ', ' >>> Possible solution (x,y) =', 1p2d15.7, ' <<<')
580 format(' ', ' >>> f1(x) and f2(x) @(x,y) =', 1p2d15.7, ' <<<')
560 format(' ', ' No convergence within iteration ', i5,
& ' !!! Try again !!!')
570 format(' ', ' iter=', i5, ': x=', 1p15.7, ': y=', d15.7,
& ' : error=', d15.7)
 end

c -----
 subroutine tangnt(a,x)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 dimension a(2,2),x(2)
 a(1,1)=2.d0*x(1)-3.d0*x(2)
 a(1,2)=-3.d0*x(1)
 a(2,1)=-4.d0*x(1)*x(2)-5.d0
 a(2,2)=3.d0*x(2)*x(2)-2.d0*x(1)*x(1)

c
 det=a(1,1)*a(2,2)-a(1,2)*a(2,1)
 b=a(2,2)/det
 a(2,2)=a(1,1)/det
 a(1,1)=b
 a(1,2)=-a(1,2)/det
 a(2,1)=-a(2,1)/det
 return
 end

c -----
 real*8 function f1(x)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 dimension x(2)
 f1=x(1)*x(1)-3.d0*x(1)*x(2)+8.1d0
 return
 end

c -----
 real*8 function f2(x)
 implicit real*8 (a-h,o-z)
 dimension x(2)
 f2=x(2)*x(2)*x(2)-2.d0*x(1)*x(1)*x(2)-5.d0*x(1)-1.58d1
 return
 end

```

ちなみに答は  $(x, y) = (1.01372, 3.00137), (-1.90603, -2.05190)$  である。

### O.3.5 計算を途中でやめたり継続したりするには

構造物の非線形挙動を追跡するような長時間のシミュレーションの場合、せっかくある荷重レベルまで計算したのに、計算がなんらかの原因（停電等）で止まってしまった場合、また最初からやり直しになる。このよ

うな場合には、各荷重ステップのデータを一時ファイルに保存しておけば、止まったところからまた計算を始めることができ、効率的<sup>11</sup>である。例えば、2番のファイルをそのように使う例を書く

## 【例題 29】

```

dimension what(1000),is(1000),neces(1000),sary(1000)
c
c データ入力や最初の荷重ステップの直前までの準備しておく
c
c そして、初めての計算か、中断したところからの継続か
read(5,100) icon
open(2,file='temp.dat',form='unformatted')
c icon=0: 初めて =1: 中断継続
if(icon.eq.1)then
c 継続の場合、前回の最終結果の必要なデータを読んで巻戻し
 read(2) what,is,neces,sary
 rewind 2
else
c 初めての計算ならここでデータ what, is, neces, sary を初期化する
end if
c
c 実際各荷重ステップの計算はここから開始
c ここで各荷重ステップの長い計算をする
c そして、結果が出たとする 必要なデータだけとりあえず記憶する
c
write(2) what,is,neces,sary
rewind 2
c
c まだ続けるなら・・・次のステップの計算をする
c
close(2)
stop
end

```

のようにできる。各ステップの最後の結果だけを覚えておけばいいから、書き込む度に `rewind` で巻戻して<sup>12</sup>ある。人間が読めなくてもいいので、`unformatted` 形式にしてファイルの大きさを小さくしてある。

## O.3.6 繰り返し計算と増分計算

## (1) 弾性体モデルの場合

第1著者が東北大学に赴任した頃、増分表現しかできない（積みできない増分方程式で与えられる）弾塑性問題の数値解析に Newton-Raphson 法が用いられている研究を多数見て、実はかなり動揺した。そしてそれ以来、種々の論文や発表を通して、少しずつわかってきたような気がするの、それをまとめておこう。

まず、著者がきちんとした Newton-Raphson 法と呼ぶものの例を示しておこう。力学とは全く関係は無いが、ある多項式の関数で数値解析を試みる。対象とする関数（内力）が

$$f(x, y) \equiv 10x + x^2y + 2xy^2, \quad g(x, y) \equiv 20y + xy^2 + 2x^2y, \quad h(x, y) \equiv \frac{1}{6}(xy^3 + x^3y) \quad (\text{O.11a, b, c})$$

と定義されて、問題（つり合い式）は、与えられた  $p, q$ （外力）に対し

$$p = f(x, y) + h(x, y), \quad q = g(x, y) \quad (\text{O.12a, b})$$

与えられるものとする。Newton-Raphson 法で第  $n$  回目の解の改善に用いる接線係数（接線剛性）は

$$\left( K_{(n)} \right) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial(f+h)}{\partial x}(x_{(n)}, y_{(n)}) & \frac{\partial(f+h)}{\partial y}(x_{(n)}, y_{(n)}) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x_{(n)}, y_{(n)}) & \frac{\partial g}{\partial y}(x_{(n)}, y_{(n)}) \end{pmatrix}$$

<sup>11</sup> これも open source の汎用構造解析プログラム ‘SAP’ および ‘NonSAP’ で使われていた方法だったと思う。しかし、ハードウェアの構成によってはファイル IO にかかり時間がかかる場合もあるので注意する必要がある。

<sup>12</sup> 停電のときに2番のファイルが閉じるかどうかはシステムに依るかもしれない。

で定義され、改善は

$$\begin{Bmatrix} x_{(n+1)} \\ y_{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{(n)} \\ y_{(n)} \end{Bmatrix} + (K_{(n)})^{-1} \begin{Bmatrix} p - f(x_{(n)}, y_{(n)}) - h(x_{(n)}, y_{(n)}) \\ q - g(x_{(n)}, y_{(n)}) \end{Bmatrix} \quad (\text{O.13})$$

で行われ、なんらかの誤差が許容範囲に入るまで繰り返すというものだ。この右辺のベクトルは、第  $n$  回目の解が持つ不整合な量（不つり合い力）で

$$\begin{Bmatrix} p - (10x_{(n)} + x_{(n)}^2 y_{(n)} + 2x_{(n)} y_{(n)}^2) - \frac{1}{6} (x_{(n)} y_{(n)}^3 + x_{(n)}^3 y_{(n)}) \\ q - (20y_{(n)} + x_{(n)} y_{(n)}^2 + 2x_{(n)}^2 y_{(n)}) \end{Bmatrix} \quad (\text{O.14})$$

と陽に表現できる。これは式 (O.11) で陽に関数が定義されているからである。第 C.6.2 節において極分解の定理を応用して定式化した弾性梁の面内有限変位解析法では、増分関係は必要無いことから、不つり合い力を陽に定式化でき、きちんとした Newton-Raphson 法を適用できている。ただし、接線剛性は非対称行列になる。

これに対し、例えば増分関係でしか表現できない塑性モデルがこの関数  $h$  に含まれている場合をあとで検討しよう。そのため、ここではまだ元の関数  $h$  のままで、増分を用いた Newton-Raphson 法を説明しよう。多分、こういう方法を多くの研究者が用いているのではないかと想像している。まず  $h$  の増分は式 (O.11) の増分をとることにより

$$\Delta h = \Delta x \frac{1}{6} (y^3 + 3x^2 y) + \Delta y \frac{1}{6} (3xy^2 + x^3) \quad (\text{O.15})$$

と求められる。そこで、式 (O.14) の代わりに、その不つり合い力を

$$\begin{Bmatrix} p - (10x_{(n)} + x_{(n)}^2 y_{(n)} + 2x_{(n)} y_{(n)}^2) - \sum_{i=1}^n \Delta h_{(i)} \\ q - (20y_{(n)} + x_{(n)} y_{(n)}^2 + 2x_{(n)}^2 y_{(n)}) \end{Bmatrix} \quad (\text{O.16})$$

のような増分で近似計算をすることにしよう。ここに  $\Delta h_{(i)}$  は式 (O.15) から

$$\Delta h_{(i)} \equiv \Delta x_{(i-1)} \frac{1}{6} (y_{(i-1)}^3 + 3x_{(i-1)}^2 y_{(i-1)}) + \Delta y_{(i-1)} \frac{1}{6} (3x_{(i-1)} y_{(i-1)}^2 + x_{(i-1)}^3)$$

のようにしてみる。ただし初期値は

$$x_0 = 0, \quad y_0 = 0, \quad \Delta x_0 = 0, \quad \Delta y_0 = 0$$

とする。この方法をこの文書では、厳密な（きちんとした）Newton-Raphson 法と区別するために増分 **Newton-Raphson 法** と呼ぶことにしよう。この近似のために、繰り返しの収束半径は小さくなって、与えられた  $(p, q)$  に対して、必ずしも 1 回で解を得ることができるとは限らなくなる。そのため、与える量も何回かに分割して増分  $(\Delta p, \Delta q)$  を与えながら、各増分ステップ毎に繰り返し収束計算をすることになる。

上の式を用いて解析した例を示してみよう。与える量の  $(p, q)$  の組は  $(250, 200)$  としておくが、特に意味は無い。収束判定をする誤差は

$$\sqrt{\frac{\Delta x_{(n)}^2 + \Delta y_{(n)}^2}{x_{(n)}^2 + y_{(n)}^2}} < 10^{-9}$$

とした。まず、厳密な Newton-Raphson 法の式 (O.13) を用いた場合には、 $(p, q) = (250, 200)$  をステップ分割せず直接与えても 20 回以内の繰り返しで解に収束した。これを  $p$  と  $q$  の比は一定にしたまま（比例载荷）で 50 ステップに分割して得た解を図 O.5 に一点鎖線（太い実線と重なってしまっている）で示した。これに対し、増分 Newton-Raphson 法の式 (O.16) で 500 ステップで求めたのが実線である。破線はステップ数を少なくした場合の結果であるが、100 ステップで十分な精度が得られている。

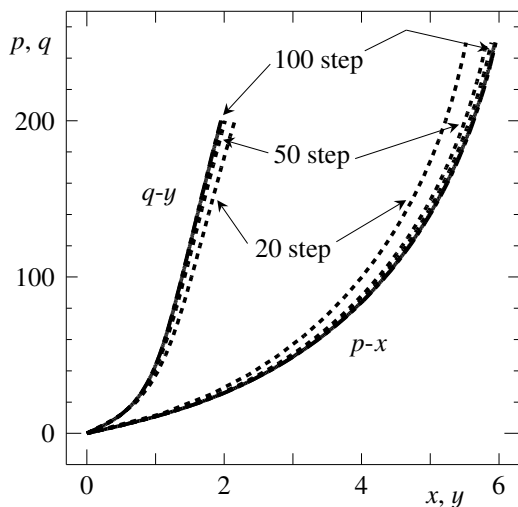


図 O.5 増分 Newton-Raphson 法の精度

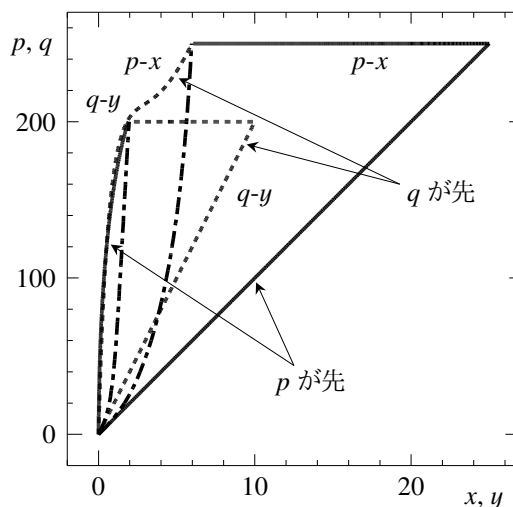


図 O.6 弾性体は履歴に非依存

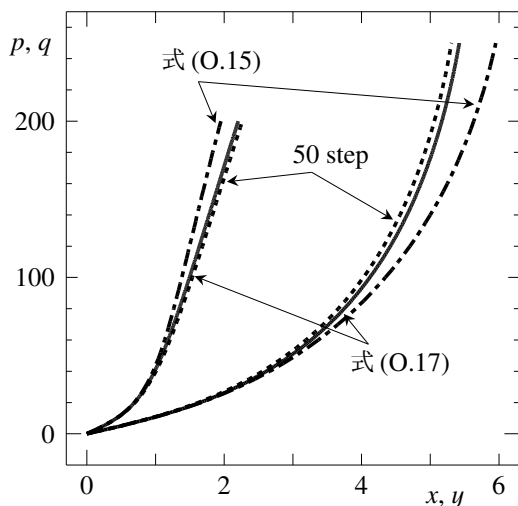


図 O.7 増分関係しか定義できないモデル

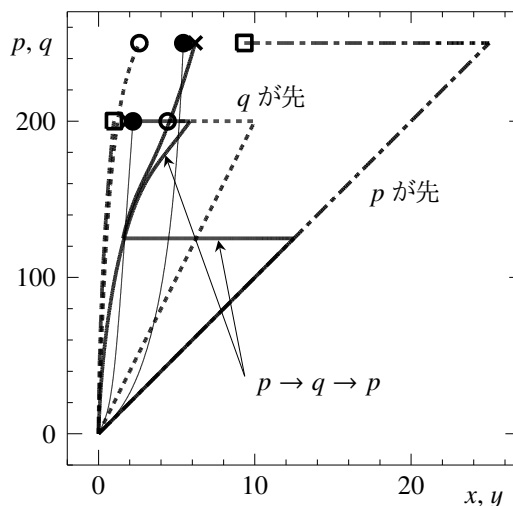


図 O.8 弾塑性体は履歴依存

一方図 O.6 には、荷重の順序を変えた場合の結果を実線と破線で示した。一点鎖線が図 O.5 の比例荷重の場合の結果である。実線は  $p$  を先に、破線は  $q$  を先に作用させた場合であるが、式 (O.11) から明らかのように、 $p$  を先にしたときは  $x$  が、 $q$  を先にしたときは  $y$  が線形解として求められている。しかし、いずれにしても、最終的な  $(p, q) = (250, 200)$  における解はすべて一致している。これは、式 (O.11) には履歴依存が無いから、つまり  $p$  と  $q$  の与え方に依存することが無いからである。

(2) 弾塑性体モデルの場合

では次に、 $h$  が増分関係でしか与えられず、 $h$  そのものを  $x$  と  $y$  の関数として定義することができない場合を対象としてみよう。第 11.2.3 節で説明したように、一般には流れ則は積分可能ではないから、その簡便な例をここで示そうとしている。特に意味は無いが、式 (O.15) を大胆にも・・・呵呵

$$\Delta h = \Delta x \frac{1}{6} (y^3 + 4x^2y) + \Delta y \frac{1}{6} (2xy^2 + x^3) \tag{O.17}$$

と変更してみた。下線を引いた部分の数値は両方共元々は '3' だったから、これを積分して  $h(x, y)$  を求めることはできず、これがちょうど流れ則に相当する。つまり、 $\Delta h$  の代数和でしか  $h$  を計算できない点で、積分不



可能な塑性ひずみ増分を代数和で求めることに相当している。したがって増分 Newton-Raphson 法でしか解析できない。

図 O.7 がその結果であるが、 $(p, q) = (250, 200)$  をその比で 500 ステップで載荷した結果が実線である。一点鎖線が前節の式 (O.15) のモデルの結果である。破線が 50 ステップで載荷した場合の結果であるが、このくらいでも精度はさほど悪くない。増分関係は大胆に変更したが、最終状態にはあまり違いが出ていないようにも見える。そこで、載荷の順番を変えた場合の解析をしてその結果を図 O.8 に示した。細い実線が図 O.7 の比例載荷の結果である。最終状態は塗りつぶした丸 (●) で示してある。これに対し、破線は  $q$  を先にしたもので最終状態は白抜き丸 (○)。一点鎖線は  $p$  を先に載荷して最終状態が四角 (□)。実線は  $p$  を半分載荷したあと  $q$  を最後まで載せて、そのあと残りの  $p$  を載せたもので最終状態は罰点 (x) である。このように載荷履歴に影響を受けて最終状態が異なり、塑性の特性をよく現していることがわかる。実例は第 11.3.3 節に示した。

(3) 接線剛性は何でもいい

第 1 著者が東北大学に赴任した頃に動揺したことがもう一つある。それは「接線剛性は何でもいい」という表現だった。元をたどると「修正 Newton-Raphson 法」という名称で知られている方法に原因があると想像するが、これは収束繰り返し計算時の最初の接線剛性を更新せずに用いる方法である。しかし、弾塑性増分理論においては物理的に意味のある接線剛性を定義できるため、それを正しく用いるのが望ましい。それを曖昧に定義すると、繰り返し計算の収束半径が小さくなるだけでなく、場合によっては収束すらしない可能性も高くなるからだ。上記の「修正 Newton-Raphson 法」は、接線剛性を更新はしないものの、用いる剛性は物理的に正しいものを用いているために問題が生じない。

(4) 単純な増分計算

このように、履歴依存の弾塑性モデルの場合はもちろん、そうでないとしても、式 (12.134) のように応力の更新のためにはある程度小さい増分の範囲でステップ毎の計算をしなければならないことを考えると、わざわざ繰り返し計算をしなくてもいいのではないかと、誰もが考えるだろう。つまり荷重増分  $(\Delta p, \Delta q)$  に対して単純に

$$\begin{Bmatrix} x_{(n+1)} \\ y_{(n+1)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_{(n)} \\ y_{(n)} \end{Bmatrix} + (K_{(n)})^{-1} \begin{Bmatrix} \Delta p \\ \Delta q \end{Bmatrix}$$

のようにして、増分つり合い式を時々刻々累積して計算したときに生じる誤差は、増分 Newton-Raphson 法と同程度ではないかと予想される。そこで、前節の弾塑性体モデルを、繰り返し無しに、単純に接線剛性を用いて累積計算してみたのが図 O.9 である。

いずれも 50 ステップで最終状態までを求めてみた。繰り返し計算の結果を細い線で、単純な増分計算の累積結果を太い線で描いたのだが、ほとんど重なって見分けがつかない。また細い破線は、比例載荷の場合を 10 ステップで計算したものだが、この程度の誤差しか無い。インセットの図は比例載荷の結果だけを抽出したものである。このような高い精度の結果が、すべての有限変形理

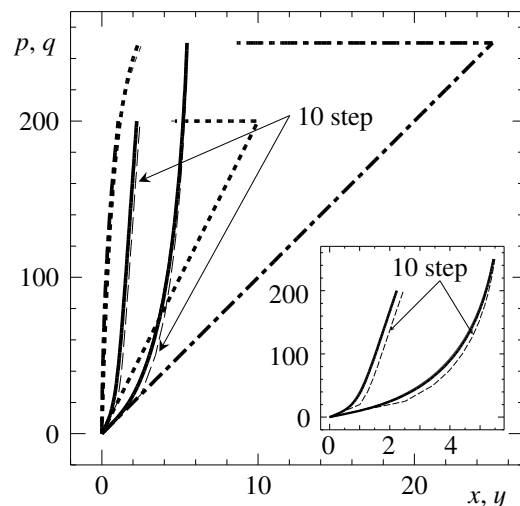


図 O.9 単純な増分計算

論の枠組の弾塑性解析で成立するとは考えていないが、所詮流れ則のような関係と増分による更新を余儀なくされる解析で、増分つり合い式に基づく解析には間違いは無く物理的にも十分に意味が有る。事例は第 11.3.3, 12.7 節に示した。

## O.4 その他の一般的なこと

プログラム単位中の文の順序: 一応は次のようにすると間違いが無い。

```

program 文や subroutine 文・function 文
 implicit 文
 dimension 文や common 文
 data 文
 文関数定義文
 この後ろに算術代入文等の実行文
 end 文

```

注釈行は end 文の前ならどこでもいい。format 文も program 文等の後ろで end 文の前ならどこでもいいが、end 文のすぐ前か、各宣言文の直後にまとめた方が見易い。

間違いの無いプログラムを書く順序と手続き: 第 1 著者が常々やるべきだなあと思いながら実行していない手順である。

1. プログラムする式をすべて紙にきれいに書く。紙に書けない式はプログラムもできない!
2. 紙に書いた式を用いてフローチャートをだまかに書く。短いプログラムなら頭の中に描いてもいい。
3. 書いた式に現われるすべての定数・変数を表にする。そして、それに対応するプログラム中の変数名を書く(変数表の作成)。
4. 各変数の初期化をどうするかについて変数表に書き込む。どれが data 文でどれが代入文, どれが read 文による入力か等も含む。
5. read 文による入力変数の順番と format を決める(input フォーマットの作成)。これはそのまま他人へのユーザーズマニュアルに流用できるくらい詳細でなければならない。
6. どの変数を出力するのかについて変数表に書き込む。これで、ユーザーズマニュアルの出力書式説明の資料ができる。
7. プログラムを作成開始する。
8. たいていの場合は、幸運を祈ってがんばる。
9. 一度もエラーが無く答が出たときは、まず答を疑うこと。たいていの場合、間違っている。たった一回で正しいプログラミングができるはずはないと謙虚になる。
10. 1 週間以上前に作ったプログラムを変更する場合は、絶対に元のファイルを直接変更することはせず、必ず別のファイル(プログラム名も違うものにする)にコピーして、そちらの方を使って作業すること。後悔先に立たずである。Murphy の法則は常に正しい。

# 付録 P

## 支援ソフトウェア

### P.1 数学に関する自作ではないソフトウェア

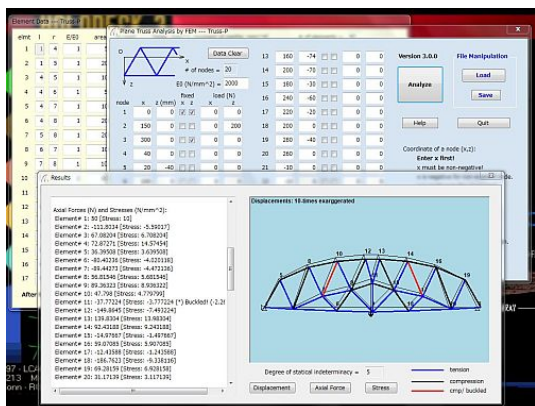
特に昨今の留学生が自分の能力を示すときに Matlab を使えるといったことを書いてくる。電卓を使うことと同じだと思うのだが、それが研究能力なんだろうか。ということで、お金も無いので freeware の Scilab をインストールしてみた。これは実はプログラミングツールなんだなあ。そこで数式処理システムも freeware の Maxima をインストールしてみた。なんと Bessel 関数  $J_{-\frac{1}{3}}(x)$  を積分できて

$$\int J_{-\frac{1}{3}}(x) dx = \frac{3 \cdot \text{hypergeometric}\left(\left[\frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right], -\frac{x^2}{4}\right) \cdot x^{2/3}}{2^{2/3} \cdot \Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}$$

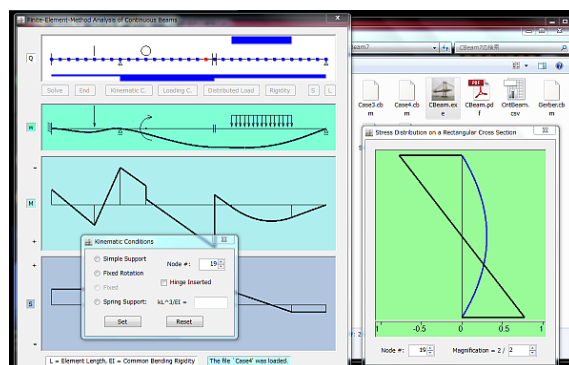
と教えてくれる。うーむ。確かに研究には役立つけど・・・ただそれだけではないか。

### P.2 力学に関する自作のソフトウェア

平面トラスの解析: Truss.for が FORTRAN77 のソースであり, Truss-P.exe は Visual BASIC に<sup>1</sup>よるプログラム。後者の場合は, 荷重を大きめに設定しておけば, 座屈する可能性のある部材も表示される。例えば図 2.13 (p.23) のような図示が可能。

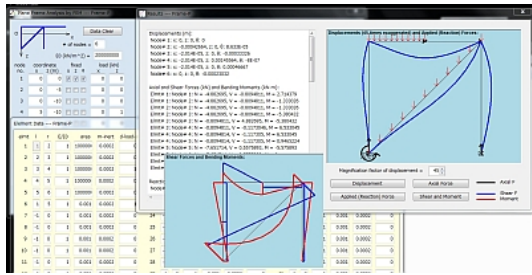


連続梁の解析: Cbeam.exe が Visual BASIC によるプログラム。32 個の有限要素限定だが, 各種荷重やバネ支持も可。各節点断面の応力分布も表示。CSV データファイル出力有り。L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の出力を使って図 2.42 (p.37) のような図も描ける。



<sup>1</sup> OS の版によってはランタイム・ライブラリをダウンロードしてインストールする必要がある。Windows10 ではその必要は無い。

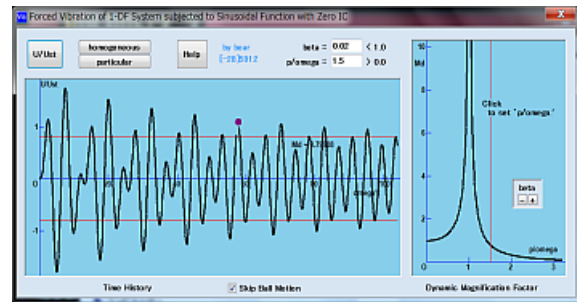
平面骨組有限要素解析: `Frame.for` が FORTRAN77 のソース。著名なプログラムの 'SAP' 方式を真似てメモリ獲得をしているので、使用可能要素数増は一つの配列のサイズ変更で対応できる。`Frame-P.exe` が Visual BASIC のプログラム。`Frame-Q.exe` ではヒンジを途中に挿入でき、集中モーメント载荷もできる。



平面骨組有限変位弾性有限要素解析: `Pframe.f` が FORTRAN のソース。例えば図 C.4 (p.719) のような解析ができる。図化には別途工夫が必要。伸びの影響をより厳密に考えるか否かという選択と、せん断力の構成則の選択ができ、表 C.5 (p.720) の 6 種類

のモデルの解析ができる。

1 自由度系の正弦波強制振動解析: `Vibration.exe` が Visual BASIC によるプログラム。外力周波数と減衰係数を入力して、ポール運動のような模擬動画表示ができる。CSV データファイルと L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の出力有り。

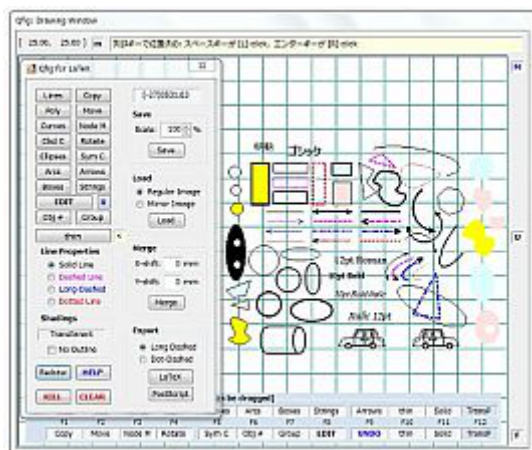


平面ひずみ有限要素解析: `Fem2d.for` と `Fem2dSky.f` が FORTRAN77 のソース。後者はスカイライン法でメモリ節約したもの。例えば図 5.41 (p.262) のような解析ができる。図化には別途工夫が必要。

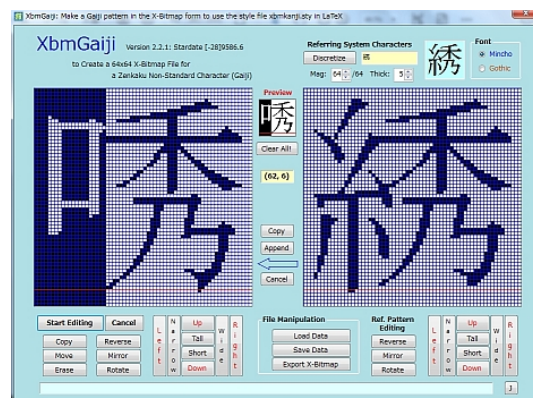
### P.3 文書作成に関するソフトウェア

#### P.3.1 自作のソフトウェア

描画: 絵あるいは図を描くための draw 系プログラムが `Qfig.exe` で、Visual BASIC で作られている。出力は L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 用と PostScript 記述のみ。正確な図はマウスではなくキーボードを使う。あるいはデータファイルの直接編集という手もある。

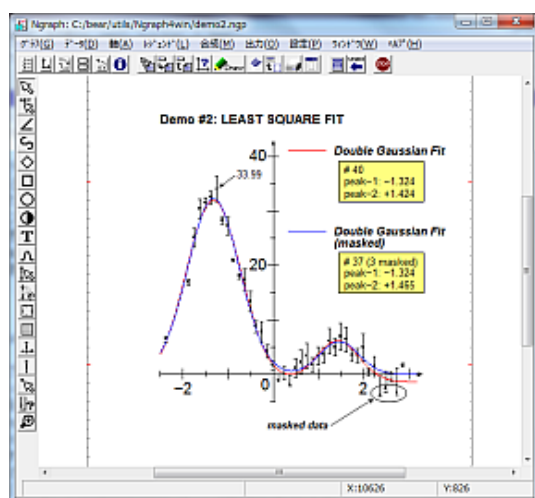


外字作成: スタイルファイル '`xbmkanji.sty`' を利用して外字を表示するときの、字そのもの (例えば「秀」) を作成するプログラムが `Xbmgaiji.exe` で、Visual BASIC で作成してある。X-bitmap 形式のドットイメージの外字である。



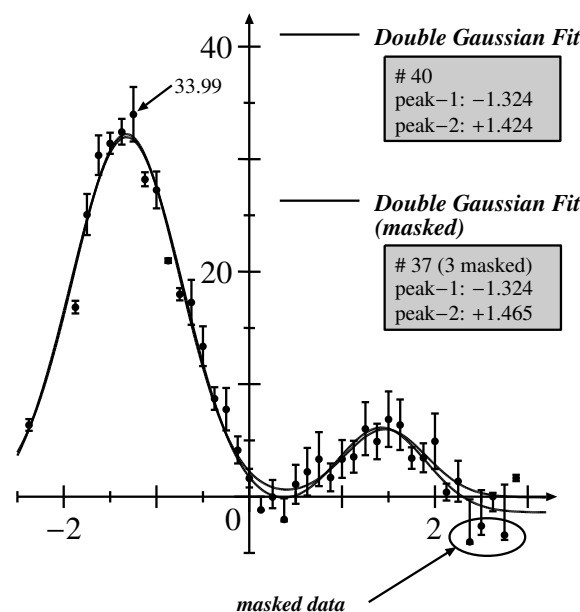
図化: データを正確にグラフにするためのプログラムは各種あるが, 第1著者は石坂氏の Ngraph v.5.45, 5.46 を長年利用し続けてきた。そのあと Windows 版も公開され, それも freeware になったので今はこちらを使っている。なお DOS 版の場合は, 等高線と透視図を描く外部プログラム LePont, LPNG.EXE がある。図 8.12 (p.371) のような図を作成できる。

このプログラムの出力を L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 用に変換するドライバが自作の Gra2eepic.exe で, Visual BASIC で作成してある。右の図が変換例である。



Ngraph のスペーシングは PostScript のそれをデフォルトにしてあるので, L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 化するに当たっては若干の位置の調整と, 文字列とその位置の微修正が必要となる。その代わり, 数式等を文書本文と同じ T<sub>E</sub>X の数式フォントに置き換えること等ができる。この例はそのような調整をせずに直接変換したものである。

#### Demo #2: LEAST SQUARE FIT



### P.3.2 自作ではないソフトウェア

図化: 前述の Ngraph が, データ加工も含む種々の機能が搭載されていてとても便利だ。

フローチャート作成: flow.c が L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X 用にフローチャートを作成するプログラム。C で書かれていて, 例えば Cygwin 等のコンパイラで実行形式にできる。図 5.27 (p.238) のようなチャートを作ること

ができるが, 命令は簡単なテキストデータとして与えるようになっている。p.986 にそのソース例を示したので, 図 5.27 と比較すれば仕組みがわかる。

宇宙暦生成: stardate[s].c が宇宙連邦で制定された暦を生成する。2162年1月4日が0000なので, 今は負(制定前)である。

## P.4 学位論文審査に関する L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X ファイル

L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X による学位論文のスタイルファイルとテンプレート 'tu-civil' は

<http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/soft/index-j.html#StyleFiles>

にあり, 関連する情報(付録 Q の内容に論文体裁例等を加えたもの)が

<http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/presentation/>

に置いてある。また, スライド作成のヒント 'hw2slide.zip' を

<http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/bear-collections/index-j.html>

の「スタイルファイルの記述とリンク一覧（日本語）」の見出しに続く文の「使い方の例」に置いた。

```
Oval 4 1
 start
Box 9 2
 節点・要素の
 幾何・材料情報入力
Box 9 2
 要素毎に剛性行列 \mathbf{k} と
 座標変換行列 \mathbf{T} を算定
Box 9 2
 直接剛性法で
 全体剛性行列 $\overline{\mathbf{k}}_o$ を算定
Box 9 3.5
 集中外力条件を $\overline{\mathbf{f}}^c$ に代入し
 要素分布外力 \mathbf{f}^d を座標変換
 した $\overline{\mathbf{f}}^d$ と共に $\overline{\mathbf{f}}$ を算定
Box 9 2
 変位境界条件で $\overline{\mathbf{f}}$, $\overline{\mathbf{k}}_o$ を修正
 式 (\ref{eq:5-stiffeq}): $\overline{\mathbf{f}}_m = \overline{\mathbf{k}}_m \backslash, \overline{\mathbf{u}}$
Choice . . \raisebox{0mm}[0pt][0pt]{Yes} ~ No 6 3
 $\det \overline{\mathbf{k}}_m \neq 0$?
Tag
Tilt 7 1
 境界条件の設定間違い
Right 4
Oval 4 1
 error stop
ToTag
Right 2
Box 9 4
 式 (\ref{eq:5-stiffeq}) を解き
 $\overline{\mathbf{u}} = (\overline{\mathbf{k}}_m)^{-1} \backslash, \overline{\mathbf{f}}_m$
 全体座標系で変位を求める
Up
Tilt 7 1
 これで 8 回目到達
Box 9 2.5
 $\overline{\mathbf{f}}^c = \overline{\mathbf{k}}_o \backslash, \overline{\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{f}}^d$
 全体座標系で反力を求める
Box 9 2
 要素毎に $\mathbf{u} = \mathbf{T} \backslash, \overline{\mathbf{u}}$
 要素座標系で変位を求める
Box 9 2.5
 要素毎に $\mathbf{f} = \mathbf{k} \backslash, \mathbf{u} - \mathbf{f}^d$
 から節点の内力を求める
Choice ~ No \raisebox{0mm}[0pt][0pt]{Yes} . . 6 3
 他の問題を解く?
Tag
Oval 4 1
 end
ToTag
Left 2
Tag
Left 1 *
ToTag
Down 1 *
Tag
Down 8.25
Left 1 *
ToTag
SetTrack none
Left 1
Right
TxtPos [1] [1]
Text 4 2
 {\footnotesize ~ 境界条件}
 {\footnotesize ~ のみの変更}
```

フローチャート図 5.27 (p.238) のソース; なお  $\def\fat#1{\mbox{\boldmath{\$#1}}}$

## 付録 Q

# 卒業論文等の書き方とプレゼンテーション，そして大学とは

## Q.1 論文とは

### Q.1.1 論文の目的

対象とした問題に対して自分で得た結論までの過程を，説得力があり誤解が生じないように論理的に組み直した上で記述して，その問題の分野を専門とする読者（卒業論文の場合は教室の教員）に報告する形式で表現することが，論文執筆の目的である。それはレイアウトするという意味ではなく，内容を論理的にかつ誤解が生じないように記述することである。この章では主に文献 [173] を参考にした。とても役立つ良書である。ところで，嘘を書いたり他人の業績をコピーすることが許されないのは倫理に関する必須条件である。ただ，論文表現についての興味深い記述 (p.1013) は何かの参考になるかもしれない。呵呵。

著者が関係する学会論文集等への投稿原稿（査読時）でも見られる悪い例として

- 1 段落に 1 文（か 2 文）しかなく，それが数段落続いて並ぶ。つまりは，単なる箇条書きをそのまま論文にしただけの文章で，全く論理が見えない。
- 一つの段落の中の論理が明確ではなく，異なるトピックスについて順不同で書かれている。「まえがき」は教員が見てくれたのか，よくまとまっているのに，次の章になった途端に箇条書き様の文が並ぶ。教員の怠慢か。
- ソフトウェアのデフォルトのままの出力の図で，線の太さも 1 種類しか使われておらず，どれが一番着目すべきであるか等が一見してはわからない図が並ぶ。
- 他人の仕事と自分のやったことの区別が明確ではない。また，適切な文献（もちろん査読者の仕事という意味ではない）が引用されないまま，不十分で中途半端な数式や記述が並ぶ。
- 使用した装置やソフトウェアのマニュアル中の図や，他人の論文の図表等を，そのままスキャンして用いる等，知的財産権のことに全く留意せずに使っている。

等が挙げられる。こういったことが生じないように，まずこの章の前半では，論文執筆の目的に関連した必要最小限のアドバイス<sup>1</sup>を与える。

<sup>1</sup> 中田亨氏による「やればできる 卒業論文の書き方 (<http://www015.upp.so-net.ne.jp/notgeld/sotsuron.html>)」というものがあり，特に「ダメな論文を書く 14 の方法」は優れものだ。例えば『途中で印刷して紙の上で推敲しない。グラフは Excel 様のなすがままに，いいかげんに作る。テーマの平凡さを，[道具 | 数式] のすごさで誤魔化す。やりそこなったことを寄せ集めて「これらは将来課題である」とする。』である。肝に銘じておくべきだろう。このページは無くなったようだ。残念。ただあるブログにコピーがあるようだ。

また一般に投稿先の論文集毎に詳細な執筆要領が決められており, 論文を投稿する際にはそれを守った原稿だけが受け付けられる。ここでは一例として土木学会論文集を基本とし, それを若干拡張し, 審査対象になる論文が備えるべき最低限の執筆要領も記した。また卒業論文等を念頭に置いて, 最終審査会におけるプレゼンテーションの注意事項とマナーも列挙しておく。なお文献 [178] は, 英語による執筆についてだけではなく論文の書き方についても役立つ。最近出版された秋田大学の後藤文彦先生の著書 [136] ではこの章が引用されているが, 実はこの内容は, 第 1 著者が学生のとき所属した研究室の西野文雄・長谷川彰夫両先生による論文の執筆と発表の手引きを下敷きにしたものである。

### Q.1.2 論理的構成を持った論文

一つの論文はいくつかの「章<sup>2</sup>」で構成され, それぞれの章の内容と目的等はお互いに少しずつ異なっている。そして, 各章の中身(題目)と章の順番は, 報告が容易に理解できるようになっていなければならない。この中身(題目)と順番を最適にすることが, 論文執筆の最も重要な第 1 ステップである。よく自分の卒業研究の経緯のままの草稿を書いてくる学生がいる(第 1 著者がまさにそうだった)が, 自分が試行錯誤した順番が他人の理解を容易にする論理構成順になるとは限らないことには十分注意すべきである。

そして, 原則としてまえがきと結語の章を除き一つの章には複数の「節」が存在する。それぞれの節も, その内容と目的等はお互いに少しずつ異なる。この節を章の中で, どのような題目でどのような順序で並べるべきかという点も, 論文を他人に理解してもらうために考慮すべき重要な点の一つである。一つの節には複数の「段落」で構成された文章が, 論理的に並ぶ。段落は複数の「文節」で一つのことを述べるように構成される。こういった章・節の並びは, ワードプロセサを使った版下執筆を念頭に置いた人にとっては書式構成あるいはレイアウト構成と思われがちだが, これは論理構成に沿って配されるべきものである。

そういう意味で, 文節と文節は必要に応じて適切な接続詞で関係付けられていなければならない。同様に, 段落と段落の間にも必要に応じて適切な接続詞を付すべきであろう。しばしば段落の始めか前の段落の最後に, 次に説明することについて予告編のような 1 文, 例えば

次に, 前述の○○の定義と△△モデルへの導入について説明する。

といった文を付ける者がいるが, それは論理的に文章が書けていないことを意味する。そうするよりも, 適切な接続詞を使って, 前の段落を受けて次にする説明そのものをすぐに始める方が読み易いし, 理解され易い。また, そうなるように, お互いの段落の中身と表現が選ばれていなければならない。わかり易い文章を書くヒントについては文献 [187] (読むのは前半のみでいい) がたいへん役に立つので, 是非読んで欲しい。また, 接続詞等の論理的な記述については, 元々は英語の文章記述法ではあるが文献 [144] (英作文については今は読み飛ばしていい) がとても参考になる。つまり, 目次をきちんと作る(設計する)ことが最初の最重要な作業なのだ。

また過去に読ませてもらった修士論文等で時折見られたことであるが, 例えば

韌性(toughness)を確保するために・・・

のように英訳を括弧書きで記す学生がいる。これは教科書中の説明のように, 初学者への情報提供の場合に用いる教育的手段であって, 学位論文や一般の投稿論文あるいは技術報告書のような専門知識のある教員や上司に提出する文書では使ってはいけない。実際に学会等の学術論文集の中を眺めれば, そういった記述が全く無いことがわかるはずだ。さらに原則として脚注は用いないこととする。これは, 審査員や読者の読み方によ

<sup>2</sup> 卒業論文等の学位論文では「章」であるが, 通常の論文集の 1 編の場合は「節」であり, この節の中に現れる「節」は「項」と読み直して欲しい。



ては、論文の論理の理解を一時的に中断させる役割を持つてしまう可能性があるからだ。もし本当に重要な内容なら本文にきちんと書くべきであり、それほどでもない内容ならそもそも書く必要は無いが、あるいは付録（補遺）に並べればいい。

また卒業論文等にとっても多くの図表を並べる者がいるが、それが審査員の理解を深めるとは限らない。むしろその逆であり、例えば

・・・の場合の結果を示した図 12~31 を比較すると、A が B であることが明らかである。次に、図 32~50 には・・・A が B ではない場合があり得ることも予測できる。そこで・・・

といった表現を何度も読まされたことがあるが、このような場合には、自分が審査員になって一度に 20 枚もの図を眺めさせられて、しかもそのどこをどう比較すればいいのかといった記述も無いのに、たった一つの結論の「A が B である」ことを理解せよと言われていることを想像してみたい。そうすれば、このような文は無いに等しいことがわかるはずだ。結局、通常の出版されている論文 1 編に含まれている程度の図表の数の範囲で、論理的に成果を報告すべきである。したがって上の例は、例えば

・・・のパラメータを 0.1 として表 4 に示した 20 通りの  $\alpha$  の値を用いた場合の結果をまとめて比較した図 7 からは、a であることや、b であることが明らかなることから、c でありさえすれば A が B であることになる。一方、 $\alpha$  を 0.5 に固定して・・・比較した図 8 からは C が D である・・・また図 9 と図 10 に示したのは、典型的な 2 種類の  $\beta$  を用いた場合の結果であるが、その比較からは、上述の「A が B である」結論は、限定された条件のときにしか・・・

のようになるべきなのだ。

卒業論文等は実施して得た成果に基づいて審査をしてもらうためのものなので、今後の課題等のやっていないことは書かない。審査会に出席している他の先生にわざわざ新しいテーマを教えてあげる必要は全く無いのだ。また卒業論文等は自分の研究の自分の勉強メモではない。すなわちそれは、やったことや学んだことをすべて、その過程の順番に沿って記しておくような備忘録ではなく、専門家に提出する専門的な報告書であることに注意すべきである。もし自分用あるいは研究室用の備忘録を作りたかったら、論文とは別に作成し、そちらには証拠となるすべての図や情報・プログラムをファイルするのが望ましい。卒業論文や修士論文そのものは、そのできあがりそのまま土木学会の各種論文集への投稿原稿 1 編ないし 2 編程度になるように、情報の適切な取捨選択と文章構成と表現がなされるべきである。

### Q.1.3 自分自身の成果と他人の成果

卒業論文で時折見られることであるが、単にページ数を増やすだけの目的で引用もしない情報を羅列する学生がいる。例えば自分が研修をするのに必要だった勉強で得た知識や既往の研究の結果を誘導する過程、つまり教科書や既発表論文に載っているような理論や式・説明を並べた節を設ける学生がいる。あるいは、自分が引用したい他人の式とその誘導過程をすべてコピーして論文に含める者もいる。これは全く意味が無い。というのも、前述のように論文は専門知識のある教員に提出する報告書だからである。研修をするに当たって自分が勉強して理解した新しい知識の大半は個人の備忘録に含めるべきであり、論文には載せるべきではない。つまり本文中で引用しない情報は論文には含めてはいけなく、引用すれば済む式や説明は書き込まずに文献を引用してその文献番号を付すだけで十分だ。

これに対し、自分の論文の位置付け等を述べるために、どうしても教科書や他人の論文にある文章や式を論文中で用いなければならない場合には、必要なものだけ代表的なものだけを書く。つまりこの場合も、誘導過

程等の他人の成果をそのままコピーして論文に載せることはしない。さらに、引用文や式の箇所には必ず引用した文献を記しておく。また他人の文章を引用する場合には、原文をそのまま引用符の中に入れて

誰某<sup>5)</sup>によれば「何野の○△理論を用いたモデル化からは・・・という結論にはな」り得ないことが定説となっている。

のように表現する。ただし、その際にも必ず引用した論文の出典をこの例の「誰某<sup>5)</sup>」のように明記する必要がある。その文献を文献リストに載せなければならない。また引用した括弧の中の文字列は元の文章と寸分違わないように<sup>3)</sup>しなければならない。上の例の場合の原文は「何野の○△理論を・・・結論にはならない。」になっているので「何野の・・・」から「・・・にはな」までしか引用できないのである。

逆に自分自身が得た成果は、そうであることを読者が誤解無く理解できるように記述されなければならない。つまり他人のこれまでの成果との関係を明記した上で、この研究によって明らかにされたことが何なのか、そのうちどこが既存の結果と同じなのか異なるのか等について、明確に判別できるような表現になっていないといけない。実はこの自分の成果と他人の成果を区別していないのではないかという注意は、他専攻の(著者の研究分野ではないが応用力学に含まれる分野の研究を遂行しておられる)先生からも電話で苦情を頂いたことがある。土木学会の論文集への投稿論文(著者ではない!)の査読を依頼されたその先生から「土木の分野では他人の成果も自分のもののように記述していいのか。あるいは、どこが自分の成果なのか明示的にはしないのが慣習か」と問われたことがある。十分に気を付けなければならない点である。

## Q.2 論文の執筆要領

### Q.2.1 文章のスタイルと章建て

卒業論文・修士論文執筆では版下原稿を作ることを目的とはしていないため、上下左右に十分なマージンをとった上でA4サイズの用紙に、英文で言うところのダブルスペース程度で、例えば2バイト(全角)文字40字が24行程度で用紙片面に書くこととする。ページ番号は、表紙から目次の最後までの前文ではローマ数字で*i*から振る。本文は第1章から最後までをアラビア数字で振る。前文のページ番号の配置は、表紙を*i*とするが表示しないものとし、それ以降は下マージン中央あるいは上マージン右に置く。本文のページ番号は、章タイトルのあるページは必ず下マージンの中央とし、それ以外のページは下マージン中央あるいは上マージン右とする。

前文には、表紙の次に、修士論文の場合でもし必要なら審査員のリストを置くことができ、その次には論文概要を書く。論文概要はまえがきではなく、章構成の説明文<sup>4)</sup>でもない。そこには論文の目的から結論に至るまでの論理的な流れが容易に理解できるように書く。つまり、何が問題で、その対象をどうモデル化し、どういう観点からその問題解決を図ろうとしたか、そして得られた成果から主張できることは何か、について簡潔に述べ、審査員が概要のみを眺めて中身を容易に理解できるようにすべきである。もし謝辞を前文に置くならその次に挿入し、その後ろに目次を書く。目次の最後には表・図・写真の目次を置くこともできる。

本文の第1章は、例えば「まえがき」あるいは「序論」等で始める。章は見出し番号を付して「1. まえがき」「2. モデル化」のようにする。あるいは「第1章 まえがき」のようにしてもいい。章の中の大きな節は両括弧の見出し番号を付して「(1) 解析対象」「(2) その数値モデル」のような土木学会方式を使うか、あるい

<sup>3)</sup> 句読点種や縦書き横書きの差異くらいは許されると思うが。

<sup>4)</sup> 学位論文にこれを書いてあることが多い。全く面白くもないし、何の情報にもなっていないのである。これは、我が国の博士論文の多くが各章毎に既発表論文を並べるからだろう。審査員が審査する前に学外の査読者が審査したものを大学で再審査して学位を与える意味があるのだろうか。審査員を馬鹿にしていることにならないのだろうか。ところが最近、修士論文のまえがきに章構成の説明文を書く学生さんが増えてきた。学位論文はそのまま(これから)投稿(する予定の未発表)原稿になるような内容になっていて欲しいと思うのは著者だけだろうか。

表 Q.1 ページの構成

|                                      |                                          |
|--------------------------------------|------------------------------------------|
| 前文: 論文の付随的な情報のページ群                   | n 第2章                                    |
| i 表紙: ページ番号は表示しない。                   | n+u 【章末選択オプション】参考文献リスト                   |
| ii 【オプション】修士論文の場合には審査員リストを置いてもいい。    | n+v 【章末選択オプション】表・図・写真<br>… 第3章・・・と順に続ける。 |
| ii+p 論文概要を少なくとも2ページ。(p ≥ 0)          | M 終章                                     |
| ii+q 【原則】謝辞                          | M+x 【章末選択オプション】参考文献リスト                   |
| ii+r 目次: オプションとして, 表・図・写真目次を付けることも可。 | N 補遺                                     |
| 本文: 論文の本体                            | N+y 【原則】全参考文献リスト                         |
| 1 第1章                                | N+z 【原則】全表・図・写真                          |
| 1+s 【章末選択オプション】参考文献リスト               | - 【巻末選択オプション】謝辞: ページ番号は振らない。             |
| 1+t 【章末選択オプション】表・図・写真                |                                          |

は、「2.1 解析対象」「2.2 その数値モデル」のように章番号を付して使うかのいずれかとする。節の中には、もう1段小さい節(「項」)を設けることができる。土木学会方式を使う場合には「a) 構成モデル」「b) パラメータの定義」のようになるが、章番号を使った節見出し番号を用いる場合には「2.1.1 パラメータの定義」「2.1.2 その数値モデル」のようにする。それより小さい節を使ってはいけない。いずれの場合も統一をとる必要があり、上述の2種類を混在させてはならない。

最終章は「おわりに」あるいは「結論」「結語」等とする。なおその後ろに、必要なら「補遺」あるいは「付録」を付けてもいい。巻末に「参考文献リスト」を置く場合には「補遺」の後ろとする。また巻末に図表を並べる場合には、「参考文献リスト」の後ろに、表・図・写真の順にそれぞれを引用される順に通しで並べる。謝辞を前文に置く代わりに、本文冊子の最終ページにページ番号を振らずに置いてもいい。国際誌への版下にしない場合の投稿時の原稿のほとんどは、「前文」「本文」「付録」「参考文献」「表・図・写真のキャプション一覧」「表」「図」「写真」の順番であり、上述の各オプションのうち、「参考文献」「表・図・写真」は巻末にまとめる方式が多いので、これを原則としたい。前文から本文の最後までまでのページ構成の例を表 Q.1 に<sup>5</sup>示した。

### Q.2.2 フォント等

文章は横組とし、「です」「ます」調ではなく、この文書のような「だ」「である」調で結ぶ。句読点に相当する区切り記号は、土木学会方式なら「,」「.」を用いるが、文部科学省の横組規則の「,」「.」を用いてもいい。ただしいずれも全角を用いる。もちろん、この2種類のうちの片方に統一しなければならない。横組には読点「,」「.」は用いない。全角のフォントは、組版の伝統を破る「MS 明朝 P」等は使わず「MS 明朝」等を用いる。それは、区切り文字に「MS 明朝 P」や半角を使った場合には「横組の句読点の全角ドリ」の規則が守られず、詰まってしまって読み難くなるからである。

英数字は章番号や年号等も含めてすべて1バイト(半角)文字で書く。そのフォントも「MS 明朝」のような醜いものではなく「Times」等の適切な英数字フォントを用いる。半角のコンマとピリオドは、英数字間および英数字の末尾にのみ許容される。その際、コンマとピリオドは前の英数字に密着させ、コンマ・ピリオドの次には半角のスペースを必ず置く。この「密着」と「スペース配置」のルールは、他の半角区切り文字のクォンやセミコロン等でも同様である。中等教育で習っているはずなのに、最近守らない学生が多い。

<sup>5</sup> この章の内容と著者が作成したサンプルをまとめた pdf ファイルは <http://mechanics.civil.tohoku.ac.jp/bear/presentation/> の一番上のアンカーからダウンロードできる。

[すべて間違い] ‘pen ,pencil,knife , eraser’ [正しくは] ‘pen, pencil, knife, eraser’

[すべて間違い] 「鉛筆と,紙を ,箱に ,一緒に」 [正しくは] 「鉛筆と, 紙を, 箱に, 」

ところで, コロンを簡条書きの見出し記号として使う者もいるが, 行頭には区切り文字(いわゆる約物と呼ばれる文字類)は持ってこないことになっているから, あまり好ましくない。

#### 間違った例

: このように行頭にコロンが来ることは無い。

#### 正しい例:

その代わり, コロンは前行の最後に位置する。

また, 英語の場合の引用符は区切り文字までを囲むことになっており, 例えば“stimulus and response,” になる。区切り文字と同様, 引用符始めは次の文字列と, 引用符終わりは前の文字列と密着させ, スペースを入れない。なお「”」の記号は引用符ではなく「インチ記号」なので使わない。また引用記号は, 必ず引用始めと終わりを区別した上で対にして

間違った例: 半角: ‘abc’, ”def”, 全角: ‘ ’ほげ’ , ‘ ’ほげ’ , ”うほ大” , ”うほ大”

正しい例: ‘abc’, “def”, ‘ほげ’ , “うほ大”

のように用いる。

数式の記号は通常は斜体を使うのが普通なので, それに相応しいフォントで書き, 文章中や図表中でその記号を用いる場合にも, 誤解が生じないように式中で用いたフォントと全く同じか, あるいはとてもよく似たフォントを用いる必要がある。ただし単位にはローマンを使う。つまり  $p = 50 \text{ N/mm}^2$  のようになる。また単位の接頭語の MN, GN 等の ‘M’ や ‘G’ は大文字であるが, キロ ( $10^3$  は ‘k’) より小さい倍数の接頭語は小文字であることに注意すること。可能なら数値と単位の間には四分アキ程度を入れると良い。

間違った例:  $p = 40 \text{ N/mm}^2, q = 5 \text{ gN}$  (これは「グラムニュートン?」になる),  $r = 7 \text{ Kg}, s = 9 \text{ KG}$

章や節見出しをゴシック(太字<sup>6</sup>)で書くのは構わないが, 本文中に明朝とローマンおよび数式フォント以外のフォントを用いるのは原則禁止とする。また下線等の使用も禁止する。半角のカタカナ「ﾀﾞﾒ」や全角1文字の「㎡」「罨」等は元々は機種依存の特殊文字で醜いフォントなので, 図表中やスライドの中であっても使用すべきではない。

### Q.2.3 式番号や図表の番号と配置

式は出現順に, 図表は引用する順に, 次のいずれかの方法で通し番号を振る。これも混在させてはいけない。

- 論文全体を通して定義し, 式は (1) (2) とし, 例えば図の場合は 図-1, 図-2 のようにする。
- 章毎に通して定義し, 2 章の式なら (2.1) (2.2) とし, 例えば図の場合は 図-2.1, 図-2.2 のようにする。

番号に章番号を用いる場合, 中のピリオドはハイフンでもいい。また「図」の次をハイフンにするかどうかも任意とする。図表や写真には, 上記の引用番号と一緒に中身を適切に示すキャプションを付さなければならない。表のキャプションは表の上に, 図と写真のキャプションは 図・写真の下に配置する。

図表の配置は

<sup>6</sup> フォントを持たない古いプリンタの時代によく用いられた「強調文字」, 例えば「明朝の強調文字」や「明朝の太字」も醜いので使用しない。

- 原則として、論文巻末に順に並べて置くのが望ましいが、
- 章毎に通して番号を振る場合には、章末に順に並べてもいい

こととし、引用しているページ付近にレイアウトすることはしない。土木学会関係の論文集のようにレイアウトして版下を作る場合には、A4サイズのできあがりサイズで文章そのものを組むことが求められているために、図表をレイアウトしても見通しが悪くならないが、卒業論文のような場合には、論文草稿のスタイルをとり行間隔を広くして執筆しているため、図表を文章途中に挿入すると読む側の見通しが悪く<sup>7</sup>なる。そのため文章途中ではなく、巻末あるいは章末にまとめることとする。第1著者は修士論文だけでなく海外から依頼される査読論文を読むときも、とじた図表のページだけを本文から取り外して机の上に置き、文章と図表を同時に眺められるようにして読んでいる。下手にレイアウトされた原稿よりはるかに読み易い。

図表や写真がA4横長向きになる場合には、「左綴じ上綴じ」の原則を守るようにする。すなわち、図表や写真を正しい向きに見えるように置いた場合に、その綴じ代が左か上に来るように綴じるのが必須である。これは用紙サイズがA3になって折り込む場合等も同様である。

## Q.2.4 参考文献の引用とリスト

### (1) 原則

論文で最も重要なものの一つが「参考文献リスト」である。その論文の位置付けを示す情報でもあるからだ。参考文献リストは巻末にまとめるか、あるいは章末に置いてもいい。図表を章末に置く場合には、その章の最後の節の次に参考文献リストを置き、その後ろに図表を並べる。そうでない場合は、参考文献リストは巻末にまとめるのが望ましい。ところで、出版されていない（国会図書館に無い）卒業論文や修士論文<sup>8</sup>を参考文献にしてはいけない。

本文中で著者名を用いて引用する場合には、著者が2名以下の場合にはすべての著者名（苗字）を書いた上で引用する必要があるが、3名以上の場合には「第1著者名ら」‘First-Author et al.’として引用してもいい。また、文献リストにある「4) 鈴木・山田」の論文と「7) 鈴木・熊谷・佐藤」の論文で、たとえ両方の鈴木が同一人物（で大物!）だったとしても「鈴木ら<sup>4),7)</sup>」と本文中で引用することは許されない。この場合は別々に引用するか、「文献<sup>4),7)</sup>」のようにする。

文献リストには、著者名・論文名・論文集名・巻・開始ページと最終ページ・発行年をすべて含め、審査員や読者がその文献を間違い無く探し出すことができるようにする。文献リストの方では著者名の省略は許されないで、どんなに多くても全員をその掲載順に並べる。地盤工学会の‘Soils and Foundations’のように、同じ巻の異なる号が常に第1ページから始まるような場合には、巻の次に号を書く必要があるが、同じ巻では通してページが振られている多くの論文集の場合は号を原則書かない。また発行月も原則不要とし、付ける場合にはリストにあるすべての文献に付ける。著書の場合は、著者名・著書題目・必要なら引用部分のページ番号・出版社名・発行年を書く。欧米語の論文集名と著書題目はイタリックにすることを原則とする。また、欧米語の論文題目は最初の単語の1文字目だけを大文字とし、固有名詞以外の最初の文字は小文字とする。もちろんドイツ語やフランス語等の大文字の使い方の規則の方が優先する。一方、欧米語の著書名の主な単語の最初の文字は大文字にする。また論文集名を略称にする場合には、リストに並べたすべての文献のそれを略称にしなければならない。同様に、略さない場合にはすべての文献で略さない。引用の仕方と各文献リスト内の項目の順番

<sup>7</sup> よく経験したのは、ある文章のページの次に10枚くらいの図が挿入され、続く文章がその次に1枚入ったあと、またさらに20枚くらいの図が配置されるという状況が続くもの。審査員は、続きの文がどこにあるのか探すのに手間がかかり、内容を理解し難い。

<sup>8</sup> 博士論文は国会図書館に収蔵されているので引用しても構わない。

は、次の二つの節で示す方式のいずれか片方に統一する。その例では論文集名の略称を用いた場合を示している。

## (2) 国際論文集の代表的な方式

例えば Harvard スタイル等 (L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X の場合の ‘natbib.sty’ の利用) の場合を参考にして、論文リストには著者のアルファベット順に並べる。引用する場合には

これこれの手法については Foo et al.(2002) が詳しく述べているが、ここで用いているパラメータは実験 (Chen and Dvorak, 1992; 山田, 鈴木, 1999b) で得られたものである

のようにする。この場合の文献リストは、例えば

### 参考文献

Chen, T. and Dvorak, G.J., 1992. MT estimates of the overall elastic moduli. *J. Appl. Mech. Trans. ASME* 59, 539-546.

Foo, J., Boo, K. and Woo, M., 2002. Structural prediction of our future, *Soils Foundations* 123 (3), 51-60.

Nemat-Nasser, S. and Hori, M., 1993. *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*. North-Holland.

山田太郎, 鈴木次郎, 1999a. 題目はこれこれ. ○○国際シンポジウム, 佐藤三郎編, シンポジウム題目あるいはその出版物題目, 101-120.

山田太郎, 鈴木次郎, 1999b. 違う題目. ○△論文集, 51, 1215-1230.

のようになる。同一著者による同一出版年の文献が複数ある場合の表示の区別には注意する必要がある。また巻号の号が必要な場合は、この例では括弧書きにしてある。著者欄の ‘and’ を省略することもあるようだが、ここでは残した。上の順番は言語によらず著者のローマ字表示のアルファベット順にしたが、例えば、非日本語の論文をアルファベット順にまず並べたあとに、日本語論文を五十音順に並べてもいい。また著者名が名・姓の順番になる論文集もあるので注意すること。他にも代表的な記述の仕方が数種あるので、自分の研究分野で最も権威のある論文集の執筆要領を真似てもいい。

## (3) 土木学会方式

参考文献には、本文で引用した順に 1 から番号を付ける。引用する場合には

これこれの手法については文献<sup>1)</sup> に詳しいが、南野<sup>2)</sup> は○○の手法を用いて・・・

のようにする。この場合、文献リストは

### 参考文献

1) 山田太郎, 鈴木次郎: 題目はこれこれ. ○○国際シンポジウム, 佐藤三郎編, シンポジウム題目あるいはその出版物題目, pp.101-120, 1999.

2) 南野何某: 題目はこれこれ. 土木学会論文集, No.123/I-50, pp.51-60, 2005.

- 3) Chen, T., Dvorak, G.J. and Doe, J.: MT estimates of the overall elastic moduli, *J. Appl. Mech. Trans. ASME*, Vol.59, pp.539-546, 1992.
- 4) Foo, J., Boo, K. and Woo, M.: Structural prediction of our future, *Soils Foundations*, Vol.123, No.3, pp.51-60, 2002.
- 5) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, 1993.

のようになる。最近の国際誌の著書リストでは出版社所在地は略すようなので、ここでも略した。章末に文献リストを置く場合、番号に章番号を付ける必要は無いが、他の章の文献を引用してはならない。つまり、章末に文献リストを置く場合、同じ文献を複数の章で引用していたとしても、それはそのいずれの章のリストにも重複して並べられていなければならない（から、やはり巻末に置いた方が便利だ）。

### Q.2.5 図の描き方と著作権

最近論文の公開 pdf ファイルから直接、あるいはスキャナですぐに他人の図表をファイルに取り込めるため、その図表の作成者に断りもせず論文にそのままを使う人がいて困っている。プレゼンテーションで使う程度ならまだ許容される（望ましくはない）だろうが、印刷物に他人の作成した図を許諾なく用いるのは許容されない。必ず論文提出の前日までに、指導教員を通したメール連絡でいいから、著者の許諾を受けておき、図 Q.2 のキャプションに例示したように許諾のことを明記する。実験装置のマニュアル等にある図も同様である。もし許諾が得られない場合には自ら描きなおす必要がある。そのときも、複製したい図とできるだけ似ないようにする必要がある。ほとんどすべての図と写真は、作成者・撮影者がその著作権を持っていると考えて欲しい。ただし、公開されている地震波等はこれには当たらないようだ。

きちんとした出版社によって発行されている雑誌では、投稿された図表を出版社自身が加工して、より鮮明になるような作業をすることがある。そのため、図表はできるだけ大きめの（解像度の高い）図になっていること<sup>9</sup>が望ましい。したがって、できるだけ太い線を用いて、A4 サイズの用紙に図が 1 枚ないし 4 枚程度までになるような作図をして欲しい。つまり図は、ソフトウェアの出力に工夫を加えずにデフォルトのまま使うことはしないようにして欲しい。常に、以下に示すような留意点を考えながら作図する必要がある。また上下左右のマージンは本文のそれと同等にし、すべてのページにページ番号を振る。

まず、図の枠線あるいは座標線を 0.2 mm 程度の細い線で描くこととする。そして、この図を引用している文章の説明中で最も重要な研究結果を示す線を、最も太い実線で描く。太さは 0.8 mm 程度が望ましい。これと比較する重要な情報は、同じ太さの破線や点線・一点鎖線等で描く。それよりも重要度の低いものは、中間の太さ 0.4 mm 程度の線で描く。参考程度の情報は 0.2 mm 程度の細い線で描けばいい（図 Q.1 参照）。このように、最低でも 3 種類の太さの線を使い分ける必要がある。これでモノクロであっても 12 種類のデータを一つの図に区別して描くことができる。それ以上の種類のデータを、たとえカラーにして同じ図に並べたとしても、それで中身の理解が深まるとはとうてい思えない。10 種類以上の情報を比較する場合には、着目する観点毎に選択されたデータのみを複数の図に分けて説明する方が説得力はあるだろう。プレゼンテーションではカラー化することは効果的であるが、カラーにするのは、上記の実線・破線・点線等の区別に相当するものと考えて欲しい。カラーの線でも太さを使い分ける等、注意して欲しい。太さを設定できないソフトウェアは捨てましょう。図そのものの作成については文献 [178] もとても参考になる。

最後に図中の言語のことに触れておきたい。図 Q.1 は、図中の文字は英語になっているが、これは一つの例として示したものである。土木学会論文集では、英語の論文は英語で、日本語の論文は日本語で図表（表も）

<sup>9</sup> 昨今は、出版されるときサイズの投稿で構わないようだが、線の太さ等はきちんとしておくべきである。

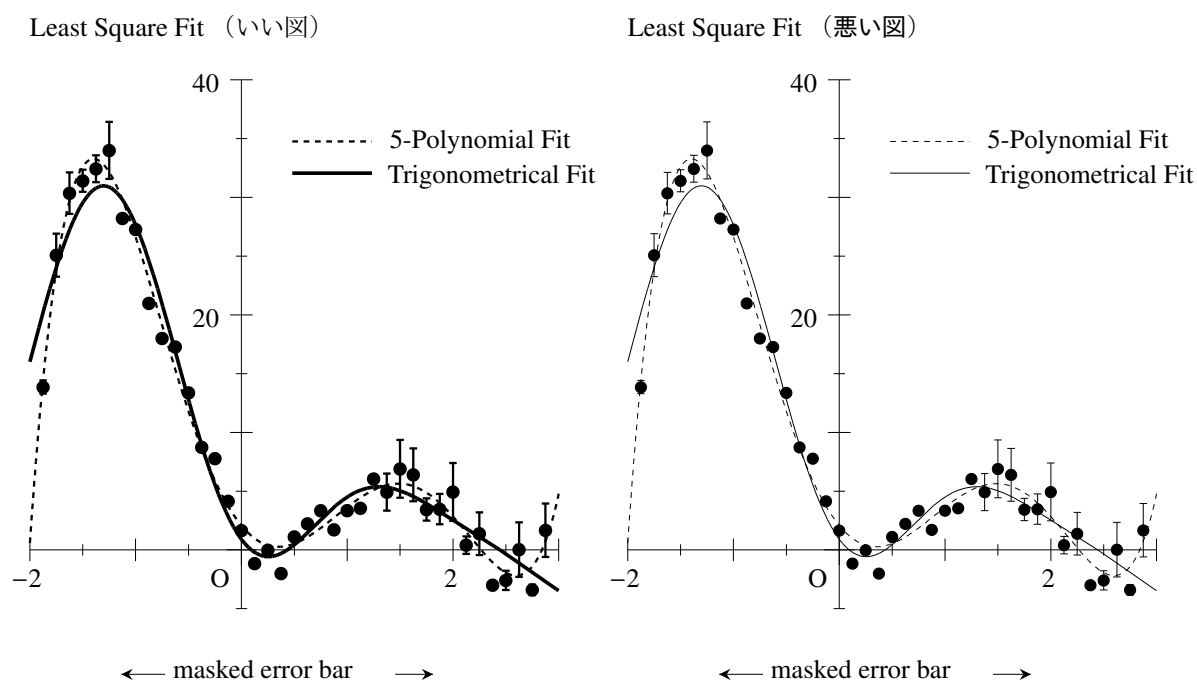


図 Q.1 左が適切な太さのバランスを使ったいい図で右はすべて同じ太さの悪い図

を作成することになっている。昔製図機器で描画していたときは、日本語を清書する器具が無かったことや、墨入れの手間とあとで国際論文集に投稿することを考えて、英語の文字プレートを使って清書していたため、図中の文字列にはほとんど英語を用いていた。今はどんなソフトウェアでも日本語で入力できるだろうから、手間を惜しまず、日本語の論文には日本語の図表を入れるようにして欲しい。指導教員がどうしても英語でという指示があったときには英語でも構わないが、一言「先生、そんな横着しなくても、国際誌に出すときはまた書き直してあげますよ。」と試してみたら<sup>10</sup>どうだろう。

### Q.3 審査会におけるプレゼンテーション

#### Q.3.1 スライド作成についての技術的なヒント

近年プレゼンテーション用のソフトウェアが充実し、見易いスライドが増えてきてはいるが、それでも自己満足で独りよがりのスライドも散見される。発表する本人は中身を十分に理解しているから、小さい字でたくさん情報が書かれていても、また論文で用いた記号で各種設定を区別してあっても、何も問題を感じないだろう。しかし、指導教員以外の先生や分野が少しだけ違う教員にとっては、全く理解の足しになるスライドにはなっていないことが多い。スライド作成に当たっては、最終審査会に参加すると予想される教員の中の最も専門分野が異なる先生に説明する状況を念頭に置くのが望ましい。

- スライドの内容は骨子であり、文章ではなく必要なキーワードがすべて表示されていなければならない。発表は、その表示されているキーワードを用いて行う。書かれていないことはしゃべらない。説明すべきことのキーワードはすべて書いておく。
- 話し言葉で話す。普段使もしない漢語や丁寧語も使わない。説明することを暗記しない。自然と話したいことを思い出せるようなキーワードを選んでスライドに示しておく。

<sup>10</sup> 心の中では「そのくらい先生自分でできるでしょ。」と思いながら、描画用のデータファイルをそっと渡せばいいんです。



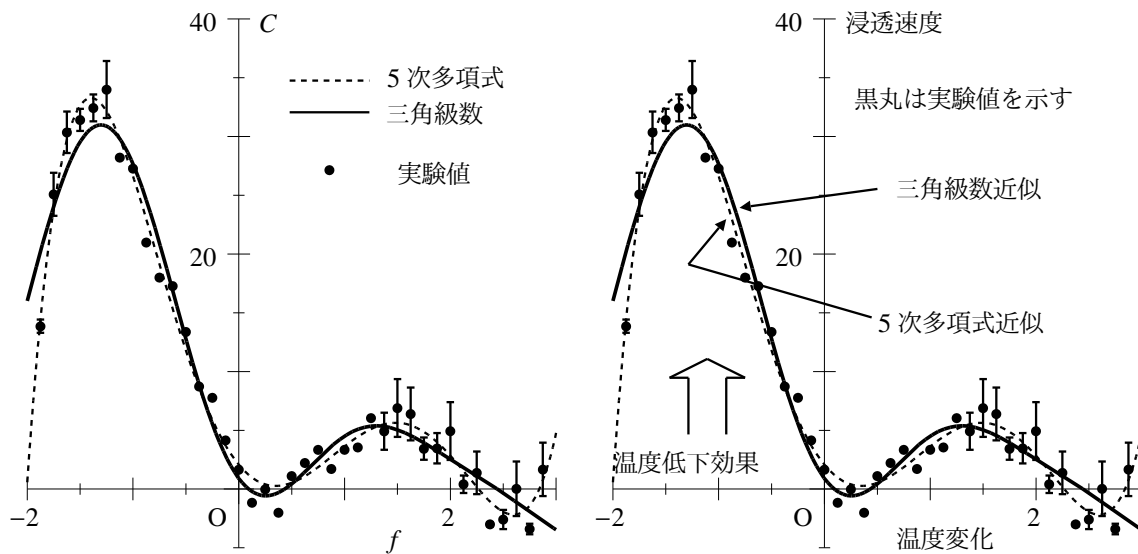


図 Q.2 左を論文中の図としたとき、右が発表の場合に表示する図；自分の図ではない場合は「左図は文献<sup>2)</sup>の著者から使用許諾を得た(2005/7/7 メール)」等と記すべき。

- すべての発表スライドには順にページ番号  $m$  を振る。できれば全ページ数  $n$  を含めて  $m/n$  の形で表示する<sup>11</sup>と、聞いている側が論理の流れとその量を推測できることから、理解が深まる可能性がある。また質問の際にページ番号を指定できるので便利だ。
- 一つのスライドには、文章だけでその量を表現するなら 10 行を超えないくらいに留める。あるいは発表時間で表すと 1 分程度の量が適切である。それ以上の量になると早口にならざるを得なくなったり、スクリーン上の文字サイズが必然的に小さくなり、これも審査員の理解を妨げる。フォントは 18 ポイント相当以上<sup>12</sup>のように、大きめのサイズを選ぶ必要がある。多分すべてゴシック（太字）が望ましい。
- したがって総ページ数は、発表時間（分）と同じ程度にするのが望ましい。1 ページに 1 分くらいは使わないと真意は正しくは伝わらない。9 分の卒業論文発表なら 8 ページ程度（まだ素人だから）、15 分の修士論文発表なら 15~18 ページ程度が適切と考えて欲しい。
- そうなると、特に発表時間が短い卒業論文の場合には、人によっては得られた結果全部を発表することは不可能かもしれない。その場合には、一番大事な結果につながる部分だけを中心にして、時間内に審査員が理解できるような内容だけに限定してスライドを構成し、それ以外の結果等はスライドの付録に載せておけばいい。もしかすると質問時間に使えるかもしれないからである。ただし、発表スライドが 20 ページ程度なのに付録が 50 ページもあるような発表はどこかがおかしいと思うべきである。また想定していた質問が出て尊大な態度で付録を見せるのも印象がよくない。
- また講演会ではなく審査会なので、今後の課題等は発表しない。審査会では君がやったことを聞くのであって、やらなかったことや後輩がやるだろうことは聞きたくない。審査会では君自身の研究レベルを

<sup>11</sup> 例えば同じ資料をたくさんの方筒に入れるだけのよう単調作業をするとき、残りが見えない場合よりもあとのくらいで終わるかがわかる場合の方が作業効率は上がるとされている。それと同じで、あと何枚スライドがあるのかがわかっていると、例えばだらだらした発表の場合にはどうか我慢ができるし、面白い発表の場合にはこのあとどんな論理展開があるのかが楽しみになって聞き易くなる。また思いがけない突然の終了で驚かされることも無くなる。是非全ページ数も付けて欲しい。

<sup>12</sup> 英数字のポイントの数值は括弧の記号 'c' の高さを規定しているため、実際の文字の高さはその数值のサイズより小さい。したがって、それとバランスする漢字のサイズは、英数字のサイズ指定値とは若干異なってくる。正確ではないが、例えば 12 ポイントで英数字を表現する場合には、英数字そのものの高さは 11 ポイント程度になるため、漢字のサイズは 11 ポイントに設定しないと、英数字よりも漢字が大きく見えたり、基底がずれたりしてバランスが悪くなる。漢字の活字サイズは元々「級」で定義されていた。

表 Q.2 左を論文中の表としたとき、右が発表の場合に表示する表

| ケース | $\alpha$ | $\beta$ | 剛度 ( $\lambda$ ) | 〇〇量 ( $\alpha$ )   | $\Delta$ ■指標 ( $\beta$ ) |
|-----|----------|---------|------------------|--------------------|--------------------------|
| A   | 1.23     | 20.3    | 剛 (5)            | 1.23               | <b>20.3</b> (不経済)        |
| B   | 2.34     | 12.3    | 柔 (1)            | <b>2.34</b> (危険性大) | 12.3                     |

審査するのであって、君の指導教員等が考えている研究内容の審査をしているわけではないからだ。このような発表は、結局は自分が十分な研究を遂行できなかったことを明言・告白しているに過ぎず、恥ずかしいと思うべきである。これは博士論文でも同じなのだが・・・

- 図や表に論文に含めたものと全く同じものを用いると審査員の理解が浅くなる可能性があるので注意すること。例えば図の場合のヒントを図 Q.2 に示したが、略語等を使わずに、意図することが文字で表示されているのが望ましい。凡例も理解を遅らせるので避けるべきである。審査員は結局 1 分たらずで図の中身を理解しなければならないため、理想的には「一つの図で一つの結論を」という『暮しの手帳方式』が望ましいので、極力そのように努力する。また表の場合も表 Q.2 にヒントを示した。
- ポスターや漫画ではないので、内容と関係の無い模様や動画・挿絵を用いる必要は無い。それは最初の注目を引くだけで、内容の理解には何ら助けにはならない。また原則として黒い文字を使い、背景を暗くし過ぎないようにする等、文字の色とのコントラストに注意してページをデザインする。特に背景に色を付けたい場合には、文字の色の選択には注意する必要がある。白地に黒がベスト。
- 1 ページの中を区分けして段階的に表示することはせず、説明すべき全ページを表示しておく。審査員の読む速度・理解する速度は個々に異なるので、発表者の時間配分を聴衆には強制しない方がいいからである。よく遭遇するとんでもない状況は次のようなものである。1 ページを 3 段階で説明しながら、最後に開けて見せる重要な結論が示されて審査員が読み始めた途端に次のページに表示が切り替わるのである。理解の妨げにしかっていない。また、タイマーを使って表示をコントロールすることは絶対にやめるべきで、発表本番中の説明の速度に合わせてその場でページをめくる。
- 直接論文発表とは関係は無いが、最近のプレゼンテーション文化に変なところがあるので注意しておきたい。上述のようにスライドの中身は骨子とキーワードに過ぎない。口頭で説明を加えることによって始めて完結する情報発信がプレゼンテーションの目的である。したがって、口頭の説明を聞かずにスライドのコピーだけを読んだ場合には、実はその内容は正しくは伝わらないのが当然であって、それでもそのスライドの価値は下がらないのである。逆にスライドのコピーが発表資料として配付された場合には、そのスライドの各ページには情報量がとても多過ぎる等不適切な設定になっている可能性がある。資料を配付するなら、それにはスライドとは別に、もっと詳細がきちんとした文章で書かれていなければ意味が無い。そのため第 1 著者が所属している教室では、卒業論文と修士論文の発表の理解に役立つように 2 ページないし 4 ページの概要を事前に提出することになっている。

### Q.3.2 発表と質疑応答におけるマナー

#### (1) 発表する側のマナー

ここに記載するマナーは、プレゼンテーションの目的が卒業・修了研修の最終審査であることを念頭に置いて設けたものであり、短い時間で効果的に学生の能力を判定するために設けられている。したがって学生は、

尊大な態度で臨むことの無いようにして欲しい。前の人の発表が終わってからゆっくりと椅子から立ち上がり、スクリーンの前で準備を始め、タイマーが動き始めて司会が「どうぞ」と言ったにもかかわらず、まだ発表を始めない学生がときどきいるが、とても困った人、つまり卒業・修了の対象にはならない学生だと判断される。

- 前の発表者への質疑が始まったら、発表演台の横で待機する。
- 前の発表者の質疑応答がすべて終わったら、すぐにスクリーンにスライドの最初のページを映写する準備を始め、表示されたら発表を始める。司会が制止しない限り、これで発表は始まる。
- 発表は「させてもらう」のではなく、審査のためにしなければならないことなので、所属研究室名と氏名・題目を述べて「発表します」と宣言する。
- 前節にも書いたが、普段使いもしない漢語のようなわかり難い言葉を使わない。逆に「微妙」等のように、教員と学生でその定義が異なる話し言葉はもちろん、指導教員および同じ専門分野の中でしか通じないような略語、例えば材料力学分野の一部の人だけに通じる「RVE」や、一般に知られている略語であっても敢えて略す必要の無い「B [by]over C」等は使わないで、誰もが耳で聞いて理解できる言葉で話す。また丁寧語も使う必要は無い。
- すべての図は、縦軸と横軸が何であるのかまず簡潔に説明する。ただし、後続する同様の図の場合には省略できる。
- 可能な限り指し棒（レーザーポインタ<sup>13</sup>は駄目 [136]）使い、先端をスクリーン上の指示箇所にあてるか、横棒にして式を指定する等する。次のスライドに変えるときには、スクリーンとコンピュータの間を歩きながら次のスライドにつながる適切な説明を述べるのが望ましい。ちょうど論文中に適切な接続詞が必要だったのと同じ理由である。
- 所定の時間が来て発表の終了ベルが鳴った段階で、いかなる状況に（あと1行読めばいいだけで）あっても発表をすぐにやめ、結論を示したページをスクリーンにフルサイズで表示した状態で「発表を終わります」と宣言する。ベルを無視して発表を続けることは許されない。決められた時間内に十分な説明ができないのは、そもそも発表が失敗してしまっているわけだし、ベルを無視するとさらに最も悪い印象を与える。また、心にも無い言葉「ご清聴有難うございます」等の発言は必要ではないし、最後のスライドに‘Thank you’等と書かない。いずれも、一般社会人不特定多数を対象とした講演<sup>14</sup>で使うものであって、審査会には不要の文言である。
- 質問者がスライドのページを指定した場合には、すぐに対応して（たいていは矢印キーでページ移動ができるし、ソフトウェアによっては‘p[revious]’や‘n[ext]’を押せばフルサイズのまま戻ったり次のページに移動できる）、これもフルサイズで画面表示をしたまま質問に答える。いわゆる「スライドショー」の状態つまり画面全体に1ページが表示されたままですべての質疑に答えるべきである。

<sup>13</sup> これを開発している人は指し棒の機能がわかっているのだろうか。どうして「点」あるいは「○」なのだろう。第1著者は文献 [136] の著者と同様、使いたくない。指し棒は先端のみならず、そこにつながる棒の存在が視線の誘導をしている。その棒の部分が無いのであるから機能としては指し棒に劣るわけだ。また注意を引くには点対称ではない方がいいと思うので楕円の映像はやや優れていると感じるが、視線をもっと誘導するような大きさで点対称ではない映像を投射するアイデアは無いのだろうか。例えば、スクリーン上のサイズで5 cm以上の長さで太さが1 cm程度の水平線あるいは波線の方が優れていると予想するがどうだろう。dviout for Windowsのスライドモードでは箱や線が引けるので、とてもいいと思う。と思っていたら、スクリーン上に線を描けるシステムが市販されていた。とても便利だが高価だ。

<sup>14</sup> 学会全国大会等の研究発表会でも使う必要は無いのだが、最近民間会社の方々が多用するので困っている。自らの研究結果についての科学的な主張でへりくだる必要は全く無い。

- 質問された言葉を復唱するのは、頭が整理されていないことを誤魔化するための時間稼ぎをしているとしか受け取られないのでやめる。またとりあえずの「そうですね」等といった意味の無い言葉は一切発せずに、直感的に思い付いた答をすぐに言う。そういう答に君の実力が現れるからだ。また「わかりません」「知りません」は禁句である。何か答える。質問には質問しない。ただし、本当に知らない「知識」を聞かれたときは「それは知りません」と即答すること。
- また質問事項を「今後の課題にします」という答は、思考を停止してしまったのか、あるいは自分の考察が不十分だったことを誤魔化しているような悪い印象を与える。「それは検討しませんでした」と正直に言えばいい。実際ちょっとでも検討したのであれば、「その段階に行くには〇〇が必要だと思ったから私は深くは検討しませんでした。」といった内容のあるコメントを述べるべきである。いずれにしても『「今後の課題」 = 「怠慢してやらなかった課題」』という等式が成立すると考えておくべきである。研究で新たな課題が明らかになることもあるが、卒業論文等の審査会ではそれに触れる必要は無いのだ。研究室内の秘密事項にしておいた方がいい。
- 答は質問の要点に対してだけ簡潔に述べ、ダラダラと関連事項や周辺事情を説明しない。要点がまとめられないということは、理解が浅いということを宣言しているだけである。
- 質問の意味がわからない時は「質問の意味がわかりません」と言う。声が聞こえない時は「聞こえません」と言う。
- 答えている最中に質問者が制止した場合は、質問と異なることに答え始めているのだから、すぐに発言をやめ、再度質問者の言葉に耳を傾ける。
- 先入観を持たないようにすることが重要だ。特に想定質問の抽出等に無駄な時間を費やし過ぎたときに、この先入観で大失敗をすることがある。先生に引っ掛けられたんじゃなくて自業自得! さ、呵呵。

## (2) 質問する側のマナー

これは論文の審査会であって、研究打ち合わせや中間発表ではないから、教員からのコメントは原則として禁止する。もし興味を持った論文の発表者にコメントを与えたい場合には、休み時間にすればいい。時間が限られているので、次のような質問の仕方とする。

- 司会は開始のベルと発表終了のベルだけは厳守させ、発表終了ベルでは必ず発表を制止する。質疑応答も含めた最終のベルが鳴った場合には、そのベルが鳴る前に出された最後の質疑に対する満足な回答をもって終了とする。
- 質問者は挙手をし、司会者が指名した教員が質問をする。前の質問と関連する場合は「〇〇先生の質問に関連した質問」等と発言して始める。
- 複数の教員からの質問に答えさせるために、質問は一人1回1問で、卒業論文に対しては1回のみ、修士論文の場合には2回以下とし、連続質問は禁止する。
- 質問はその要点を簡潔な言葉でし、意味の無い「たいへん興味深い研究だ」といった言葉や、背景あるいは自分の考えは述べない。スライドにはページ番号が振られているので発表中にメモをとり、適切なスライドを迅速に表示するように指示した上で質問するのが望ましい。

- 学生の答が質問の意図とずれている場合にはすぐに学生の発言を制止し、別の表現で問い直す。言い直した質問に対する答もずれている場合には、再度学生の発言を制止し、別の質問者に時間を譲る。
- 知識を問わない。「知らない」と答えられたら質問自体の意味が無くなる。時間の無駄。
- 論文主張の根本的な前提そのものを否定するような質問は避ける。博士論文ではない場合、それは時間外に教員同士でやればいからだ。その前提に基づいて得た成果の是非について質問して発表者の能力を審査すべきである。
- 前の人の質問への回答が終わったと思ったら、次の質問者はすぐに挙手する。司会は、回答が終わっているかどうかを判断して適切な対処をする。
- 司会が2回促しても質問が出ない場合にのみ、同一教員による制限回数より多い質問ができる。
- 司会が何回促しても質問が出ない場合にのみ、教員からの短いコメントを促してもいい。

なお、意味のある最終審査会にするためには、日本人の場合は日本語によるプレゼンテーション<sup>15</sup>と質疑応答にするべきである。

### 卒論生のとんでもない勘違い

**先生は答・結果を知っている:** まさか。宿題じゃないんだから決してそういうことはない。もちろん先生の経験から、こんな内容の結論が出たらいいなあと思いつながりながらテーマが決められている場合が多いとは思いますが、そうなるかどうかはやってみないとわからない。卒論生が手を動かさない限り答に近づく道は無いのである。

**最初に指示された計算・実験の結果が出たらほぼ終わりだ:** これもまさかである。その逆で、最初の結果が出たところが本当の「始まり」である。最初の結果はその研修の方向を決めるための第一歩に過ぎない。それを見た上で次の計算や実験をどのようにすべきか考えるというプロセスが入る。最悪の場合は、テーマそのものの変更もある。これは教員のミスの場合もあるかもしれないが、新しいことをやる時には避けられないプロセスでもある。したがって、できるだけ早めに最初の結果を出すべきである。特に最近、最初の指示を2月までに済ませればい

いと勘違いしている学生が増えてきたような印象がある。

**得た結果（実験ですら）は六桁で正しい:** 高性能の計算機ですら、それは当てはまらない。世の中には「倍半分<sup>16</sup>の世界」というものも存在することを知るべきである。

**変な結果を出す計算機は壊れている:** 計算機ではなく、それに命令したプログラムやデータ、つまりはプログラムとデータを作った人間が間違っている。

**論文は1週もあれば書くことができる:** 結果がすべて揃っており、図表化も終わっている状態から論文を書き始めたとして、普通の教員なら論文の草稿ができるまでに約一ヶ月はかかるだろう。最初の1週間で粗っぽい草稿ができて数日休ま<sup>17</sup>せる。次の1週間で60~70%の出来の草稿を書き上げ、また数日休ませる。再度推敲をしてうまくいけば、ほぼ満足でき

<sup>15</sup> 大学周辺で、「プレゼンテーション能力」という言葉が英語による発表能力と誤解されているように感じてならない。母国語で説得力のあるわかり易い発表ができることこそがその能力である。

<sup>16</sup> インターネット上で紹介されている意味とは異なる使い方を我々はしているようだ。結果が2倍や半分でも誤差の範囲ってこともあるということを指している。

<sup>17</sup> 書いた内容を一旦忘れると推敲がし易い。

る草稿になると考えて欲しい。このような論文執筆を生まれて初めて卒論生がやるのだから、二ヶ月はかかってもおかしくない考えるべきである。

すべて二ヶ月もあれば終わる: 上述のようにそれは不可能である。教員でも無理。

最後は先生や先輩が助けてくれる: 十分な結果があればそれもあるかもしれないが、自分の手を動かさずして援助の手が差し延べられることはあり得ない。

ワードプロセサや描画・発表ソフトウェアは論文を書く段階・発表する段階で使い始めれば十分だ: 1月に卒論を書いている段階で、最近よくある例を挙げておく。教員が「この図のここは網掛けにして、ここにこういった挿画をしない」と指示したとしても、網掛けの機能を先輩から聞きだして描けるようになるのに半日、挿画に至ってはその方法を教わるのは半日だが、描くのに1週かかる。締め切り日までにどうやって卒論を書き上げるつもりなんだろう。また本番の発表を始めた途端、違うスライドが表示されてそれを正しくできない、所定のスライドを表示するまでモタモタ<sup>18</sup>する。何のために

橋梁下部工の工事現場の安全標語(多分S工業)がとても面白かったので、それを右の写真でアレンジしてみた。教員は自分自身の研究・研修の経験と、これまでに出会った卒論生のパフォーマンスとに基づいて、テーマを示している。それを締め切りまでに完了できるかどうかは、実際にはわからない。まして卒論生は研修なんて初体験である。いつまでに何ができるかわからなくて当然だ。だからこそ早め早めの行動が重要である。とにかくまずは大学に毎日来てくれー!

## 大学1年生のとんでもない勘違い

大学は大きく変わってきているのは事実だが、いい方向にというわけではなさそうだ。例えば、今全学教育と呼んでいる教養教育が事実上無くなったことが挙げられる。また、ますます大衆化したことによる学生の気質もかなり変わってきている。そのよう

夏休み!!!があったのか。

先生・先輩は常に正しいことを言っている: さて、場合によりけりである。推測を述べている場合もあるし、希望を述べている場合もある。また卒論生の質問の真意が通じていない状態での助言である可能性もある。本当に知りたいことが得られるまで、しつこく情報交換と意思の疎通をすべきである。とにかく大学に来ること、週に1回は教員に進捗状況を報告すること、疑問点を質問することが大事。

卒論を提出したら卒業できる: 極力卒業させてあげたいが、それに値しない研修生活(大学に滅多に来ない、最初の指示の結果だけしか出ていない)しかできなかった学生を卒業させたいとは思わないのも正直なところである。

卒論発表なんてちょろい: まさかなのである。最初の練習で、卒論生が発表していることが理解できる先生・先輩はほぼ零であると思って欲しい。ただし、これは全員が経験すること。何を目的にしているのか、どういうアプローチなのか、何をしたいのか、何を言っているのかすらわからないというのが、最初の発表練習でもう何十年も続いている状況である。

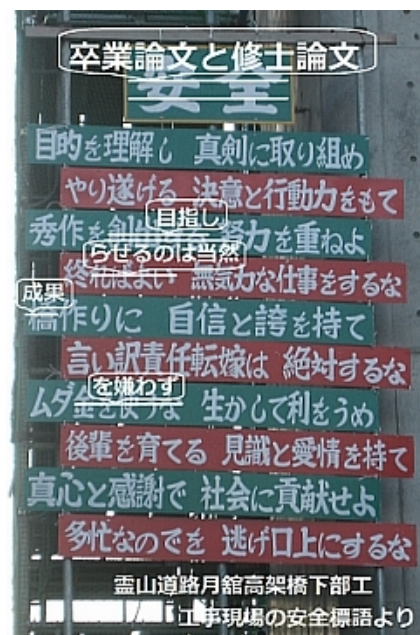


写真 Q.1 安全な卒業論文と修士論文

<sup>18</sup> コンピュータの電源設定をいい加減にしたことから、スクリーンに表示されるのがログイン画面だったりする。

な変化に伴い、大学1年生の生活はパラダイスになっているようだ。よって「早く専門科目を・・・」という言葉も出てくるのではないか。わけのわからない人文科学の授業や、難しい文系の本を読まないといけない授業は取らないでいいようになった。いや、授業内容とは必ずしも関係無いたくさんの面白い本を紹介してくれる先生がいなくなった、あるいは、そういう魅力的な講義が無いと聞く。教養を教える教員を差別し、またそういった教員には教育の意欲も無くなっているように見える。必要単位数だけを好きな科目で取ることができると今の大学は、もはや最高学府と呼ばれるような場所ではなくなっているように感じる。学生だけではなく教員も駄目になってきている。そんな中、とても気になる点を列挙してみた。

**授業中に理解できないのは先生が悪い：**大学の特に専門科目は復習無しには理解できないのが普通だ。定理や理論・数式等をすべて「自分の言葉に翻訳し直して頭の中に整理する」という『復習』が必要になる。よくない言い方だが第1著者の親族の言葉を借りると、高校までの教諭は教え「論す」のが仕事だが、大学[准]教授は教え「授け」ればよいと言うこともできそう。呵呵。

実は、ゆとり教育以前から初等教育のレベルが低く（易しく）なる一方で、大学を卒業する時に求められるレベル（例えば、卒業論文の内容や就職先が求める能力等）は下げるわけにはいかない状況、というよりも、どんどん上がっているのが現状だ。したがって、専門科目に進むにつれて急に内容が難しくなることが避けられない状況にある。それでもなお、卒業論文等で行う研修の内容を理解するには、学生さん自身の独学が必要不可欠になってしまった。大学を卒業するということはたいへんなことだという覚悟で勉強をして欲しい。

**板書が多過ぎるから要約プリントを配って欲しい：**概要・要約をプリントで配っても、特に最近の学生さんは授業中の口頭説明をメモしないので、プリントをあとで見ても何が書いてあるかすら理解できないだろう。やはり板書を写して、その写したノートの間行の間に復習で自分の言葉にしたメモを書き込む等して補足して初めて理解につながると思う。

**先生（クラス）によって難易度が違うのはおかしい：**全学教育<sup>19</sup>も含めて大学教育には、いわゆ

る指導要領のようなものは存在しない。それぞれの先生が、それぞれの考え方で一番いいと思う方法で教える。教科書の検定も無い。ほとんど同じ題目の教科書がたくさん（ひょっとすると大学の数ほど）存在することからも、このことは明らかだ。したがって、先生と波長が合う人にはわかり易いが、そうでない人には難しくなってしまう。

やはり復習をして、自分の言葉に翻訳することが重要だ。あるいは他大学の別の先生による同種の教科書を読むといいかもしれない。難しい授業内容については、演習室等でより多くの友人と語り合おう。教えることは理解度を高める。教えてもらって自分の手を動かさず、もしかしたら理解できるかもしれない。宿題のヒントを友人に教えてもらうときも、単に写しただけだと身には付かない。必ず自分の手（と頭!）を動かす必要がある。

また、すべての先生がオフィスアワーを設定しているから、積極的に質問に行こう。予約して時間を確保してもらえれば、たいていの先生が親切にいろいろ助言をくれるはずだ。授業以外のことも話してくれる先生も多いと思う。

**難しい必修科目の成績が悪くなるのは嫌だ：**誰でも得意不得意がある。そして大学教育における理解度は、まさにその学生さんの実力だ。試験の成績がよくても本質を理解しているとは限らないし、その内容は一生その人には何の影響も与えない場合もあるだろう。否、ほとんどの科目でそうかもしれない。逆に何も理解できなかったし成績も最低だったが、就職して問題点を見

<sup>19</sup> 1, 2年生のための昔の教養教育を全学教育と呼んでいる。

つけてもう一度勉強してみると, その科目の内容が大きな成果につながる場合もあるかもしれない。

高校までの成績等つまらないプライドは捨てて, 復習によって理解度と知識を増やそう。奨学生の選抜等に必要悪として成績を使い使すが, 研究室配属決定等にまで成績を使う必要は無いと思うし, 社会に出たら小学校以来の成績なんて何の役にも立ちほしくない。あるいは成績成績と言っている人はまともな人間にはなれないだろうと感じる。少なくとも第1著者はそういう人が嫌いだ。

**力学数学は暗記科目だ:** 全学教育科目の半分くらいまでは基礎の基礎だからそうかもしれない。しかし専門科目はそうではない。理屈の裏にある仕組みや考え方を身に付ける必要がある。公式の使い方を覚えるよりも, どうしてその公式が使えるのか, 使わないと解けないのか理解する必要がある。

**クイズや宿題・試験の正解を教えてくれないのはよくない:** 大学で出される課題の答えは友人に聞けば教えてもらえる。ただし, その友人の答えも満点とは限らない。しかし, その中から問題の本質とそれを解こうとする方法を自分の言葉で模索するのが, 大学での勉強だ。特に最近では答えを教えるとそれを覚えようとする学生さんが多くて困っている。覚えたものには本質が含まれていないから応用できない。手を動かして自分の言葉で頭の引き出しに入れたものは応用が可能だ。たとえそれが間違っていたとしてもである。第1著者が留学していたとき同室のアメリカ人の後輩が宿題について質問してきた。しかし彼は自分の考え方を述べたあと, それが間違っていないかどうかを訊ねただけだった。アメリカ人の倫理観を垣間見たとても印象的な経験だった。そうでなければ, 1週間の take-home exam (ある期間何を見てもいい試験でたいへん難しい) なんて成立しない。

先生達の中にも, 大学以来直面した各種問題

(クイズや試験も含む) の答えを未だに出せない人がたくさんいるのではないかと想像する。社会に出ると正解があるかどうか分からない問題はたくさんある。それにどう対処しようとするのか大学時代に経験しておこう。クラスメイトはそのためにいる。どうしても助けが必要ななら先生に聞きに行けばいい。もちろん答えを教えてもらえるとは限らないが。

**専門科目は1年生から教えるべきだ:** 確かにモチベーションを高めるためにはいいやり方かもしれないが, 基礎的な数学・物理・化学の知識の無い学生さんに, いきなり専門科目を教えても消化不良になるだけだろう。現に, その基礎科目を全学教育で学んできているにもかかわらず, 3セメスタで教える力学に完璧についてくることができる学生さんは半分くらいではないだろうか。5セメスタで教える数学で微分方程式の解を間違いなく求めることができる学生さんも半分くらいか。

それを, もし基礎無しで1セメスタから始めたらどうなるか。例えば Fourier 級数と級数の収束条件について, 1年生は十分な知識を持っているだろうか。高校の物理や化学は暗記科目ではなかったか。微分方程式は解くものだと知っているか。物理現象を微分方程式で表現できるか。少し我慢して基礎をまず学ぼう。その習った時点では理解できなくても構わない。専門科目を勉強しているうちに基礎知識を使わざるを得なくなったときに, なぁーんだそういうことだったのかと理解できれば十分だ。

もし専門に興味を持ちたいなら, 例えば街中の橋等の構造物の形とその材料がどうしてそれでいいのか, どうして広瀬川の堤防はこうなっているのか, 中州はどうしてあんなになっているのか, 青葉通りの信号はどうして青が続かないのか等, 常に疑問を持って思索(休むに似たる堂々巡り [191] でも構わない) するだけでも将来の足しになる。小さい子供だったときのように, 解決しないのに常に「なぜ」「どうして」と想像することが一番大事である。



**全学教育科目の、特に文科系科目は無駄だ:** そうだろうか。将来我々は社会をよくする事業に携わることになる。社会は人間が構成していて、その社会にはある共通した価値観がある。その価値には、数式や数字では決して表すことすらできないものもたくさんある。そういうものを科学的に分析したり理解したりすること無しに、社会をよくすることはできない。文科系科目はいわゆる人文科学・社会科学に分類される思想と方法論の教授が目的だ。理科系科目の自然科学と同様『科学』である。本をたくさん読もう。どうして1930年代のドイツの異常はその当時正常だったのか等など、物理や数学よりも面白いことを社会科学の授業ではたくさん学べるかもしれない。先生に恵まれれば・・・それから、勉強に「無駄」ってことはあり得ない。そんなところに利益・効率といった概念を持ち込んでも何にもならない。この「文系科目無用論」は実際に授業評価アンケートに書かれたことがある。この学生さんは社会に出てからきつと駄目になるだろうなあ。

**第2外国語は無駄だ、英会話を教えるべきだ:** 4年生になって研究室で読まなければならない英語の文章がまともに理解できる学生さんは非常に稀だ。「読み」すらできていないし、「書き」はもっと駄目だろう。確かに「書き」よりも「聞く」「話す」を重視してもいいかもしれないが、ともかくも論理的な構成でできた英文を「読む」ことすらできないのが今の学生さんのほとんど全員の実力である。朝日新聞(2010/10/20)に立教大学の鳥飼玖美子女史による英語教育へのコメントがあった。一部しか引用しないのは誤解を招くかもしれないが「これまで企業人が外国に放り出されて何とか英語でやってこられたのは、読み書きの基礎力があったから」。短い文節にして(論文でも関係代名詞は極力使わない!)文法通り話せば通じます。一番の問題点は聞く力。正しい発音を覚えてない(聞いたことない)からということと、頭の中では日本語で考えているということ。こ

の二つを克服しないと英語での会話はできないだろう。

また大学の英語や第2外国語の教育を中学・高校の語学と同じように考えてはいけない。これは、その言葉を話す人や国の文化に触れるためのきっかけを与える科目だ。教科書や読本の全部を理解できなくてもいいでしょう。その読本の著者が書いた別の文章を日本語訳で読むことの方が大事かもしれない。トーマスマンでドイツ語を習っていて、小説家北杜夫の名前の由来を知る。どうして北ドイツ人と南ドイツ人は違うのか等を教えてもらう。アメリカ南部の文化や気候と人となりについて教えてもらう。物理や数学よりも面白いことを語学の授業ではたくさん学べるかもしれない。先生に恵まれれば・・・でも、1から100までと、こんにちは・さようなら・それいから・有難うくらいは第2外国語で言うようになっておきましょうよ。

文科系科目もそうであるが、広い知識を持つことは、人の「中身」を豊かにしてくれる。その知識を得るための時間は決して無駄にはならない。サークル等で同じような価値観を持った人間同士だけで情報交換をするのもいいが、異なる価値を大事にする人達にも広く会っておくのはもっといい。

**配付プリントが英語じゃ困る:** 学生さんによる授業評価の自由記述欄にこう書かれた。付録Jがそのプリントである。4年生になって研究室で読む論文は全部英語だ。英会話を教えろとか第2外国語は無駄だと言っている学生さんも、ひよっとすると英語の配付プリントはお嫌いかもしれないなあ。一体、どうして欲しいの。あくまでも受動的なのか。

実はこの授業は数学で、式が並んでいるんだから英語は拾い読みでもわかると思うのだが。さらに教科書が英語だ。元々が留学生も対象とした英語による授業だったからである。当時は教室で日本語は使わなかったため、日本人の学生さんにはとても評判が悪かった。教科書は

高かったので10冊準備して貸し出すことにしてあった。板書等は米国流にしたためか、教科書は留学生も借りに来ないが成績も高かった。さて日本人学生で借りに来たのは、毎年20~40名くらいの受講者の10年間で5名未満だ。英語を読むことすら嫌う学生さんが会話を習いたいとおっしゃっているのが現状である。

**締切後に宿題を受け取ってもらえない:** 当たり前だ。なぜ受け取ってもらえると思っているのだろう。わけがわからない。特別な事情が無い限り締切は締切だ。親切な先生は受け取ってチェックしてくれるかもしれないが、成績には反映されないだろう。

いろいろな事情で間に合わない場合には、事前にそのことを先生に伝える必要がある。それが社会の常識だ。そもそも宿題は締切日に提出しなければならないわけではない。締切日より前に先生の部屋に行って提出するようにすれば、急な事情の変化に対処できる。聞くところによると、最近の小学校では親も締切を守れな

い(くせにクレームする)そうだが、そういう文化は大学と一般社会には存在しない。

オフィスアワー以外で面談予約したが、10分遅れたら先生はもういなかった。不誠実な態度だ: 約束を守れない人、遅れるかもしれないとわかった時点で連絡をできない人、そちらの方が不誠実ではないだろうか。それが常識だ。

最近、学生さんは会釈すらしない。学生さんには悪いが、顔を覚えられない。しかし会釈してくれれば「よおっ」くらいは声を掛けています。就職担当をやっていてリクルートに来たOBから聞いた話でも、挨拶とか礼儀・仁義を守れない人はちゃんとした仕事ができないということだ。なぜ論語で仁義礼が説かれたかについて、高校の担任だった漢文の徳永健生先生の還暦時の特別授業で一つの説を聞いたが、特に社会をよくする仕事をしてそこで生きていく技術者になるのであれば、やはり礼儀・仁義は欠かせない。

**授業聴講についてのヒント:** ところで最近、板書を写すのに一々ノートに目を移す人が多い。目はほとんど黒板<sup>20</sup>を見たままでノートに書き込むことはそんなに難しいことではない。板書を写したノートは綺麗である必要は無く、そこには復習時の加筆スペースがありさえすれば、なぐり書きでも十分な価値がある。専門科目の場合は、綴じたノートではなくA4サイズのルーズリーフ(レポート用紙)の表だけに書くといい。綴じたあと見開きの左(裏)は復習に使え。先生に質問したとき、先生もそこにヒント等を書き込むことができる。また綴じるときに配付物(ほとんどすべてA4だ)も一緒にできるので失くさないで済む。また赤チョークに替えると赤ペンに持ち替えるといったこともあまり効率的ではない。そこに下線を引くだけで十分。自分で赤は下線で黄色は下波線とか規則を決めておけばいい。

また、先生がしゃべっただけで板書していないことをメモできる人がいなくなった。社会に出たら、何をメモすべきで何は聞くだけでいいかという指示は誰もしてくれない。自らの判断で必要事項を書き写す必要がある。特に講演等のときにメモをとる人がほとんどいないのはおかしいと思っている。

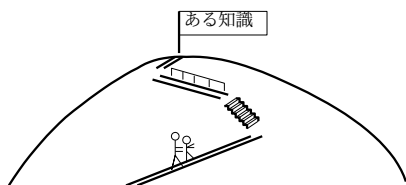
**面談等のヒント:** 著者のように予約無しでも時間があれば面談する先生はたくさんいると思うが、先生と話したいときは、可能なら予約しよう。そして、予約した時刻の5分程前には玄関や廊下付近で待機し、3分程前になったら部屋に向かい入室すればいい。また予約しない場合も同じだが、入室の際にはドアをノックし、先生の応答があってから<sup>21</sup>ドアを開けて入室する。ドアが開いていてもノックと声掛けは欠かせない。また、先生が座ってもいいと言うまでは立ったままだ。ただしお土産は不要である。呵呵。

<sup>20</sup> 近頃スライドを使う教員が増えたこともあり、ホワイトボードにしろという要望が勝ってしまってそうになった。しかしこのボードは光を反射することから、前方の左右の席からは反対側の左右端の板書が読めない。また第1著者の白い綿パンツには黒マーカの点が複数付いている。黒板を復活させて欲しいものだ。

<sup>21</sup> 先日、他の先生と丸秘の話をしていたところ、ドアノックの音が聞こえたが無視して話をしようとしたところ、ドアが開いて学生がしゃべりかけてきた。「今打ち合わせ中!」と制止して無視した。ちとイラッときた。

## Q.4 大学で学ぶということ

高校との違い：高校までは、既にわかっていることを学ぶ、というより覚える。大学以降に利用できる道具を頭の中に組み込むことが目的の教育である。もちろん、すべての人間がすべてを理解できるはずはない。だから目標は高くしておいて最低限その目標の50%、60%を会得することが義務教育の目的ではなかったのか。その最低限にも達成できない、いわゆる「落ちこぼれ」は昔からいたはずだが、そこは丁寧な指導で卒業はできていたと予想する。ところが、落ちこぼれを落ちこぼれとしてしか扱えない低級な教諭が増えたことや、親のしつけが行き届かず社会生活ができない子供が増えたこと等から問題が発生して、「ゆとり」といった言葉が出てきたのではないだろうか。実は大学においても落第ギリギリの人間をうまく卒業させてきたように感じる。第1著者はかつて、そういった学生に対して厳しい対応を要求したことがあったが、先輩教官から丁寧な説明を受けて、そういった「うまく卒業させ」ることも容認できるようになった。学生本人が大人でありさえすれば、いろいろな対処の仕方はある。



さて、高校までの教育の特徴を挙げてみよう。

- 既にわかっていることを習う。
- 丁寧なガイドがある。
- 教諭は背中を押してくれる。
- ゴールを身に付けるのが目的。
- 記憶と反復学習に努める。

となるのではないだろうか。

これに対し、大学・大学院における教育の特徴は次のようになると思う。

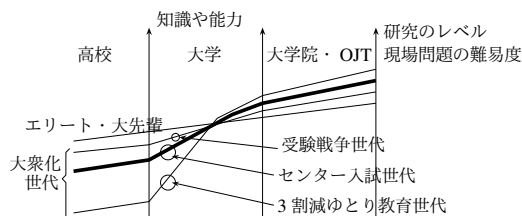
- わかっていないこと【を解く・に対処する】方法を学ぶ。

- 教員は自分がベストだと思う方法で知恵を与えてくれるだけだ。
- 学生自らが、自らの理解できる言葉で解釈し模索する必要があることから、復習が一番大事である。
- いろいろなプロセス（調査・検討・開発・解決：アカデミック・スキルと呼ぶらしい）を身に付けるのも目的であるが、免許や資格を取得することは目的ではない。

学んで情報を身に付けるのは君たち自身であるから、教員が教えた通りに、教えた言葉で身に付ける必要は全く無い。自分がいつでも使える情報にしたければ、自分の言葉に翻訳し直す必要がある。面白い例を書いておこう。例えば大学入試の物理学の力学の問題を理学部と工学部の先生に解いてもらおう。ある先生は「多分、こういうプロセスを使えば解ける」と述べて筆は動かない。ある先生は、30分以上時間をかけて（受験生は20分くらいで解く）「微分方程式を使ってもいいなら、これが答」と出してくる。一方受験生の答案の採点現場では、答は合っている答案に書いてある解き方を理解するまでに、数人の先生が30分以上も悩むこともある。つまり、高校までの教育と大学における教育・研究とにおいて、頭（道具）の使い方にはほぼ全く共通点はないと考えないといけない。以前は親が、大学のこういった教育体制や、大学生は大人として扱われることが、しつけとして家庭で教育されていたが、昨今はそうではないらしく、大学における勉強に対する考え方が間違っている上に、子供じみた権利だけを主張する学生が増えてしまっていると感じる。

講義内容の変遷と難度：さて、時代の変遷と大学教育の難度の増加について、わかりやすい模式図を元工学部長の四ッ柳隆夫先生が描いてくださったが、それをかなり簡略化して、かつ少し誇張して描いたのが次の図である。学部における専門科目の講義内容そのものも昔に比べて増えたこともあるが、3年生の夏学期までの勉強がとても重要で、かつ辛く

なっている。それに伴い、昔のいわゆる教養教育が縮小され、またエリート・大先輩が学部で習った専門科目の中にはもはや大学院でも開講されていない部分も生じている。これが望ましい形とは思えないが、必要なことを最小限教授するという観点からの設定になってしまっているのが現実だ。



考えるということ： 教員が教えた通りに身に付ける必要は無いと書いた。それは、問題に対峙したときにすぐに取り出せる「活かせる知」にしておくためには、自分の言葉に翻訳して身に付ける必要があるからだ。では、その使える知を活かして考えて問題を解決するというはどのようなことだろう。京谷孝史先生が卒業式の祝辞で使う論語の言葉<sup>22</sup>は次のような意味と捉えてもいい。「学んで身に付けても考【わ|え】ずに使【わ|え】ないなら意味が無い。考えるだけで学ぼうとしなければ何も解決できない。」考える・知識を使うとはどういう行為だろう。英語に‘serendipity’という単語がある。ある辞典[188]には、「思わぬ発見をする才能」「運よく発見したもの」等とある<sup>23</sup>が、そうじゃない。

- 寝ても覚めても考え続けること
- 試行錯誤<sup>24</sup>をし続けること

で得るかもしれない発見とその能力が‘serendipity’であるとされている。無駄が多いが、それ無しには絶対に現れない機会、現れるとも限らない機会のことである。Pasteurの‘Chance favors the prepared mind.’とほぼ同じだと思う。普段から身の回りの現象に関心を持ってそれを自分の知識で解釈する努力を続けておくことが望ましいし、一旦問題を抱えてしまったら、頭の中の道具を駆使して延々と試行錯

誤を続ける必要があるということである。最終的にはその問題は解決できないかも[191]しれないが、それも何らかの足しになるのだ。卒業論文の課題解決あたりから始まって就職して仕事をしている間は、この「考え続ける」という行為が必要になるのだ。また教員との関係についていい言葉「師を見ながら、師が見ているものを見よ」を文献[114]に見つけたが、出典は不明。

『基礎』を学ぶということ： 高校までの「基礎」とは応用が利くものではなく、ものごとを科学的に考察するための道具である。これに対し、大学で教育している『基礎』とは、今すぐ使える技術を教える代わりに<sup>25</sup>、将来の解決すべき難問にチャレンジするための応用可能な道具である。文献[145]の著者である鈴木基行先生は、構造設計に当たっては手間やお金がそれほど必要無いくらいの「ちょっとした工夫」を加えるだけで、設計荷重を超えるような外乱に対する事故を避ける可能性を増やすことができるとおっしゃっている。つまり、そういうことができるように大学では『基礎』を教えているのである。そしてそれは時々刻々とアップデートされるため、講義中に板書すらされずに言葉で伝達されることも多い。教科書を読めば単位がもらえらると思っっている学生は、その考えを早く改めるべきだろう。

企業は君に何を求めているか： 朝日新聞(2006/3/20)の特集「大学」から適当(いい加減という意味；以下あちこちに著者加筆有)に引用しておこう。企業は即戦力は期待していない。「すぐに役立つ(だけの)人はすぐに役立たなくなる人である。」は戦前の東京大学の谷村豊太郎先生の言葉である。それよりも、大学で得た知識を自分の言葉に翻訳したデータベースとして持ち、それをを用いているいろいろ想像(simulation)して新しい提案ができる能力が期待されている。さてその特集では、企業が求めるものについて経団連教育問題委員会 宇佐美聡企画部会長(三菱電機常任顧問)は

<sup>22</sup> 「子曰 学而不思則罔 思而不学則殆」(例えば <http://www.tanakakaikei.com/koten1508.htm>)

<sup>23</sup> 英英辞典[40]でも‘... entirely by chance’とあるが、著者が伝え聞いた話に基づけば、その‘chance’を引き寄せるための普段の心掛けまでを含めた能力と結果が‘serendipity’であるとされている。p.354 参照。

<sup>24</sup> 間違っ「トライ・アンド・エラー」と言う人が社会人の中にも多いので注意。

<sup>25</sup> そんなものは就職してから先輩から教えてもらえばいいし、その仕組みは『基礎』があれば容易に理解できるはずだ。

志と心: 倫理観と責任感。規範の中で使命感を持って取り組む姿勢。

行動力: 実行力とコミュニケーション能力。情報収集とその利用によって目標を達成する。

知力: 基礎学力+ (結果的に) 独創性。深く考え抜く力。「使える知」。

だと述べている。加えて

1. 相手の意見を聞いた上で自分の意思を伝える力。
2. 自分の言葉で自分の考えを伝えられる人材。

も重要だ。さらに、次のようなこと<sup>26</sup>が読み取れる。

- ○○大卒だから・・・ということは全くあり得ない。
- コミュニケーション能力とは英語ができることだけじゃない! (大学教員も勘違いしてませんかあ)
- 就職してから「自分に合わない」は、どの職場も駄目ってこと。最近ミシェラン・ガイドに掲載された寿司店の小野二郎氏は「自分を仕事に合わせる」べし (NHK 教育 TV 2008/1/8) と述べている。
- 「工学系だから人文・社会系はまるで駄目」は論外。
- 小さくまとまって面白みに欠ける学生は欲しくない。
- きれいな受け答えができるだけの馬鹿は要らない。

大学入学以降にやり続けること:

1. 自分の言葉に翻訳して勉強しデータベース化する。復習して基礎をしっかり身に付ける。折に触れて勉強をする。学んだことを友人に教えてみてごらん・・・

2. 勉強を効率化しない。たいていは自己満足の手抜き。これができるのは秀才だけ。

3. 友人をたくさん作る。視野を拓げる。いろいろな価値観が存在することを知る。本を読む。

4. 大人と会話をする。社会の常識<sup>27</sup>を身に付ける。

5. 自分の考えを持つ。自分の頭を使う。使える知識にする。

6. 約束を守ること。決まり (暗黙のも含む) を守ること。

残念ながら著者も実行できていないことだが。

**最後の最後に工学倫理:** 第1著者もとうとう「工学倫理」を受け持たされた。伝えたかったことは、研究では間違いをしてもいいが嘘は駄目ということ、研究発表 (論文) では著作権等を侵害しないこと、社会に出たら土木界の一員として人々の信頼を裏切らないこと、上司や後輩と正しい対話ができる仲間を作っておくことである。どういうことかは個々に考えて欲しい。あの某細胞研究のゴタゴタの際、実験ノートの作り方についてマスコミでも何度も発信されたが、解析的であろうと数値的であろうと、あるモデルに基づく理論的研究 (非実験的研究) の場合の研究ノートの作り方も同じである。

1. 最初のページ欄外に日付を書き順にページ番号を振る。綴じてないレポート用紙<sup>28</sup>でよく、表にしか記載をしない。裏は軽微な追加事項等を日付入りで書き込むために使う。
2. 途中 (例えば p.5 と p.6 の間) に追加挿入する場合にはその日付を記し、誤解を生まないようなページ番号 (例えば p.5a, 5b...) を振る。
3. 鉛筆書きでいいが消しゴムは不可。間違い箇所やページにはボールペンで赤×印をつけ、うまくいかなかった箇所も同様にした上で理由を朱書きする。

<sup>26</sup> この段落の括弧書きは第1著者の加筆である。

<sup>27</sup> 江藤淳氏の随筆に「こもんせんす」と題したものがある。ある女性がこれを「小紋のお扇子」のことだと思ったという小話も江藤氏自身が書いていた (あとがきだったかな?) ような記憶がある。

<sup>28</sup> ページを超えるような長い式の展開をしているとき、綴じてあるノートではかえって間違いをするため、複数のページの式展開を同時に眺められるバラバラの紙の方がいい。ここは実験ノートとは異なる。

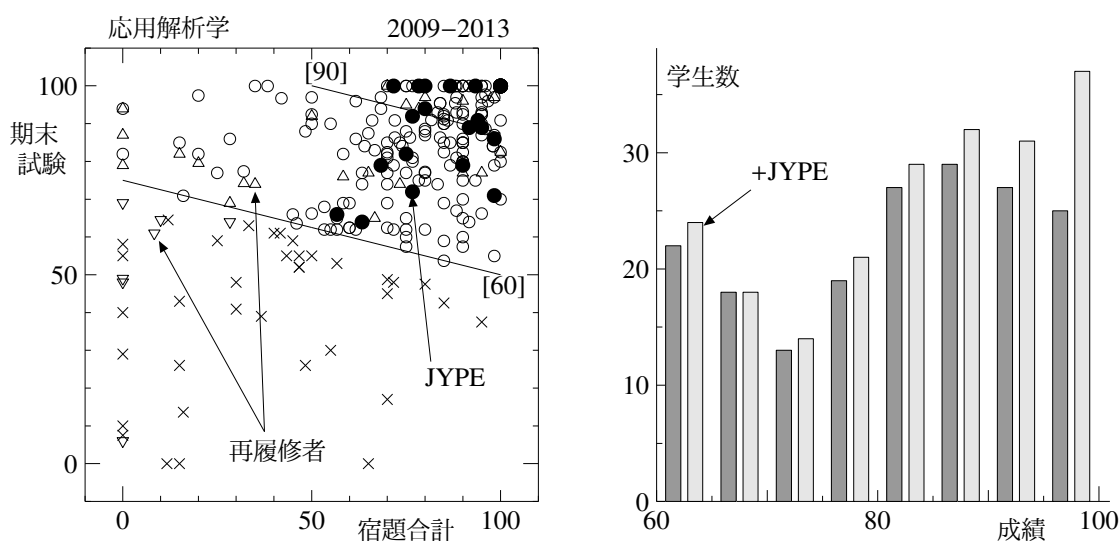


図 Q.3 英語で実施した応用数学の講義の成績分布 — 留学生 (JYPE) および日本人学生

4. 指導教員の打ち合わせメモ等も日付を付した上で、適所に挟んでおく。
5. ある程度の結果が出た段階毎に順番に表紙付きのフォルダに左2穴で綴じる。
6. これでは計算間違いの振りをした捏造は避けられないが、式展開の途中が少しでも消されていたら信頼性は無いと判断すべきだ。ただし数値計算結果の真偽の判断は非常に難しい。

さて、文献 [115] で内田樹先生がおっしゃっていることをつまみ食いしておきたい。ここも一部分の抽出なので誤解を生む可能性は高いが、インパクトを与えるためにも敢えて一部分を引用しておく。真意を知るには文献を読んでいただきたい。それは文部科学省の杉野剛さんとの2回の対談の節（原文縦書き）である。

- 大学教育のアウトカムとは何ぞやについて‘数値的には表示しにくいもの’とした上で‘資格や免状や、TOEICのスコアというのは、その副産物で’あるとする。本来の大学の教育目的は‘「成熟した市民を育てるため」’であると断言する。
- 大学には‘俗世間とは違う空間があって、そこは外とは違う時間が流れており、違う度量衡が機能している’とする。そして‘そういう非-社会的な空間、外の社会との温度差がある場所が若い人たちを健全に育ててゆくためには絶対に必要だ’と考えている。さらに‘社会の価値観としっかり一線を画すということに大学の責務がある。’と断言している。
- 学ぶというところに‘対価と商品の等価交換という発想で学校にやってくる人たち’はそぐわない。学ぶことはできないとする。‘「学ぶ」というのは努力と成果の等価交換ではない’と断言している。

どうだろう。どういう風に読者は感じますか。昨今の某大学教員<sup>29</sup>もかなり勘違いして教育をしていないか、というのも正直な感想である。

## 英語を使った講義と日本人学生

図 Q.3 は「応用解析学（付録 J の内容）」の5年分の成績分布である。宿題を20%、期末筆記試験を80%で成績にしている。左の図で斜めの [60] という線が合格ラインである。上方の斜めの [90] の線より上が90点

<sup>29</sup> その某大学の教育評価等を担当する部署の専門家からアンケートがあった。その中の設問に「あなたの講義をより効率化するには次のどれが有効だと思いますか」というのがあった。講義というもののあり方を知らない専門家なんだろうね。あるいは今、教育の専門家はこういった講義の効率化を研究しているのだろうか。くだらない。講義は異なる教員からの繰り返し学習の積み重ねが基本だ。

以上の成績取得者であるが、かなり多い。実は試験では A4 用紙裏と表の自筆カンニングペーパーの持込を許している。付録 J を眺めればすぐわかるように、ある標準的な方法によって初期値境界値問題の級数解を求める手順を学ぶだけなので、普通に勉強していれば 70 点以上は確実に取れる内容である。しかしこの有様だ。宿題を半分以上提出しないことのリスクについては、講義の 1 回目にアナウンスしているが、効き目が無い。また、右下に分布する学生は多分他人の宿題を写しただけで勉強しなかったため、期末試験で 50 点すら取れていない。これも 1 回目に注意しているが、効き目が無い。その右の図は最終的な成績分布だ。70 点あたりに谷間がある。これより右は各自それなりに実力が付いて合格した学生、左はたまたま合格した学生ではないだろうか。面白いことに、問題の設定が違うのにカンニングペーパーにある回答例をそのまま複製して出す学生が毎年複数いる。何も勉強しなかったのだろう。

図中の 'JYPE' というのは 'Junior Year Program in English' の略で、海外の協定校 3 年生を半年間ないし 1 年間教育するシステムで、教室では日本語を全く使わない。卒論が無い大学からの留学生にとっては、卒論の真似事のような 'individual research training' の評判がいい。この図の 2011 年までのデータにはこの留学生が含まれている。そして彼らは全員合格している。しかもどちらの図からもわかるように高得点側にほとんどが分布している。逆に言うと、2011 年までの日本人学生は英語の講義を聴かされていて、その授業評価には毎年のように「英語でやるな」「英語でやる意味が無い」と酷評をいただいた<sup>30</sup>が、日本人の成績は比較的悪い。担当した第 1 著者の英語の発音が良過ぎて聞き取れなかったからかもしれない（呵呵）が、それだけが原因だとはとても思えない。だって数学だからだ。式を追えばその論理は明らかである。しかもこの講義、第 1 著者が米国で受講したノートをはぼそのまま板書してある。これは著作権違反かも。Mahar 先生ごめんさい。その米国における板書を書き写したノートだから、それを読めば何をやっているかがわかるだけの情報がほぼそのまま板書されている。何度も書くが内容は数学だ。式の展開を見れば論理は明らかである。上述のように学生による授業評価では英語使用を非難され続けたが、実際にそう書いた人数は多くても年 3 名（約 5%）未満である。また合格した日本人学生からは「カンニングペーパーもあるし、中身はパターン化していてとてもわかり易い手法の説明だった（説明がわかり易いわけではない、呵呵）から、計算間違いさえしなければ 70 点は軽く取れる」と言われたことがある。結局 2010 年度には日本人の受講生が激減。教えている方にとっても苦痛および悲しみだったが、誰も代わってくれないので 2011 年度で JYPE への参加協力をやめた。

ちなみにこの講義、米国の講義で使われたのと同じ英語の教科書があって、貸し出すことになっている。借りに来た日本人学生は 5 年間で 2 人くらいだっただろうか。米国で使われる数学の教科書はわかり易いが、そういったものに接する意欲も好奇心も全く持っていないのだろう。教科書も借りずに、英語を使った授業を非難する。講義に遅れてくるのは当たり前。講義の途中で教室から出て行くのも当たり前である。これは 2016 年に書いているが、最近では代返・代筆も多発している大学である。我が国の工学は今後も発展するでしょうか。

<sup>30</sup> 実は大学の事務職員も英語が苦手だ。面白いエピソードがある。米国で PhD を取得した人（著者ではない）が採用されたとき、事務手続きのために学位記のコピー提出を要求された。そのコピーを確認した本部事務職員が「日付が無いから無効」と言ってきた。偶々第 1 著者が学科の事務室で遊んでいてその電話のやり取りを聞いていたので、そのコピーを確認させてもらった。案の定文中に「... THAT DEGREE DONE AT (place) THIS EIGHTEENTH DAY OF JUNE IN THE YEAR OF OUR LOAD ONE THOUSAND NINE HUNDRED...」と日付が書いてあったのだ。さらに面白いのはここからだ。その事務からの連絡を受けた当該教員が「あ、本当だ。じゃあこれから出身大学に連絡して別途証明書を送ってもらいます。」と答えたのだ。あーあだねえ。



「限界いー！勝負はっ？」（工明会運動会）  
2005年青葉工業会写真コンテストスナップ部門入賞

向こう側が土木チームで、専攻長の北原道弘先生が応援している。こんな体勢なのに勝ってしまった。  
このあと新堀雄一先生（中央）は、土木ごときに負けたことをとても悔しがった。  
その右で腕を組んでおられる猪股宏先生は工明会運動会の主要メンバー。



‘What’s up?’ 「どうよ？」かな。‘Ceiling!’ と答えるのは高校生レベルのギャグだとか。正しくは‘Not much!’ 等となるらしい。日本では今後、こんな英語を小学校から教えるのかな。国内であった国際会議に初めて出たときに、とても不快に思ったことがあった。日本人の若い研究者達が講演で‘You know!’ を連発するのである。こういう言葉を口癖にしないような教育が必要だと思うのであるが、いかがでしょう。多分ではあるが、国際会議等の発表で‘You know!’ ‘I mean,’ は使ってはいけないと思う。著者も失敗した（質問が的外れだと感じて、ちょっとカチンときたとは言え）が‘Really!’ もあまりよろしくない。



表 Q.3 論文中の表現とその本当の意味? 呵呵 第 1 著者留学時に隣の研究室の冷蔵庫に貼ってあった

**A Glossary for Research Reports** [28]; インターネットに全文公開されているようなので . . .

#### INTRODUCTION

It has long been known that . . . ⇒ I haven't bothered to look up the original reference  
 . . . of great theoretical and practical importance ⇒ . . . interesting to me

#### EXPERIMENTAL PROCEDURE

While it has not been possible to provide definite answers to these questions . . . ⇒ The experiments didn't work out, but I figured I could at least get a publication out of it  
 The W-Pb system was chosen as especially suitable to show the predicted behaviour . . . ⇒ The fellow in the next lab had some already made up  
 High-purity . . . / Very high purity . . . / Extremely high purity . . . / Super-purity . . . / Spectroscopically pure . . . ⇒ Composition unknown except for the exaggerated claims of the supplier  
 A fiducial reference line . . . ⇒ A scratch  
 Three of the samples were chosen for detailed study . . . ⇒ The results on the others didn't make sense and were ignored  
 . . . accidentally strained during mounting ⇒ . . . dropped on the floor  
 . . . handled with extreme care throughout the experiments ⇒ . . . not dropped on the floor

#### RESULTS

Typical results are shown . . . ⇒ The best results are shown  
 Although some detail has been lost in reproduction, it is clear from the original micrograph that . . . ⇒ It is impossible to tell from the micrograph  
 Presumably at longer times . . . ⇒ I didn't take time to find out  
 The agreement with the predicted curve is excellent/ good/ satisfactory/ fair/ as good as could be expected ⇒ . . . fair/ poor/ doubtful/ imaginary/ non-existent  
 These results will be reported at a later date ⇒ I might possibly get around to this sometime  
 The most reliable values are those of Jones ⇒ He was a student of mine  
 It is suggested that . . . / It is believed that . . . / It may be that . . . ⇒ I think

#### DISCUSSION

It is generally believed that . . . ⇒ A couple of other guys think so too  
 It might be argued that . . . ⇒ I have such a good answer to this objection that I shall now raise it  
 It is clear that much additional work will be required before a complete understanding . . . ⇒ I don't understand it  
 Unfortunately, a quantitative theory to account for these effects has not been formulated ⇒ Neither does anybody else  
 Correct within an order of magnitude ⇒ Wrong  
 It is to be hoped that this work will stimulate further work in the field ⇒ This paper isn't very good, but neither are any of the others in this miserable subject

#### ACKNOWLEDGEMENTS

Thanks are due to Joe Glotz for assistance with the experiments and to John Doe for valuable discussions ⇒ Glotz did the work and Doe explained what it meant



「おいっ? 誰かに見られてないか?」 (第1 著者の実家@ 鹿児島 of 正月前後)  
2009 年青葉工業会写真コンテストスナップ部門スナップ大賞

# 付録 R

## 演習問題の答

### 第 1 章の答

1. 解答は p.1042。

### 第 2 章の答

1. p.28 の式 (\*) に示してある。  $N_{12} = 0, N_{13} = -P, N_{14} = \sqrt{2}P, N_{24} = 0, N_{34} = -P, N_{35} = -2P, N_{36} = \sqrt{2}P, N_{46} = P, N_{56} = -P$ 。したがって部材 1-2, 2-4 は取り除いてもよく、不静定次数も 0 なので静定で安定。斜材を付け替えた場合は、  $N_{12} = P, N_{13} = 0, N_{23} = -\sqrt{2}P, N_{24} = P, N_{34} = P, N_{35} = -P, N_{45} = -\sqrt{2}P, N_{46} = 2P, N_{56} = 0$ 。部材 1-3, 5-6 は不思議。部材 1-3 は取り除けそうだが、部材 5-6 は駄目。ただし、どちらの場合も不静定次数は負になる。ただし、部材 1-3 を取り除いた場合に荷重がこの問題のように鉛直下向きであれば実際は安定（有限要素法では解けない場合があるか）。つまり、部材 1-3 を取り除けるのは、部材 1-2 も取り除ける場合にのみ安定になる。

2. 下弦材の場合は、  $q_1$  の荷重位置の左端は、トラスの左端から  $2\frac{1}{2}m$  の位置で、最大軸力は

$$\frac{225\sqrt{3}}{48}q_1 + \frac{335\sqrt{3}}{48}q_2$$

である。また斜材の引張に対する  $q_1$  の荷重位置の左端はトラス左端から  $5\frac{1}{2}m$  の位置になり、最大軸力は

$$\frac{25\sqrt{3}}{24}q_1 + \frac{5\sqrt{3}}{72}q_2$$

になる。一方、圧縮に対する  $q_1$  の荷重位置の左端位置はトラス左端から  $3\frac{1}{2}m$  の位置で、最大軸力は

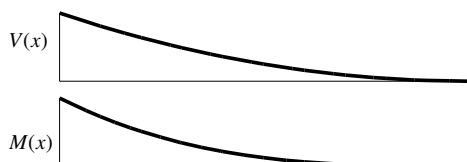
$$\frac{65\sqrt{3}}{24}q_1 + \frac{125\sqrt{3}}{72}q_2$$

である。

3. それぞれ

$$V(x) = \frac{q(\ell-x)^2}{2\ell}, \quad M(x) = -\frac{q(\ell-x)^3}{6\ell}$$

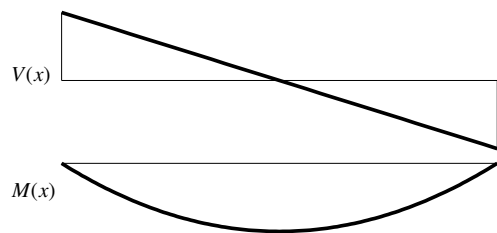
である。



4. それぞれ

$$V(x) = \frac{q(\ell-2x)}{2}, \quad M(x) = -\frac{qx(\ell-x)}{2}$$

である。



5. 各自確かめること。

6. 各自確かめること。

7. 反力は

$$H = 0, \quad F = P + q(a+c), \quad C = -bP - \frac{q}{2}(a^2 - c^2)$$

で、断面力は  $0 < s < h$  までが

$$N = -P - q(a+c), \quad V = 0, \quad M = bP + \frac{q}{2}(a^2 - c^2)$$

その上の  $h < s < \ell$  で

$$N = -q(a+c), \quad V = 0, \quad M = \frac{q}{2}(a^2 - c^2)$$

さらに、梁の左部分  $0 < x < a$  では

$$N = 0, \quad V = -qx, \quad M = -\frac{q}{2}x^2$$

最語に梁の右部分  $a < x < a+c$  では

$$N = 0, \quad V = q(a+c-x), \quad M = \frac{q}{2}(a+c-x)^2$$

となる。図は省略。

8. 各自確かめること。

9. 曲げモーメントの影響線（すべて単位は m）は

$$\bar{M}_C = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < \frac{35}{2} \\ \frac{35-x}{2}, & \frac{35}{2} < x < 35 \end{cases}$$

で、せん断力の影響線は

$$\bar{V}_C = \begin{cases} -\frac{x}{35}, & 0 < x < \frac{35}{2} \\ \frac{35-x}{35}, & \frac{35}{2} < x < 35 \end{cases}$$

10. 曲げについては断面 C の影響線を用いて、中央に  $q_1$  を載荷すればいいので

$$M_{\text{MAX}} = q_1 75 + q_2 \frac{625}{8}$$

でいいが、せん断については断面 A の影響線で載荷した方が不利になるので、式 (h) を用いて

$$V_{\text{MAX}} = q_1 \frac{40}{7} + q_2 \frac{45}{14}$$

となる。

11. 境界条件は、先端  $x = \ell$  で  $M = 0, V = 0$  である。答は演習問題 3 の答を参照のこと。
12. 一般解は式 (k) と同じになる。境界条件は両端で曲げモーメントが零

$$M(0) = 0, \quad M(\ell) = 0$$

で、スパン中央の連続条件が

$$V(\ell/2 - \epsilon) - V(\ell/2 + \epsilon) = 0, \quad M(\ell/2 - \epsilon) - M(\ell/2 + \epsilon) = Q$$

となるから、この 4 式で積分定数を決定すれば、 $c_1 = Q/\ell, c_2 = 0, c_3 = Q/\ell, c_4 = -Q$  となり、曲げモーメントは

$$M(x) = \begin{cases} \frac{Qx}{\ell}, & 0 < x < \frac{\ell}{2} \\ -\frac{Q(\ell-x)}{\ell}, & \frac{\ell}{2} < x < \ell \end{cases}$$

と求められる。これからせん断力を求めて両端の境界条件に代入すれば、支点反力は  $S_0 = -Q/\ell, S_\ell = Q/\ell$  と求められる。

13. どれも  $H_1 = -H_2 = -P \arctan \theta$  で、左のトラスは  $V_1 = 0, V_2 = P$  となり、右のトラスは  $V_1 = N_3 = P$  である。真ん中のトラスの解は本文中に書いた

14. 力のつり合いとモーメントのつり合いは

$$P = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

$$bP = c(F_1 + F_4)$$

$$aP = c(F_3 + F_4)$$

であり、個々の足の縮み量を  $w_i$  とすると、足の軸力は

$$F_i = k w_i \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

そして、4 本の足の中心位置の縮み量が整合する条件から

$$w_2 + w_4 = w_1 + w_3$$

これより、足の軸力が

$$F_1 = P\{(b-a)/2c + 1/4\}$$

$$F_2 = P\{-(b+a)/2c + 3/4\}$$

$$F_3 = P\{-(b-a)/2c + 1/4\}$$

$$F_4 = P\{(b+a)/2c - 1/4\}$$

となる。転倒しない条件は 4 本の足で囲まれた正方形の範囲に荷重がある場合だが、1 本が浮いている状態で残りのうちの 2 本の軸力が負になる条件でない領域。

### 第 3 章の答

1. 最初のひずみ成分は、式 (3.17) を満足しない。次のひずみ成分は満足する。まず  $\epsilon_{11}, \epsilon_{22}$  と変位の関係式 (3.6) から

$$u_1 = x_1^2 x_2^2 + f(x_2) + c_1$$

$$u_2 = -2x_1 x_2^3 + g(x_1) + c_2$$

となるから、 $\epsilon_{12}$  に代入すると

$$\frac{df(x_2)}{dx_2} = 4x_1^3 - \frac{dg(x_1)}{dx_1} = \text{const.} = \omega$$

でなければいけないことがわかり

$$u_1 = x_1^2 x_2^2 + \omega x_2 + c_1$$

$$u_2 = x_1^4 - 2x_1 x_2^3 - \omega x_1 + c_2$$

を得る。 $c_1, c_2$  が剛体並進変位成分で、 $\omega$  の項が剛体回転成分である。

2. 多分?

$$k_i \{u - n(n \cdot u)\} + [n\sigma - n\{n \cdot (n\sigma)\}] = 0$$

成分表示すると

$$k_i \left( u_i - n_i \sum_{k=1}^3 n_k u_k \right) + \left( \sum_{j=1}^3 n_j \sigma_{ji} - n_i \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 n_j \sigma_{jk} n_k \right) = 0$$

3. 主応力の一つが 1 であるのはすぐわかるから、残りの  $2 \times 2$  の行列部分の固有値問題を解けば

$$\sigma_1 = 3 + \sqrt{10}, \quad \sigma_{II} = 1, \quad \sigma_{III} = 3 - \sqrt{10}$$

となり、対応する主方向ベクトルが

$$\left\{ \bar{n}_I \right\} = [0 \ 1 \ (1+\sqrt{10})/3]^T, \quad \left\{ \bar{n}_{II} \right\} = [1 \ 0 \ 0]^T,$$

$$\left\{ \bar{n}_{III} \right\} = [0 \ 1 \ -3/(1+\sqrt{10})]^T$$

となる。単位ベクトルにはしてないが、お互いに直交している。

4. 座標変換行列が

$$\left( T \right) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

なので  $\bar{\sigma}_{11} = \bar{\sigma}_{22} = 1/2 \sigma_0, \bar{\sigma}_{12} = -1/2 \sigma_0$  となる。

5. 式 (3.81) の演算をする。 $\mu > 0$  だろうから、左上  $3 \times 3$  の部分行列の三つの小行列の行列式を計算。

6. 式 (3.120) でまず、 $i$  と  $j$  を同じにして 1 から 3 まで足すと

$$\sum_k \dot{\epsilon}_{kk} = \frac{1}{3K} \sum_k \dot{\sigma}_{kk}$$

となるので

$$\sum_k \dot{\sigma}_{kk} = 3K \sum_k \dot{\epsilon}_{kk} \quad (a)$$

である。また式 (3.120) に  $\sigma'_{ij}$  を乗じて  $i$  と  $j$  を 1 から 3 まで足すと

$$\sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\mu + H}{2\mu H} \sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \dot{\sigma}_{ij}$$

となることから、逆関係が

$$\sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \sigma_{ij} = \frac{2\mu H}{\mu + H} \sum_i \sum_j \sigma'_{ij} \epsilon_{ij} \quad (b)$$

となる。以上の2式(a)(b)を上式(3.120)の右辺第2第3項に代入して左辺に移項して整理すると、式(3.121)を誘導できる。

7. やってみよう。
8. 本文に沿って代入すれば明白。
9. 本文に沿って代入すれば明白。
10. 本文に沿って代入すれば明白。
11. 簡単。

12. 簡単。
13. 簡単。
14. 簡単。
15. 簡単。
16. 簡単。
17. とても面倒。文献[96]参照。
18. やってみよう。
19. やってみよう。
20. やってみよう。
21. やってみよう。

### 第4章の答

1. 定義に従って計算すると、中立軸は下端から  $(3+\sqrt{3})r/3$  の位置にある。これを用いると

$$I = \frac{11\pi r^4}{4}, \quad W_U = \frac{33\pi r^3}{4(3+2\sqrt{3})}, \quad W_L = \frac{33\pi r^3}{4(3+\sqrt{3})}$$

2. 定義通り

$$I = \int_{-h/2}^{h/2} z^2 b dz = \frac{bh^3}{12}$$

になり、2軸対称の断面なので断面係数は

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

3. 定義通り

$$I = \frac{bh^3}{12}, \quad J_x = \frac{bh^2}{6}$$

で面積が  $bh/2$  なので  $z_c = J_x/A = h/3$ 。この図心を通る軸回りの断面2次モーメントと断面係数は

$$I = \frac{bh^3}{36}, \quad W_U = \frac{bh^2}{12}, \quad W_L = \frac{bh^2}{24}$$

4. 定義通り計算すると  $I = 2I_F + I_W$  で、フランジは

$$I_F = (bt_f) \left( \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{bt_f^3}{12}$$

と、第2項がそれ自体の図心回りの値で、第1項が全断面の図心から離れていることの補正項。ウェブは単純に

$$I_W = \frac{t}{12} (h - t_f)^3$$

さらに、薄肉になるとそれぞれの項の第2項は非常に小さくなり、結局

$$I \approx 2(bt_f) \left( \frac{h}{2} \right)^2 + \frac{th^3}{12}$$

と近似できる。断面係数は  $I$  を  $(h/2 + t_f)$  で除せばいいが、薄肉の場合は  $h/2$  で除すだけでいい。

5.  $M = -Q(\ell - x)$  であり、境界条件が左端で  $w(0) = 0, w'(0) = 0$  だから

$$w(x) = Q/6EI(-x^3 + 3\ell x^2)$$

6. 一般解が

$$w = \frac{q_0}{EI} \left( \frac{x^4}{24} + \frac{ax^3}{6} + \frac{bx^2}{2} + cx + d \right)$$

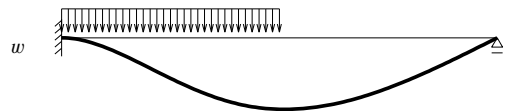
であり、境界条件が  $w(0) = 0, w'(0) = 0, w''(\ell) = 0, w'''(\ell) = 0$  だから

$$w = \frac{q_0 x^2}{24EI} (x^2 - 4\ell x + 6\ell^2)$$

これを2回微分すると正しいモーメント分布が求められていることを示すことができる。支点反力も同様の微係数から求められる。

7.  $M = C_0 x/\ell$  であり、両端でたわみが零であることから簡単に求めることができる。
8. かなり面倒な計算の末

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{q_0 x^2}{768EI} (32x^2 - 57\ell x + 27\ell^2), \quad 0 < x < \ell/2 \\ &= \frac{q_0 \ell}{768EI} (x - \ell)(7x^2 - 14\ell x + 2\ell^2), \quad \ell/2 < x < \ell \end{aligned}$$



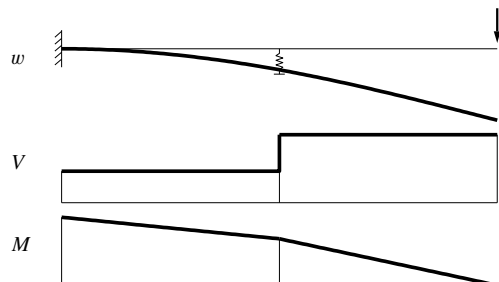
9. 中央の不連続条件が

$$V(a+) - V(a-) = kw(a)$$

であることがわかれば、面倒な計算の末

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{Qx^2}{8EI(\alpha_s + 24)} \{2(\alpha_s - 16)x + (96 - \alpha_s)\ell\}, \quad 0 < x < \ell/2 \\ &= \frac{Qx^2}{6EI} (3\ell - x) + \frac{5\alpha_s Q\ell^2}{96EI(\alpha_s + 24)} (\ell - 6x), \quad \ell/2 < x < \ell \end{aligned}$$

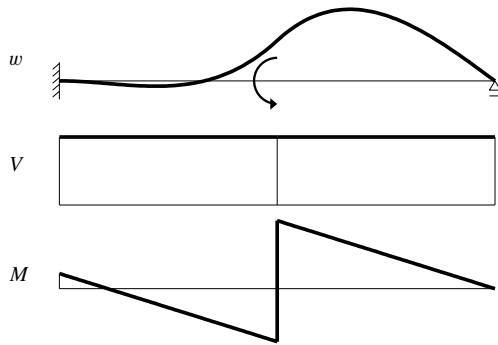
となる。 $\alpha_s$  は式(4.42)で定義した。モーメント図は上式を2回微分すれば求められる。



10. これも中央の連続条件を考慮すれば

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{C_0}{16EI\ell} (\ell x^2 - 3x^3), \quad 0 < x < \ell/2 \\ &= \frac{C_0}{16EI\ell} (x - \ell)(-3x^2 + 6\ell x - 2\ell^2), \quad \ell/2 < x < \ell \end{aligned}$$

モーメント図はそれぞれの2階の微係数から。



11. これは左スパンだけの左端固定・右端単純支持梁のたわみを求め、右端のたわみ角が零になる条件から  $x = 2/3 \ell$  になる。ちょっと面白いでしょ。

12. 分布外力が作用したときの先端のたわみは式(4.43)から求めることができ、先端の  $Q_0$  によるたわみは式(4.39a)から求められるので、等置して  $Q_0 = 3q_0 \ell / 8$ 。

13. 長さ  $\ell$  の片持ち梁の先端に  $Q$  が作用したたわみは式(4.38)から

$$\bar{w}(x) = \frac{Qx^2}{6EI} (3\ell - x)$$

であり、 $x = \ell/2$  に下から  $X$  が作用したときのたわみは、例えば  $0 < x < \ell/2$  では上と同様

$$\bar{w}(x) = \frac{-Xx^2}{6EI} \left( \frac{3\ell}{2} - x \right)$$

となる。中央のバネ支持条件は

$$X = kw(\ell/2), \quad w = \bar{w} + \bar{w}$$

となるから、これから  $X$  が

$$X = \frac{5\alpha_s Q}{2(\alpha_s + 24)}$$

と求められる。これを上の式に代入し直せば答を得る。なお、 $\ell/2 < x < \ell$  の  $\bar{w}$  は式(4.39a)の結果を使えば

$$\bar{w}(x) = -\frac{X\ell^3}{24EI} - \frac{X\ell^2}{8EI}x$$

である。

14. やってみよう。  
15. 片持ち梁で重ね合わせるのと、単純梁とが考えられる。解は演習問題の10番にある。  
16. バネの縮みによるバネ力を  $X$  とすると、上の梁は

$$\Delta_1 = \frac{q_0 \ell^4}{8EI} - \frac{X\ell^3}{3EI}$$

が右端のたわみであり、下の梁の左端は

$$\Delta_2 = \frac{X\ell^3}{3EI}$$

だけたわむ。バネの抵抗係数を  $k$  とすると

$$X = k(\Delta_2 - \Delta_1)$$

の関係がある。この3式から  $X$  を算定でき

$$\Delta_1 = \frac{q_0 \ell^4 (\alpha_s - 3)}{8EI(2\alpha_s - 3)}, \quad \Delta_2 = \frac{\alpha_s q_0 \ell^4}{8EI(2\alpha_s - 3)}$$

17. 梁の下の浮きは  $(H - \Delta)$  だけ沈んでいるので、上向きの浮力  $Q$  は  $\rho g A (H - \Delta)$  になる。つまり図 4.22 のような右端がバネで支持された片持ち梁の状態にあって、このバネ定数が

$k = \rho g A$  である。この上向きの浮力で生じる片持ち梁先端の変位は式(4.39a)から

$$\Delta = \frac{Q\ell^3}{3EI} = \frac{\ell^3}{3EI} k (H - \Delta)$$

であることから

$$\Delta = \frac{\alpha_s}{3 + \alpha_s} H, \quad \alpha_s = \frac{k\ell^3}{EI} = \frac{\rho g A \ell^3}{EI}$$

と求められる。ここに  $\alpha_s$  は式(4.42)で定義したパラメータである。一方、等分布外力  $q_0$  による梁先端のたわみは式(4.41)で与えられ、これが  $\Delta$  に等しくなるため

$$w(\ell) = \frac{3q_0 \ell^4}{8EI(3 + \alpha_s)} = \Delta$$

となることから、最終的に上の  $\Delta$  を代入して

$$q_0 = \frac{8\alpha_s EI}{3\ell^4} H$$

と求められる。

18. 図 4.36 に正解があるが、任意点に集中せん断力が作用したときのたわみが、例えば左側だけなら

$$w(x) = P\bar{w}(x; a) = P \frac{(a - \ell)}{EI\ell} \left\{ \frac{x^3}{6} + \left( \frac{a^2}{6} - \frac{a\ell}{3} \right) x \right\}$$

であることから、集中モーメントが作用したときの左側のたわみは

$$w(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\epsilon P) \frac{\bar{w}(x; a) - \bar{w}(x; a + \epsilon)}{\epsilon} = -C_0 \frac{\partial \bar{w}(x; a)}{\partial a}$$

で求めることができるから、上の答を代入すると

$$w = -\frac{C_0}{EI\ell} \left\{ \frac{x^3}{6} + \frac{x}{6}(3a^2 - 6a\ell + 2\ell^2) \right\}$$

右側は省略。

19. 相反定理から、点 A のたわみの影響線は  $w_Q(x)/Q$  である。よって分布外力による点 A のたわみは

$$\Delta_1 = \int_b^{b+\ell} q(x) \frac{w_Q(x)}{Q} dx$$

バネの反力を上方向正で  $X$  とすると、これによる点 A のたわみは上方に  $\Delta_2 = Xw_Q(a)/Q$  である。よって、たわみの合計がバネで抵抗されるから

$$X = k(\Delta_1 - \Delta_2)$$

である。以上から  $X$  を求めれば解は  $X/k$  として求められる。

20. 最大曲げモーメントは、左端から  $\frac{b(\ell - c)}{\ell}$  の位置から幅  $c$  にわたって載せた場合。最大せん断力は、 $b < \ell/2$  なら  $x = b$  から右に幅  $c$ 。  
21. 観測点の左右の領域で3次の多項式が一般解になり、両端の境界条件四つと、観測点のたわみ角以外の三つの量の連続条件。それに、たわみ角の不連続条件の合計8条件式で、一般解の係数8個が決定できる。  
22. 三つの領域にわけて境界条件と連続条件を満足させると

$$\begin{aligned} M &= \frac{x}{8\ell^2} (x^2 + 3\ell^2), \quad 0 < x < \ell/2 \\ &= \frac{1}{8\ell^2} (x - \ell)(x^2 + \ell x - 4\ell^2), \quad \ell/2 < x < \ell \\ &= -\frac{1}{8\ell^2} (x - \ell)(x - 2\ell)(x - 3\ell), \quad \ell < x < 2\ell \end{aligned}$$

がその表現。

23. (1) 左右対称から  $v_D(x) = v_B(4a - x)$ 。

(2) a) 点Bの支点反力を  $F$  とすると

$$F = k w_B, \quad w_B = \int_0^a q v_D(x) dx - F v_B(a),$$

$$w_D = \int_0^a q v_D(x) dx - F v_D(a)$$

となるから

$$w_B = \frac{q}{1 + k v_B(a)} \int_0^a v_B(x) dx$$

$$w_D = \frac{q}{1 + k v_B(a)} \left[ \int_0^a v_D(x) dx + k \left\{ v_B(a) \int_0^a v_D(x) dx - v_D(a) \int_0^a v_B(x) dx \right\} \right]$$

(2) b) 上の  $w_D = \Delta_D$  から

$$q_1 = \frac{\{1 + k v_B(a)\} \Delta_D}{\int_0^a v_D(x) dx + k \left\{ v_B(a) \int_0^a v_D(x) dx - v_D(a) \int_0^a v_B(x) dx \right\}}$$

(2) c) (1)と同様にして  $F = k w_B$  と

$$w_B = \int_0^a q v_B(x) dx - F v_B(a) - R_D v_B(3a)$$

$$w_D = \int_0^a q v_D(x) dx - F v_D(a) - R_D v_D(3a) = \Delta_D$$

となるので

$$\Delta \equiv \{1 + k v_B(a)\} v_D(3a) - k v_D(a) v_B(3a)$$

と定義すると

$$R_D = \frac{1}{\Delta} \left( q \left[ \int_0^a v_D(x) dx + k \left\{ v_B(a) \int_0^a v_D(x) dx - v_D(a) \int_0^a v_B(x) dx \right\} \right] - \{1 + k v_B(a)\} \Delta_D \right)$$

あるいは、 $\Delta_D$  を  $q_1$  で表して代入すれば

$$R_D = \frac{q - q_1}{\Delta} \left[ \int_0^a v_D(x) dx + k \left\{ v_B(a) \int_0^a v_D(x) dx - v_D(a) \int_0^a v_B(x) dx \right\} \right]$$

と求められる。ちなみに、相反定理から  $v_B(3a) = v_D(a)$  であり、対称条件から  $v_D(3a) = v_B(a)$  であることを使えば、上の  $\Delta$  は

$$\Delta = v_B(a) + k \left[ \{v_B(a)\}^2 - \{v_D(a)\}^2 \right]$$

と表すこともできる。

24. 問題のすぐ次に説明してある。

25. 半径を  $a$  とすると

$$z = a \sin \theta, \quad t = 2a \cos \theta$$

$(-\pi/2 < \theta < \pi/2)$  といった変数変換をすると

$$G_z = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 2a^3 \sin \theta' \cos^2 \theta' d\theta' = -2/3 (a \cos \theta)^3$$

であるから

$$\tau = \frac{a^2 V(x)}{6I} (1 + \cos 2\theta)$$

となり、断面2次モーメントが  $\pi a^4/4$ 、面積が  $\pi a^2$  なので

$$\tau_{\max} = \tau(\theta = 0) = \frac{a^2 V}{3I} = \frac{4V}{3A}$$

26. 図心が上面から  $17h/40$  の位置である。そこに  $y$  軸を置くと

$$G_z = b \left\{ z^2 - \left( \frac{17h}{40} \right)^2 \right\}, \quad \text{上フランジ} \\ = -\frac{3bh^2}{20} + \frac{b}{2} \left\{ z^2 - \left( \frac{7h}{40} \right)^2 \right\}$$

となり、フランジ下面で不連続になる。

27. 公式通りに演算をすれば誘導できる。

28. 半分の長さの片持ち梁の固定端の、断面回転の境界条件さえ間違えなければ簡単に求められる。

29. 分母に  $(1 + 12\alpha_T)$  のような項が現れて、曲げとせん断を分離できないことを確かめて欲しい。

30. 文献[131]を参照のこと。

★ p.207にある脚注の正答は  $\boxed{8}$  あるいは  $\boxed{8.0}$  らしい。

31. 簡単だからやってみよう。

32. やってみよう。

33. 何度計算間違いしましたか?

## 第5章の答

1. つり合い式に重みを乗じ

$$\int_0^\ell EI w'''' v dx - P v(a) = 0$$

2.  $w = A \sin \pi x/\ell$  と置くと

$$A = \frac{2P\ell^3}{\pi^4 EI} \sin \frac{\pi a}{\ell}$$

となるので、 $a = x = \ell/2$  の場合

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{2P\ell^3}{\pi^4 EI} = 0.988 \times \text{正解}$$

と、1.2%の誤差。

3. Galerkin形式は

$$\int_0^\ell EI w'' v'' dx - P v(a) = 0$$

で、本文例の2次多項式を用いたとき

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{P\ell^3}{64EI} = 0.75 \times \text{正解}$$

さらに式(5.5)を用いたとき

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{135P\ell^3}{7168EI} = 0.904 \times \text{正解}$$

あるいは分布荷重のときの厳密解式(4.35)だと

$$w\left(\frac{\ell}{2}\right) = \frac{125P\ell^3}{6144EI} = 0.977 \times \text{正解}$$

となり、2.3%の誤差。

4. 先端の境界条件を入れて

$$\int_0^\ell EI w'' v'' dx - Q v(\ell) = 0$$

5. 試行関数の未知係数  $c$  は

$$c = \frac{32\ell^3 Q}{\pi^4 EI}$$

となり、先端の解が

$$w(\ell) = \frac{32P\ell^3}{\pi^4 EI} = 0.986 \times \text{正解}$$

6. いろいろ試して欲しい。

7. 弱形式の誘導過程をたどって

$$\int_0^1 (\alpha u' \delta u' + \beta u \delta u) dx - \int_0^1 f \delta u dx - g_1 \delta u_1 - g_2 \delta u_2 = 0$$

8. 未知係数を求める式が

$$\begin{pmatrix} 2\ell & 6\ell^2 \\ 6\ell^2 & 24\ell^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \frac{q_0}{EI} \begin{pmatrix} \ell^3/12 \\ 5\ell^4/16 \end{pmatrix}$$

となる。これを解けばいい。

9. つり合い式から弱形式を求め、境界条件

$$EAu'(\ell) = P$$

を代入すれば求められる。

10.  $u$  に 1 次多項式。

11. やってみよう。

12. 左端が固定なので、境界条件を考慮して剛性方程式の右下  $2 \times 2$  の部分だけを

$$EI \begin{pmatrix} 12/\ell^3 & 6/\ell^2 \\ 6/\ell^2 & 4/\ell \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ 0 \end{pmatrix}$$

を解けばいい。右端のたわみとたわみ角は正解式 (4.39) に一致する。

13. 頑張って計算し、プログラムでチェックを。

14. 頑張って計算し、プログラムでチェックを。

15. 頑張って計算し、プログラムでチェックを。

16. 頑張って計算し、プログラムでチェックを。

17. 要素 [1-4] の  $\alpha = -\pi/4$ 、要素 [2-4] の  $\alpha = -\pi/2$ 、要素 [3-4] の  $\alpha = -3\pi/4$  であることに注意して直接剛性法を用いる。もちろん、節点番号と行列の配置によっては、この向きも異なってくる。種々試してみるといい。

18. プログラムでチェックを。

19. プログラムでチェックを。

20. 要素 [1-2] の  $\alpha = 0$ 、要素 [2-3] の  $\alpha = 2\pi/3$ 、要素 [1-3] の  $\alpha = \pi/3$  であることに注意して直接剛性法を用いる。節点番号と行列の配置によっては、この向きも異なってくる。種々試してみるといい。

21. プログラムでチェックを。

22. 是非やってみよう。

23. 固有値計算のサブルーチンを探して是非やってみてください。

24. 式 (5.63) の第 2 項の  $q(x)$  に、式 (5.10a) の  $w_a$  が  $w$  のときの式を代入し、それを 2 回部分積分して整理し、幾何学的境界条件と式 (5.10b) の  $w_a$  が  $w$  のときの力学的境界条件を代入することによって

$$\Pi_{\text{MIN}} = -\frac{1}{2} \int_0^\ell EI \{-w''(x)\}^2 dx$$

と求められる。ちょっと興味深い。

25. 積分して

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^1 \{\alpha(u')^2 + \beta u^2\} dx - \int_0^1 f u dx - g_1 u_1 - g_2 u_2$$

26. 右端の境界条件の一つが

$$-EIw'''(\ell) + kw(\ell) = 0$$

であることに注意すれば

$$\int EIw'' \delta w'' dx + kw(\ell) \delta w(\ell) - \int q \delta w dx = 0$$

が弱形式で、ポテンシャルは

$$\frac{1}{2} \int EI(w'')^2 dx + \frac{1}{2} k(w(\ell))^2 - \int q w dx$$

第 2 項がバネの持つひずみエネルギー。

27. 問題のすぐ次に説明してある。

## 第 6 章の答

1. 図示したように、まず  $\theta$  だけ回転しているものとして、回転した位置の棒の長さが  $\ell$  であることに注意すれば、棒の基部回りのモーメントのつり合いが

$$k\ell^2 \sin \theta \cos \theta - P\ell \sin \theta - Q\ell \cos \theta = 0$$

であることから種々考察できる。

2. また零分の零の極限だ。l'Hôpital の定理を思い出そう。

3. やってみよう。

4. 一般解は式 (6.41) で、境界条件が両端で

$$w = 0, \quad w' = 0$$

であることから、特性方程式は

$$\sin \frac{\mu\ell}{2} = 0, \quad \tan \frac{\mu\ell}{2} = \frac{\mu\ell}{2}$$

となり、前者が  $k_b = 4$  の座屈係数を与える。後者は棒の中央に対して反対称モードの座屈荷重を与える。前者が  $\ell/2$  の単純支持棒の座屈であり、後者が同様に  $\ell/2$  の片端固定・片端単純支持棒の座屈であることを知れば、モードも理解できるだろう。したがって、2 次の座屈係数は対称モードの  $k_b = 4 \times 2^2 = 16$  ではなく、反対称モードの  $k_b = 4 \times 2.0457 \approx 8.1830$  となる。

5. これも式 (6.41) が一般解で、境界条件が  $w(0) = 0, w'(\ell) = 0$  と

$$w(\ell) = 0, \quad w''(\ell) = 0$$

であることから求めることができる。

6. 計算の必要が無く、Euler 荷重  $P_E$  が正解。なぜか考えてみよう。第 1 著者は何と数値計算をして求めた。その結果に対し、東北大学の倉西茂先生が、計算するまでもなく当たり前



とおっしゃった。さすが!

- やってみよう。
- 例えば両端固定の場合に、棒の全長を  $L = 2\ell$  としておくと、剛性方程式の係数行列は

$$\begin{pmatrix} 24/\ell^3 & 0 \\ 0 & 8/\ell \end{pmatrix} - \frac{P}{EI} \begin{pmatrix} 12/5\ell & 0 \\ 0 & 4\ell/15 \end{pmatrix}$$

となり、1次の座屈荷重は

$$P_{cr} = \frac{10EI}{\ell^2} = \frac{40EI}{L^2}$$

である。正解と比較すると1.013倍程度である。

- ローラー支持が無い場合の特性方程式は

$$\mu\ell + \alpha'_s \tan \mu\ell = 0$$

であり、支持付きの場合は

$$\mu\ell (\sin \mu\ell - \mu\ell \cos \mu\ell) - \alpha'_s (\mu\ell \sin \mu\ell + 2 \cos \mu\ell - 2) = 0$$

である。それぞれ特殊な場合を検討してみよ。ただし、 $\alpha'_s$  は式(C.136)で定義された無次元化されたバネ支持係数である。

- がんばって計算しよう。[95]

## 第7章の答

- 載荷点の不連続条件が

$$GJ\varphi'(\ell/2-) - GJ\varphi'(\ell/2+) = T_0$$

で、境界条件が両端で  $\varphi = 0$  だから

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \frac{T_0}{2GJ}x \quad 0 < x < \ell/2 \\ &= \frac{T_0}{2GJ}(\ell - x) \quad \ell/2 < x < \ell \end{aligned}$$

- 公式通りで

$$J = \frac{2tb^2h^2}{b+h}$$

- 仕切りが真ん中の場合は単純な箱の場合と同じ値。

$$J = \frac{2tb^2h^2}{b+h}$$

というも、仕切りにはせん断流が流れないから。左右対称でなくなった二つ目の場合は

$$J = \frac{8b^2h^2t(2b+7h)}{27h^2+36bh+8b^2}$$

と、少しだけ大きくなる。また隔壁が左から  $d$  の位置にあるときの  $J$  を求めて  $0 < d < b/2$  でグラフにして  $J$  の大きさを比較する。

- I形は

$$J = \frac{2t^3(b+4h)}{3}$$

となるから、箱形との比は

$$\frac{\text{I形}}{\text{箱形}} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{h}{b}\right) \left(1 + 4\frac{h}{b}\right) \left(\frac{t}{h}\right)^2$$

となり、薄肉I形の剛性は箱形に比べて肉厚高さ比の2乗に比例して非常に低い値になる。

- 境界条件は  $\varphi(0) = 0, \varphi''(0) = 0$  と  $x = \ell/2$  で

$$-\varphi''' + \mu^2\varphi' = \frac{T_0}{2EI_\omega}, \quad \varphi'' = 0$$

だから、一般解の四つの積分定数を決定すると、本文例の左半分と同じ解を得る。

- 境界条件が  $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0$  と

$$-\varphi'''(\ell) + \mu^2\varphi'(\ell) = \frac{eP}{EI_\omega}, \quad \varphi'(\ell) = 0$$

であることから、一般解の積分定数を決めることができ

$$\varphi = \frac{eP}{GJ}x - \frac{2eP \sinh \mu x/2}{\mu GJ \cosh \mu \ell/2} \cosh \frac{\mu(\ell-x)}{2}$$

となる。

- お試しあれ。
- お試しあれ。
- お試しあれ。
- お試しあれ。
- お試しあれ。

## 第8章の答

- やってみよう。
- 級数の係数は次のようになる。

$$q_{mn} = \frac{4q_0}{nm\pi^2} \left( \cos \frac{n\pi}{2} - 1 \right) \left( \frac{3}{2} \cos \frac{m\pi}{2} - 1 - \frac{1}{2} \cos m\pi \right)$$

- やってみよう。

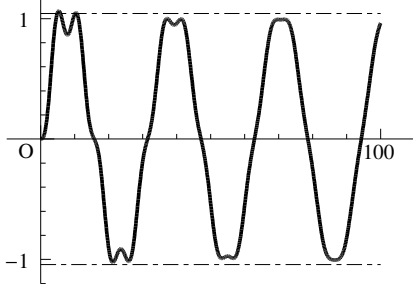
## 第9章の答

ここは宿題に出していることから、部分的な答のみ。

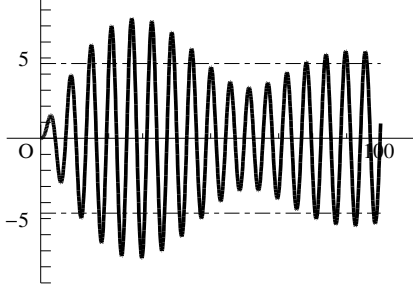
- 投石の速さ  $\geq \sqrt{g/2(\text{木の高さ})} \times (\text{てっぺんまでの距離})$  で木に届く。
- 運動方程式が  $1/3\rho A\ell^3\ddot{\theta} + 1/2\rho g A\ell^2\theta = 0$  だから  $\omega = \sqrt{3g/2\ell}$ 。

- やってみよう。
- やってみよう。

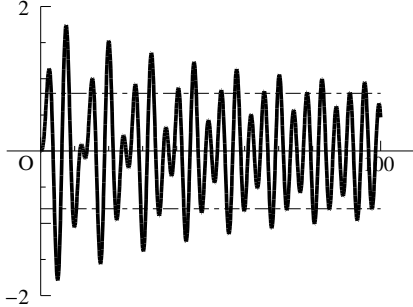
5. 例えば、次のようになる。すべて横軸は  $\omega t$  で、縦軸は  $\frac{u(t)}{u_{st}}$ 。水平の一点鎖線は  $M_D$  のレベルで、 $\beta = 0.02$  は共通である。 $p/\omega = 0.2$  の場合は



$p/\omega = 1.1$  の場合は

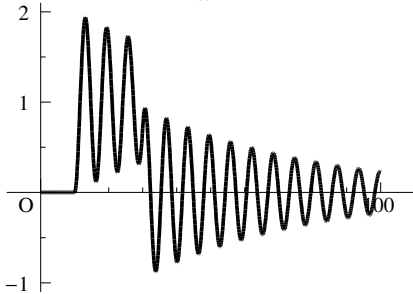


$p/\omega = 1.5$  の場合は



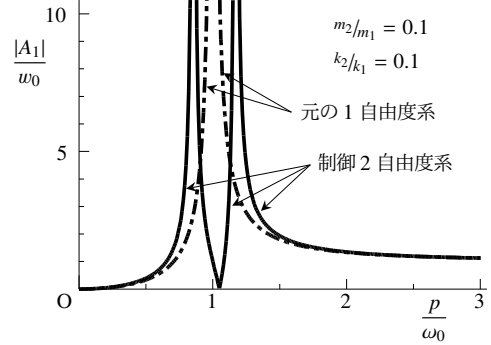
6. 求めてみよう。  
7. やってみよう。  
8. 求めてみよう。  
9. やってみよう。

10. 図の横軸は  $\omega t$  で、縦軸は  $\frac{u(t)}{u_{st}}$ 。

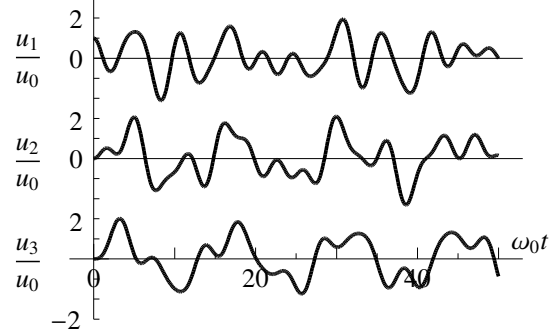


11. やってみよう。  
12. やってみよう。  
13. やってみよう。  
14. やってみよう。

15. 共振曲線は次のようになる。



16. 次のようになる。



17. やってみよう。  
18. やってみよう。  
19. やってみよう。  
20. やってみよう。  
21. やってみよう。  
22. やってみよう。  
23. やってみよう。  
24. 薦めないが、時間とガッツがあって、忍耐力と注意力が持続するときにトライしてみたらいいかもしれない。  
25. やってみよう。早いうちに FORTRAN 等によるプログラミングにチャレンジして欲しい。  
26. やってみよう。  
27. 是非やってみよう。

## 第 10 章の答

文献 [1] にある問題なので、部分的な答のみ。

1. 本文の例の特殊な場合なので、容易に解けると思う。また、

この材料は引張強度の方が圧縮強度より小さいので、左から

の反射波によって引張が初めて現れる断面が破断する。それは  $x = a/2$  の場所で、 $t = \dots$  の時点である。

2. 透過する応力波は  $x > \ell, t > s_b x$  において

$$\sigma_T = \dots$$

となり、反射応力波は  $x < \ell, t > 2s_b \ell - s_b x$  において

$$\sigma_R = -F_0/A \exp[-2\alpha \{t - s_b \ell + s_b(x - \ell)\}]$$

となる。ここに

$$\alpha \equiv \rho c_b / M/A$$

と定義した。

3. やってみよう。

4. 計算は簡単である。加速度の増幅率は

$$\frac{A_4}{A_0} = \dots$$

となり、物性値を代入すると、 $\theta_0 = 0$  の場合で、第 1 層と基盤で 1.50、次が 1.20、表層へが 1.23 なので、乗算して 2.21 倍。 $\theta_0 = 60$  度の場合には、倍率が 1.23, 1.19, 1.23 なので乗算して 1.79 倍くらい。角度は、順に 17.5 度, 12.9 度, 8.89 度と鉛直方向に近づく。

5. 膜に作用する  $q$  が何なのかについてじっくり考える必要がある。

$$\frac{A_1}{A_0} = \dots$$

$$\frac{A_2}{A_0} = -\frac{1}{\Delta} k_0 \left\{ \frac{\rho c_L^2}{T} - \sin^2 \theta_0 \right\} \sin 2\theta_0$$

ここに

$$\sin \theta_2 = \frac{1}{\kappa} \sin \theta_0, \quad \kappa \equiv \frac{c_L}{c_T}$$

であり

$$\Delta \equiv \dots$$

と置いた。

6. 方程式は

$$\left(2 - \frac{c^2}{c_L^2}\right)^2 - 4 \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_L^2}} \sqrt{1 - \frac{c^2}{c_T^2}} - \dots$$

となる。ここに

$$c_0^2 \equiv \frac{T}{\rho}$$

と置いた。果たして  $c$  が存在するかどうかは、「偏角の原理」を理解していないので証明できていない。

## 第 11 章の答

1. やってみよう。

2. 弾性の場合

$$\frac{\epsilon_{kk}}{\epsilon_{11} - \epsilon_{22}} = \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu}$$

という関係があることを念頭に置き、例えば、1 軸応力状態を連続載荷したときの、これと同じひずみ増分の比を計算してみよう。つまり  $\sigma_{11} = \sigma_0, \sigma_{11} = \Delta\sigma_0$  とし、他の応力と応力増分を零にする。これを式 (11.49b) (11.50b) に代入すると、上式と同じひずみ増分の比は

$$\frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}} = \gamma \frac{1 - 2\nu}{1 + \nu}, \quad \gamma \equiv \frac{H}{\mu + H}$$

となる。この比で見かけ上の Poisson 比  $\nu^*$  を

$$\frac{\dot{\epsilon}_{kk}}{\dot{\epsilon}_{11} - \dot{\epsilon}_{22}} = \frac{1 - 2\nu^*}{1 + \nu^*}$$

と定義してもいいだろうから、見かけ上の Poisson 比は

$$\nu^* = \frac{(1 + \nu) - \gamma(1 + 2\nu)}{2(1 + \nu) + \gamma(1 - 2\nu)}$$

と求められる。この関係から、 $H \rightarrow 0$  の場合には  $\nu^* = \frac{1}{2}$ 、つまり非圧縮性であることになる。

3. やってみよう。

4. やってみよう。

5. やってみよう。

6. やってみよう。

7. これはちょっと手ごわいが、やってみよう。

8. 軸力が零になる条件から応力が零になる位置を求めるだけ。解は公式集にある。

9. やってみよう。

## 第 12 章の答

1. この文書の式と比較すれば勉強になると思う。

2. やってみよう。特に三つ目の例では、テンソルの 1 成分を計算するのに A4 用紙 1 枚くらい必要になるが、最後の結果は綺麗なため、是非トライして欲しい。

3. やってみよう。手を動かすと物理的な意味が比較的容易に身に付くから。

4. やってみよう。

付録にある演習問題の答は面倒なので省略した。

鹿児島方言言見立番付

|                                             |                                                                                              |                                                                                                                           |                                                                                           |                                                             |                                                                                                           |                                                               |                                                                                                                                               |                                                                                                                            |
|---------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 横綱 古語が生きている<br>豆腐をオカベ<br>給えをタモンセ<br>申したをモシタ | 西<br>前頭 ちんがらつ<br>前頭 あばてんね<br>前頭 チエスト行け<br>小結 さしかぶい<br>関脇 とぜんね<br>前頭 わやつ<br>前頭 ぐらしか<br>かわいそうだ | 蒙御免<br>司行<br>コハラ言葉葉<br>しもたコラ                                                                                              | 東<br>前頭 がつつい<br>大関 ぼつげもん<br>関脇 けなぶつ<br>小結 やつせん<br>前頭 そがらし<br>前頭 ずるつ<br>前頭 やじよろし<br>うるさい   | 横綱 ヒツをつけて誇張する<br>ヒツちぎる<br>ヒツ飛ぶ<br>ヒツかぶる<br>ヒツたまがる<br>ヒツちやえる |  <p>第1 著者の実家から見える噴煙</p> |                                                               |                                                                                                                                               |                                                                                                                            |
|                                             | 前頭 おぎらふつ<br>同 だいゆめ<br>同 いみしい<br>同 てがまし<br>同 ごいごい<br>さるく<br>歩く                                | 前頭 がつつい<br>同 がつつい<br>同 しもた<br>同 コラ<br>同 がつつい<br>同 せい<br>同 じや<br>寄年<br>音をつめる<br>てえで<br>のいっ<br>お鯛<br>のいさ<br>大根<br>のいさ<br>かつ | 前頭 ぐたまし<br>同 てしげくらわん<br>同 しつちやゆうつ<br>同 こしころ<br>同 ずつねわろ<br>同 ちんちん<br>同 ンダモシタン<br>まあどうしましやう |                                                             |                                                                                                           | 同 びったり<br>同 大胆者<br>同 けいべつ<br>同 だめ<br>同 たくさん<br>同 全部<br>同 うるさい | 同 あつせ<br>同 てんがらもん<br>同 さいも<br>同 げんね<br>同 おじやんせ<br>同 おやつとさあ<br>同 お出で下さい<br>同 ごくろうさい<br>同 たいへん<br>同 良い子<br>同 それでこそ<br>同 ぜひ<br>同 恥かしい<br>同 犬耳はさみ | 同 よいなこつ<br>同 かいどん<br>同 ぶれさあ<br>同 かね<br>同 ばかふともん<br>同 はめつくつ<br>同 ようやく<br>同 しかし<br>同 かく<br>同 失礼<br>同 義理知らず<br>同 横着者<br>同 精出す |

右上に続く

第1 著者が鹿児島の銘菓を老舗に注文して配送してもらったところ、梱包の中に入っていた手ぬぐいを書いてあった番付である。ただし一部伏字にし、レイアウト等もかなり異なる。またオリジナルの文字は手書き風なので、拗音や撥音を正しくはコピーされていない可能性はある。また「だいやめ」は確かにそう聞こえるが、「だれやめ（だれる＝疲れる）」という説もある。ちなみに飲み会あるいは飲み会に行くことを「のんかた」と言う。自分の家は「うちんげえ」である。そうそう「わい」が他の地方と違う。「わい」は相手のことである。自分のことは「おい」だ。仙台の友人に見せたところ、お年寄りが「とぜんね」を同じ意味で使うとのこと。多分「徒然ね」なんではないかと思ったのであるが。それから鹿児島弁で「蠅」「灰（桜島の）」「屁」はすべて「へ」である。それぞれ「が飛ぶ」「が降る」「をひる」となる。

## 付録 S

### 数学記号等について

数学的正確さを保持しながらとは書いたものの、著者は JIS や ISO 等を厳守しているわけではなく、わかり易いものや入力が簡単なもの（手抜きしてわけ）を優先した。以下、種々の批判や非難をかわすために順不同で簡単な説明（言い訳）を付けておく。なお  $n$  と  $m$  は  $n > 1, m > 1$  の整数である。

| 記号等                                  | 説明                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{u}, \mathbf{A}$             | ベクトルやテンソルあるいは行列を太字で表すことがある。各章毎には統一した。                                                                                                                                                                                                                                    |
| $\mathbf{0}$                         | 対角行列の零の非対角項をひとくくりにしたもの。                                                                                                                                                                                                                                                  |
| $(A)$                                | $n \times m$ 行列は丸括弧。鉤括弧は次の記号に使う。                                                                                                                                                                                                                                         |
| $[D]$                                | $n \times n$ の対角行列に使うことがある。判別し易いようにした。                                                                                                                                                                                                                                   |
| 行列式                                  | $\det \mathbf{A}$ や $\det(A) \cdot \det(A_{ij})$ 等と統一していないが、 $\det$ という記号を常に用いた。                                                                                                                                                                                         |
| $\{v\}$                              | 1 列縦行列 ( $n \times 1$ 行列) は中括弧。線形代数の記号としては、ベクトルも行列なので丸括弧に統一すべきであるが、列ベクトルであることがすぐわかるようにした。次の行ベクトルも同じ考え方による。                                                                                                                                                               |
| $[u]$                                | 1 行横行列 ( $1 \times n$ 行列) に使った。行ベクトルであることがすぐわかるようにした。                                                                                                                                                                                                                    |
| $\frac{du(x)}{dx}$                   | 寸法等に $d$ を用いるので、区別し易いように斜体にはしなかった。                                                                                                                                                                                                                                       |
| $\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}$ | パーシャルディーの $\partial$ は $\text{\LaTeX}$ フォント ( <code>txfonts</code> ) の斜体のままとした。                                                                                                                                                                                          |
| $f'(z)$                              | プライムは関数の独立変数による常微分を表す。 $f'(z) \equiv \frac{df(z)}{dz}$ , $g'(y) \equiv \frac{dg(y)}{dy}$ 等。なお、文脈から明らかな場合は指数も省略することがある。また $f'(0)$ はもちろん、微係数を求めたあと変数に $0$ を代入して得られる値、たいていは正の $\epsilon$ に対して $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} f'(z) _{z=\epsilon}$ を表す。右極限か左極限かは文脈で唯一に判断できる。 |
| $\dot{u}$                            | 上付きドットは、基本的には時間 [常   偏] 微分を表すが、塑性論等では単なる増分を意味する場合もある。                                                                                                                                                                                                                    |
| $\int$                               | $\text{\LaTeX}$ フォント ( <code>txfonts</code> ) の斜体のままとした。                                                                                                                                                                                                                 |
| $\int f(x) dx$                       | これも寸法等の $d$ と区別し易いように斜体にはしなかった。                                                                                                                                                                                                                                          |
| $\sum_i$                             | 総和における $i$ の範囲が自明な場合には省略した。                                                                                                                                                                                                                                              |

| 記号等                   | 説明                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\therefore$          | もちろん「したがって」のこと。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $\because$            | もちろん「なぜならば」のこと。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
| $\pi$                 | <code>txfonts</code> の <code>\piup</code> ( $\pi$ ) は使わず、斜体のままとした。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| $i$                   | 虚数単位 $\sqrt{-1}$ は数学斜体ではなくローマンにした。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
| $\ln, \log$           | 自然対数と常用対数を区別した。 $\log_2$ も使っている。複素関数に対する自然対数は慣例により $\log$ を使うようだが、複素関数は苦手なのでこの文書には出てこない。                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| $\exp(z)$             | もちろん $e^z$ のことだが、 $z$ 部が長い・大きいとき等に用い、統一はしていない。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| $1/E$                 | 正確な表現ではないが、誤解が生じない箇所では分数 $1/E$ の代わりに用いる。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| $\equiv$              | 定義の場合にも、恒等的に零になる等の場合にも用いた。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |
| $\simeq, \sim$        | 理由無くどちらも使ったが、同じ意味である。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| $\cdot, :, \otimes$ 等 | テンソル同士の積については一般的なものより簡略化したので p.588 にまとめた。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |
| $\times$              | 等しくないという意味ではなく、この式そのものが存在してはいけないという意味。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
| 単位 (Pa)               | 単位の Pa は圧力の単位なので、応力にも用いてもよさそうだが、そうした場合、無次元の単位ひずみ当たりの応力である材料定数にも Pa を用いる場合が多いようだ。しかしそれには抵抗を感じる。またせん断応力にも用いることにもやや抵抗を感じるので、応力も材料定数も $\text{N/m}^2$ 等を用いることにした。道路橋示方書 [176] では、応力にも Young 係数 (呵呵 p.75 参照) にも $\text{N/mm}^2$ が用いられている。                                                                                                                                                     |
| 単位 (N·m)              | この文書では最初曲げモーメントの単位を 'Nm' と書いていたが、SI 単位の正確な表示では間に中黒を入れて 'N·m' となるらしいので修正した。ところで偶力を外積で定義する場合には作用線までの距離 × 力の順番だ。だとすると単位も 'm·N' ではないかと思うのだが、何か別途規則があるのだろう。                                                                                                                                                                                                                                  |
| $30^\circ$            | 単位が「度」の場合の角度に $^\circ$ の記号を用いることがある。温度の場合は「度」だったり「 $^\circ\text{C}$ 」だったりする。                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
| 全角                    | 全角文字は明朝体とゴシック体のみを用いた。英数字は、基本が Times New Roman に近い <code>txfonts</code> の <code>roman</code> と <code>boldface</code> および <code>italic</code> で、ごく一部に $\text{\LaTeX}$ 標準の CM fonts といくつかの飾り文字フォント (freeware) とを用いている。そのため、例えば章節目の英数字がいわゆる「ゴシックぽくない」のは当たり前で何も問題は無い。学会論文集等では章節目のみを <code>\sffamily</code> ( <b>Sans serif</b> ) の太字で和文フォントのゴシックに似せたが、それは本来の英数字のフォント指定とは整合しないのでこの文書では使っていない。 |
| 句読点                   | 式や文献リストの末尾のピリオドと整合しないことから、横組では全角のコンマとピリオドを原則としている [173]。しかし、式や文献リストは半角で終わることが文中とは異なるため、また文科省のある時期の標準がコンマと句点だったらしいということもあって、この文書ではこれに倣った。多くの教科書でもそうだったので。                                                                                                                                                                                                                                |
| 式末尾                   | 英文の式は文章の一部なので前後の文章を考慮して区切り文字が適切に付される場合が多いが、和文では文章とは独立した情報のように式を扱い、式末尾に区切り文字は置かない書籍が大多数のようなので、この文書でも原則として区切り文字は付さなかった。                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| 図等の配置                 | 図等は原則小口寄せらしいが、横組で図等の脇に本文が回りこむ場合、図等は右側に組むこともあるとなっている [173] ので、この文書でもそうした。                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |

| 記号等  | 説明                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |
|------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 先生・氏 | 長い間に所属や肩書きが変わるので、著者と関わりのあった頃の機関の「先生」「氏」「さん」等という表現にした。                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
| 筆記体  | ギリシャ文字 ‘ζ’ の書き順は上から下であるが、楽譜の「四分休符記号 $\bar{\text{z}}$ 」の書き順は実は下から上である。ところで「へ音記号 $\bar{\text{c}}$ 」の ‘C’ の鏡像 ‘ $\bar{\text{c}}$ ’ の右にある「コロソ」が何なのかご存知だろうか。実はあれは ‘F’ の筆記体を 5 線譜の「へ=F=ファ」の位置から書き始めたもの、つまり $\bar{\text{f}}$ が元なので「コロソ」の正体が判明する。したがって「ト音記号 $\bar{\text{t}}$ 」が $\bar{\text{t}}$ のように「ト=G=ソ」の位置から筆記体の ‘G’ を書き始めたものが元だったこともわかる。筆記体は教えるべきでは? p.760 参照。 |
| 板書体  | テンソル (例: $\sigma = \mathbf{C} : \epsilon$ ) を手書きする場合は板書体で $\sigma = \mathbf{C} : \epsilon$ とするか、欧文校正記号のボールド体指定の下波線を使って $\sigma = \underline{\mathbf{C}} : \underline{\epsilon}$ とすることが多い。ちなみに欧文校正記号の下線はイタリック体指定だ。                                                                                                                                            |

平方根  $\sqrt{5} = 2.236$  を手計算で求める:

右に示したような演算を高校かどこかで習っていたので、電卓持ち込み可にした定期試験時に電卓を忘れた学生のために板書したことがある。圧縮許容応力を計算する問題を出したからだ。各 2 行毎に、右列は左列の掛け算を二桁ずつずらした引き算で、その引き算の正符号が成立する最大の数字 (板書体) を探して左列に置き、左列は一桁ずつずらした足し算。しかし、これで計算できる理由を答えられないので、ある時期からは電卓を貸すことにした。呵呵。次の桁は 0 だ。

$$\begin{array}{r}
 2.236 \\
 2 \quad ) \quad 5.000000 \\
 \underline{2} \quad 4 \\
 42 \quad 100 \\
 \underline{2} \quad 84 \\
 443 \quad 1600 \\
 \underline{3} \quad 1329 \\
 4466 \quad 27100 \\
 \underline{6} \quad 26796 \\
 4472 \quad 304
 \end{array}$$

‘Dark or white?’ 日本にもあるチェーン店ではない fried chicken 屋に、ときどき行った。エチケットの本 [6] では、アウトドア以外では家庭においてもそうすべきではないと書いてあるが、一応このレストランでは手でつまんで食べてもいい料理である。お腹がすいているときは half chicken dinner を注文するのだが、普段は quarter chicken dinner。注文するところ聞かれる。でも half のときに ‘Left or right?’ とは聞かれない。念のため。

<sup>1</sup> この項目で使っている譜面記号は MusiX<sub>TeX</sub> のフォントを画面上でキャプチャして作成した画像を利用している。



写真 S.1 うほ大<sup>2</sup>構内 某所 2011年3月11日3階床位置で9階までの柱4本が破壊 (p.580の写真 11.2)

### ギリシャ文字<sup>3</sup>

| 名前      |          | 小文字                     | 大文字       | 名前                 |          | 小文字                 | 大文字        |
|---------|----------|-------------------------|-----------|--------------------|----------|---------------------|------------|
| Alpha   | アルファ     | $\alpha$                | A         | Nu                 | ニュー      | $\nu$               | N          |
| Beta    | ベータ      | $\beta$                 | B         | Xi                 | クシー, グザイ | $\xi$               | $\Xi$      |
| Gamma   | ガンマ      | $\gamma$                | $\Gamma$  | Omicron            | オミクロン    | $\omicron$          | O          |
| Delta   | デルタ      | $\delta$                | $\Delta$  | Pi                 | パイ       | $\pi, \varpi$       | $\Pi$      |
| Epsilon | イプシロン    | $\epsilon, \varepsilon$ | E         | Rho                | ロー       | $\rho, \varrho$     | P          |
| Zeta    | ツェータ     | $\zeta$                 | Z         | Sigma <sup>4</sup> | シグマ      | $\sigma, \varsigma$ | $\Sigma$   |
| Eta     | イータ      | $\eta$                  | H         | Tau                | タウ       | $\tau$              | T          |
| Theta   | セータ, シータ | $\theta, \vartheta$     | $\Theta$  | Upsilon            | ユプシロン    | $\upsilon$          | $\Upsilon$ |
| Iota    | イオタ      | $\iota$                 | I         | Phi                | ファイ      | $\phi, \varphi$     | $\Phi$     |
| Kappa   | カッパ      | $\kappa$                | K         | Chi                | カイ       | $\chi$              | X          |
| Lambda  | ラムダ      | $\lambda$               | $\Lambda$ | Psi                | プサイ, プシー | $\psi$              | $\Psi$     |
| Mu      | ミュー      | $\mu$                   | M         | Omega              | オメガ      | $\omega$            | $\Omega$   |

<sup>2</sup> 東北大学に学内電子ネットワークが初めてできた頃, 若手教職員と学生が参加する TAINSbbms という電子掲示板・メールシステムが医学部の当時の助手さんのボランティアで作られ, その頃のパソコン通信文化と比較してたいへんユニークな文化が生まれ育った。その話題の一つに 7 (元帝国) 大学の 4 音節略称があった。北大・東大・名大・京大・阪大・九大。どうも東北大学だけは平仮名を使わざるを得ないという結論だったと思う。トンベエというのものもあるがパターンが異なる。

<sup>3</sup> 'That is all Greek to me.' というのは「さっぱりわからない」という意味だ。図書館でギリシャの新聞を初めて見たときは感動した。

<sup>4</sup> Northwestern 大学の Dundurs 先生は ' $\sigma$ ' を右上から書き始めておられた。 ' $\varsigma$ ' の方はそう見えなくもないが。



## 参考文献

- [1] Achenbach, J. D.: *Wave Propagation in Elastic Solids*, North-Holland Publ. Co., 1976.
- [2] Aki, K. and P. G. Richards: *Quantitative Seismology; Theory and Methods*, Vol.I & II, W. H. Freeman and Co., 1980.
- [3] Asaro, R. J.: Geometrical effects in the inhomogeneous deformation of ductile single crystals, *Acta Met.*, Vol.27, pp.445-453, 1979.
- [4] Asaro, R. J.: Micromechanics of Crystals and Polycrystals, *Advances in Appl. Mech.*, ed. by J. W. Hutchinson and T. Y. Wu, Academic Press, Vol.23, pp.1-115, 1983.
- [5] Asaro, R. J. and J. R. Rice: Strain localization in ductile single crystals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.25, pp.309-338, 1977.
- [6] Baldrige, L.: *The Amy Vanderbilt Complete Book of Etiquette, a Guide to Contemporary Living*, Doubleday & Company, Inc., 1978.
- [7] Barrett, C. R., W. D. Nix and A. S. Tetelman: *The Principles of Engineering Materials*, Prentice-Hall, Inc., 1973; 井形直弘, 堂山昌男, 岡村弘之 共訳: 材料科学 1, 材料の微視的構造, 培風館, 1979.
- [8] Bathe, K.-J. and E. L. Wilson: *Numerical Methods in Finite Element Analysis*, Prentice-Hall Inc., 1976.
- [9] Bažant, Z. P. and L. Cedolin: *Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*, Dover Publ. Inc., 2003.
- [10] Bisshopp, K. E. and D. C. Drucker: Large deflection of cantilever beams, *Q. Appl. Math.*, Vol.3, pp.272-275, 1945.
- [11] Bloch, A.: *Murphy's Law and other reasons why things go wrong!*, also *Murphy's Law Book Two, more reasons why things go wrong!*, and *Murphy's Law Book Three, wrong reasons why things go more!*, Price/Stern/ Sloan Publ. Inc., 1980, 1983 and 1987.
- [12] Bonet, J. and R. D. Wood: *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, Cambridge Univ. Press, 1997.
- [13] Brockman, J. (ed.): *Curious Minds: How a Child Becomes a Scientist*, Vintage Books, 2004; ふなとよし子 訳: キュリアス・マインド ぼくらが科学者になったわけ, 幻冬舎, 2008.
- [14] Budiansky, B.: Theory of buckling and post-buckling behavior of elastic structures, *Advances in Appl. Mech.*, Vol.14, pp.1-65, 1974.
- [15] Churchill, R. V., J. W. Brown and R. F. Verhey: *Complex Variables and Applications*, Third Edition, McGraw-Hill Co., 1976.
- [16] Clough, R. W. and J. Penzien: *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Co., 1975.
- [17] Cowper, G. R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, Vol.33, pp.335-340, 1966.
- [18] DaDeppo, D. A. and R. Schmidt: Instability of clamped-hinged circular arches subjected to a point load, *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, Vol.42, pp.894-896, 1975.
- [19] Desai, C. S. and J. F. Abel: *Introduction to the Finite Element Method*, Van Nostrand Reinhold, 1972; 山本善之 訳: マトリックス有限要素法 — 基礎理論とその応用, 科学技術出版社, 1974.

- [20] Doghri, I. and A. Ouaar: Homogenization of two-phase elasto-plastic composite materials and structures: Study of tangent operators, cyclic plasticity and numerical algorithm, *Int. J. Solids Structures*, Vol.40, pp.1681-1712, 2003.
- [21] Drucker, D. C.: Plasticity, *Structural Mech.*, Proc. 1st Sympo. Naval Struct. Mech., ed. by J. N. Goodier and N. J. Hoff, Pergamon Press, pp.407-455, 1960.
- [22] Drucker, D. C. and W. Prager: Soil mechanics and plastic analysis or limit design, *Q. Appl. Math.*, Vol.10, pp.157-165, 1952.
- [23] Elwi, A. E. and D. W. Murray: Skyline algorithms for multilevel substructure analysis, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.21, pp.465-479, 1985.
- [24] Eshelby, J. D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957.
- [25] Flügge, W.: *Tensor Analysis and Continuum Mechanics*, Springer Verlag, 1972.
- [26] Fung, Y. C.: *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall Inc., 1965.
- [27] Gotou, H., Y. Sakuragi and T. Iwakuma: Statistical correlation between quantificational indices and preference judgements of structural landscapes, *Forma*, Vol.17, pp.239-251, 2002.
- [28] Graham Jr., C. D.: Light metallurgy... A glossary for research reports, *Metal Progress*, Vol.71, pp.75-76, 1957.
- [29] Gurson, A. L.: Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth: Part I – Yield criteria and flow rules for porous ductile media, *J. Eng. Mater. Tech.*, ASME, Vol.99, pp.2-15, 1977.
- [30] Hai, N. D., H. Mutsuyoshi, S. Asamoto and T. Matsui: Structural behavior of hybrid FRP composite I-beam, *Constr. Build. Mater.*, Vol.24, pp.956-969, 2010.
- [31] Har, J.: A unified stress update algorithm for explicit transient shell dynamics with combined isotropic-kinematic hardening in Eulerian rate-type phenomenological finite elasto-plasticity models, *Compt. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, Vol.196, pp.3248-3275, 2007.
- [32] Hasegawa, A., T. Iwakuma and S. Kuranishi: A linearized Timoshenko beam theory in finite displacements, *Structural Eng./ Earthquake Eng.*, Vol.2, pp.321s-326s, (*Proc. JSCE*, No.362/ I-4) 1985.
- [33] Hasegawa, A., T. Iwakuma, K. Liyanage and F. Nishino: A consistent formulation of trusses and non-warping beams in linearized finite displacements, *Structural Eng./ Earthquake Eng.*, Vol.3, pp.477s-480s, (*Proc. JSCE*, No.374/ I-6) 1986.
- [34] Hashin, Z. and S. Shtrikman: A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.11, pp.127-140, 1963.
- [35] Hildebrand, F. B.: *Advanced Calculus for Applications*, Second Edition, Prentice-Hall Inc., 1976.
- [36] Hill, R.: Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycrystals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.13, pp.89-101, 1965.
- [37] Hill, R.: On constitutive inequalities for simple materials — I & II, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.16, pp.229-242, pp.315-322, 1968.
- [38] Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford Classic Texts in the Physical Sciences, Clarendon Press, 1998.
- [39] Hill, R. and J. W. Hutchinson: Bifurcation phenomena in the plane tension test, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.239-264, 1975.
- [40] Hornby, A. S.: *Oxford Advanced Learner's Dictionary of Current English*, Fifth Edition, ed. by J. Crowther, Oxford Univ. Press, 1995.
- [41] Hutchinson, J. W.: Plastic buckling, *Advances in Appl. Mech.*, Vol.14, pp.67-144, 1974.

- [42] Iwakuma, T.: Timoshenko beam theory with extension effect and its stiffness equation for finite rotation, *Comput. Structures*, Vol.34, pp.239-250, 1990.
- [43] Iwakuma, T., M. Ai and F. Nishino: On derivation of Timoshenko beam stiffness equation, *Proc. JSCE*, No.312, pp.119-128, 1981.
- [44] Iwakuma, T., K. Ikeda and F. Nishino: Consistency of straight-beam approximation of a thin-walled circular beam, *Comput. Structures*, Vol.60, pp.87-93, 1996.
- [45] Iwakuma, T. and T. Furukawa: A guide to use macros and style files in  $\LaTeX$ , *Minutes and Appendices*, Nederlandstalige  $\TeX$  Gebruikersgroep, No.13, pp.73-110, 1994.
- [46] Iwakuma, T., A. Hasegawa, F. Nishino and S. Kuranishi: Principle and numerical check of a stiffness equation for plane frames, *Structural Eng./ Earthquake Eng.*, Vol.4, pp.73s-83s, (*Proc. JSCE*, No.380/ I-7) 1987.
- [47] Iwakuma, T. and S. Koyama: An estimate of average elastic moduli of composites and polycrystals, *Mech. Mater.*, Vol.37, pp.459-472, 2005.
- [48] Iwakuma, T. and S. Kuranishi: How much contribution does the shear deformation have in a beam theory?, *Proc. JSCE*, No.344/ I-1, pp.141-152, 1984.
- [49] Iwakuma, T. and S. Nemat-Nasser: An analytical estimate of shear band initiation in a necked bar, *Int. J. Solids Structures*, Vol.18, pp.69-83, 1982.
- [50] Iwakuma, T. and S. Nemat-Nasser: Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals, *Proc. R. Soc. London*, Vol.A394, pp.87-119, 1984.
- [51] Ju, J. W. and X. D. Zhang: Effective elastoplastic behavior of ductile matrix composites containing randomly located aligned circular fibers, *Int. J. Solids Structures*, Vol.38, pp.4045-4069, 2001.
- [52] Kármán, T. von: Über die Formänderung dünnwandiger Rohre, insbesondere federnder Ausgleichrohre, *Zeit. des Vereines deutscher Ingenieure*, Vol.55, pp.1889-1895, 1911 (もちろん原著は読んでおりません) .
- [53] Kawai, T.: New element models in discrete structural analysis, *J. SNAJ*, No.141, pp.174-180, 1977.
- [54] Knuth, D. E.: *The  $\TeX$ book*, Addison-Wesley Publ. Co., 1986; 斎藤信雄 監修, 鷲谷好輝 訳: [改訂新版]  $\TeX$  ブック, アスキー, 1992.
- [55] Koyama, S., S. Katano, I. Saiki and T. Iwakuma: A modification of the Mori-Tanaka estimate of average elastoplastic behavior of composites and polycrystals with interfacial debonding, *Mech. Mater.*, Vol.43, pp.538-555, 2011.
- [56] Lamport, L.:  *$\LaTeX$ , A Document Preparation System, User's Guide and Reference Manual*, Addison Wesley Publ. Co., 1986. Second Edition, 1994.
- [57] Lee, E. H., R. L. Mallett and T. B. Wertheimer: Stress analysis for anisotropic hardening in finite-deformation plasticity, *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, Vol.50, pp.554-560, 1983.
- [58] Lin, R.: Hypoelasticity-based analytical stress solutions in the simple shearing process, *ZAMM*, Vol.83, pp.163-171, 2003.
- [59] Lin, R. C., U. Shomburg and T. Kletschkowski: Analytical stress solutions of a closed deformation path with stretching and shearing using the hypoelastic formulations, *Europ. J. Mech.* Vol.22, pp.443-461, 2003.
- [60] Lin, S. C., C. C. Yang, T. Mura and T. Iwakuma: Average elastic-plastic behavior of composite materials, *Int. J. Solids Structures*, Vol.29, pp.1859-1872, 1992.
- [61] Malvern, L. E.: *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*<sup>†</sup>, Prentice-Hall Inc., 1969.
- [62] Mehrabadi, M. M. and S. C. Cowin: Initial planar deformation of dilatant granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.26, pp.269-284, 1978.

<sup>†</sup> この本の文献リストのタイトルは 'Bibliography of Twentieth-Century Authors' だ。面白い。

- [63] Mehrabadi, M. M. and S. C. Cowin: Prefailure and post-failure soil plasticity models, *J. Eng. Mech., Proc. ASCE*, Vol.106, pp.991-1003, 1980.
- [64] Mehrabadi, M. M. and S. C. Cowin: On the double-sliding free-rotating model for the deformation of granular materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.29, pp.269-282, 1981.
- [65] Mehrabadi, M. M. and S. C. Cowin: Eigentensors of linear anisotropic elastic materials, *Q. J. Mech. Appl. Math.*, Vol.43, pp.15-41, 1990.
- [66] Meyers, A., H. Xiao and O. T. Bruhns: Choice of objective rate in single parameter hypoelastic deformation cycles, *Comput. Struct.*, Vol.84, pp.1134-1140, 2006.
- [67] Mori, T. and K. Tanaka: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973.
- [68] Morrison, P., P. Morrison and The Office of C. and R. Eames: *Powers of Ten, About the Relative Size of Things in the Universe*, Scientific American Books, 1982; 村上陽一郎・公子 訳: パワーズ オブ テン POWERS OF TEN 宇宙・人間・素粒子をめぐる大きさの旅, 日経サイエンス, 1983.
- [69] Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ., 1982; *Micromechanics of Defects in Solids*, Second, Revised Edition, Kluwer Academic Publ., 1998; 部分訳: (T.M.)<sup>2</sup>: マイクロメカニクス = 転位と介在物, 培風館, 1975.
- [70] Nayak, G. C. and O. C. Zienkiewicz: Elaso-plastic stress analysis. A generalization for various constitutive relations including strain softening, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol.5, pp.113-135, 1972.
- [71] Nemat-Nasser, S.: On finite deformation elasto-plasticity, *Int. J. Solids Structures*, Vol.18, pp.857-872, 1982.
- [72] Nemat-Nasser, S.: *Plasticity, A Treatise on Finite Deformation of Heterogeneous Inelastic Materials*, Cambridge Monographs on Mechanics, Cambridge Univ. Press, 2005.
- [73] Nemat-Nasser, S. and M. Hori: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, Elsevier Science Publ., 1993.
- [74] Nemat-Nasser, S. and A. Shokooh: On finite plastic flows of compressible materials with internal friction, *Int. J. Solids Structures*, Vol.16, pp.495-514, 1980.
- [75] Oda, M. and K. Iwashita (eds.): *Mechanics of Granular Materials, An Introduction*, A. A. Balkema, 1999.
- [76] Okuda, M. and D. Okuda: *The Star Trek Encyclopedia, A Reference Guide to the Future*, Updated and Expanded Edition, Pocket Books, 1999.
- [77] Powers, D. L.: *Boundary Value Problems and Partial Differential Equations*, Fifth Edition, Elsevier Academic Press, 2006.
- [78] Reissner, E.: On finite bending of pressurized tubes, *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, Vol.26, pp.386-392, 1959.
- [79] Richard, T. G.: The mechanical behavior of a solid microsphere filled composite, *J. Comp. Mat.*, Vol.9, pp.108-113, 1975.
- [80] Roberts, S. M. and J. S. Shipman: *Two-Point Boundary Value Problems: Shooting Methods*, Elsevier, 1972.
- [81] Rudnicki, J. W. and J. R. Rice: Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.371-394, 1975.
- [82] Salas, S. L., E. Hille and J. T. Anderson: *Calculus, One and Several Variables*, Fifth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1986.
- [83] Shanley, F. R.: Inelastic column theory, *J. Aeronaut. Sci.*, Vol.14, pp.261-267, 1947.
- [84] Simo, J. C. and T. J. R. Hughes: *Computational Inelasticity*, Springer Verlag, 1998.
- [85] Smith, J. C.: Experimental values for the elastic constants of a particulate-filled glassy polymer, *J. Res. NBS — A. Phys. Chem.*, Vol.80A, pp.45-49, 1976.

- [86] Souza Neto, E. A. de, D. Perić and D. R. J. Owen: *Computational Methods for Plasticity: Theory and Application*, John Wiley & Sons, Inc., 2008.
- [87] Spencer, A. J. M.: Deformation of ideal granular materials, *Mechanics of Solids; the Rodney Hill 60th Anniversary Volume*, ed. by H. G. Hopkins and M. J. Sewell, Pergamon Press, pp.607-652, 1982.
- [88] Stakgold, I.: *Green's Functions and Boundary Value Problems*, a volume in *Pure and Applied Mathematics: A Wiley-Interscience Series of Texts, Monographs, and Tracts*, found. by R. Courant, ed. by L. Bers, P. Hilton and H. Hochstadt, John Wiley & Sons, Inc., 1979.
- [89] Sternberg, E. and R. A. Eubanks: On the singularity at a concentrated load applied to a curved surface, *Proc. 2nd US Nat'l Congress Appl. Mech.*, pp.237-246, 1954.
- [90] Stören, S. and J. R. Rice: Localized necking in thin sheets, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.23, pp.421-441, 1975.
- [91] Strang, G. and G. J. Fix: *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall Inc., 1973; 三好哲彦, 藤井宏 共訳: 有限要素法の理論, 培風館, 1976.
- [92] Sun, L. Z. and J. W. Ju: Effective elastoplastic behavior of metal matrix composites containing randomly located aligned spheroidal inhomogeneities, *Int. J. Solids Str.*, Vol.38, pp.203-225, 2001.
- [93] Tandon, G. P. and G. J. Weng: A theory of particle-reinforced plasticity, *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, Vol.55, pp.126-135, 1988.
- [94] Tetelman, A. S. and A. J. McEvily Jr.: *Fracture of Structural Materials*, John Wiley & Sons, Inc., 1967; 宮本博 訳: 構造材料の強度と破壊 1, 破壊の巨視的様相と微視的様相, 培風館, 1970.
- [95] Timoshenko, S. P. and J. M. Gere: *Theory of Elastic Stability*, Int. Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, 1961.
- [96] Timoshenko, S. P. and J. N. Goodier: *Theory of Elasticity*, Int. Student Edition, McGraw-Hill Kogakusha, 1970.
- [97] Truesdell, C. and R. Toupin: The classical field theories, *Encyclopedia of Physics*, ed. by S. Flügge, Vol.III/1, Springer-Verlag, 1960.
- [98] Truesdell, C. and W. Noll: The non-linear field theories of mechanics, *Encyclopedia of Physics*, ed. by S. Flügge, Vol.III/3, Springer-Verlag, 1965.
- [99] Tvergaard, V.: Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions, *Int. J. Fracture*, Vol.17, pp.389-407, 1981.
- [100] Weinberg, S.: *To Explain the World: The Discovery of Modern Science*, Harper, 2015; 赤根洋子 訳: 科学の発見, 文藝春秋, 2016.
- [101] Wempner, G.: *Mechanics of Solids with Applications to thin bodies*, Monographs and Textbooks on Mechanics of Solids and Fluids, *Mechanics of Elastic and Inelastic Solids*, ed. by G. A. Eringen, Sijthoff & Noordhoff, 1981.
- [102] Weng, G. J.: The overall elastoplastic stress-strain relations of dual-phase metals, *J. Mech. Phys. Solids*, Vol.38, pp.419-441, 1990.
- [103] 青木徹彦: 例題で学ぶ構造力学 I — 静定編 —, コロナ社, 2015.
- [104] 荒川淳平, 岩熊哲夫: 増分弾塑性構成則に用いる応力速度の選択, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.70, pp.I.365-I.374, 2014.
- [105] 石川信隆, 大野友則: 入門・塑性解析と設計法, 森北出版, 1988.
- [106] 泉満明: ねじりを受けるコンクリート部材の設計法, 技報堂, 1975.
- [107] 伊藤孝 編: 橋の見方, 楽しみ方 — 東京の橋 The Bridge of Tokyo —, 土木学会編集委員会企画 CD-ROM, 2001.
- [108] 伊藤学: 構造力学, 森北出版, 1971.

- [109] 井上達雄: 弾性力学の基礎, 日刊工業新聞社, 1982.
- [110] 岩熊哲夫: 座屈を伴って繰り返し大変形を受ける鋼板の構成則と地震時耐力, 平成 12~14 年度科学研究費補助金(基盤研究(C)(2)) 研究成果報告書, 研究課題番号 12650468, 2003.
- [111] 岩熊哲夫, 斉木功, 藤本真明: せん断抵抗則に着目した 2 種類の基本的な非弾性モデルの特性, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.73, pp.22-33, 2017.
- [112] 岩熊哲夫, 古川徹生: スタイルファイル活用法, *UNIX MAGAZINE* 連載 No.1-14, アスキー, Vol.9(3)-11(4), 1994-1996.
- [113] 岩崎智明, 岩熊哲夫, 小山茂: 複合材料の巨視的降伏および流れ則の予測, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.5, pp.273-282, 2002.
- [114] 内田樹: 寝ながら学べる構造主義, 文春新書, 文藝春秋, p.44, 2002.
- [115] 内田樹: 街場の大学論 ウチダ式教育再生, 角川文庫, 角川書店, 2010.
- [116] 大崎順彦: 新・地震動のスペクトル解析入門, 鹿島出版会, 1994.
- [117] 岡部恒治, 戸瀬信之, 西村和雄: 分数ができない大学生 — 21 世紀の日本が危ない, 東洋経済新聞社, 1999.
- [118] 小川洋子: 博士の愛した数式, 新潮文庫, 新潮社, 2005 (本は読んでいません。映画は TV で観ました)。
- [119] 岡本舜三: 建設技術者のための振動学(第 2 版), オーム社, 1986.
- [120] 奥井義昭: 合成桁による設計思想の転換, 橋梁と基礎, 建設図書, Vol.40, No.8, pp.64-67, 2006.
- [121] 奥井義昭: 限界状態設計法と維持管理, 片山技報, No.33, pp.2-7, 2014.
- [122] 小沢昭一, 宮腰太郎: 泣け! お父さん 小沢昭一的ところ, 新潮文庫, 新潮社, pp.308-309, 1989.
- [123] 上出洋介: 科学技術が発達すれば理科離れが加速する, UP, 東京大学出版会, No.422, pp.28-34, 2007.
- [124] 河合貴行, 谷和夫: 縦ずれ断層によって未固結被覆層に発達するせん断帯が地表面に出現する位置の予測, 土と基礎, 地盤工学会, Vol.51, no.11, pp.23-25, 2003.
- [125] 菊池文雄: 幾何学的非線型と FEM, 特集 有限要素法, 数理科学, No.144, pp.18-26, 1975.
- [126] 北川浩: 塑性力学の基礎, 日刊工業新聞社, 1979.
- [127] 北川浩: 弾・塑性力学 — 非線形解析のための基礎理論 —, 裳華房, 1987.
- [128] 共同訳聖書実行委員会: 旧約聖書, The Bible, The New Interconfessional Translation, 日本聖書協会, 2007.
- [129] 京谷孝史: よくわかる連続体力学ノート, 森北出版, 2008.
- [130] 国井隆弘, 宮田利雄, 片山恒雄: 構造物の振動解析, 新体系土木工学 10, 技報堂出版, 1979.
- [131] 久保慶三郎: 構造力学演習, 学献社, 1974.
- [132] 鋼材倶楽部 編: 土木技術者のための鋼材知識, 技報堂出版, 1968.
- [133] 高速道路技術センター: 橋梁ジョイント構造の設計・施工に関する技術検討報告書, 日本道路公団東北支社委託, 2005.
- [134] 高速道路技術センター: ダブル埋設ジョイントの性能確認試験に関する技術検討報告書, 東日本高速道路東北支社委託, 2006.
- [135] 小坪清真: 土木振動学, 森北出版, 1973.
- [136] 後藤文彦: 良いプレゼン悪いプレゼン わかりやすいプレゼンテーションのために<sup>‡</sup>, カットシステム, 2009.

<sup>‡</sup> 後藤先生自身が書いているが、この文献では本文中に多数の括弧書きがあるため、人によってはとても読み難い。これは元々脚注なのではないだろうか。第 1 著者もメール等でよく使うことからの推測だ。この文書の第 1 章でも脚注をたくさん使ってみた。このくらい多くの注を付けると本当に楽しい。そして付録 K では全ページに脚注を使う努力をしてみた。ところで最近、大学教員の実態を一部暴露するとても面白い文 [146] を読んだ。中身はともかく、この随筆シリーズのセンスのあるタイトルは興味深い。

- [137] 後藤文彦, 廣瀬克身, 菅原紘一, 岩熊哲夫: 畳み込み積分を用いた構造景観の定量化, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.45A, pp.605-614, 1999.
- [138] 小林俊一: 地盤の変形解析 — 土水連成場・構成式 —, 文書はインターネット上から無くなったようなので小林俊一先生に直接お問い合わせください, 2002.
- [139] 小林昭一 編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会, 2000.
- [140] 小林寿彦, 斉木功, 岩熊哲夫: 構成則に用いる応力速度と変形の局所化, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.67, pp.I.281-I.291, 2011.
- [141] 小山茂, 片野俊一, 大上俊之, 岩熊哲夫: 複合材料や多結晶金属の平均弾塑性挙動予測の一手法, 土木学会論文集 A, Vol.64, pp.121-132, 2008.
- [142] 近藤恭平: [工学基礎] 振動論, 培風館, 1993.
- [143] 斉木功, 後藤文彦, 岩熊哲夫: 有限回転を許容する棒部材の三次元動的数値解析の一手法, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.44A, pp.315-322, 1998.
- [144] 杉原厚吉: 理科系のための英文作法 文章をなめらかにつなぐ四つの法則, 中公新書, 1997.
- [145] 鈴木基行: ステップアップで実力がつく 構造力学徹底演習, 森北出版, 2006.
- [146] 須藤靖: 大学教師をめぐる三つの誤解 — 注文の多い雑文 <sup>ちゅうぶん</sup> その十二, UP, 東京大学出版会, No.455, pp.26-32, 2010.
- [147] 須藤靖: たかがナカグロ, されどナカグロ — 科学技術か, 科学・技術か, UP, 東京大学出版会, No.466, pp.18-21, 2011.
- [148] 須藤靖: 三日月とクロワッサン 宇宙物理学者の天文学的人生論, 毎日新聞社, 2012.
- [149] 須藤利一: 圖學概論 [増補], 東京大学出版会, 1988.
- [150] 田村武: 線形代数, テキストシリーズ土木工学 6, 共立出版, 1994.
- [151] 田村武: 連続体力学入門, 朝倉書店, 2000.
- [152] 田村武: 構造力学 — 仮想仕事の原理を通して —, 朝倉書店, 2003.
- [153] 塚田宗政, 斉木功, 山田真幸, 岩熊哲夫: 床版橋台側のノージョイント化に関する数値解析的検討, 構造工学論文集, 土木学会, Vol.58A, pp.1084-1097, 2012.
- [154] 寺沢直樹, 岩熊哲夫, 後藤文彦, 白戸真大: 地盤の不安定問題における変形局所化の数値予測, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.3, pp.283-294, 2000.
- [155] 寺田賢二郎, 菊池昇: 均質化法入門, 計算力学レクチャーシリーズ 1, 丸善, 2003.
- [156] 道路保全技術センター: 既設橋梁のノージョイント工法の設計施工手引き (案), 1995.
- [157] 土木学会 編: 構造力学公式集 昭和 61 年版, 土木学会, 1986.
- [158] 土木学会 編: 土木工学ハンドブック 第 6 編「固体力学」, 技報堂出版, pp.215-256, 1989.
- [159] 土木学会 編: 土木用語大辞典, 技報堂出版, 1999.
- [160] 土木学会鋼構造委員会 鋼構造物設計指針小委員会 編: 鋼構造物設計指針 PART A 一般構造物, 土木学会, 1997.
- [161] 土木学会鋼構造委員会 鋼材規格小委員会: TMCP 鋼の土木構造物への適用, 土木学会誌, 第 73 巻, 第 2 号, pp.71-77, 1988.
- [162] 土木学会構造工学委員会 計算力学とその応用に関する研究小委員会 編: 構造工学における計算力学の基礎と応用, 土木学会, 1996.
- [163] 土木学会構造工学委員会 構造力学小委員会構成則分科会 編: 材料特性の数理モデル入門～構成則主要用語解説集～, 構造工学シリーズ 4, 土木学会, 1989.

- [164] 土木学会構造工学委員会 力学教育に関する小委員会: 力学教育に関する小委員会報告書, 土木学会, 1994, あるいはインターネット上の文書<sup>§</sup>として.
- [165] 土木学会構造工学委員会 力学教育に関する小委員会: 委員会報告 大学における力学教育, 土木学会論文集, No.513/I-31, pp.1-7, 1995, あるいはインターネット上の文書<sup>§</sup>として.
- [166] 中井博, 北田俊行: 新編 橋梁工学: 共立出版, 2010.
- [167] 中沢正利, 池田清宏, 和知聡, 倉西茂: 等曲げを受ける弾性矩形板に生じる二次座屈現象の解明, 土木学会論文集, No.519/I-32, pp.67-78, 1995.
- [168] 長井正嗣: 橋梁工学 [第2版], テキストシリーズ土木工学 3, 共立出版, 2003.
- [169] 成瀬勝武, 鈴木俊男: 橋梁工学 鋼橋編 第4版, p.181, 森北出版, 1994.
- [170] 西村直志: トラスの力学, <http://gspsun1.gee.kyoto-u.ac.jp/nchml/kouriki/kouriki.html>, 1998.
- [171] 西野文雄: 連続体の力学 (II), 土木工学体系 6, 彰国社, 1984.
- [172] 西野文雄, 長谷川彰夫: 構造物の弾性解析, 新体系土木工学 7, 技報堂出版, 1983.
- [173] 日本エディタースクール 編: 標準 編集必携, 日本エディタースクール出版部, 1993.
- [174] 日本鋼構造協会 編: 吊構造, コロナ社, 1975.
- [175] 日本材料学会 編: 固体力学の基礎, 日刊工業新聞社, 1981.
- [176] 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, I 共通編, II 鋼橋編, 1996.
- [177] 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, V 耐震設計編, 1996.
- [178] 日本物理学会 編: 科学英語論文のすべて, 丸善, 1984.
- [179] 野村卓史: 構造力学, 土木・環境系コアテキストシリーズ B-1, コロナ社, 2011.
- [180] 伯野元彦: 被害から学ぶ地震工学 現象を素直に見つめて, 鹿島出版社, 1992.
- [181] 林川俊郎: 橋梁工学, 現代土木工学シリーズ 5, 朝倉書店, 2000.
- [182] 林毅, 村外志夫: 変分法, コロナ社, 1980.
- [183] 廣瀬恒太, 岩熊哲夫, 小山茂: 材料内部の微視構造が初期降伏特性に及ぼす影響と巨視的構成則, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.6, pp.355-366, 2003.
- [184] 福本嘯士: 構造物の座屈・安定解析, 新体系土木工学 9, 技報堂出版, 1982.
- [185] 藤原稔: 道路橋技術基準の変遷 — 既設橋保全のための歴代技術基準ガイド —, 技報堂出版, 2009.
- [186] 細野透: 弧長法による弾性座屈問題の解析 (その2) 数値解析方法としての弧長法, 日本建築学会論文報告集, 第243号, pp.21-30, 1976.
- [187] 本多勝一: 日本語の作文技術, 朝日文庫, 1999.
- [188] 松田徳一郎 編: リーダーズ英和辞典<sup>¶</sup>, 研究社, 2004.
- [189] 三木千壽: 鋼橋技術雑感, 川田技報, Vol.18, pp.3-6, 1999.
- [190] 三木千壽: 鋼構造, テキストシリーズ土木工学 10, 共立出版, 2000.
- [191] 南伸坊: ポーッとしている, 今を生きる — わたしの見方・考え方, PHP, No.708, pp.46-51, 2007.
- [192] 三宅政光, 森野安信: 鋼構造 II, 図解土木講座, 技報堂出版, 1980.

<sup>§</sup> URL はまえがきに記載。

<sup>¶</sup> この辞典の見出し語には 'micromechanics' が加わっていて, 「固体の微細構造欠陥の幾何学およびひずみ・応力を研究する」とある。単なる微視的な観点からの力学ではなく, 微視構造欠陥 (つまり eigen ひずみ [69]) の幾何学的分布に基づく連続体力学として定義されているのは興味深い。森勉先生のお話だと, 村外志夫先生と編集者の間に接触があったらしい。



- [193] 宮本博: 有限要素法と破壊力学, コンピュータによる構造工学講座 II-3-B, 日本鋼構造協会編, 培風館, 1972.
- [194] 村外志夫: 随想 マイクロメカニクスと日本とのかかわりの 40 年をふり返って, 日本金属学会会報, 第 31 巻, 第 5 号, pp.8-11, 1992.
- [195] 山崎徳也, 彦坂熙: 構造解析の基礎, 共立出版, 1978.
- [196] 山本健二: 流体力学講話・つまみ食い, インターネット上の文書を検索, 2008.
- [197] 湯本健寛, 岩熊哲夫: 複合材料の平均的初期降伏関数の陽な近似表現, 応用力学論文集, 土木学会, Vol.7, pp.515-525, 2004.
- [198] 吉田輝, 後藤正司, 亀谷泰久, 龍岡文夫, 木幡行宏, 薫軍: 砂礫の平面ひずみ圧縮試験におけるせん断層の応力・変形関係, 地盤の破壊とひずみの局所化に関するシンポジウム発表論文集, 土質工学会, pp.189-196, 1994.

## その他の役立つかもしれない文献等

- \* Chapman, R. L.: *Roget's International Thesaurus*, Fourth Edition, T. Y. Crowell Publ., 1977, and Harper & Row Publ., 1979.
- \* Hawking, S.: *Brief Answers to the Big Questions*, Space Time Pub. Ltd., 2018; 青木薫 訳: ビッグ・クエスチョン〈人類の難問〉に答えよう, NHK 出版, 2019.
- \* Hopkins, H. G. and M. J. Sewell (ed.): *Mechanics of Solids*, The Rodney Hill 60th Anniversary Volume, Pergamon Press, 1982.
- \* Leaf, M.: *The Story of Ferdinand*, First Edition 1936, Grosset & Dunlap, 2011; 光吉夏弥 訳: はなのすきなうし, 岩波の子どもの本 (11), 岩波書店, 1954; A. Ridout: *Ferdinand*, [e.g. M. Argerich, N. Freire, G. Kremer, I. van Keulen and M. Maisky: Philips 416 841-2, 1988] 1971.
- \* Leighton, R. E.: *the BEST of Banderooogé*<sup>◇</sup>, The Daily Northwestern, Students Publ. Co., Inc., 1982.
- \* Love, A. E. H.<sup>††</sup>: *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publ. Inc., 1944.
- \* O'Malley Jr., R. E.: *Introduction to Singular Perturbations*, Applied Mathematics and Mechanics, An International Series of Monographs, ed. by F. N. Frenkiel and G. Temple, Academic Press, Inc., 1974.
- \* Orff, C.: *Carmina Burana*<sup>◇</sup>, [e.g. E. Jochum, G. Janowitz, G. Stolze, D. Fischer-Dieskau, Chor und Orchester der Deutschen Oper Berlin and Schöneberger Sängerknaben, MG 2047, 1995] 1936.
- \* Piazzolla, Á.: *Maria de Buenos Aires*<sup>†††</sup>, G. Kremer and Kremerata Musica (J. Zenko, Jairo, H. Ferrer, P. A. Glorvigen, G. Kremer, V. Sakharov, M. Fedotova, M. Sudraba, U. Zebriunaite, A. Posch and P. Sadlo), arranged by L. Desyatnikov and G. Kremer, TELDEC/ 3984 20632 2 (WPCS 6380/1), 1998.
- \* Taya, M. and R. J. Arsenault (ed.): *Micromechanic Modeling of Industrial Materials*, The Professor T. Mori 65th Birthday Volume, Elsevier, 2000.
- \* Washizu, K.: *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Second Edition, Pergamon Press, 1974.
- \* Weng, G. J., M. Taya and H. Abé (ed.): *Micromechanics and Inhomogeneity*, The Toshio Mura Anniversary Volume, Springer-Verlag, 1990.

◇ 第 1 著者留学中に学生新聞 'The Daily Northwestern' に掲載された当時の学生による四コマ漫画の傑作選。米国大学の特にこの大学の 4 年間で面白く表現した漫画の傑作選。今すべてをインターネット上で読むことができる。興味がある方は 'Banderooogé' で検索を。例えば 'b096' や 'b266' とか 'b270' あたりがユニークだ。

†† ペーパーバック版には発行年が無い。ひずみ成分には添え字が二つ付いているが、応力成分は例えば  $X_x$ ,  $Y_z$  等で表記され、分布外力が  $X$  や  $Y$  になっている。古典中の古典である。

◇ 第 1 著者が学生時代に聴いて驚いた曲だが、これについて西野文雄先生からは「人の声を打楽器みたいに使って面白い」ということでした。

†† 村外志夫先生がよくお話しになったエピソードだが、ダンスの先生に「タンゴ」を教えて欲しいとおっしゃったところ、「それはアフリカの踊りか?」と言われたので説明すると、「おおー、タンゴか!」と返ってきたそう。確かに「バーボン」を注文してビールが出てきたり「コーヒー」が「コーク」になる。Northwestern 大学がある街は「エバンストン」ではなく「エバンストン」でないと通じない。英語で重要なのはアクセントなのだろう。

- \* Worth, F. L.: *The Complete Unabridged Super Trivia Encyclopedia*, Warner Books Inc., 1977; 渡辺洋一, リチャード B. マート 監訳: アメリカ大衆文化を知るための雑学情報百科 スーパートリビア事典, 研究社, 1988.
- \* 池波正太郎: 男の作法, 新潮文庫, 新潮社, 1984.
- \* 岡本舜三 編: 鋼構造の研究, 奥村敏恵教授還暦記念会, 1977.
- \* 加藤恒彦: Mitaka Ver.1.4.3a, 4次元デジタル宇宙ソフトウェア, 国立天文台天文シミュレーションプロジェクト, <http://4d2u.nao.ac.jp/html/program/mitaka/>, 2018.
- \* 五味太郎: ことわざ絵本, ことわざ絵本 Part-2, 岩崎書店, 1986, 1987.
- \* 佐伯彰一: 図解 橋梁用語事典, 山海堂, 1986.
- \* 信濃の橋刊行会 (信州大学の小西純一先生寄贈): 信濃の橋百選, 信濃毎日新聞社, 2011.
- \* 土木学会耐震工学委員会 土木技術者のための振動便覧改訂編集委員会 編: 土木技術者のための振動便覧, 土木学会, 1985.
- \* 土木学会東北支部設立 50 周年記念事業実行委員会 編: みちのく散歩道 土木技術を訪ねて\*, 土木学会東北支部, 1987.
- \* 富田佳宏: 数値弾塑性力学 有限要素シミュレーション — 基礎と応用, 養賢堂, 1994.
- \* 鳥飼玖美子, 苅谷夏子, 苅谷剛彦: ことばの教育を問い直す — 国語・英語の現在と未来, ちくま新書, 筑摩書房, 2019.
- \* 山口瞳: 礼儀作法入門, 新潮文庫, 新潮社, 2000.
- \* リラクゼーション (応力緩和) / Bach, J. S.: *The Complete Suites for Unaccompanied Cello*/ Barber, S.: *Adagio for Strings*/ Bartók, B.: *Divertimento; Music for Strings, Percussion and Celesta*/ Brahms, J.: *Symphony No.1*/ Britten, B.: *Variations on a Theme of Frank Bridge*<sup>#</sup>/ Bruch, M.: *Violin Concerto No.1*/ Bruckner, A.: *Symphony No.7*/ Debussy, C.: *La Mer*/ Delius, F.: *Small pieces such as Sleigh Ride etc.*/ Dukas, P.: *L'apprenti sorcier*/ Dvorák, A.: *Concerto pour Violoncelle*/ Fauré, G.: *Requiem*<sup>\*</sup>; *Violin Sonata No.1*/ Górecki, H.: *Totus Tuus*/ Holst, G.: *The Planets*<sup>b</sup>/ Honegger, A.: *Pacific 231*/ Ibert, J.: *Escales*/ Mahler, G.: *Symphony No.3*/ Milhaud, D.: *Scaramouche*<sup>c</sup>/ Poulenc, F.: *Pastourelle; Sonata for Flute & Piano*/ Prokofiev, S.: *Piano Concerto No.3; Romeo and Juliet; Symphony No.6; Violin Sonata No.2*/ Rachmaninov, S.: *Piano Concerto No.2*/ Ravel, M.: *Ma Mere L'Oye; Pavane pour une infante défunte; Piano Concerto in G*/ Respighi, O.: *The Pine of Rome; The Fountains of Rome; Roman Festivals*/ Saint-Saëns, C.: *Carnival of the Animals*/ Satie, E.: *Gymnopédies; Je Te Veux*/ Shostakovich, D.: *Symphony No.5*/ Stravinsky, I.: *Le Sacre du Printemps; The Fire Bird Suite*/ Tchaikovsky, P.: *Symphony No.6*<sup>d</sup>/ Tippett, M.: *Suite for the Birthday of Prince Charles*/ 芥川也寸志: *Triptyque for String Orchestra*<sup>e</sup>/ 武満徹: *Garden Rain*<sup>||</sup>; *November Steps*<sup>\*\*</sup>/

\* 第1著者らが企画させられた。ワードプロセッサ等が貧弱だったこと等から、落丁やページの配置間違い等がある懐かしい非売品。

# この曲にはバイオリン (かピオラ) を膝に抱いてギターのように演奏する変奏曲があり、初めて聴い (観) たときにはとても驚いた。

\* 東北大学の柳沢栄司先生曰く「天国に最も近い鎮魂曲」。

<sup>b</sup> 最近準 (矮) 惑星に区分された冥王星は作曲当時まで発見されていなかったため含まれていない。

<sup>c</sup> 第1著者が学生時代、私的にたいへんお世話になったご家族の長の榊原<sup>よしかず</sup>一先生に教えていただいた名曲。

<sup>d</sup> 第2楽章は珍しい5拍子だが、それは実は「1・2, 1・2・3」で構成されている。このことや Satie・武満とか、付録Sで説明したへ音記号の由来等についても確か榊原先生に教えていただいたと思う。

<sup>e</sup> 第1著者が学部1年生のとき、N響定期会員だったクラスメイトからチケットを譲ってもらったときに遭遇した名曲。

<sup>||</sup> プラス・アンサンブルのためのピアノシモの曲。日本の雨ではないらしい。例によって静寂と緊張と解放。

\*\* 琵琶を奏する鶴田錦史氏が女流演奏家だということを長い間知らなかった。

# 索引

## Author Index

- Abel, J.F., 257  
Achenbach, J.D., 483, 487, 501, 1022  
Ai, M., 344, 693  
Aki, K., 169  
Anderson, J.T., iii  
Asamoto, S., 81  
Asaro, R.J., 519, 570, 608, 609, 649, 665, 673  
Baldrige, L., 1027  
Barrett, C.R., 819  
Bathe, K.-J., 242, 395, 396, 423  
Bažant, Z.P., 293, 721  
Bisshopp, K.E., 311  
Bloch, A., 12, 210  
Bonet, J., 632, 635  
Brockman, J., 11  
Brown, J.W., 113  
Bruhns O.T., 633  
Budiansky, B., 277, 309  
Cedolin, L., 293, 721  
Churchill, R.V., 113  
Clough, R.W., 421  
Cowin, S.C., 84, 568  
Cowper, G.R., 195, 462, 644, 690  
DaDeppo, D.A., 718  
Desai, C.S., 257  
Doghri, I., 780  
Drucker, D.C., 311, 527, 553, 556  
Eames, C., 53  
Eames, R., 53  
Elwi, A.E., 718  
Eshelby, J.D., 85, 124, 765, 770, 771  
Eubanks, R.A., 135  
Fix, G.J., 222, 243, 247  
Flügge, W., 587, 697, 731, 734  
Fung, Y.C., 62, 76, 89, 101, 524, 620, 623  
Furukawa, T., iv  
Gere, J.M., 276, 283, 288, 290–292, 304, 311, 644, 702, 707, 1021  
Goodier, J.N., 120, 121, 134, 340, 359, 1017  
Gotou, H., 12  
Graham Jr., C.D., 1013  
Gurson, A.L., 584  
Hai, N.D., 81  
Har, J., 633  
Hasegawa, A., 344, 711, 717  
Hashin, Z., 776, 778  
Hildebrand, F.B., iii  
Hille, E., iii  
Hill, R., 90, 93, 519, 527, 529, 561, 568, 569, 613, 652, 653, 667, 672, 673, 764, 774  
Hori, M., 78, 773  
Hughes, T.J.R., 532, 541  
Hutchinson, J.W., 280, 299, 652, 653, 667  
Ikeda, K., 207  
Iwakuma, T., iv, 12, 207, 307, 344, 508, 528, 570, 652, 655, 673, 693, 698, 702, 707, 711, 717, 718, 777–779  
Iwashita, K., 568  
Ju, J.W., 584, 776, 779  
Kármán, T. von, 280  
Katano, S., 778, 779  
Kawai, T., 576  
Kletschkowski, T., 633  
Knuth, D.E., iv, 899  
Koyama, S., 777–779  
Kuranishi, S., 698, 702, 711, 717  
Lamport, L., 900  
Lee, E.H., 624, 641  
Lin, R.C., 633  
Lin, S.C., 508  
Liyanage, K., 344  
Mallett, R.L., 624, 641  
Malvern, L.E., 66, 67, 80, 535, 613, 624, 682, 717  
Matsui, T., 81  
McEvily Jr., A.J., 819  
Mehrabadi, M.M., 84, 568  
Meyers A., 633  
Mori, T., 772  
Morrison, P., 53  
Mura, T., 85, 508, 547, 761, 764, 765, 769, 774  
Murray, D.W., 718  
Mutsuyoshi, H., 81  
Nayak, G.C., 527, 557  
Nemat-Nasser, S., 78, 93, 508, 516, 528, 553, 570, 587, 602, 609, 613, 618, 622, 627, 647, 652, 655, 673, 773  
Nishino, F., 207, 344, 693, 717  
Nix, W.D., 819  
Noll, W., 613  
Oda, M., 568  
Ouaar, A., 780  
Owen, D.R.J., 556, 557  
Penzien, J., 421  
Perić, D., 556, 557  
Powers, D.L., 429, 435, 797  
Prager, W., 553, 556  
Reissner, E., 715  
Rice, J.R., 528, 557–559, 648, 649, 665  
Richards, P.G., 169  
Richard, T.G., 774  
Roberts, S.M., 716  
Rudnicki, J.W., 528, 557–559, 648  
Saiki, I., 778, 779  
Sakuragi, Y., 12  
Salas, S.L., iii  
Schmidt, R., 718  
Shanley, F.R., 299  
Shipman, J.S., 716  
Shokooh, A., 553, 647  
Shomburg, U., 633  
Shtrikman, S., 776, 778  
Simo, J.C., 532, 541  
Smith, J.C., 774  
Souza Neto, E.A. de, 556, 557  
Spencer, A.J.M., 568  
Stakgold, I., 167, 168, 245  
Sternberg, E., 135  
Stören, S., 559  
Strang, G., 222, 243, 247  
Sun, L.Z., 776  
Tanaka, K., 772  
Tandon, G.P., 561, 780  
Telman, A.S., 819  
Timoshenko, S.P., 120, 121, 134, 276, 283, 288, 290–292, 304, 311, 340, 359, 644, 702, 707, 1017, 1021  
Toupin, R., 613  
Truesdell, C., 613  
Tvergaard, V., 584  
Verhey, R.F., 113  
Weinberg, S., 585  
Wempner, G., 207, 736  
Weng, G.J., 561, 780  
Wertheimer, T.B., 624, 641  
Wilson, E.L., 242, 395, 396, 423  
Wood, R.D., 632, 635  
Xiao H., 633  
Yang, C.C., 508  
Zhang, X.D., 584, 779  
Zienkiewicz, O.C., 527, 557  
青木徹彦, 144  
赤根洋子, 585  
荒川淳平, 653  
井形直弘, 819  
池田清宏, 371  
石川信隆, 513, 566, 567, 579  
泉満明, 337  
伊藤孝, 866  
伊藤学, 144, 254, 580  
井上達雄, 62  
岩熊哲夫, iv, 12, 472, 526, 568, 643, 653, 665, 776–

- 779, 810, 823  
 岩崎智明, 776, 777  
 内田樹, 1008, 1010  
 大上俊之, 778, 779  
 大崎順彦, 496  
 大野友則, 513, 566, 567, 579  
 岡部恒治, 11  
 岡村弘之, 819  
 岡本舜三, 377, 451  
 小川洋子, 400  
 奥井義昭, 581, 825, 833, 837  
 小沢昭一, 66  
 片野俊一, 778, 779  
 片山恒雄, 479  
 上出洋介, 11  
 亀谷泰久, 570  
 河合貴行, 568  
 菊池昇, 466, 469, 764  
 菊池文雄, 279, 280  
 北川浩, iii, 93, 516, 527, 528, 561, 566, 567, 575, 609, 627  
 北田俊行, 852  
 京谷孝史, 256, 587  
 国井隆弘, 479  
 久保慶三郎, 144, 197, 1019  
 熊谷智美, xii  
 倉西茂, 371
- 小坪清真, 377  
 後藤文彦, 12, 13, 472, 568, 988, 999  
 後藤正司, 570  
 木幡行宏, 570  
 小林俊一, 557  
 小林昭一, 745, 746, 748  
 小林寿彦, 643  
 小山茂, 776–779  
 近藤恭平, 414  
 齐木功, 472, 643, 665, 810  
 斎藤信雄, iv, 899  
 鷺谷好輝, iv, 899  
 白戸真大, 568  
 菅原紘一, 12  
 杉原厚吉, 988  
 鈴木俊男, 852  
 鈴木基行, 37, 139, 1008  
 須藤利一, 885  
 須藤靖, 11, 502, 885  
 龍岡文夫, 570  
 谷和夫, 568  
 田村武, iii, 144, 256, 628, 1071  
 塚田宗政, 810  
 寺沢直樹, 568  
 寺田賢二郎, 466, 469, 764  
 堂山昌男, 819
- 戸瀬信之, 11  
 薫軍, 570  
 中井博, 852  
 長井正嗣, 10, 353, 801, 833  
 中沢正利, 371  
 成瀬勝武, 852  
 西野文雄, 163, 195, 196, 207, 243, 274, 315, 326, 327, 329, 333, 338, 340, 348, 351, 353, 355, 360, 1071  
 西村和雄, 11  
 西村直志, 95, 149, 252  
 野村卓史, 163  
 伯野元彦, 863  
 長谷川彰夫, 163, 195, 196, 207, 243, 274, 315, 326, 348, 351, 353, 355, 360, 1071  
 林川俊郎, 852  
 林毅, 312  
 彦坂熙, 144, 194  
 廣瀬克身, 12  
 廣瀬恒太, 776  
 福本嘸土, 299  
 藤井宏, 222, 243, 247  
 藤本真明, 665  
 藤原稔, iv  
 ふなとよし子, 11
- 古川徹生, iv  
 細野透, 718  
 本多勝一, 63, 406, 897, 988  
 三木千壽, 190, 823  
 南伸坊, 354, 1004, 1008  
 三宅政光, 852  
 宮腰太郎, 66  
 宮田利雄, 479  
 宮本博, 265, 819  
 三好哲彦, 222, 243, 247  
 村上公子, 53  
 村上陽一郎, 53  
 村外志夫, iv, 85, 312, 547, 761, 764, 765, 769, 774  
 森勉, 85, 547, 761, 764, 765, 769, 774  
 森野安信, 852  
 柳原良平, 374  
 山崎徳也, 144, 194  
 山田真幸, 810  
 山本健二, 113  
 山本善之, 257  
 湯本健寛, 526, 776  
 吉田輝, 570  
 和知聡, 371

|                                      |                                |                                |                               |                                 |                               |
|--------------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|-------------------------------|---------------------------------|-------------------------------|
| Symbol                               | Mech.                          | $EI$ , 144                     | $\kappa$ , 309, 699           | $\varphi$ , 315                 | $\vartheta$ , 689             |
| Math.                                |                                | $EI_\omega$ , 331              | $k_b$ , 287                   | $(\cdot)^P$ , 511               | $T_S$ , 316                   |
| $\langle \cdot \rangle$ , 249        | A, 39, 143                     | $E^L$ , 597                    | $k_p$ , 370                   | $(\cdot)^Y$ , 60                | <b>U</b> , 592                |
| $(\cdot)_j$ , 589                    | $\alpha$ , 85                  | $(\cdot)^e$ , 511              | $k_T$ , 690                   | $q$ , 320                       | <b>u</b> , 54                 |
| $\delta$ , 246                       | $\bar{\alpha}_T$ , 691         | $(\cdot)^{ep}$ , 524           | <b>I</b> , 602                | $\bar{Q}_\omega$ , 331          | <b>V</b> , 705                |
| $\delta(x - \xi)$ , 168, 391         | $\alpha_s$ , 154               | $\epsilon$ , 56                | $\Lambda$ , 592               | $r$ , 285                       | <b>v</b> , 593, 601           |
| $\delta_{ij}$ , 59                   | $\alpha'_s$ , 727              | $\bar{\epsilon}^P$ , 517       | $\lambda$ , 75, 195, 285, 528 | <b>Re</b> , 109                 | <b>W</b> , 39, 144            |
| det, 50                              | $\alpha_T$ , 691               | $\bar{\epsilon}^P$ , 518       | $\lambda_b$ , 353             | $\rho$ , 15                     | <b>w</b> , 141                |
| $\frac{d}{dt}$ , 487                 | arrow $\otimes$ , $\odot$ , 51 | $E_r$ , 298                    | $\bar{\lambda}$ , 297         | $r_\omega$ , 336                | <b>w</b> , 603                |
| $(\cdot)$ , 106                      | $\rightarrow$ , 315            | $E_t$ , 297                    | $\lambda_\omega$ , 336        | <b>S</b> , 616, 619, 698        | Comput.                       |
| $e_{ijk}$ , 69, 733                  | $\rightarrow\rightarrow$ , 348 | <b>F</b> , 589                 | $\lambda_T$ , 691             | $\sigma$ , 65, 612, 618         | <b>&amp;</b> , 911            |
| $\epsilon_{ijk}$ , 733               | <b>b</b> , 593                 | <b>G</b> , 75                  | lim, 625                      | $\sigma_{AVE}$ , 74             | <b>\</b> , 901                |
| $\mathcal{F}$ , 401                  | $\beta$ , 382                  | $\gamma$ , 10, 689             | $M$ , 143, 701                | $\bar{\sigma}$ , 89, 516        | <b>&gt;</b> , 893             |
| $H(t - \tau)$ , 392, 487             | $\beta_E$ , 294                | <b>G<sub>i</sub></b> , 697     | $M_\omega$ , 331              | $\sigma_{cr}$ , 285             | <b>&lt;</b> , 937             |
| $\mathfrak{H}$ , 446                 | <b>C</b> , 78, 590             | <b>GJ</b> , 316                | $\mu$ , 75                    | $\sigma_i$ , 70                 | <b>&gt;&gt;</b> , 895         |
| i, 197                               | $\chi$ , 525                   | <b>G<sub>y</sub></b> , 331     | $M_x$ , 357                   | $\bar{\sigma}$ , 89, 517        | $\dots$ (double period), 891  |
| $\mathcal{L}$ , 122                  | $c_L$ , 107                    | <b>G<sub>z</sub></b> , 188     | $M_{xy}$ , 357                | <b>S<sup>N</sup></b> , 613, 618 | //, 922                       |
| $O(\cdot)$ , $o(\cdot)$ , 294        | $c_T$ , 107                    | $g_0$ , 308, 699               | <b>M<sub>y</sub></b> , 357    | $\bar{\sigma}^\vee$ , 624       | <b>inf</b> , <b>INF</b> , 931 |
| $\parallel$ , 70                     | <b>D</b> , 358                 | $G_z^{(p)}$ , 358              | <b>N</b> , 143, 701           | $\bar{\sigma}^\sqcup$ , 624     | <b>nan</b> , <b>NaN</b> , 929 |
| $(\cdot)^Y$ , 150, 484               | <b>D</b> , 78                  | $\mathcal{H}$ , 398            | $n_i$ , 148                   | $\bar{\sigma}^*$ , 622          | <b>.</b> (period), 891        |
| $\mathfrak{R}$ , 496                 | <b>d</b> , 602                 | <b>I</b> , 143                 | <b>n</b> , 627                | $\bar{\sigma}^\vee$ , 626       | <b>/</b> , 891                |
| tensor product $\cdot, \cdot, \cdot$ | $\Delta$ , 60                  | <b>I<sub>1</sub></b> , 72      | $\nu$ , 75                    | <b>T</b> , 618, 619             | $\sim$ , 892                  |
| $\otimes$ , 588                      | $(\cdot)$ , 604                | <b>I<sub>ω</sub></b> , 331     | $\omega$ , 58                 | $\tau^K$ , 616                  | <b> </b> , 894                |
| tr, 60                               | <b>E</b> , 75                  | <b>J</b> , 316                 | $\omega$ , 339, 379           | $\tau_Y$ , 89, 510, 517         | <b>¥</b> , 901                |
| $(\cdot)^T$ , 60                     | <b>E</b> , 590, 697            | <b>J<sub>3</sub></b> , 516     | $P_{cr}$ , 269, 287           | <b>T<sup>R</sup></b> , 616, 618 |                               |
| $\ \cdot\ $ , 249                    | <b>e</b> , 594                 | <b>J<sub>2</sub></b> , 89, 516 | <b>P<sub>E</sub></b> , 285    | $\Theta$ , 338                  |                               |
| $(\cdot)_j$ , 734                    | <b>EA</b> , 144                | <b>J<sub>z</sub></b> , 143     |                               | $\theta$ , 141                  |                               |
|                                      | <b>E<sup>E</sup></b> , 597     | <b>K</b> , 75, 288             |                               |                                 |                               |

## ㉑

acceleration (加速度), 604  
 accumulated plastic strain (累積塑性ひずみ), 517  
 adaptive FEM (アダプティブ有限要素法), 263  
 adjoint problem (随伴問題), 394, 448  
 adjoint system (随伴系), 101, 177, 746  
 advection/advective term (移流項), 108, 604  
 aerodynamics (空力弾性学), 840  
 Aesop's fables (イソップ寓話), 5  
 Airy stress function (エアリーの応力関数), 120, 368  
 allowable stress (許容応力), 824  
 allowable stress design method (許容応力(度)設計法), 10, 824  
 Almansi strain (アルマンシのひずみ), 594  
 alpha iron (アルファ鉄), 813  
 alternative theorem (交代定理, 択一定理), 245, 798  
 amplitude (振幅), 379  
 analytical study (解析的研究), 265  
 android (アンドロイド), 261  
 angle (山形鋼), 812  
 angle of internal friction (内部摩擦角), 557, 567  
 angular velocity (角速度), 603  
 anisotropy (異方性), 80  
 annealing (焼なまし), 814  
 antiplane wave (面外波), 490  
 antisymmetric part (反対称成分), 603  
 Apache (アパッチ族), 374  
 applied moment (集中モーメント), 687  
 approximation error (近似誤差), 241, 249  
 arch (アーチ), 207  
 area coordinate (面積座標), 263  
 aseismatic connector (落橋防止装置), 36, 810  
 aspect ratio (縦横比, 辺長比), 371, 837  
 associated (associative) flow rule (関連流れ則), 532  
 assumption (仮定)  
   Bernoulli-Euler — (ベルヌーイ・オイラーの), 140  
   Kirchhoff-Love — (キルヒホッフ・ラブの), 356  
   — of no cross-sectional deformation (断面形不変の), 140  
   — of no thickness change (板厚不変の), 356  
 asymptotic analysis (漸近解析), 741  
 Atlas (アトラス), 355  
 autocorrelation function (自己相関関数), 402  
 average stress (平均応力), 74, 821  
 axial force (軸力), 20, 143  
 axial force diagram (軸力図), 34

## ㉒

ballast (バラスト), 5  
 band matrix (バンド行列), 413  
 bar (棒), 139, 149  
 Barenblatt model (バーレンブラットモデル), see 'Dugdale-Barenblatt model'  
 base-isolator (免震支承), 809  
 Bauschinger effect (バウシinger効果), 508, 548, 823  
 bcc (体心立方晶), 814  
 beach mark (ビーチマーク), 507, 820

beam (梁), 30, 34, 139, 149  
 beam axis (軸線), 140  
 beam-column (梁-柱), 281  
 beam-column theory (梁-柱理論), 829  
 bearing connection (支圧接合), 857  
 Beatles, The (ザ・ビートルズ), 1037  
 BEM (境界要素法), 176, 746  
 bending moment (曲げモーメント), 4, 29, 30, 143  
 bending vibration (曲げ振動), 198, 436  
 Bernoulli equation (ベルヌーイの式), 111  
 Bernoulli-Euler assumption (ベルヌーイ・オイラーの仮定), 140  
 Bessel functions (ベッセル関数), 291, 432  
 Betti's reciprocal theorem (ベッティの相反定理), 101, 177  
 bifurcation buckling (分岐座屈), 278  
 bifurcation condition (分岐条件), 272  
 bifurcation load (分岐荷重), 270  
 bifurcation phenomenon (分岐現象), 277  
 bifurcation point (分岐点), 270, 278  
 biharmonic function (重調和関数), 120, 359, 369  
 Biot's strain (ビオのひずみ), 597  
 Biot stress (ビオ応力), 618, 619  
 Blind Side, The (しあわせの隠れ場所), 1037  
 body-centered cubic crystal (体心立方晶), 814  
 body force (体積力), 66  
 boundary condition (境界条件)  
   — of beam-columns (梁-柱の), 282  
   — of beams (梁の), 147  
   Dirichlet — (ディリクレ), 67, 147, 754  
   — of displacements (変位の), 67, 147  
   essential — (本質的), 67, 147, 218  
   — of flexural torsion (曲げねじりの), 332  
   — of forces (力の), 67, 147  
   geometric — (幾何学的), 67, 147  
   natural — (自然), 67, 147, 218  
   Neumann — (ノイマン), 67, 147, 754  
   — of plates (板の), 361  
   Robin — (ロビン), 68, 148, 754  
   — of Saint-Venant's torsion (サン-ブナンのねじりの), 317  
   static — (力学的), 67, 147  
   — of the third kind (第3種の), 68, 148  
   — of Timoshenko beam-columns on elastic foundation (弾性床上のティモシェンコ梁-柱の), 307  
   — of Timoshenko beams (ティモシェンコ梁の), 691  
 boundary element method, BEM (境界要素法), 176, 746  
 boundary value problem (境界値問題), 45, 149  
 Boussinesq problem (ブシネスク問題), 128, 135  
 braced-rib (ブレーストリブ), 8  
 Brazilian test (割裂試験), 129  
 brittle fracture (脆性破壊), 506, 819  
 brittleness (脆性), 506, 819  
 buckling (座屈), 278, 827  
   bifurcation — (分岐), 278  
   Euler — (オイラー), 285, 829  
   extremum — (極値), 279

flexural — (曲げ), 286  
 inelastic — (非弾性), 298  
 lateral-torsional — (横倒れ, 横ねじれ), 352, 833  
 torsional — (ねじれ), 352  
 buckling coefficient (座屈係数)  
 — of columns (柱の), 287, 832  
 — of plates (板の), 370, 837  
 buckling load (座屈荷重), 270  
 buckling mode (座屈モード), 285, 288, 829, 832  
 buckling point (座屈点), 279  
 buffeting (バフエティング), 840  
 bulk modulus (体積弾性係数), 75  
 Bullock, Sandra (サンドラ ブロック), 1037  
 buoyancy (浮力), 112  
 Burgers vector (パーガース ベクトル), 132, 547

### ㊦

cabbage (キャベツ)<sup>†</sup>, 12  
 cantilever beam (片持ち梁), 30  
 carbon equivalent (炭素当量), 812  
 carbon-fiber-reinforced polymer (炭素繊維補強ポリマー), 81, 117  
 Castigliano's second theorem (カスティリアノの第2定理), 252, 687  
 cast iron (鋳物, 鋳鉄), 812  
 catenary (懸垂曲線), 312  
 catwalk (キャットウォーク), 314  
 Cauchy-Green deformation tensor (コーシー・グリーン変形テンソル)  
 left — (左), 593  
 right — (右), 590  
 Cauchy integral theorem (コーシーの積分定理), 447  
 Cauchy-Riemann equations (コーシー・リーマンの関係式), 113  
 Cauchy's theorem (コーシーの定理), 65  
 Cauchy stress (コーシー応力), 612, 618  
 central difference (中央差分), 395, 423  
 centrifugal force (遠心力), 381  
 centrifugal moment (断面相乗モーメント), 346  
 centripetal force (向心力)  
 Eulerian (オイラー的), 110  
 Lagrangian (ラグランジュ的), 381  
 centroid (図心), 144  
 chain rule (連鎖律), 604  
 channel (溝形鋼), 812  
 channel section (溝形断面), 194, 337  
 characteristic length (特性長さ), 562, 585, 744  
 Charpy impact test (シャルピー衝撃試験), 819  
 Christoffel symbol (クリストッフエルの記号), 734  
 circular motion with constant speed (等速円運動), 381  
 clamshell mark (貝殻模様), 507, 820  
 classical Galerkin form (古典的なガラーキン形式), 213  
 closed section (閉断面), 319, 804  
 coaxiality (共軸性), 520, 521, 528  
 coefficient (係数)

— of effective length (有効座屈長係数), 288, 832  
 — of kinematic friction (動摩擦), 385  
 linear — of thermal expansion (線膨張係数), 85, 124, 610, 755  
 — of static friction (静止摩擦), 87, 386, 509  
 cofactor matrix (余因子行列), 50, 591, 767  
 cohesion (粘着力), 557, 567  
 collapse (崩壊), 571  
 collocation method (選点法), 212  
 column (柱), 34, 139, 149  
 compact section (コンパクト断面), 581, 837  
 compatibility condition (適合条件)  
 strain — (ひずみの), 62, 369  
 compatible strain (適合ひずみ), 62  
 complementary potential energy (補ポテンシャルエネルギー), see 'total complementary potential energy'  
 complementary strain energy (補ひずみエネルギー), 251, 253  
 complex Fourier series (複素フーリエ級数), 401  
 complex stress function (複素応力関数), 744  
 complex velocity potential (複素速度ポテンシャル), 113  
 compliance (コンプライアンス), 78  
 composite material (複合材料), 83  
 composite structures (合成構造), 802  
 compressional wave (体積波, 疎密波), 107  
 compressive strength (圧縮強度), 27, 300, 830, 849  
 condensation (縮約), 524  
 condition (条件)  
 Dirichlet — (ディリクレ), 67, 147, 754  
 Neumann — (ノイマン), 67, 147, 754  
 Robin — (ロビン), 68, 148, 754  
 — of the first kind (第1種), 67, 147, 754  
 — of the second kind (第2種), 67, 147, 754  
 — of the third kind (第3種), 68, 148, 754  
 configuration (配置)  
 current — (現), 588  
 initial — (初期), 588  
 reference — (基準), 589  
 conformal transformation (等角写像), 113  
 Confucius (孔子), 1006  
 conjugate beam (共役梁), 256  
 conjugateness (共役性), 618  
 conservation law (保存則), [see also 'law of conservation'], 380, 391, 591  
 conservative (保存的), 79  
 conservative force (保存力), 289  
 consistency condition (整合条件), 92, 512, 522, 530  
 consistent mass matrix (整合質量行列), 242, 453  
 constant strain triangle element (定ひずみ三角形要素), 259  
 constitutive equation (構成方程式), [see also 'Hooke's law'], 75  
 — of generalized Prandtl-Reuss's plasticity (一般化されたプラントル・ロイスの), 532  
 — of Prandtl-Reuss's plasticity (プラントル・ロイスの), 524

<sup>†</sup> 中島らも氏の著作(文献は失念)に次の話が紹介されていた。「野菜(先攻)と果物の野球の試合。5回に人参のソロホームランで1対0のまま9回裏2アウト・ランナーなし。ピッチャーキャベツにバッターリンゴ。しかしリンゴのさよならホームランで果物チーム逆転勝利。」といった内容だ。配役は正確ではないが、だいたいこんなものだったか。面白いねえ?

- constitutive law (構成則), 75  
 contact problems (接触問題), 704  
 continuous beam (連続梁), 49, 160, 165  
 continuum (連続体), 53  
 contradiction (矛盾), 144, 325, 357  
 contravariant base vector (反変基底ベクトル), 732  
 contravariant component (反変成分), 697, 731  
 convected coordinate (埋め込み座標), 588  
 convergence (収束), 221  
 convolution [integral] (たたみ込み積分), 402, 750  
 corner force (隅角力), 361  
 corotational stress rate (共回転応力速度), 624  
 couple (偶力), 16, 687  
 couple stress (偶応力), 66, 67  
 covariant base vector (共変基底ベクトル), 732  
 covariant component (共変成分), 697, 732  
 covariant derivative (共変微係数), 734  
 crack (亀裂, ひび割れ), 189, 740, 818  
 creep (クリープ), 93, 749  
 creep compliance (クリープコンプライアンス), 750  
 critical damping (臨界減衰), 383  
 cross beam (横桁), 5, 20, 36, 809  
 cross-sectional area (断面積), 143  
 crosstie (枕木), 5  
 cubic crystal (立方晶), 80  
   body-centered — (体心), 814  
   face-centered — (面心), 518, 814  
 current configuration (現配置), 588  
 curvature (曲率), 142, 700  
 curved beam (曲がり梁), 139
- ㉔
- d'Alembert solution (ダランベールの解), 484  
 damage theory (損傷理論), 583  
 damping (減衰), 382  
 damping coefficient (減衰係数), 382  
 damping constant (減衰定数), 382  
 damping factor (減衰定数), 382  
 damping matrix (減衰行列), 406  
 damping rate (減衰率), 384  
 damping ratio (減衰比), 384  
 deflection (たわみ), 141  
 deflection theory of suspension bridge (たわみ理論, 撓度理論 (吊橋)), 862  
 deformation (変形), 54  
 deformation gradient (変形勾配), 589  
 deformation rate (変形速度), 602  
 deformation tensor (変形テンソル)  
   left Cauchy-Green — (左コーシー・グリーン), 593  
   right Cauchy-Green — (右コーシー・グリーン), 590  
 deformation theory (全ひずみ理論), 90, 512, 524, 559  
 degree of statical indeterminacy (外的不静定次数), 47  
 de Lancie, John (ジョン デランシー), 167  
 delayed fracture (遅れ破壊), 821  
 delta function (デルタ関数), 100, 168, 391, 768  
 depth-thickness ratio (幅厚比), 371, 837  
 description (記述)  
   Eulerian — (オイラー的), 108, 594  
   Lagrangian — (ラグランジュ的), 108, 590  
   updated Lagrangian — (更新ラグランジュ的), 619, 625  
 deviatoric strain (偏差ひずみ), 60, 821  
 deviatoric stress (偏差応力), 74, 821  
 deviator stress (軸差応力), 77, 519  
 diffusion (拡散), 264  
 dilatancy (ダイレタンス), 91, 520, 553, 568  
 dilatancy angle (ダイレタンス角), 557  
 dilithium (ダイリチウム), 328  
 Dirac's delta function (ディラックのデルタ関数), 100, 168, 391, 768  
 direct problem (順問題), 746  
 direct stiffness method (直接剛性法), 227  
 Dirichlet condition (ディリクレ条件), 67, 147, 754  
 dislocation (転位), 90, 518  
   edge — (刃状), 506, 816  
   mathematical — (数学的), 132, 547  
   screw — (らせん), 506, 769  
 dislocation line (転位線), 506, 547, 816  
 dispersive (分散的), 500  
 displacement (変位), 54, 589  
 displacement function (変位関数), 223  
 displacement gradient (変位勾配), 58, 591  
 displacement method (変位法), 236  
 distortion (歪み), 57  
 distribution (超関数), 167  
 distributional equality (超関数的等号), 487  
 divergence theorem (発散定理, ガウスの定理), 68, 481  
 double-deck structure (ダブルデッキ構造), 801  
 double Fourier series (2重フーリエ級数), 365  
 drain (排水装置), 36, 810  
 Drucker-Prager's model (ドラッカー・プラーガーのモデル), 553, 556  
 Drucker's postulate (ドラッカーの公準), 527  
 ductile fracture (延性破壊), 507, 818  
 ductility (延性), 506, 818  
 Duffing oscillator (ダフティング振動子), 477  
 Dugdale-Barenblatt model (ダグデル・バーレンブラットモデル), 744  
 Duhamel's integral (デュアメル積分), 393, 445  
 dwarf planet (準惑星, 矮惑星), 1038  
 dynamic instability (動的不安定), 291, 414  
 dynamic magnification factor (動的増幅率), 388
- ㉕
- earth pressure (土圧), 196  
 edge dislocation (刃状転位, [see also 'dislocation']), 506  
 effective length of buckling (有効座屈長), 288, 832  
 effective plastic strain (相当塑性ひずみ), 517, 518  
 effective stress (相当応力), 89, 517, 518, 822  
 effective width (有効幅), 194, 853  
 eigenfunction (固有関数), 427, 785  
 eigenstrain (アイゲンひずみ), 766  
 eigenvalue problem (固有値問題)  
   — for boundary value problems (境界値問題の), 287, 785

- of matrices (行列の), 301, 781
  - Einstein, Albert (アルバート アインシュタイン), 633
  - elastica (エラスティカ), 310, 703
  - elastic compliance (弾性コンプライアンス), 78
  - elastic foundation (弾性床), 196
  - elasticity (弾性), 75
  - elastic limit (弾性限界), 816
  - elastic load method (弾性荷重法), 256
  - elastic modulus (弾性係数), 76
  - elastic perfectly-plastic body (弾・完全塑性体), 297, 511
  - elastic potential (弾性ポテンシャル), 79
  - elastic strain (弾性ひずみ), 85, 87
  - elastic tensor (弾性テンソル), 76
  - elastic theory of suspension bridge (弾性理論 (吊橋)), 861
  - electron microscope (電子顕微鏡)
    - scanning — (走査型), 817
    - transmission — (透過型), 816
  - elementary beam theory (初等梁理論), 140
  - element stiffness equation (要素剛性方程式)
    - of beam-columns (梁-柱の), 300, 709
    - of beams (梁の), 224
    - of beams in motion (梁の動的), 242
    - of beams on elastic foundation (弾性床の上の梁の), 241
    - of columns (柱の), 223
    - of planar frames (平面骨組の), 235
    - of planar frames in finite displacements (有限変位平面骨組の), 717
    - of planar trusses (平面トラスの), 232
    - for plane strain problems (平面ひずみ問題の), 260
    - of space frames (立体骨組の), 347
    - of Timoshenko beams (ティモシェンコ梁の), 695
    - of Timoshenko beams in finite displacements (有限変位ティモシェンコ梁の), 717
    - of torsion (ねじりの), 343
  - elliptic integral (楕円積分), 311
  - elongation (変形の尺度としては不適切な伸び), 591
  - embedded coordinate (埋め込み座標), 588
  - empirical formula (経験式), 585
  - energy norm (エネルギーノルム), 249
  - Engesser's buckling formula (エンゲッサーの公式), 307, 707
  - engineering strain (工学ひずみ), 80, 517
  - engineering stress (公称応力), 622, 817
  - envelope (包絡線), 823
  - equation of continuity (連続の式), 108, 603
  - equation of motion (運動方程式)
    - of beams (梁の), 198, 436
    - of frame elements (骨組要素の), 458
    - of membranes (膜の), 372, 430
    - of multi-degree-of-freedom systems (多自由度系の), 413
    - of single-degree-of-freedom systems (1 自由度系の), 378
    - of strings (弦の), 313, 424
    - of two-degree-of-freedom systems (2 自由度系の), 406
  - equilibrium equation (つり合い式)
    - of axial forces in beams (軸力の), 145
    - of beam-columns (梁-柱の), 282, 708
    - of beam-columns on elastic foundation (弾性床の上の梁-柱の), 306
    - of beams on elastic foundation (弾性床の上の梁の), 196
    - of bending of beams (曲げの), 145
    - of bending of plates (板曲げの), 359
    - of Cauchy stress (コーシー応力の), 614
    - of flexural torsion (曲げねじりの), 332
    - of forces (力の), 67
    - of in-plane forces of plates (板の面内の), 358
    - of membranes (膜の), 372
    - of moments (モーメントの), 67
    - of nominal stress (ノミナル応力の), 615
    - in polar coordinate system (極座標系の), 737
    - of rubber (ゴムの), 704
    - of Saint-Venant's torsion (サン-ブナンのねじりの), 317
    - of second Piola-Kirchhoff stress stress (第2 ピオラ・キルヒホッフ応力の), 617
    - of strings (弦の), 313
    - of Timoshenko beam-columns on elastic foundation (弾性床上のティモシェンコ梁-柱の), 307
    - of Timoshenko beams (ティモシェンコ梁の), 691
  - equivalent inclusion method (等価介在物法), 770
  - equivalent nodal force (等価節点外力)
    - of beams (梁の), 224
    - of columns (柱の), 223
  - equivoluminal wave (等体積波), 489
  - error (誤差), 212, 249
  - Erutarepmet (どんお), 755
  - Eshelby tensor (エシェルビー テンソル), 769
  - essential boundary condition (本質的境界条件), 67, 147, 218
  - Euclidean geometry (ユークリッド幾何学), 355
  - Euler buckling (オイラー座屈), 285, 829
  - Euler curve (オイラー曲線), 286, 829
  - Euler equation (オイラー方程式), 97, 209, 246, 312
  - Eulerian description (オイラー的記述), 108, 594
  - Euler load (オイラー荷重), 285, 829
  - Euler's formula (オイラーの公式), 400
  - even permutation (偶置換), 69
  - evolution rule (発展則), 90, 519
  - explicit integration method (陽解法), 396
  - extension (伸び), 55, 142, 815
  - extensional stiffness (伸び剛性), 144
  - extensional strain (伸びひずみ), 55, 597
  - exterior girder (耳桁), 846
  - external force (外力), 17
  - extremum buckling (極値座屈), 279
- 8
- face-centered cubic crystal (面心立方晶), 518, 814
  - factor of safety (安全率), 10, 300, 353, 824
  - fatigue (疲労), 820
  - fatigue fracture (疲労破壊), 507, 820
  - fcc (面心立方晶), 814
  - FEM (有限要素法), [see also 'finite element method'], 222



- fiber-reinforced concrete (繊維補強コンクリート), 137, 802  
 fiber-reinforced material (繊維補強材), 117, 804  
 fiber-reinforced polymer (繊維補強ポリマー)  
   carbon- — (炭素 (CFRP)), 81, 117  
   glass- — (ガラス (GFRP)), 117  
 finite deformation (有限変形), 587  
 finite difference (差分), 395, 423  
 finite displacement theory (有限変位理論), 268  
   linearized — (線形化された), 275  
 finite element (有限要素), 222  
   — for diffusion (拡散の), 264  
   — for seepage flow (浸透流の), 264  
 finite element method, FEM (有限要素法), 222  
   adaptive — (アダプティブ), 263  
   X- — (拡張), 263  
 finite rotation (有限回転), 592  
 finite strip method (有限帯板法), 220  
 first Piola-Kirchhoff stress (第1 ピオラ・キルヒホッフ応力),  
   67, 616, 618  
 first sectional moment (断面1次モーメント), 143  
 first sectional moment function (断面1次関数), 188  
 first variation (第1変分), 96, 246  
 Flamant solution (フラマンの解), 128  
 flange (フランジ), 6  
 flexural compressive strength (曲げ圧縮強度), 41, 179, 353,  
   833, 851  
 flexural rigidity (曲げ剛性)  
   — of beams (梁の), 9, 144  
   — of plates (板の), 358  
 flexural tensile strength (曲げ引張強度), 41, 180, 353, 833,  
   851  
 flexural-torsional moment (曲げねじりモーメント), 331  
 flexural-torsional stiffness (曲げねじり剛性), 331  
 floor slab (床版), 5  
 Floquet theorem (フロケの定理), 476  
 flow rule (流れ則), 90, 511, 519, 528, 530  
 flow theory (流れ理論), 90, 519  
 flutter (フラッター), 840  
 follower force (追従力), 289  
 Forbes, Michelle (ミシェル フォーブス), 315  
 Fourier series (フーリエ級数), 249  
   complex — (複素), 401  
   double — (2重), 365  
 Fourier's law (フーリエの法則), 753  
 Fourier spectrum (フーリエスペクトル), 402  
 Fourier transform (フーリエ変換), 401  
 fracture mechanics (破壊力学), 740, 820  
 fracture process zone (破壊進行領域), 744  
 fracture toughness (破壊靱性), 134, 742, 743, 819  
 frame (骨組), 34, 149, 198, 806  
 Fredholm alternative (フレドホルムの定理), 798  
 free fall (自由落下), 380  
 free vibration (自由振動), 378  
 frequency response function (周波数応答関数), 398  
 friction grip connection (摩擦接合), 857  
 FRP (繊維補強ポリマー), 81, 117  
 FRP bridge (繊維補強ポリマー橋梁), 780  
 functional (汎関数), 96, 246  
 fundamental solution (基本解), 176, 745
- ㊦
- Galerkin form (ガラーキ形式), 215  
 Galerkin method (ガラーキ法), 216  
 galloping (ギャロッピング), 840  
 garter (靴下留め), 3, 804  
 Gauss's theorem (ガウスの定理, 発散定理), 68, 481  
 Geiringer's equations (ガイリンガーの式), 567  
 generalized (一般化された)  
   — coordinate (座標), 417, 442  
   — damping constant (減衰定数), 420, 443  
   — displacement (変位), 417, 442  
   — force (外力), 418, 444  
   — Hooke's law (フックの法則), 79, 87  
   — mass (質量), 415, 441  
   — Poisson's ratio (ポアソン比), 81  
   — Young's modulus (ヤング率), 81  
 geometric boundary condition (幾何学的境界条件), 67, 147  
 geometric nonlinearity (幾何学的非線形性), 280  
 geometric stiffness matrix (幾何剛性行列), 300, 710  
   — of Timoshenko beam (ティモシェンコ梁の), 711, 719  
 Gerber beam (ゲルバー梁), 3, 36  
 girder (桁), 3  
 glass-fiber-reinforced polymer (ガラス繊維補強ポリマー),  
   117  
 glassy compliance (ガラス的コンプライアンス), 750  
 glassy modulus (ガラス的弾性率), 751  
 Gold Star Families Park & Memorial (ゴールドスターファミ  
   ミリーズパーク&メモリアル), 53  
 Gomtuu (里芋), 65  
 governing equation (支配方程式), 83  
 Grand Unification Theory (大統一理論), 11  
 grating (グレーチング), 808  
 grazing incidence (かすめ入射), 493  
 Green-Naghdi stress rate (グリーン・ナガディ応力速度), 626  
 Green's function (グリーン関数), 106, 128, 176, 393, 768  
 Green strain (グリーンのひずみ), 590, 697  
 Gurson damage model (ガーソンモデル), 584  
 gusset plate (ガセットプレート), 20
- ㊧
- Hagen-Poiseuille flow (ハーゲン・ポアズィユ流れ), 109  
 hair clip (髪クリップ), 280  
 Hamilton's principle (ハミルトンの原理), 247  
 handrail (高欄), 5, 811  
 Hankel functions (ハンケル関数), 744  
 hardening (硬化), 93, 511, 817  
   isotropic — (等方), 548, 823  
   kinematic — (移動), 548, 652, 823  
 hardening coefficient (硬化係数), 92, 512, 522, 529–531, 550,  
   554, 648  
 hardening rule (硬化則), 92  
 hardness (硬さ, 硬度), 817  
 heat affected zone (熱影響部), 854

- heat capacity (熱容量), 753  
 heat conductivity (熱伝導率), 753  
 heat diffusivity (熱拡散率), 754  
 heat treated steel (調質鋼), 814  
 Heaviside function (ヘビサイド関数), 392, 487  
 helical spring (つるまきバネ), 707  
 Helmholtz decomposition theorem (ヘルムホルツ分解定理), 106  
 Hencky's theorem (ヘンキーの定理), 565  
 Hepburn, Audrey (オードリー ヘップバーン), 891  
 Hertz solution (ヘルツの解), 129  
 hexagonal crystal (六方晶), 80  
 high seas (公海), 133  
 highway (公道), 823  
 history-dependency (履歴依存性), 523, 539  
 homogenization method (均質化法), 469  
 Hooke's law (フックの法則), 75, 821  
   generalized — (一般化された), 79, 87  
   incremental — (増分型), 523  
   — of spring (バネの), 680  
   — in one dimension (1次元の), 116  
   — in plane strain (平面ひずみの), 114, 258  
   — in plane stress (平面応力の), 115, 357  
 horizontal stiffener (水平補剛材), 40, 850  
 hybrid structures (複合構造), 802  
 hydrogen embrittlement (水素脆化), 821  
 hydrostatic pressure (静水圧), 74, 83, 821  
 hyperelasticity (超弾性), 632, 638, 646  
 hypergeometric function (超幾何関数), 292  
 hypoelasticity (亜弾性), 633, 638
- ㊦
- ideal fracture (tensile) strength (理想的へき開強度), 739  
 identity tensor (単位テンソル), 590  
 imaginary unit (虚数単位), 197  
 imo-ni-kai (芋煮会), 5  
 impact energy absorption (吸収エネルギー), 819  
 impulse response (単位衝撃応答), 392  
 incident wave (入射波), 486  
 inclusion (介在物), 85  
 incompatible strain (非適合ひずみ), 516  
 incompressibility (非圧縮性), 83, 108, 522, 603  
 incremental equilibrium equation (増分つり合い式)  
   — of Cauchy stress (コーシー応力の), 628  
   Lagrangian — (ラグランジュ的), 627  
   — of nominal stress rate (ノミナル応力速度の), 628  
 incremental Hooke's law (増分型フックの法則), 523  
 incremental theory (増分理論), 90, 519  
 inelastic buckling (非弾性座屈), 298  
 inelasticity (非弾性), 87, 505  
 inelastic strain (非弾性ひずみ), 85, 87  
 infinitesimal displacement theory (微小変位理論), 268  
 infinitesimal rotation (微小回転), 58  
 influence line (影響線)  
   — of axial force (軸力の), 24, 848  
   — of bending moment (曲げモーメントの), 9, 39, 178, 181, 850  
   — of displacements (たわみの), 176  
   — of shear force (せん断力の), 39, 182, 850  
 inhomogeneity (非均質体), 85  
 initial condition (初期条件), 198  
 initial configuration (初期配置), 588  
 initial imperfection (初期不整), 276, 299  
 initial value/boundary value problem (初期値境界値問題), 198  
 inner product (内積)  
   — in polar coordinate system (極座標の), 433  
   weighted — (重みつき), 249, 415, 428, 441  
 in-plane wave (面内波), 490  
 inside girder (中桁), 846  
 integral equation (積分方程式), 132, 746, 747, 798  
 integral kernel (積分核), 132  
 interior girder (中桁), 846  
 internal force (内力), 18, 63  
 interpolation function (内挿関数), 223  
 invariant (不変量), 72  
   first — of strain (ひずみの第1), 73  
   first — of stress (応力の第1), 74  
   second — of deviatoric strain (偏差ひずみの第2), 77  
   second — of deviatoric stress (偏差応力の第2), 77, 516  
   — of stress (応力の), 72  
   third — of deviatoric stress (偏差応力の第3), 516  
 inverse Fourier transform (フーリエ逆変換), 401  
 inverse matrix (逆行列), 50, 244  
 inverse problem (逆問題), 747  
 iron manufacture (製鉄), 812  
 irrotational flow (非回転流), 110  
 irrotational wave (非回転波), 489  
 isoparametric element (アイソパラメトリック要素), 264  
 isotropic elasticity (等方弾性), 75  
 isotropic hardening (等方硬化), 548, 823  
 isotropic tensor (等方テンソル), 78  
 isotropy (等方性), 75  
 Iwakuma's buckling formula (岩熊の座屈公式), 707
- ㊦
- Jacobian (ヤコビアン), 591  
 Jaumann rate (ヤウマン速度)  
   — of Cauchy stress (コーシー応力の), 624  
   — of Kirchhoff stress (キルヒホッフ応力の), 624  
 Jaumann stress rate (ヤウマン応力速度), 624  
 joint equation (節点方程式), 250  
 joint of Gerber beam (掛け違い部), 36  
 Joukowski transformation (ジューコフスキー変換), 113  
 $J_2$  flow theory ( $J_2$  流れ理論), 532
- ㊦
- Kármán (カルマン), see 'von Kármán'  
 Kármán plate theory (カルマンの板理論), see 'von Kármán plate theory'  
 Kelvin model (ケルビン モデル), 750  
 Kelvin-Voigt model (ケルビン・フォークト モデル), 382  
 kernel (核), 132  
 kinematically admissible field (運動学的許容場), 94, 572  
   — of beams (梁の), 251, 577

- kinematic friction (動摩擦), 385  
kinematic hardening (移動硬化), 548, 652, 823  
kinematics (運動), 589  
kinematics (運動場), 208, 689, 698  
kinetic energy (運動エネルギー), 380  
Kirchhoff-Love assumption (キルヒホッフ・ラブの仮定), 356  
Kirchhoff stress (キルヒホッフ応力), 616  
Kötter's equation (ケッターの式), 568  
Kronecker delta (クロネッカーのデルタ), 59
- ㉔
- Lagrange equation (ラグランジュ方程式), 247  
Lagrange function (ラグランジュ関数), 247  
Lagrange multiplier (ラグランジュの未定乗数), 98, 215, 310, 312, 703  
Lagrangian description (ラグランジュ的記述), 108, 590  
Lamé constants (ラメ定数), 75  
lamella tear (ラメラテア), 855  
laminar flow (層流), 109  
Landau's symbol (ランダウの記号), 294  
large deformation theory (大変形理論), 268, 587  
large displacement theory (大変位理論), 268  
large earthquake (大地震), 389, 840  
lateral buckling (横倒れ座屈, 横ねじれ座屈), 352, 833  
lateral force (横荷重), 30  
lateral-torsional buckling (横倒れ座屈, 横ねじれ座屈), 352, 833  
law of conservation (保存則)  
— of energy (エネルギー), 380  
— of mass (質量), 591  
— of momentum (運動量), 391  
layered plate (積層板), 117  
least square method (最小2乗法), 212, 221, 229, 249, 970  
Lee, Bernard (バーナードリー), 143  
left Cauchy-Green deformation tensor (左コーシー・グリーン変形テンソル), 593  
left limit (左極限), 1025  
left stretch tensor (左ストレッチテンソル), 593  
Legendre polynomials (ルジャンドル多項式), 435  
l'Hôpital's rule (ロピタルの定理), 1020  
limit analysis (極限解析), 570  
limit cycle (リミットサイクル), 470  
limit state design method (限界状態設計法), 10, 825  
linear coefficient of thermal expansion (線膨張係数), 85, 124, 610, 755  
linear distribution of bending strain (ひずみの三角形分布), 142  
linear elasticity (線形弾性), 75  
linearized finite displacement theory (線形化された有限変位理論), 275  
Llewelyn, Desmond (デズモンドルーリエン), 331  
L-load (L荷重), 24, 844  
load factor (荷重係数), 10, 825  
loading (載荷), 91, 510, 522, 529  
local buckling (局部座屈), 355, 367, 836  
localized deformation (局所変形), 569, 622  
Lode angle (ロード角), 527  
logarithmic decrement (対数減衰率), 384  
logarithmic strain (対数ひずみ), 597  
logarithmic strain rate (対数ひずみ速度), 607  
longitudinal vibration (縦振動), 197  
longitudinal wave (縦波), 107, 489  
Love wave (ラブ波), 499  
lower bound theorem (下界定理), 573  
lower yield point (下降伏点), 816  
low-temperature transformation weld material (低温変態溶接材料), 854  
Lüders band (リュウダース帯), 622, 652, 673  
lumped mass matrix (集中質量行列), 413
- ㉕
- main girder (主桁), 5, 20  
masonry bridge (石橋), 696, 803  
mass (質量), 15  
mass density (密度), 591  
mass matrix (質量行列), 242, 406  
— consistent — (整合), 242, 453  
— lumped — (集中), 413  
material derivative (物質導関数), 108, 604  
material nonlinearity (材料非線形性), 280  
material point (物質点), 54, 589  
material time derivative (物質導関数), 108, 604  
mathematical crack (数学的亀裂), 740  
mathematical dislocation (数学的転位), 132, 547  
Mathieu equation (マシュー方程式), 472  
matrix analysis of structures (マトリックス構造解析), 229, 695  
maximum axial force (最大軸力), 27, 848  
maximum bending moment (最大曲げモーメント), 40, 179, 851  
maximum friction force (最大摩擦力), 385, 386  
maximum shear force (最大せん断力), 41, 179, 851  
Maxwell model (マクスウェルモデル), 752  
Maxwell's reciprocal theorem (マクスウェルの相反定理), 101, 177  
member (部材), 17  
membrane (膜), 372  
membrane analogy (薄膜類似), 342  
method of multiple scales (多重スケール法), 480  
method of strained coordinates (伸張座標法), 469  
metric tensor (計量テンソル), 732  
Micromechanics (マイクロメカニクス), 1036  
microtremor (常時微動), 403  
mild steel (軟鋼), 812  
Miller index (ミラー指数), 518  
Mindlin-Reissner plate (ミンドリン・ライスナー板), 356  
Mises yield condition (ミーゼスの降伏条件), see 'von Mises yield condition'  
Miura-ori (ミウラ折り), 875  
mixed condition (混合条件), 68, 148, 754  
mixed structures (混合構造), 802  
modal analysis (モード解析法)  
— of beam (梁の), 440

- of multi-degree-of-freedom system (多自由度系の), 417
- mode (モード)
- buckling — (座屈), 285, 288, 829, 832
  - natural vibration — (固有振動), 408
  - orthogonal — (直交), 415
  - vibration — (振動), 408, 414, 427, 431, 438
- mode conversion (モード変換), 493
- model (モデル)
- Drucker-Prager's — (ドラッカー・プラーガーの), 553, 556
  - Dugdale-Barenblatt — (ダグデル・バーレンブラット), 744
  - Gurson damage — (ガーソン), 584
  - Kelvin — (ケルビン), 750
  - Kelvin-Voigt — (ケルビン・フォークト), 382
  - Maxwell — (マクスウェル), 752
  - Mooney-Rivlin — (ムーニー・リブリン), 636
  - phenomenological — (現象論的), 562
  - Prager's — (プラーガーの), 549
  - Reuss — (ロイス), 584, 764
  - seismic source — (震源), 169
  - Shanley — (シャンレイ), 299
  - Voigt — (フォークト), 583, 764
  - Ziegler's — (ツィーグララーの), 550
- modified Engesser's formula (改訂エンゲッサー公式), 307, 707
- modulated pendulum (変調振り子), 472
- Mohr-Coulomb's failure criterion (モール・クーロンの破壊規準), 556, 567
- Mohr's strain circle (モールのひずみ円), 117
- Mohr's stress circle (モールの応力円), 564
- Mohr's theorem (モールの定理), 256
- moment diagram (曲げモーメント図), 30
- moment distribution method (モーメント分配法), 250
- moment of inertia (慣性モーメント), 16
- Mooney-Rivlin model (ムーニー・リブリンモデル), 636
- movable bridge (可動橋), 52
- Müller-Breslau's theorem (ミュラー・ブレスローの定理), 180
- multiply connected (多重連結), 342
- Murphy's law (マーフィーの法則), 12, 210
- ㊦
- natural angular frequency (固有角振動数), 379
- natural boundary condition (自然境界条件), 67, 147, 218
- natural circular frequency (固有円振動数), 379
- natural coordinate (自然座標), 263
- natural frequency (固有振動数), 379
- natural period (固有周期), 379
- natural science (自然科学), 11
- natural strain (自然ひずみ), see 'logarithmic strain'
- natural vibration mode (固有振動モード), 408
- Navier's solution (ナヴィエの解法), 365
- Navier-Stokes equation (ナヴィエ・ストークスの式), 108
- necking (絞り), 569, 667, 818
- Neumann condition (ノイマン条件), 67, 147, 754
- neutral (中立), 277
- neutral axis (中立軸), 144
- neutral loading (中立載荷), 522, 530
- neutral plane (中立面), 144
- Newton's law of cooling (ニュートンの冷却法則), 754
- nodal point (節点), 20
- node (節点), 222
- nominal stress (ノミナル応力), 613, 618
- nominal stress (公称応力), 622, 817
- nominal stress rate (ノミナル応力速度), 627
- non-associated (non-associative) flow rule (非関連流れ則), 532, 553, 647
- noncoaxiality (非共軸性), 558
- noncompact section (ノンコンパクト断面), 582
- nonconforming element (非適合要素), 366
- nonconservative force (非保存力), 289
- non-destructive evaluation (非破壊評価), 747, 855
- nonlinear elasticity (非線形弾性), 297
- non-local theory (非局所理論), 53, 562
- norm (ノルム), 249, 822
- normality rule (法線則), 528
- normalizing (焼きならし), 814
- normal stress (直応力), 65
- Northeastern University (うほ大), 1028
- Northwestern University (北西大学), 761
- numerical study (数値的研究), 265
- ㊧
- objective stress rate (客観性を持つ応力速度), 622
- objectivity (客観性), 89, 516
- octahedral stress (八面体応力), 89
- odd permutation (奇置換), 69
- Oldroyd stress rate (オールドロイド応力速度), 624
- open section (開断面), 319, 324, 804
- orthogonal function (直交関数), 249, 365
- orthogonality (直交性)
- of Bessel functions (ベッセル関数の), 796
  - of eigenfunction (固有関数の), 786
  - of eigenvector (固有ベクトルの), 782
  - of natural vibration mode (固有振動モードの), 415
  - of vibration mode of beams (梁の固有振動モードの), 441
  - of vibration mode of membranes (膜の振動モードの), 433
  - of vibration mode of strings (弦の振動モードの), 428
- orthogonal mode (直交モード), 415
- orthotropy (直交異方性), 80
- outside girder (耳桁), 846
- over damping (過減衰), 383
- ㊨
- panel point (格点), 7, 17
- Papkovich-Neuber potentials (パプコヴィッチ・ノイバーのポテンシャル), 134
- Paramecium (ゾウリムシ), 320
- parametric oscillation (係数励振・パラメトリック励振), 476
- parametric study (パラメトリック・スタディ), 266

- parapet wall (パラベット), 809  
 passive damper (パッシブダンパー), 412  
 Pasteur, Louis (ルイ パスツール), 1008  
 pavement (舗装), 5  
 peak strength (ピーク強度), 582  
 pedestrian bridge (歩道橋), 376  
 penalty method (ペナルティ法), 704  
 perfect fluid (完全流体), 110  
 perfect plasticity (完全塑性), 93  
 perfect system (完全系), 274  
 perforated plate (孔開き板), 6  
 performance (性能), 11, 824  
 permutation (置換)  
   even — (偶), 69  
   odd — (奇), 69  
 permutation symbol (交代記号), 69, 733  
 permutation tensor (交代テンソル, 置換テンソル), 733  
 personal computer (パーソナルコンピュータ), 37, 230  
 perturbation (摂動), 309, 702, 707  
 perturbation method (摂動法), 309, 465  
 phase (位相), 488  
 phase diagram (状態図), 814  
 phase plane (位相平面), 385, 464  
 phase velocity (位相速度), 107, 424, 483  
 phenomenological model (現象論的モデル), 562  
 Picasso, Pablo (パブロ ピカソ), 813  
 piecewise polynomial (区分的多項式), 222  
 Piola-Kirchhoff stress (ピオラ・キルヒホッフ応力)  
   first — (第1), 67, 616, 618  
   second — (第2), 616, 619, 698  
 $\pi$ -plane ( $\pi$  平面), 526, 822  
 plane strain (平面ひずみ), 114  
   plastically — (塑性的), 555, 563, 570, 654  
 plane stress (平面応力), 115  
 plastically plane strain (塑性的平面ひずみ), 555, 563, 570, 654  
 plastic collapse (塑性崩壊), 571  
 plastic deformation (塑性変形), 87, 505, 817  
 plastic hinge (塑性ヒンジ), 515, 575  
 plasticity (塑性), 87, 298, 505  
 plastic moment (全塑性モーメント), 514, 575  
 plastic potential (塑性ポテンシャル), 90, 530  
 plastic section modulus (塑性断面係数), 576  
 plastic volumetric strain (塑性体積ひずみ), 553  
 plate girder (プレートガーダ, 鋸桁), 5, 804  
 Pluto (冥王星), 1038  
 Poincaré frequency shift (ポアンカレの周波数シフト), 469  
 Poiseuille flow (ポアズィユ流れ), see ‘Hagen-Poiseuille flow’  
 Poisson’s ratio (ポアソン比), 75  
   generalized — (一般化された), 81  
 polar decomposition theorem (極分解の定理), 592, 717  
 pole (極), 447  
 polycrystalline metal model (多結晶金属モデル), 652  
 positive-definiteness (正定値), 82, 302  
 post-buckling (座屈後, 後座屈), 309  
 potential energy (ポテンシャルエネルギー), see ‘total potential energy’  
 potential energy (位置エネルギー), 380  
 potential energy of external forces (外力ポテンシャル), 97, 247  
 power law (べき乗則), 559  
 power spectrum density function (パワースペクトル密度関数), 402  
 Prager’s model (プラーガーのモデル), 549  
 Prandtl-Reuss’s equation (プラントル・ロイスの式), 90, 520, 525, 529  
 pressure wave (圧力波), 107  
 primary wave (第1波), 107  
 principal axis of cross sections (断面の主軸), 346  
 principal deviatoric stress (主偏差応力), 516  
 principal direction of strain (ひずみの主方向), 58, 73  
 principal direction of stress (応力の主方向), 70  
 principal strain (主ひずみ), 58, 73  
 principal stress (主応力), 70  
 principle (原理)  
   — of action and reaction (作用反作用の), 17, 18, 20  
   — of complementary virtual work (補仮想仕事の), 95, 98, 251  
   Hamilton’s — (ハミルトンの), 247  
   — of maximum plastic work (最大塑性仕事の), 527  
   — of minimum strain energy (最小仕事の), 253  
   — of minimum total potential energy (全ポテンシャルエネルギーの最小), 97, 248  
   Saint-Venant’s — (サン-ブナンの), 121, 189  
   — of stationary total potential energy (全ポテンシャルエネルギーの停留), 97, 247  
   — of superposition (重ね合わせの), 163  
   — of the argument (偏角の), 498  
   variational — (変分), 246  
   — of virtual work (仮想仕事の), 94, 95, 217, 246, 247  
 prismatic bar (充実断面棒), 340  
 program (プログラム), 233, 237, 261  
 progressive failure (進行性破壊), 583  
 proportional damping (比例減衰), 421  
 proportional limit (比例限界), 816  
 P-wave (P 波), 107  
 Pythagorean theorem (ピタゴラスの定理), 59, 308
- Ω
- quadratic form (2 次形式), 247  
 quench hardening (焼入れ), 814
- ℞
- radius of gyration (回転半径), 285, 829  
 radius thickness ratio (径厚比), 318, 328  
 rafel (ラーフル), 800  
 Rahmen (ラーメン), 34, 149, 198  
 rail (レール), 5  
 ramp (斜路, ランプ), 35  
 rank (階数), 245  
 rate of change of twist (ねじり率), 316  
 rate of deformation (変形速度), 602

- rate of equivolumetric deformation (等体積変形速度), 607  
rate of irrotational deformation (非回転変形速度), 607  
rate of plastic work (塑性仕事増分), 521  
rate of stress-work (応力の仕事率), 614  
Rayleigh damping (レイリー減衰), 421  
Rayleigh-Ritz method (レイリー・リッツ法), 247  
Rayleigh wave (レイリー波), 496  
reaction force (反力), 17  
reaction moment (反作用モーメント), 29  
reciprocal theorem (相反定理)  
— of beam vibration (梁振動の), 449  
Betti's — (ベッティの), 101, 177  
Maxwell's — (マクスウェルの), 101, 177  
— of one degree-of-freedom vibration (1 自由度振動の), 395  
reciprocity (相反性), 104  
reduced modulus theory (換算係数理論), 298  
redundancy (冗長性), 47, 818  
reference configuration (基準配置), 589  
reflected wave (反射波), 486  
relaxation function (緩和関数), 751  
relaxation modulus (緩和弾性率), 751  
relaxation time (緩和時間), 752  
residual deformation (残留変形), 87  
residual strength (残留強度), 581  
residual stress (残留応力), 299, 814  
residue (留数), 447  
resonance (共振), 388  
retardation time (遅延時間), 751  
Reuss model (ロイスモデル), 584, 764  
Reynolds number (レイノルズ数), 109  
rib (リブ), 8  
Riemannian geometry (リーマン幾何学), 355  
right Cauchy-Green deformation tensor (右コーシー・グリーン変形テンソル), 590  
right limit (右極限), 1025  
right stretch tensor (右ストレッチテンソル), 592  
rigid body displacement (剛体変位), 57  
rigid body rotation (剛体回転変位), 57  
rigid body translation (剛体並進変位), 57  
rigid perfectly-plastic body (剛・完全塑性体), 510  
Ritz method (リッツ法), 247  
Robin condition (ロビン条件), 68, 148, 754  
rolling (圧延), 299, 812  
rosette gauge (ロゼットゲージ), 116  
rotation (回転)  
finite — (有限), 592  
infinitesimal — (微小), 58  
rotational inertia (回転慣性), 460  
rotation vector (回転ベクトル), 603  
rubber bearing (ゴム支承), 809  
rubbery modulus (ゴムの弾性率), 751  
Ryan, Jeri (ジェリライアン), 50
- ◎
- sacrificial protection (犠牲防食), 802  
safety factor (安全率), 10, 300, 353, 824  
Saint Venant-Kirchhoff material (サン-ブナン・キルヒホッフ材料), 632, 635  
Saint-Venant's principle (サン-ブナンの原理), 121, 189  
Saint-Venant's torsional constant (サン-ブナンのねじり定数), [see also 'torsional constant'], 316  
Saint-Venant's torsional moment (サン-ブナンのねじりモーメント), 316  
Saint-Venant's torsional stiffness (サン-ブナンのねじり剛性), 316  
Saldaña, Zoë (ゾーイサルダナ), 406  
scale effect (寸法効果), 562, 585  
scallop (スカラップ), 853  
scanning electron microscope (走査型電子顕微鏡), 817  
Schmid law (シュミット則), 650  
school color (スクールカラー), 401  
science (科学), 11  
screw dislocation (らせん転位), [see also 'dislocation'], 506  
secant modulus (割線係数), 559  
secondary stress (2次応力), 805  
secondary wave (第2波), 107  
second invariant of deviatoric strain (偏差ひずみの第2不変量), 77  
second invariant of deviatoric stress (偏差応力の第2不変量), 77, 516  
second Piola-Kirchhoff stress (第2ピオラ・キルヒホッフ応力), 616, 619, 698  
second variation (第2変分), 248  
sectional moment of inertia (断面2次モーメント), 4, 143  
sectional polar moment (極2次モーメント), 316, 352  
section modulus (断面係数), 4, 9, 39, 144, 295, 835  
seepage flow (浸透流), 264  
seismic coefficient method (震度法), 389, 840  
seismic source model (震源モデル), 169  
seismograph (地震計), 390  
self-adjoint system (自己随伴系), 101  
self-consistent method (セルフコンシステント法), 774  
self-deployable structure (自己展開型構造), 280  
Selye, Hans (ハンスセリエ), 66  
SEM (走査型電子顕微鏡), 817  
serendipity (幸), 354, 1008  
Seurat, Georges (ジョルジュスーラ), 942  
74656<sup>‡</sup>, NCC- (USS ヴォイジャー), 16  
Shanley model (シャンレイモデル), 299  
shape function (形状関数), 264  
shape-memory alloy, SMA (形状記憶合金), 813  
shape steel (形鋼), 812  
shear band (せん断帯), 559, 622, 652  
shear center (せん断中心), 193, 339  
shear diagram (せん断力図), 30  
shear flow (せん断流), 192, 320  
shear force (せん断力), 29, 30  
shearing strain (せん断ひずみ), 56

<sup>‡</sup> TM Paramount Pictures (MONOGRAM 3607)

- shearing yield stress (せん断降伏応力), 89, 517, 822  
shear lag (せん断遅れ), 194, 853  
shear modulus (せん断弾性係数), 75  
shear strength (せん断強度), 41, 517, 834  
shear stress (せん断応力), 65  
shear wave (せん断波), 107  
shell (殻, シェル), 355  
shoe (支承), 31, 809  
sifting property (ふるい特性), 168  
simple beam (単純梁), 32  
single crystal model (単結晶モデル), 649  
singly connected (単連結), 342  
singular matrix (特異行列), 244  
singular perturbation method (特異摂動法), 467, 468  
sink (吸い込み), 109  
slab anchor (スラブ止め), 854  
sleeper (枕木), 5  
slenderness parameter (細長比パラメータ), 297, 830  
— for lateral buckling (横倒れ座屈の), 353, 833  
slenderness ratio (細長比), 254, 285, 829  
— for flexural torsion (曲げねじりの), 336  
— of Timoshenko beams (ティモシェンコ梁の), 691  
slide rule (計算尺), 203  
slip line theory (すべり線理論), 563  
slope (たわみ角), 141  
slope-deflection method (たわみ角法), 250  
slowness (遅度), 484  
snap-through (飛び移り), 279  
Snell's law (スネルの法則), 493  
softening (軟化), 527, 533, 559  
source (湧き出し), 109  
Southwell method (サウスウェル法), 296  
space structure (宇宙構造), 280  
spandrel (スパンドレル), 8  
specific body force (体積力), 66  
spectral representation (スペクトル表示), 71, 592  
Spielberg, Steven (スティーヴン スピルバーグ), 808  
spin (スピン), 110, 602, 603  
splice plate (添接板), 40, 850  
spreadsheet (スプレッドシート), iv  
stability criterion (安定規準), 272, 277  
stability problem (安定問題), 268  
standing wave (重複波), 491  
stardate (宇宙暦), 985  
statically admissible field (静力学的許容場), 94, 564, 572  
— of beams (梁の), 251, 577  
statically determinate (静定な), 18  
statically determinate equivalent system (静定基本系), 163  
statically indeterminate force (不静定反力), 163  
statically indeterminate structure (不静定構造), 50  
static boundary condition (力学的境界条件), 67, 147  
static friction (静止摩擦), 87, 386, 509  
steel manufacture (製鋼), 812  
step function (階段関数), 392, 487  
stiffener (補剛材)  
horizontal — (水平), 40, 850  
vertical — (垂直), 36, 40, 850  
stiffness (剛性), 816  
stiffness equation (剛性方程式), [see also 'element stiffness equation'], 223  
stiffness matrix (剛性行列), 406  
— of beam-columns (梁-柱の), 300  
— of beams (梁の), 225  
— of beams on elastic foundation (弾性床上の梁の), 241  
— of columns (柱の), 223  
— of planar frames (平面骨組の), 235  
— of planar frames in finite displacements (有限変位平面骨組の), 719  
— of planar trusses (平面トラスの), 232  
— for plane strain problems (平面ひずみ問題の), 260  
— of space frames (立体骨組の), 347  
— of Timoshenko beams (ティモシェンコ梁の), 693, 695  
— of Timoshenko beams in finite displacements (有限変位ティモシェンコ梁の), 719  
— of torsion (ねじりの), 343  
story equation (層方程式), 250  
strain (ひずみ), 56  
Almansi — (アルマンシの), 594  
Biot's — (ビオの), 597  
engineering — (工学), 80, 517  
extensional — (伸び), 597  
Green — (グリーンの), 590, 697  
logarithmic — (対数), 597  
strain compatibility condition (ひずみの適合条件), 62, 369  
strain energy (ひずみエネルギー), 80, 96, 247  
strain energy density function (ひずみエネルギー密度関数), 632  
strain energy function (ひずみエネルギー関数), 79  
strain-gauge rosette (ロゼットひずみゲージ), 116  
strain gradient (ひずみ勾配), 562  
stream function (流れ関数), 113  
streamline (流線), 111, 113  
strength (強度), 18, 817  
compressive — (圧縮), 300, 830  
flexural compressive — (曲げ圧縮), 353, 833, 851  
flexural tensile — (曲げ引張), 353, 833, 851  
shear — (せん断), 517, 834  
tensile — (引張), 300, 827  
strength correlation (強度相関式)  
— of axial force and bending (軸力と曲げを受ける), 295, 835  
stress (応力), 27, 38, 65  
Biot — (ビオ), 618, 619  
Cauchy — (コーシー), 612, 618  
first Piola-Kirchhoff — (第1ピオラ・キルヒホッフ), 67, 616, 618  
Kirchhoff — (キルヒホッフ), 616  
nominal — (ノミナル), 613, 618  
nominal — (公称), 622, 817  
second Piola-Kirchhoff — (第2ピオラ・キルヒホッフ), 616, 619, 698  
true — (真), 612, 618

- stress concentration factor (応力集中係数), 123, 131, 135  
 stress corrosion cracking (応力腐食割れ), 821  
 stress function (応力関数), 120  
 stress intensity factor (応力拡大係数), 134, 743, 820  
 stress invariant (応力の不変量), 72  
 stress rate (応力速度)  
   corotational — (共回転), 624  
   Green-Naghdi — (グリーン・ナガディ), 626  
   Jaumann — (ヤウマン), 624  
   nominal — (ノミナル), 627  
   Oldroyd — (オールドロイド), 624  
   Truesdell — (トゥルーズデル), 626  
 stress relaxation (応力緩和), 93, 751  
 stress resultant (合応力), 65  
 stress-strain relation (応力ひずみ関係), [see also 'Hooke's law'], 75  
 stress vector (応力ベクトル), 64  
 stretch (ストレッチ), 592  
 stretch (伸び), 55  
 stretch tensor (ストレッチ テンソル)  
   left — (左), 593  
   right — (右), 592  
 string (弦), 313  
 stringer (縦桁), 5, 20, 809  
 strong form (強形式), 213  
 structural mechanics (構造力学), iii  
 structure for falling prevention of bridge (落橋防止装置), 36, 810  
 Sturm-Liouville problem (ステュルム・リウヴィル問題), 218  
 subgrade reaction (地盤反力), 196  
 submission (屈服), 280  
 subparametric element (サブパラメトリック要素), 264  
 subspace (亜空間), 328, 519  
 summation convention (総和規約), 488, 732  
 super-convergence (超収束), 222  
 superparametric element (スーパーパラメトリック要素), 264  
 surface force (表面外力), 67  
 surface to the negative direction (負の面), 30, 66  
 surface to the positive direction (正の面), 30, 66  
 surface wave (表面波), 496  
 suspension structure (吊構造), 806  
 S-wave (S 波), 107  
 sway bracing (対傾構), 809  
 swing (ブランコ), 476
- ㊦
- tangent compliance (接線コンプライアンス)  
   — of generalized Prandtl-Reuss's plasticity (一般化されたプラントル・ロイスの), 531  
   — of Prandtl-Reuss's plasticity (プラントル・ロイスの), 524  
 tangent modulus (接線係数), 559  
   — of generalized Prandtl-Reuss's plasticity (一般化されたプラントル・ロイスの), 532  
   — of Prandtl-Reuss's plasticity (プラントル・ロイスの), 524  
 tangent modulus theory (接線係数理論), 298  
 tangent stiffness (接線剛性), 275, 718  
 technology (技術), 11  
 TEM (透過型電子顕微鏡), 816  
 tempering (焼戻し), 814  
 tensile strength (引張強度), 27, 300, 817, 827, 849  
 tensile-type bolted connection (引張接合), 857  
 tensile yield stress (引張降伏応力), 89, 517, 822  
 tensor (テンソル), 56  
 tensor product (テンソル積), 72  
 test function (試験関数), 168, 223, 487  
 theorem (定理)  
   alternative — (交代, 択一), 245, 798  
   Castigliano's second — (カスティリアノの第2), 252, 687  
   Cauchy integral — (コーシーの積分), 447  
   Cauchy's — (コーシーの), 65  
   divergence — (発散), 68, 481  
   Floquet — (フロケの), 476  
   Gauss's — (ガウスの), 68, 481  
   Helmholtz decomposition — (ヘルムホルツ分解), 106  
   Hencky's — (ヘンキーの), 565  
   — of Kelvin and Tait (ケルビン・テイトの), 601  
   Mohr's — (モールの), 256  
   Müller-Breslau's — (ミュラー・ブレスローの), 180  
   polar decomposition — (極分解の), 592, 717  
   Pythagorean — (ピタゴラスの), 59, 308  
   reciprocal — (相反), 177, 449  
   three-moment — (三連モーメントの), 250  
   upper-lower bound — (上下界), 573  
 theory (理論)  
   beam-column — (梁-柱), 829  
   damage — (損傷), 583  
   deformation — (全ひずみ), 90, 512, 524, 559  
   elementary beam — (初等梁), 140  
   finite displacement — (有限変位), 268  
   flow — (流れ), 90, 519  
   Grand Unification — (大統一), 11  
   Gurson's — (ガーソン), 584  
   incremental — (増分), 90, 519  
   infinitesimal displacement — (微小変位), 268  
    $J_2$  flow — ( $J_2$  流れ), 532  
   large deformation — (大変形), 268, 587  
   large displacement — (大変位), 268  
   linearized finite displacement — (線形化された有限変位), 275  
   non-local — (非局所), 53, 562  
   reduced modulus — (換算係数), 298  
   slip line — (すべり線), 563  
   tangent modulus — (接線係数), 298  
   von Kármán plate — (フォンカルマンの板), 367, 836  
 thermal expansion (熱膨張), 86  
 thermal strain (熱ひずみ), 102, 123, 680  
 Thermo-Mechanical Control Process steel (TMCP 鋼), 744, 815  
 thickness parameter (厚さ (太さ) パラメータ), 707  
 thin-walled member (薄肉断面材), 190, 315, 318



third invariant of deviatoric stress (偏差応力の第3不変量), 516  
 three-moment theorem (三連モーメントの定理), 250  
 throat (のど厚), 190, 854  
 tie (タイ), 7  
 tied arch (タイドアーチ), 8, 806  
 timber bridge (木橋), 800  
 Timoshenko beam (ティモシェンコ梁), 194, 689  
 TMCP steel (TMCP 鋼), 744, 815  
 torsional buckling (ねじれ座屈), 352  
 torsional constant (ねじり定数)  
 — of circular columns (円柱の), 316  
 — of circular tubes (円管の), 318  
 — of thin-walled circular tubes (薄肉円管の), 318  
 — of thin-walled closed multicell sections (薄肉多室閉断面の), 323  
 — of thin-walled closed sections (薄肉閉断面の), 321  
 — of thin-walled open sections (薄肉開断面の), 327  
 — of thin-walled rectangular sections (薄肉長方形断面の), 327  
 torsional constants ratio (ねじり定数比), 336  
 total complementary potential energy (全補ポテンシャルエネルギー), 98, 251  
 total potential energy (全ポテンシャルエネルギー), 96, 247  
 total-strain theory (全ひずみ理論), [see also 'deformation theory'], 512  
 toughness (靱性), 506, 819  
 trace (跡), 60  
 traction (表面力), 64  
 trajectory (軌跡), 385, 464  
 trajectory (流跡線), 594  
 transformation (変態), 813  
 transient response (過渡応答), 387  
 transmission electron microscope (透過型電子顕微鏡), 816  
 transversely isotropic (横等方), 81  
 transverse wave (横波), 107, 489  
 traveling wave (進行波), 491  
 Tresca's yield condition (トレスカの降伏条件), 89, 526  
 trial & error (試行錯誤), 1008  
 trial function (試行関数), 223  
 triaxial compression test (3軸圧縮試験), 77, 519  
 trivial solution (無意味な解, 自明な解), 285, 287, 301, 828  
 Truesdell stress rate (トゥルーデルズデル応力速度), 626  
 true strain (真ひずみ), see 'logarithmic strain'  
 true stress (真応力), 612, 618, 818  
 truss (トラス), 19, 198

## II

ultimate lateral strength (保有水平耐力), 570  
 ultimate state design method (終局状態設計法), 10, 825  
 ultrasonic testing (超音波探傷検査), 747, 855  
 Uncle Torys (アンクルトリス), 374  
 United States (合州国), 63  
 unit impulse response (単位衝撃応答), 392  
 unit impulsive force (単位衝撃外力), 391  
 unit load method (単位荷重法), 170, 174, 200, 252  
 — of elastic media (弾性体の), 105

— of truss structures (トラスの), 200  
 unit tensor (単位テンソル), 590  
 unit-warping function (単位そり関数), 334, 339  
 unloading (除荷), 91, 297, 510, 522, 530, 817  
 updated Lagrangian description (更新ラグランジュ的記述), 619, 625  
 upper bound theorem (上界定理), 573  
 upper-lower bound theorem (上下界定理), 573  
 upper yield point (上降伏点), 816

## III

van der Pol oscillator (ファンデルポール振動子), 470  
 variational principle (変分原理), 246  
 variational problem (変分問題), 246  
 velocity (速度), 601  
 velocity gradient (速度勾配), 602  
 velocity potential (速度ポテンシャル), 112  
 vertical stiffener (垂直補剛材), 36, 40, 850  
 vibration mode (振動モード), 408, 414, 427, 431, 438  
 Vickers hardness test (ビッカースの硬さ試験), 817  
 vidro (ビードロ, ちゃんぼん), 279  
 Vierendeel bridge (フィーレンデール橋), 10  
 vinyl-ester synthetic resin (ビニルエステル樹脂), 81  
 virtual displacement (仮想変位), 96, 217  
 virtual work equation (仮想仕事式), 217  
 — of beam-columns (梁-柱の), 300, 708  
 — of beams (梁の), 170, 209, 224  
 — of beams in motion (梁の動的), 247  
 — of beams on elastic foundation (弾性床上の梁の), 240  
 — of columns (柱の), 222  
 — in finite displacements (有限変位での), 698  
 — of flexural torsion of bars (棒の曲げねじりの), 342  
 — for plane strain problems (平面ひずみ問題の), 258  
 — of plates (板の), 366  
 — of Saint-Venant's torsion of bars (サン-ブナンのねじりの), 344  
 — for three-dimensional problems (3次元問題の), 258  
 — of Timoshenko beams (ティモシェンコ梁の), 691, 693  
 viscoelasticity (粘弾性), 198, 749  
 viscosity (粘性), 93, 505, 749  
 viscous damping coefficient (粘性減衰係数), 382  
 vodka martini, shaken, not stirred (シェイクしたウォッカマティーニ), 894  
 void formation, growth and coalescence (空隙発生・成長・合体), 585  
 Voigt constants (フォークト定数), 76, 80  
 Voigt model (フォークトモデル), 583, 764  
 volcano (火山), 696, 1024  
 volumetric strain (体積ひずみ), 60, 821  
 von Kármán plate theory (フォンカルマンの板理論), 367, 836  
 von Mises yield condition (フォンミーゼスの降伏条件), 89, 517, 526, 823  
 vortex-induced oscillation (渦励振), 840  
 vorticity (渦度), 603

## ㉔

warping (そり), 328  
warping constant (そり 2 次モーメント), 331  
warping displacement (そり変位), 330  
warping function (そり関数), 334  
wave equation (波動方程式), 107, 197, 313, 372, 424  
weak form (弱形式), 213  
weathering steel (耐候性鋼材), 813  
web (ウェブ, 腹板), 6  
Web Page (ウェブページ), iv  
weight (重み), 213, 249  
weighted inner product (重みつき内積), 249, 415, 428, 441  
weighted residual method (重みつき残差法), 213, 248  
weight function (重み関数), 215  
Weinberg, Steven (スティーヴン ワインバーグ), 11  
welding (溶接), 190, 299  
white noise (白色雑音), 402  
Wiener-Hopf technique (ウィナー・ホッフ手法), 132  
Wiener-Khinchine relation (ウィナー・ヒンチンの関係), 402  
William's toggle (ウィリアムのトグル), 279  
Windy City, The (玉葱の臭い), 942  
Winnie-the-Pooh (クマのプーさん), 376  
wrought iron (鍛鉄), 812

## ㉕

X-FEM (拡張有限要素法), 263  
X-ray non-destructive testing (X 線非破壊試験), 855  
xylophone (木琴), 198

## ㉖

yield condition (降伏条件), 88, 510, 512, 517, 822  
Tresca's — (トレスカの), 526  
von Mises — (フォン ミーゼスの), 89, 517, 526, 823  
yield function (降伏関数), 91, 512, 517, 525  
yield moment (降伏モーメント), 514, 575  
yield point (降伏点), 816  
yield ratio (降伏比), 818  
yield stress (降伏応力), 89, 286, 297, 517, 816  
shearing — (せん断), 89, 517, 822  
tensile — (引張), 89, 510, 517, 822  
yield surface (降伏曲面), 525, 822  
yield-vertex (角点), 528  
Young's modulus (ヤング率), 75, 816  
generalized — (一般化された), 81  
yo-yo balloon (ヨーヨー風船), 390

## ㉗

zero eigenvalue (零固有値), 302  
Zero Fighter (零式艦上戦闘機), 10  
0.2% offset yield strength (0.2% オフセット耐力), 817  
zero vector (零ベクトル), 301  
Ziegler's model (ツィーグラウのモデル), 550  
Zimmermann effect (ツィンマーマン効果), 451

## あ

アーチ (arch), 207  
アイゲンひずみ (eigenstrain), 766

アイソパラメトリック要素 (isoparametric element), 264  
秋田犬 (Akita-Inu, Akita dog), 799  
亜空間 (subspace), 519  
アダプティブ有限要素法 (adaptive FEM), 263  
亜弾性 (hypoelasticity), 633, 638  
圧延 (rolling), 299, 812  
厚さパラメータ (thickness parameter), 707  
圧縮強度 (compressive strength), 27, 300, 830, 849  
圧力波 (pressure wave), 107  
後座屈 (post-buckling), 309  
アトラス (Atlas), 355  
孔開き板 (perforated plate), 6  
アパッチ族 (Apache), 374  
アラビア数字 (Arabic numerals), 502  
アルファ鉄 (alpha iron), 813  
アルマンシのひずみ (Almansi strain), 594  
アンクルトリス (Uncle Torys), 374  
安全率 (factor of safety, safety factor), 10, 300, 353, 824  
安定規準 (stability criterion), 272, 277  
安定問題 (stability problem), 268

## い

イカロス (Ikaros), 881  
イシガケチョウ (Cyrestis thyodamas), 876  
石橋 (masonry bridge), 696, 803  
位相 (phase), 488  
位相速度 (phase velocity), 107, 424, 483  
位相平面 (phase plane), 385, 464  
イソップ寓話 (Aesop's fables), 5  
板厚不変の仮定 (assumption of no thickness change), 356  
位置エネルギー (potential energy), 380  
1 次元のフックの法則 (Hooke's law in one dimension), 116  
一般化された (generalized)  
外力 (— force), 418, 444  
減衰定数 (— damping constant), 420, 443  
座標 (— coordinate), 417, 442  
質量 (— mass), 415, 441  
フックの法則 (— Hooke's law), 79, 87  
変位 (— displacement), 417, 442  
ポアソン比 (— Poisson's ratio), 81  
ヤング率 (— Young's modulus), 81  
移動硬化 (kinematic hardening), 548, 652, 823  
異方性 (anisotropy), 80  
芋煮会 (imo-ni-kai), 5  
鋳物 (cast iron), 812  
移流項 (advection/advective term), 108, 604  
岩熊の座屈公式 (Iwakuma's buckling formula), 707  
引張強度 「いんちょうきょうど」とは呼ばないので、「ひっぱりきょうど」を見よ!

## う

ウィナー・ヒンチンの関係 (Wiener-Khinchine relation), 402  
ウィナー・ホッフ手法 (Wiener-Hopf technique), 132  
ウィリアムのトグル (William's toggle), 279  
上降伏点 (upper yield point), 816  
ウェブ (web), 6  
渦度 (vorticity), 603

薄肉断面材 (thin-walled member), 190, 315, 318  
 薄膜類似 (membrane analogy), 342  
 渦励振 (vortex-induced oscillation), 840  
 宇宙構造 (space structure), 280  
 宇宙暦 (stardate), 985  
 うほ大 (toUHOku University), 1028  
 埋め込み座標 (embedded coordinate, convected coordinate), 588  
 運動 (kinematics), 589  
 運動エネルギー (kinetic energy), 380  
 運動会 (athletic meeting), 1012  
 運動学的許容場 (kinematically admissible field), 94, 572  
   梁の (— of beams), 251, 577  
 運動場 (kinematics), 208, 689, 698  
 運動方程式 (equation of motion)  
   1 自由度系の (— of single-degree-of-freedom systems), 378  
   弦の (— of strings), 313, 424  
   多自由度系の (— of multi-degree-of-freedom systems), 413  
   2 自由度系の (— of two-degree-of-freedom systems), 406  
   梁の (— of beams), 198, 436  
   骨組要素の (— of frame elements), 458  
   膜の (— of membranes), 372, 430  
 運動量保存則 (law of conservation of momentum), 391

## え

エアリーの応力関数 (Airy stress function), 120, 368  
 影響線 (influence line)  
   軸力の (— of axial force), 24, 848  
   せん断力の (— of shear force), 39, 182, 850  
   たわみの (— of displacements), 176  
   曲げモーメントの (— of bending moment), 9, 39, 178, 181, 850  
 エシェルビー テンソル (Eshelby tensor), 769  
 S 波 (S-wave), 107  
 X-FEM, 拡張有限要素法 (X-FEM), 263  
 X 線非破壊試験 (X-ray non-destructive testing), 855  
 エネルギーノルム (energy norm), 249  
 エネルギー保存則 (law of conservation of energy), 380  
 エラスティカ (elastica), 310, 703  
 L 荷重 (L-load), 24, 844  
 エンゲッサーの公式 (Engesser's buckling formula), 307, 707  
 遠心力 (centrifugal force), 381  
 延性 (ductility), 506, 818  
 延性破壊 (ductile fracture), 507, 818

## お

オイラー荷重 (Euler load), 285, 829  
 オイラー曲線 (Euler curve), 286, 829  
 オイラー座屈 (Euler buckling), 285, 829  
 オイラー的記述 (Eulerian description), 108, 594  
 オイラーの公式 (Euler's formula), 400  
 オイラー方程式 (Euler equation), 97, 209, 246, 312  
 応力 (stress), 27, 38, 65  
   キルヒホッフ (Kirchhoff —), 616

公称 (nominal —), 622, 817  
 コーシー (Cauchy —), 612, 618  
 真 (true —), 612, 618  
 第1ピオラ・キルヒホッフ (first Piola-Kirchhoff —), 67, 616, 618  
 第2ピオラ・キルヒホッフ (second Piola-Kirchhoff —), 616, 619, 698  
 ノミナル (nominal —), 613, 618  
 ビオ (Biot —), 618, 619  
 応力拡大係数 (stress intensity factor), 134, 743, 820  
 応力関数 (stress function), 120  
 応力緩和 (stress relaxation), 93, 751  
 応力集中係数 (stress concentration factor), 123, 131, 135  
 応力速度 (stress rate)  
   オールドロイド (Oldroyd —), 624  
   共回転 (corotational —), 624  
   グリーン・ナガディ (Green-Naghdi —), 626  
   トゥルーズデル (Truesdell —), 626  
   ノミナル (nominal —), 627  
   ヤウマン (Jaumann —), 624  
 応力度 (stress), 65  
 応力の仕事率 (rate of stress-work), 614  
 応力の主方向 (principal direction of stress), 70  
 応力の不変量 (stress invariant), 72  
 応力ひずみ関係 (stress-strain relation), [‘フックの法則’も参照せよ], 75  
 応力腐食割れ (stress corrosion cracking), 821  
 応力ベクトル (stress vector), 64  
 大地震 (large earthquake), 389, 840  
 オーボエ (oboe), 426  
 オールドロイド応力速度 (Oldroyd stress rate), 624  
 遅れ破壊 (delayed fracture), 821  
 帯行列 (band matrix), 413  
 重み (weight), 213, 249  
 重み関数 (weight function), 215  
 重みつき残差法 (weighted residual method), 213, 248  
 重みつき内積 (weighted inner product), 249, 415, 428, 441  
 音標文字 (phonetic alphabet), 52

## か

ガーソン モデル (Gurson damage model), 584  
 貝殻模様 (clamshell mark), 507, 820  
 介在物 (inclusion), 85  
 階数 (rank), 245  
 解析的研究 (analytical study), 265  
 階段関数 (step function), 392, 487  
 開断面 (open section), 319, 324, 804  
 改訂エンゲッサー公式 (modified Engesser's formula), 307, 707  
 回転 (rotation)  
   微小 (infinitesimal —), 58  
   有限 (finite —), 592  
 回転慣性 (rotational inertia), 460  
 回転半径 (radius of gyration), 285, 829  
 回転ベクトル (rotation vector), 603  
 外力 (external force), 17

- 外力ポテンシャル (potential energy of external forces), 97, 247
- ガイリンガーの式 (Geiringer's equations), 567
- ガウスの定理 (Gauss's theorem, divergence theorem), 68, 481
- 下界定理 (lower bound theorem), 573
- 科学 (science), 11
- 核 (kernel), 132
- 殻 (shell), 355
- 拡散 (diffusion), 264
- 学習 (taught and learn), 1007
- 角速度 (angular velocity), 603
- 拡張有限要素法 (X-FEM), 263
- 格点 (panel point), 7, 17
- 掛け違い部 (joint of Gerber beam), 36
- 過減衰 (over damping), 383
- 鹿児島弁 (Kagoshima dialect), 138, 1024
- 重ね合わせの原理 (principle of superposition), 163
- 荷重係数 (load factor), 10, 825
- カスティリアノの第2定理 (Castigliano's second theorem), 252, 687
- かすめ入射 (grazing incidence), 493
- ガセットプレート (gusset plate), 20
- 仮想仕事式 (virtual work equation), 217
- 板の (— of plates), 366
- 3次元問題の (— for three-dimensional problems), 258
- サン-ブナンのねじりの (— of Saint-Venant's torsion of bars), 344
- 弾性床上の梁の (— of beams on elastic foundation), 240
- ティモシェンコ梁の (— of Timoshenko beams), 691, 693
- 柱の (— of columns), 222
- 梁の (— of beams), 170, 209, 224
- 梁の動的 (— of beams in motion), 247
- 梁-柱の (— of beam-columns), 300, 708
- 平面ひずみ問題の (— for plane strain problems), 258
- 棒の曲げねじりの (— of flexural torsion of bars), 342
- 有限変位での (— in finite displacements), 698
- 仮想仕事の原理 (principle of virtual work), 94, 95, 217, 246, 247
- 仮想変位 (virtual displacement), 96, 217
- 加速度 (acceleration), 604
- 形鋼 (shape steel), 812
- 硬さ (hardness), 817
- 片持ち梁 (cantilever beam), 30
- 合州国 (United States), 63
- 割線係数 (secant modulus), 559
- 割裂試験 (Brazilian test), 129
- 仮定 (assumption)
- 板厚不変の (— of no thickness change), 356
- キルヒホッフ・ラブの (Kirchhoff-Love —), 356
- 断面形不変の (— of no cross-sectional deformation), 140
- ベルヌーイ・オイラーの (Bernoulli-Euler —), 140
- 可動橋 (movable bridge), 52, 801
- 過渡応答 (transient response), 387
- 角点 (yield-vertex), 528
- 髪クリップ (hair clip), 280
- ガラーキン形式 (Galerkin form), 215
- ガラーキン法 (Galerkin method), 216
- ガラス繊維補強ポリマー (glass-fiber-reinforced polymer), 117
- ガラス的コンプライアンス (glassy compliance), 750
- ガラス的弾性率 (glassy modulus), 751
- カルマンの板理論 (Kármán plate theory), 「フォン カルマンの板理論」を見よ
- 換算係数理論 (reduced modulus theory), 298
- 慣性モーメント (moment of inertia), 16
- 完全系 (perfect system), 274
- 完全塑性 (perfect plasticity), 93
- 完全流体 (perfect fluid), 110
- 関連流れ則 (associated (associative) flow rule), 532
- 緩和関数 (relaxation function), 751
- 緩和時間 (relaxation time), 752
- 緩和弾性率 (relaxation modulus), 751
- き
- 幾何学的境界条件 (geometric boundary condition), 67, 147
- 幾何学的非線形性 (geometric nonlinearity), 280
- 幾何剛性行列 (geometric stiffness matrix), 300, 710
- ティモシェンコ梁の (— of Timoshenko beam), 711, 719
- 記述 (description)
- オイラー的 (Eulerian —), 108, 594
- 更新ラグランジュ的 (updated Lagrangian —), 619, 625
- ラグランジュ的 (Lagrangian —), 108, 590
- 技術 (technology), 11
- 基準配置 (reference configuration), 589
- 犠牲防食 (sacrificial protection), 802
- 軌跡 (trajectory), 385, 464
- 北原道弘先生 (Kitahara Michihiro, Prof.), 3, 406, 1012
- 奇置換 (odd permutation), 69
- 基本解 (fundamental solution), 176, 745
- 逆行列 (inverse matrix), 50, 244
- 逆問題 (inverse problem), 747
- 客観性 (objectivity), 89, 516
- 客観性を持つ応力速度 (objective stress rate), 622
- キャットウォーク (catwalk), 314
- ギャロッピング (galloping), 840
- 吸収エネルギー (impact energy absorption), 819
- 九州弁 (Kyushu dialect), 883
- 境界条件 (boundary condition)
- 板の (— of plates), 361
- 幾何学的 (geometric —), 67, 147
- サン-ブナンのねじりの (— of Saint-Venant's torsion), 317
- 自然 (natural —), 67, 147, 218
- 第3種の (— of the third kind), 68, 148
- 弾性床上のティモシェンコ梁-柱の (— of Timoshenko beam-columns on elastic foundation), 307
- 力の (— of forces), 67, 147
- ティモシェンコ梁の (— of Timoshenko beams), 691
- ディリクレ (Dirichlet —), 67, 147, 754
- ノイマン (Neumann —), 67, 147, 754
- 梁の (— of beams), 147

梁-柱の (— of beam-columns), 282  
 変位の (— of displacements), 67, 147  
 本質的 (essential —), 67, 147, 218  
 曲げねじりの (— of flexural torsion), 332  
 力学的 (static —), 67, 147  
 ロビン (Robin —), 68, 148, 754  
 境界値問題 (boundary value problem), 45, 149  
 共回転応力速度 (corotational stress rate), 624  
 境界要素法 (boundary element method, BEM), 176, 746  
 強形式 (strong form), 213  
 共軸性 (coaxiality), 520, 521, 528  
 共振 (resonance), 388  
 強度 (strength), 18, 817  
   圧縮 (compressive —), 300, 830  
   せん断 (shear —), 517, 834  
   引張 (tensile —), 300, 827  
   曲げ圧縮 (flexural compressive —), 353, 833, 851  
   曲げ引張 (flexural tensile —), 353, 833, 851  
 強度相関式 (strength correlation)  
   軸力と曲げを受ける (— of axial force and bending),  
   295, 835  
 共変基底ベクトル (covariant base vector), 732  
 共変成分 (covariant component), 697, 732  
 共変微係数 (covariant derivative), 734  
 共役性 (conjugateness), 618  
 共役梁 (conjugate beam), 256  
 極 (pole), 447  
 極限解析 (limit analysis), 570  
 局所変形 (localized deformation), 569, 622  
 極値座屈 (extremum buckling), 279  
 極2次モーメント (sectional polar moment), 316, 352  
 局部座屈 (local buckling), 355, 367, 836  
 極分解の定理 (polar decomposition theorem), 592, 717  
 曲率 (curvature), 142, 700  
 虚数単位 (imaginary unit), 197  
 許容応力 (allowable stress), 824  
 許容応力 (度) 設計法 (allowable stress design method), 10,  
 824  
 ギリシャ文字 (Greek letters), 1028  
 キルヒホッフ応力 (Kirchhoff stress), 616  
 キルヒホッフ・ラブの仮定 (Kirchhoff-Love assumption), 356  
 亀裂 (crack), 189, 740, 818  
 近似誤差 (approximation error), 241, 249  
 均質化法 (homogenization method), 469  
 金属疲労, 工学技術者は「金属」という形容詞は用いないの  
 で, 「疲労」を見よ!  
 金太郎飴 (Kintaro-brand wheat gluten), 114

## く

偶応力 (couple stress), 66, 67  
 隅角力 (corner force), 361  
 空隙発生・成長・合体 (void formation, growth and coales-  
 cence), 585  
 偶置換 (even permutation), 69  
 空力弾性学 (aerodynamics), 840  
 偶力 (couple), 16, 687  
 靴下留め (garter), 3, 804

屈服 (submission), 280  
 区分的多項式 (piecewise polynomial), 222  
 クマのプーさん (Winnie-the-Pooh), 376  
 クリープ (creep), 93, 749  
 クリープコンプライアンス (creep compliance), 750  
 グリーン関数 (Green's function), 106, 128, 176, 393, 768  
 グリーン・ナガディ応力速度 (Green-Naghdi stress rate), 626  
 グリーンのひずみ (Green strain), 590, 697  
 クリストッフエルの記号 (Christoffel symbol), 734  
 グレーチング (grating), 808  
 クロネッカーのデルタ (Kronecker delta), 59

## け

径厚比 (radius thickness ratio), 318, 328  
 経験式 (empirical formula), 585  
 計算尺 (slide rule), 203  
 形状関数 (shape function), 264  
 形状記憶合金 (shape-memory alloy, SMA), 813  
 係数励振 (parametric oscillation), 476  
 芸人 (entertainer), 926  
 計量テンソル (metric tensor), 732  
 下界定理 「げかいていり」とは呼ばないので, 「かかいてい  
 り」を見よ!  
 桁 (girder), 3  
 ケッターの式 (Kötter's equation), 568  
 ゲルバー梁 (Gerber beam), 3, 36  
 ケルビン・テイトの定理 (theorem of Kelvin and Tait), 601  
 ケルビン・フォークトモデル (Kelvin-Voigt model), 382  
 ケルビンモデル (Kelvin model), 750  
 弦 (string), 313  
 限界状態設計法 (limit state design method), 10, 825  
 研究ノート; 作り方 (research notebook; how to organize),  
 1009  
 現象論的モデル (phenomenological model), 562  
 減衰 (damping), 382  
 減衰行列 (damping matrix), 406  
 懸垂曲線 (catenary), 312  
 減衰係数 (damping coefficient), 382  
 減衰定数 (damping constant, damping factor), 382  
 減衰比 (damping ratio), 384  
 減衰率 (damping rate), 384  
 現配置 (current configuration), 588  
 原理 (principle)  
   重ね合わせの (— of superposition), 163  
   仮想仕事の (— of virtual work), 94, 95, 217, 246, 247  
   最小仕事の (— of minimum strain energy), 253  
   最大塑性仕事の (— of maximum plastic work), 527  
   作用反作用の (— of action and reaction), 17, 18, 20  
   サン-ブナンの (Saint-Venant's —), 121, 189  
   全ポテンシャルエネルギーの最小 (— of minimum total  
   potential energy), 97, 248  
   全ポテンシャルエネルギーの停留 (— of stationary total  
   potential energy), 97, 247  
   ハミルトンの (Hamilton's —), 247  
   偏角の (— of the argument), 498  
   変分 (variational —), 246  
   補仮想仕事の (— of complementary virtual work), 251

- 補仮想仕事の (— of complementary virtual work), 95, 98
- こ
- 合応力 (stress resultant), 65
- 硬化 (hardening), 93, 511, 817
- 移動 (kinematic —), 548, 652, 823
- 等方 (isotropic —), 548, 823
- 工学ひずみ (engineering strain), 80, 517
- 工学倫理 (engineering ethics), 1009
- 硬化係数 (hardening coefficient), 92, 512, 522, 529–531, 550, 554, 648
- 硬化則 (hardening rule), 92
- 剛・完全塑性体 (rigid perfectly-plastic body), 510
- 公称応力 (nominal stress, engineering stress), 622, 817
- 「公称応力」の有限変形理論の枠組の中の定義は, [‘ノミナル応力’も参照せよ], 622
- 更新ラグランジュ的記述 (updated Lagrangian description), 619, 625
- 向心力 (centripetal force)
- オイラー的 (Eulerian), 110
- ラグランジュ的 (Lagrangian), 381
- 剛性 (stiffness), 816
- 剛性行列 (stiffness matrix), 406
- 弾性床上の梁の (— of beams on elastic foundation), 241
- ティモシェンコ梁の (— of Timoshenko beams), 693, 695
- ねじりの (— of torsion), 343
- 柱の (— of columns), 223
- 梁の (— of beams), 225
- 梁-柱の (— of beam-columns), 300
- 平面トラスの (— of planar trusses), 232
- 平面ひずみ問題の (— for plane strain problems), 260
- 平面骨組の (— of planar frames), 235
- 有限変位ティモシェンコ梁の (— of Timoshenko beams in finite displacements), 719
- 有限変位平面骨組の (— of planar frames in finite displacements), 719
- 立体骨組の (— of space frames), 347
- 合成構造 (composite structures), 802
- 構成則 (constitutive law), 75
- 構成方程式 (constitutive equation), [‘フックの法則’も参照せよ], 75
- 一般化されたプラントル・ロイスの (— of generalized Prandtl-Reuss’s plasticity), 532
- プラントル・ロイスの (— of Prandtl-Reuss’s plasticity), 524
- 剛性方程式 (stiffness equation), [‘要素剛性方程式’も参照せよ], 223
- 構造力学 (structural mechanics), iii
- 剛体回転変位 (rigid body rotation), 57
- 交代記号 (permutation symbol), 69, 733
- 交代定理 (alternative theorem), 245, 798
- 交代テンソル (permutation tensor), [‘置換テンソル’も参照せよ], 733
- 剛体並進変位 (rigid body translation), 57
- 剛体変位 (rigid body displacement), 57
- 硬度 (hardness), 817
- 降伏応力 (yield stress), 89, 286, 297, 517, 816
- せん断 (shearing —), 89, 517, 822
- 引張 (tensile —), 89, 510, 517, 822
- 降伏関数 (yield function), 91, 512, 517, 525
- 降伏曲面 (yield surface), 525, 822
- 降伏条件 (yield condition), 88, 510, 512, 517, 822
- トレスカの (Tresca’s —), 526
- フォンミーゼスの (von Mises —), 89, 517, 526, 823
- 降伏点 (yield point), 816
- 降伏比 (yield ratio), 818
- 降伏モーメント (yield moment), 514, 575
- 高欄 (handrail), 5, 811
- コーシー応力 (Cauchy stress), 612, 618
- コーシー・グリーン変形テンソル (Cauchy-Green deformation tensor)
- 左 (left —), 593
- 右 (right —), 590
- コーシーの積分定理 (Cauchy integral theorem), 447
- コーシーの定理 (Cauchy’s theorem), 65
- コーシー・リーマンの関係式 (Cauchy-Riemann equations), 113
- ゴールドスターファミリーズパーク & メモリアル (Gold Star Families Park & Memorial), 53
- 誤差 (error), 212, 249
- 古典的なガラーキン形式 (classical Galerkin form), 213
- 寿屋 (Torii-San), 374
- 小春日和 (Indian summer), 946
- ゴム支承 (rubber bearing), 809
- ゴムの弾性率 (rubbery modulus), 751
- 固有円振動数 (natural circular frequency), 379
- 固有角振動数 (natural angular frequency), 379
- 固有関数 (eigenfunction), 427, 785
- 固有周期 (natural period), 379
- 固有振動数 (natural frequency), 379
- 固有振動モード (natural vibration mode), 408
- 固有値問題 (eigenvalue problem)
- 境界値問題の (— for boundary value problems), 287, 785
- 行列の (— of matrices), 301, 781
- 混合構造 (mixed structures), 802
- 混合条件 (mixed condition), 68, 148, 754
- コンパクト断面 (compact section), 581, 837
- コンプライアンス (compliance), 78
- さ
- 載荷 (loading), 91, 510, 522, 529
- 最小仕事の原理 (principle of minimum strain energy), 253
- 最小2乗法 (least square method), 212, 221, 229, 249, 970
- 最大軸力 (maximum axial force), 27, 848
- 最大せん断力 (maximum shear force), 41, 179, 851
- 最大塑性仕事の原理 (principle of maximum plastic work), 527
- 最大曲げモーメント (maximum bending moment), 40, 179, 851
- 最大摩擦力 (maximum friction force), 385, 386

- 細長比「さいちょうひ」とは呼ばないので、「ほそながひ」を見よ!
- 材料非線形性 (material nonlinearity), 280
- サウスウェル法 (Southwell method), 296
- 座屈 (buckling), 278, 827
- オイラー (Euler —), 285, 829
  - 極値 (extremum —), 279
  - ねじれ (torsional —), 352
  - 非弾性 (inelastic —), 298
  - 分岐 (bifurcation —), 278
  - 曲げ (flexural —), 286
  - 横倒れ (lateral-torsional —), 352, 833
- 座屈荷重 (buckling load), 270
- 座屈係数 (buckling coefficient)
- 板の (— of plates), 370, 837
  - 柱の (— of columns), 287, 832
- 座屈後 (post-buckling), 309
- 座屈点 (buckling point), 279
- 座屈モード (buckling mode), 285, 288, 829, 832
- 桜島 (Sakurajima, volcano), 696, 1024
- サブパラメトリック要素 (subparametric element), 264
- 差分 (finite difference), 395, 423
- サム小父さん (Uncle Sam), 63
- 作用反作用の原理 (principle of action and reaction), 17, 18, 20
- 3 軸圧縮試験 (triaxial compression test), 77, 519
- 算数 (arithmetic), 207
- せん断力図 (shear diagram), 30
- サンドイッチ (typical fillings of sandwich), 324
- サン-ブナン・キルヒホッフ材料 (Saint Venant-Kirchhoff material), 632, 635
- サン-ブナンの原理 (Saint-Venant's principle), 121, 189
- サン-ブナンのねじり剛性 (Saint-Venant's torsional stiffness), 316
- サン-ブナンのねじり定数 (Saint-Venant's torsional constant), [‘ねじり定数’も参照せよ], 316
- サン-ブナンのねじりモーメント (Saint-Venant's torsional moment), 316
- 残留応力 (residual stress), 299, 814
- 残留強度 (residual strength), 581
- 残留変形 (residual deformation), 87
- 三連モーメントの定理 (three-moment theorem), 250
- し
- 支圧接合 (bearing connection), 857
- しあわせの隠れ場所 (The Blind Side), 1037
- $J_2$  流れ理論 ( $J_2$  flow theory), 532
- シェル (shell), 355
- 軸差応力 (deviator stress), 77, 519
- 軸線 (beam axis), 140
- 軸力 (axial force), 20, 143
- 軸力図 (axial force diagram), 34
- 自明な解 (trivial solution), 285, 287, 301, 828
- 試験関数 (test function), 168, 223, 487
- 試行関数 (trial function), 223
- 自己随伴系 (self-adjoint system), 101
- 自己相関関数 (autocorrelation function), 402
- 自己展開型構造 (self-deployable structure), 280
- 支承 (shoe), 31, 809
- 地震計 (seismograph), 390
- 自然科学 (natural science), 11
- 自然境界条件 (natural boundary condition), 67, 147, 218
- 自然座標 (natural coordinate), 263
- 自然ひずみ (natural strain), 「対数ひずみ」を見よ
- 下降伏点 (lower yield point), 816
- 質量 (mass), 15
- 質量行列 (mass matrix), 242, 406
- 集中 (lumped —), 413
  - 整合 (consistent —), 242, 453
- 質量保存則 (law of conservation of mass), 591
- 支配方程式 (governing equation), 83
- 地盤反力 (subgrade reaction), 196
- 絞り (necking), 569, 667, 818
- 弱形式 (weak form), 213
- 三味線 (shamisen), 426
- シャルピー衝撃試験 (Charpy impact test), 819
- 斜路 (ramp), 35
- シャンレイモデル (Shanley model), 299
- 縦横比 (aspect ratio), 371, 837
- 終局状態設計法 (ultimate state design method), 10, 825
- ジューコフスキー変換 (Joukowski transformation), 113
- 充実断面棒 (prismatic bar), 340
- 自由振動 (free vibration), 378
- 収束 (convergence), 221
- 集中質量行列 (lumped mass matrix), 413
- 集中モーメント (applied moment), 687
- 重調和関数 (biharmonic function), 120, 359, 369
- 周波数応答関数 (frequency response function), 398
- 自由落下 (free fall), 380
- 主応力 (principal stress), 70
- 縮約 (condensation), 524
- 主桁 (main girder), 5, 20
- 主ひずみ (principal strain), 58, 73
- 主偏差応力 (principal deviatoric stress), 516
- 主方向 (principal direction)
- 応力の (— of stress), 70
  - ひずみの (— of strain), 58, 73
- シュミット則 (Schmid law), 650
- 順問題 (direct problem), 746
- 準惑星 (dwarf planet), 1038
- 上界定理 (upper bound theorem), 573
- 上下界定理 (upper-lower bound theorem), 573
- 常時微動 (microtremor), 403
- 状態図 (phase diagram), 814
- 冗長性 (redundancy), 47, 818
- 床版 (floor slab), 5
- 情報技術 (information technology), 188
- 除荷 (unloading), 91, 297, 510, 522, 530, 817
- 初期条件 (initial condition), 198
- 初期値境界値問題 (initial value/boundary value problem), 198
- 初期配置 (initial configuration), 588
- 初期不整 (initial imperfection), 276, 299
- 初等梁理論 (elementary beam theory), 140

真応力 (true stress), 612, 618, 818  
 震源モデル (seismic source model), 169  
 進行性破壊 (progressive failure), 583  
 進行波 (traveling wave), 491  
 靱性 (toughness), 506, 819  
 伸張座標法 (method of strained coordinates), 469  
 振動数応答関数 (frequency response function), 398  
 振動モード (vibration mode), 408, 414, 427, 431, 438  
 浸透流 (seepage flow), 264  
 震度法 (seismic coefficient method), 389, 840  
 真ひずみ (true strain), 「対数ひずみ」を見よ  
 振幅 (amplitude), 379

## す

吸い込み (sink), 109  
 水素脆化 (hydrogen embrittlement), 821  
 垂直 / 短距離離着陸機 (V/STOL aircraft), 877  
 垂直補剛材 (vertical stiffener), 36, 40, 850  
 随伴系 (adjoint system), 101, 177, 746  
 随伴問題 (adjoint problem), 394, 448  
 水平補剛材 (horizontal stiffener), 40, 850  
 数学的亀裂 (mathematical crack), 740  
 数学的転位 (mathematical dislocation), 132, 547  
 数値的研究 (numerical study), 265  
 スーパーパラメトリック要素 (superparametric element), 264  
 スカート (skirt), 426  
 スカラップ (scallop), 853  
 図心 (centroid), 144  
 ステュルム・リウヴィル問題 (Sturm-Liouville problem), 218  
 ストレス (病理学上の) (stress), ['応力' も参照せよ], 66  
 ストレッチ (stretch), 592  
 ストレッチ テンソル (stretch tensor)  
   左 (left —), 593  
   右 (right —), 592  
 スネルの法則 (Snell's law), 493  
 スパンドレル (spandrel), 8  
 スピン (spin), 110, 602, 603  
 スプレッドシート (spreadsheet), iv  
 スペクトル表示 (spectral representation), 71, 592  
 すべり線理論 (slip line theory), 563  
 スラブ止め (slab anchor), 854  
 寸法効果 (scale effect), 562, 585

## せ

製鋼 (steel manufacture), 812  
 整合質量行列 (consistent mass matrix), 242, 453  
 整合条件 (consistency condition), 92, 512, 522, 530  
 静止摩擦係数 (coefficient of static friction), 87, 386, 509  
 静水圧 (hydrostatic pressure), 74, 83, 821  
 脆性 (brittleness), 506, 819  
 脆性破壊 (brittle fracture), 506, 819  
 静定基本系 (statically determinate equivalent system), 163  
 正定値 (positive-definiteness), 82, 302  
 静定な (statically determinate), 18  
 製鉄 (iron manufacture), 812  
 性能 (performance), 11, 824  
 正の面 (surface to the positive direction), 30, 66

静力学的許容場 (statically admissible field), 94, 564, 572  
   梁の (— of beams), 251, 577  
 跡 (trace), 60  
 積層板 (layered plate), 117  
 積分核 (integral kernel), 132  
 積分方程式 (integral equation), 132, 746, 747, 798  
 接触問題 (contact problems), 704  
 接線係数 (tangent modulus), 559  
   一般化されたプラントル・ロイスの (— of generalized  
   Prandtl-Reuss's plasticity), 532  
   プラントル・ロイスの (— of Prandtl-Reuss's plastic-  
   ity), 524  
 接線係数理論 (tangent modulus theory), 298  
 接線剛性 (tangent stiffness), 275, 718  
 接線コンプライアンス (tangent compliance)  
   一般化されたプラントル・ロイスの (— of generalized  
   Prandtl-Reuss's plasticity), 531  
   プラントル・ロイスの (— of Prandtl-Reuss's plastic-  
   ity), 524  
 節点 (nodal point), 20  
 節点 (node), 222  
 節点方程式 (joint equation), 250  
 摂動 (perturbation), 309, 702, 707  
 摂動法 (perturbation method), 309, 465  
 セルフコンシステント法 (self-consistent method), 774  
 零固有値 (zero eigenvalue), 302  
 零ベクトル (zero vector), 301  
 繊維補強コンクリート (fiber-reinforced concrete), 137, 802  
 繊維補強材 (fiber-reinforced material), 117, 804  
 繊維補強ポリマー (fiber-reinforced polymer)  
   ガラス (glass- — (GFRP)), 117  
   炭素 (carbon- — (CFRP)), 81, 117  
 繊維補強ポリマー橋梁 (FRP bridge), 780  
 漸近解析 (asymptotic analysis), 741  
 線形化された有限変位理論 (linearized finite displacement  
 theory), 275  
 線形弾性 (linear elasticity), 75  
 全塑性モーメント (plastic moment), 514, 575  
 せん断応力 (shear stress), 65  
 せん断遅れ (shear lag), 194, 853  
 せん断強度 (shear strength), 41, 517, 834  
 せん断降伏応力 (shearing yield stress), 89, 517, 822  
 せん断帯 (shear band), 559, 622, 652  
 せん断弾性係数 (shear modulus), 75  
 せん断中心 (shear center), 193, 339  
 せん断波 (shear wave), 107  
 せん断ひずみ (shearing strain), 56  
 せん断流 (shear flow), 192, 320  
 せん断力 (shear force), 29, 30  
 選点法 (collocation method), 212  
 全ひずみ理論 (deformation theory, total-strain theory), 90,  
   512, 524, 559  
 線膨張係数 (linear coefficient of thermal expansion), 85, 124,  
   610, 755  
 全ポテンシャルエネルギー (total potential energy), 96, 247  
 全ポテンシャルエネルギーの最小原理 (principle of minimum



- total potential energy), 97, 248  
 全ポテンシャルエネルギーの停留原理 (principle of stationary total potential energy), 97, 247  
 全補ポテンシャルエネルギー (total complementary potential energy), 98, 251
- そ
- 走査型電子顕微鏡 (scanning electron microscope), 817  
 相当応力 (effective stress), 89, 517, 518, 822  
 相当塑性ひずみ (effective plastic strain), 517, 518  
 相反性 (reciprocity), 104  
 相反定理 (reciprocal theorem)  
   1 自由度振動の (— of one degree-of-freedom vibration), 395  
   梁振動の (— of beam vibration), 449  
   ベッティの (Betti's —), 101, 177  
   マクスウェルの (Maxwell's —), 101, 177  
 増分型フックの法則 (incremental Hooke's law), 523  
 増分つり合い式 (incremental equilibrium equation)  
   コーシー応力の (— of Cauchy stress), 628  
   ノミナル応力速度の (— of nominal stress rate), 628  
   ラグランジュ的 (Lagrangian —), 627  
 増分理論 (incremental theory), 90, 519  
 層方程式 (story equation), 250  
 ゾウリムシ (Paramecium), 320  
 層流 (laminar flow), 109  
 総和規約 (summation convention), 488, 732  
 疎外 (alienation), 10  
 測定不能 (unmeasurable), 730  
 速度 (velocity), 601  
 速度勾配 (velocity gradient), 602  
 速度ポテンシャル (velocity potential), 112  
 塑性 (plasticity), 87, 298, 505  
 塑性仕事増分 (rate of plastic work), 521  
 塑性体積ひずみ (plastic volumetric strain), 553  
 塑性断面係数 (plastic section modulus), 576  
 塑性的平面ひずみ (plastically plane strain), 555, 563, 570, 654  
 塑性ヒンジ (plastic hinge), 515, 575  
 塑性変形 (plastic deformation), 87, 505, 817  
 塑性崩壊 (plastic collapse), 571  
 塑性ポテンシャル (plastic potential), 90, 530  
 疎密波 (compressional wave), 107  
 そり (warping), 328  
 そり関数 (warping function), 334  
 そり 2 次モーメント (warping constant), 331  
 そり変位 (warping displacement), 330  
 損傷理論 (damage theory), 583
- た
- タイ (tie), 7  
 第 1 波 (primary wave), 107  
 第 1 ピオラ・キルヒホッフ応力 (first Piola-Kirchhoff stress), 67, 616, 618  
 第 1 変分 (first variation), 96, 246  
 第 1 種条件 (condition of the first kind), 67, 147, 754  
 対傾構 (sway bracing), 809  
 耐候性鋼材 (weathering steel), 813  
 第 3 種条件 (condition of the third kind), 68, 148, 754  
 第 3 種の境界条件 (boundary condition of the third kind), 68, 148  
 大地震 正しくは「だいじしん」とは読まないで、「おおじしん」を見よ!  
 体心立方晶 (body-centered cubic crystal), 814  
 対数減衰率 (logarithmic decrement), 384  
 対数ひずみ (logarithmic strain), 597  
 対数ひずみ速度 (logarithmic strain rate), 607  
 体積弾性係数 (bulk modulus), 75  
 体積波 (compressional wave), 107  
 体積ひずみ (volumetric strain), 60, 821  
 体積力 ((specific) body force), 66  
 タイドアーチ (tidal arch), 8, 806  
 大統一理論 (Grand Unification Theory), 11  
 第 2 種条件 (condition of the second kind), 67, 147, 754  
 第 2 波 (secondary wave), 107  
 第 2 ピオラ・キルヒホッフ応力 (second Piola-Kirchhoff stress), 616, 619, 698  
 第 2 変分 (second variation), 248  
 大変位理論 (large displacement theory), 268  
 大変形理論 (large deformation theory), 268, 587  
 ダイレタンシー (dilatancy), 91, 520, 553, 568  
 ダイレタンシー角 (dilatancy angle), 557  
 楕円積分 (elliptic integral), 311  
 択一定理 (alternative theorem), 245, 798  
 ダグデル・バーレンブラットモデル (Dugdale-Barenblatt model), 744  
 タグボート (tugboat), 884  
 多結晶金属モデル (polycrystalline metal model), 652  
 多重スケール法 (method of multiple scales), 480  
 多重連結 (multiply connected), 342  
 たたみ込み積分 (convolution [integral]), 402, 750  
 ダッフィング振動子 (Duffing oscillator), 477  
 縦桁 (stringer), 5, 20, 809  
 縦振動 (longitudinal vibration), 197  
 縦波 (longitudinal wave), 107, 489  
 ダブルデッキ構造 (double-deck structure), 801  
 玉葱の臭い (wild-onion smell, smelly onion), 942  
 ダランベールの解 (d'Alembert solution), 484  
 たわみ (deflection), 141  
 たわみ角 (slope), 141  
 たわみ角法 (slope-deflection method), 250  
 たわみ理論 (吊橋) (deflection theory of suspension bridge), 862  
 単位荷重法 (unit load method), 170, 174, 200, 252  
   弾性体の (— of elastic media), 105  
   トラスの (— of truss structures), 200  
 単位衝撃応答 (unit impulse response), 392  
 単位衝撃外力 (unit impulsive force), 391  
 単位そり関数 (unit-warping function), 334, 339  
 単位テンソル (identity tensor, unit tensor), 590  
 弾・完全塑性体 (elastic perfectly-plastic body), 297, 511  
 単結晶モデル (single crystal model), 649  
 男子トイレ (men's room), 892

単純梁 (simple beam), 32  
 弾性 (elasticity), 75  
 弾性荷重法 (elastic load method), 256  
 弾性係数 (elastic modulus), 76  
 弾性限界 (elastic limit), 816  
 弾性コンプライアンス (elastic compliance), 78  
 弾性テンソル (elastic tensor), 76  
 弾性ひずみ (elastic strain), 85, 87  
 弾性ポテンシャル (elastic potential), 79  
 弾性床 (elastic foundation), 196  
 弾性理論 (吊橋) (elastic theory of suspension bridge), 861  
 炭素繊維補強ポリマー (carbon-fiber-reinforced polymer), 81, 117  
 炭素当量 (carbon equivalent), 812  
 断面 1 次関数 (first sectional moment function), 188  
 断面 1 次モーメント (first sectional moment), 143  
 断面係数 (section modulus), 4, 9, 39, 144, 295, 835  
 断面形不変の仮定 (assumption of no cross-sectional deformation), 140  
 断面積 (cross-sectional area), 143  
 断面相乗モーメント (centrifugal moment), 346  
 断面 2 次モーメント (sectional moment of inertia), 4, 143  
 断面の主軸 (principal axis of cross sections), 346  
 単連結 (singly connected), 342

ち

遅延時間 (retardation time), 751  
 力の境界条件 (boundary condition of forces), 67, 147  
 置換 (permutation)  
   奇 (odd —), 69  
   偶 (even —), 69  
 置換テンソル (permutation tensor), 733  
 遅度 (slowness), 484  
 茶碗蒸し (Chawan-mushi, Japanese steamed egg custard with assorted ingredients), 800  
 ちゃんぽん (vidro), 279  
 中央差分 (central difference), 395, 423  
 鋳鉄 (cast iron), 812  
 中立 (neutral), 277  
 中立載荷 (neutral loading), 522, 530  
 中立軸 (neutral axis), 144  
 中立面 (neutral plane), 144  
 超音波探傷検査 (ultrasonic testing), 747, 855  
 跳開橋 (bascule bridge), 801  
 超関数 (distribution), 167  
 超関数的等号 (distributional equality), 487  
 超幾何関数 (hypergeometric function), 292  
 調質鋼 (heat treated steel), 814  
 超収束 (super-convergence), 222  
 超弾性 (hyperelasticity), 632, 638, 646  
 重複波 (standing wave), 491  
 直応力 (normal stress), 65  
 直接剛性法 (direct stiffness method), 227  
 チョコ・チップ (chocolate chips), 51  
 直交異方性 (orthotropy), 80  
 直交関数 (orthogonal function), 249, 365  
 直交性 (orthogonality)

弦の振動モードの (— of vibration mode of strings), 428  
 固有関数の (— of eigenfunction), 786  
 固有振動モードの (— of natural vibration mode), 415  
 固有ベクトルの (— of eigenvector), 782  
 梁の振動モードの (— of vibration mode of beams), 441  
 ベッセル関数の (— of Bessel functions), 796  
 膜の振動モードの (— of vibration mode of membranes), 433  
 直交モード (orthogonal mode), 415

つ

ツィーグラウのモデル (Ziegler's model), 550  
 追従力 (follower force), 289  
 ツィンマーマン効果 (Zimmermann effect), 451  
 つり合い式 (equilibrium equation)  
   板の面内の (— of in-plane forces of plates), 358  
   板曲げの (— of bending of plates), 359  
   極座標系の (— in polar coordinate system), 737  
   弦の (— of strings), 313  
   コーシー応力の (— of Cauchy stress), 614  
   ゴムの (— of rubber), 704  
   サン-ブナンのねじりの (— of Saint-Venant's torsion), 317  
   軸力の (— of axial forces in beams), 145  
   第 2 ピオラ・キルヒホッフ応力の (— of second Piola-Kirchhoff stress stress), 617  
   弾性床上のティモシェンコ梁-柱の (— of Timoshenko beam-columns on elastic foundation), 307  
   弾性床上の梁の (— of beams on elastic foundation), 196  
   弾性床上の梁-柱の (— of beam-columns on elastic foundation), 306  
   力の (— of forces), 67  
   ティモシェンコ梁の (— of Timoshenko beams), 691  
   ノミナル応力の (— of nominal stress), 615  
   梁-柱の (— of beam-columns), 282, 708  
   膜の (— of membranes), 372  
   曲げねじりの (— of flexural torsion), 332  
   曲げの (— of bending of beams), 145  
   モーメントの (— of moments), 67  
 吊構造 (suspension structure), 806  
 つるまきバネ (helical spring), 707

## て

TMCP 鋼 (Thermo-Mechanical Control Process steel), 744, 815  
 低温変態溶接材料 (low-temperature transformation weld material), 854  
 定ひずみ三角形要素 (constant strain triangle element), 259  
 ティモシェンコ梁 (Timoshenko beam), 194, 689  
 ディラックのデルタ関数 (Dirac's delta function), 100, 168, 391, 768  
 定理 (theorem)  
   ガウスの (Gauss's —), 68, 481  
   カスティリアノの第 2 (Castigliano's second —), 252, 687  
   極分解の (polar decomposition —), 592, 717  
   ケルビン・テイトの (— of Kelvin and Tait), 601

交代 (alternative —), 245, 798  
 コーシーの (Cauchy's —), 65  
 コーシーの積分 (Cauchy integral —), 447  
 三連モーメントの (three-moment —), 250  
 上下界 (upper-lower bound —), 573  
 相反 (reciprocal —), 177, 449  
 択一 (alternative —), 245, 798  
 発散 (divergence —), 68, 481  
 ピタゴラスの (Pythagorean —), 59, 308  
 フロケの (Floquet —), 476  
 ヘルムホルツ分解 (Helmholtz decomposition —), 106  
 ヘンキーの (Hencky's —), 565  
 ミューラ・ブレスローの (Müller-Breslau's —), 180  
 モールの (Mohr's —), 256  
 ディリクレ条件 (Dirichlet condition), 67, 147, 754  
 適合条件 (compatibility condition)  
   ひずみの (strain —), 62, 369  
 適合ひずみ (compatible strain), 62  
 デュアメル積分 (Duhamel's integral), 393, 445  
 デルタ関数 (delta function), 100, 168, 391, 768  
 転位 (dislocation), 90, 518  
   数学的 (mathematical —), 132, 547  
   刃状 (edge —), 506, 816  
   らせん (screw —), 506, 769  
 転位線 (dislocation line), 506, 547, 816  
 電子顕微鏡 (electron microscope)  
   走査型 (scanning —), 817  
   透過型 (transmission —), 816  
 添接板 (splice plate), 40, 850  
 テンソル (tensor), 56  
 テンソル積 (tensor product), 72  
 天端「てんたん」ではなく「てんば」 (level crown), 31

と

土圧 (earth pressure), 196  
 統一理論 (unification theory), [‘大統一理論’も参照せよ], 11  
 等価介在物法 (equivalent inclusion method), 770  
 透過型電子顕微鏡 (transmission electron microscope), 816  
 等角写像 (conformal transformation), 113  
 等価節点外力 (equivalent nodal force)  
   柱の (— of columns), 223  
   梁の (— of beams), 224  
 等速円運動 (circular motion with constant speed), 381  
 等体積波 (equivoluminal wave), 489  
 等体積変形速度 (rate of equivolumetric deformation), 607  
 動的増幅率 (dynamic magnification factor), 388  
 動的不安定 (dynamic instability), 291, 414  
 撓度理論 (吊橋) (deflection theory of suspension bridge), 862  
 豆腐 (tofu), 696  
 等方硬化 (isotropic hardening), 548, 823  
 等方性 (isotropy), 75  
 等方弾性 (isotropic elasticity), 75  
 等方テンソル (isotropic tensor), 78  
 動摩擦係数 (coefficient of kinematic friction), 385  
 トゥルーズデル応力速度 (Truesdell stress rate), 626  
 ト音記号 (G clef, treble clef), 1027

特異行列 (singular matrix), 244  
 特異摂動法 (singular perturbation method), 467, 468  
 特性長さ (characteristic length), 562, 585, 744  
 ドットプロダクト (dot product), 249  
 飛び移り (snap-through), 279  
 トラス (truss), 19, 198  
 ドラッカーの公準 (Drucker's postulate), 527  
 ドラッカー・プラーガーのモデル (Drucker-Prager's model), 553, 556  
 トレスカの降伏条件 (Tresca's yield condition), 89, 526  
 どんお (Erutarepmet), 755

## な

内積 (inner product)  
   重みつき (weighted —), 249, 415, 428, 441  
   極座標の (— in polar coordinate system), 433  
 内挿関数 (interpolation function), 223  
 内部摩擦角 (angle of internal friction), 557, 567  
 内力 (internal force), 18, 63  
 中桁 (inside girder, interior girder), 846  
 ナガサキアゲハ (Papilio memnon), 876  
 流れ関数 (stream function), 113  
 流れ則 (flow rule), 90, 511, 519, 528, 530  
 流れ理論 (flow theory), 90, 519  
 なし (pear), 1042  
 名無しの権兵衛 (Doe, John), 892  
 ナヴィエ・ストークスの式 (Navier-Stokes equation), 108  
 ナヴィエの解法 (Navier's solution), 365  
 軟化 (softening), 527, 533, 559  
 軟鋼 (mild steel), 812

## に

2次応力 (secondary stress), 805  
 2次形式 (quadratic form), 247  
 2重フーリエ級数 (double Fourier series), 365  
 入射波 (incident wave), 486  
 ニュートンの冷却法則 (Newton's law of cooling), 754

## ぬ

布目 (texture), 80, 644

## ね

ねじり定数 (torsional constant)  
   円管の (— of circular tubes), 318  
   円柱の (— of circular columns), 316  
   薄肉円管の (— of thin-walled circular tubes), 318  
   薄肉開断面の (— of thin-walled open sections), 327  
   薄肉多室閉断面の (— of thin-walled closed multicell sections), 323  
   薄肉長方形断面の (— of thin-walled rectangular sections), 327  
   薄肉閉断面の (— of thin-walled closed sections), 321  
 ねじり定数比 (torsional constants ratio), 336  
 ねじり率 (rate of change of twist), 316  
 ねじれ座屈 (torsional buckling), 352  
 熱影響部 (heat affected zone, HAZ), 854  
 熱拡散率 (heat diffusivity), 754

熱伝導率 (heat conductivity), 753  
 熱ひずみ (thermal strain), 102, 123, 680  
 熱膨張 (thermal expansion), 86  
 熱容量 (heat capacity), 753  
 粘性 (viscosity), 93, 505, 749  
 粘性減衰係数 (viscous damping coefficient), 382  
 粘弾性 (viscoelasticity), 198, 749  
 粘着力 (cohesion), 557, 567

## の

ノイマン条件 (Neumann condition), 67, 147, 754  
 のど厚 (throat), 190, 854  
 伸び (extension), 55, 142, 815  
 伸び<sup>§</sup> (elongation), 591  
 伸び剛性 (extensional stiffness), 144  
 伸びひずみ (extensional strain), 55, 597  
 ノミナル応力 (nominal stress), 613, 618  
 ノミナル応力速度 (nominal stress rate), 627  
 海苔巻き (sushi roll), 883  
 ノルム (norm), 249, 822  
 ノンコンパクト断面 (noncompact section), 582

## は

場 (field), 63  
 バーガースベクトル (Burgers vector), 132, 547  
 ハーゲン・ポアズイユ流れ (Hagen-Poiseuille flow), 109  
 パーソナルコンピュータ (personal computer), 37, 230  
 バレンブラットモデル (Barenblatt model), 「ダグデル・バレンブラットモデル」を見よ  
 排水装置 (drain), 36, 810  
 配置 (configuration)  
   基準 (reference —), 589  
   現 (current —), 588  
   初期 (initial —), 588  
 $\pi$  平面 ( $\pi$ -plane), 526, 822  
 バウシinger効果 (Bauschinger effect), 508, 548, 823  
 破壊進行領域 (fracture process zone), 744  
 破壊靱性 (fracture toughness), 134, 742, 743, 819  
 破壊力学 (fracture mechanics), 740, 820  
 白色雑音 (white noise), 402  
 薄膜類似 (membrane analogy), 342  
 刃状転位 (edge dislocation), [‘転位’も参照せよ], 506  
 柱 (column), 34, 139, 149  
 八面体応力 (octahedral stress), 89  
 罰金 (penalty), 98  
 発散定理 (divergence theorem, Gauss's theorem), 68, 481  
 パッシブダンパー (passive damper), 412  
 発展則 (evolution rule), 90, 519  
 波動方程式 (wave equation), 107, 197, 313, 372, 424  
 バネのフックの法則 (Hooke's law of spring), 680  
 幅 (Breite), 34  
 幅厚比 (depth-thickness ratio), 371, 837  
 バフティング (buffeting), 840  
 パプロヴィッチ・ノイバーのポテンシャル (Papkovich-Neuber potentials), 134

ハミルトンの原理 (Hamilton's principle), 247  
 はやぶさ (ED73 1005), 4  
 バラスト (ballast), 5  
 パラペット (parapet wall), 809  
 パラメトリック励振 (parametric oscillation), 476  
 梁 (beam), 30, 34, 139, 149  
 梁の曲げ振動 (bending vibration of beams), 198, 436  
 梁-柱 (beam-column), 281  
 梁-柱理論 (beam-column theory), 829  
 パワースペクトル密度関数 (power spectrum density function), 402  
 汎関数 (functional), 96, 246  
 鋳桁 (plate girder), 5, 804  
 ハンケル関数 (Hankel functions), 744  
 反作用モーメント (reaction moment), 29  
 反射波 (reflected wave), 486  
 板書体 (blackboard font), 57, 1027  
 反対称成分 (antisymmetric part), 603  
 バンド行列 (band matrix), 413  
 反変基底ベクトル (contravariant base vector), 732  
 反変成分 (contravariant component), 697, 731  
 反力 (reaction force), 17

## ひ

非圧縮性 (incompressibility), 83, 108, 522, 603  
 ピーク強度 (peak strength), 582  
 ビーチマーク (beach mark), 507, 820  
 ビードロ<sup>¶</sup> (vidro), 279  
 P波 (P-wave), 107  
 ビオ応力 (Biot stress), 618, 619  
 ビオのひずみ (Biot's strain), 597  
 ビオラ・キルヒホッフ応力 (Piola-Kirchhoff stress)  
   第1 (first —), 67, 616, 618  
   第2 (second —), 616, 619, 698  
 非回転波 (irrotational wave), 489  
 非回転変形速度 (rate of irrotational deformation), 607  
 非回転流 (irrotational flow), 110  
 非関連流れ則 (non-associated (non-associative) flow rule), 532, 553, 647  
 非共軸性 (noncoaxiality), 558  
 非局所理論 (non-local theory), 53, 562  
 非均質体 (inhomogeneity), 85  
 微小回転 (infinitesimal rotation), 58  
 微小変位理論 (infinitesimal displacement theory), 268  
 ひずみ (strain), 56  
   アルマンシの (Almansi —), 594  
   グリーン (Green —), 590, 697  
   工学 (engineering —), 80, 517  
   対数 (logarithmic —), 597  
   伸び (extensional —), 597  
   ビオの (Biot's —), 597  
 ひずみエネルギー (strain energy), 80, 96, 247

<sup>§</sup> ‘elongation’ という単語も「伸び」と訳されるが、異なる定義である上にひずみの尺度ではないので注意すること。

<sup>¶</sup> ‘vidro’ は元々ポルトガル語でガラスを指すが、「ビードロを吹く娘」と題した浮世絵の娘がこの玩具を吹いているのでこの名称がよく用いられる。地方によってその呼び方は異なるが、福岡の筥崎宮の放生会の際には「ちゃんぽん」という名称で売られている。もちろん長崎の代表的な麺とは無関係で、飛び移りで生じる音を擬した名称だ。

- ひずみエネルギー関数 (strain energy function), 79  
 ひずみエネルギー密度関数 (strain energy density function), 632  
 ひずみ勾配 (strain gradient), 562  
 ひずみの三角形分布 (linear distribution of bending strain), 142  
 ひずみの主方向 (principal direction of strain), 58, 73  
 ひずみの適合条件 (strain compatibility condition), 62, 369  
 非線形弾性 (nonlinear elasticity), 297  
 ピタゴラスの定理 (Pythagorean theorem), 59, 308  
 左極限 (left limit), 1025  
 左コーシー・グリーン変形テンソル (left Cauchy-Green deformation tensor), 593  
 左ストレッチテンソル (left stretch tensor), 593  
 非弾性 (inelasticity), 87, 505  
 非弾性座屈 (inelastic buckling), 298  
 非弾性ひずみ (inelastic strain), 85, 87  
 ビッカースの硬さ試験 (Vickers hardness test), 817  
 筆記体 (cursive letters), 757, 1027  
 ビッグバン (Big Bang), 730  
 引張強度 (tensile strength), 27, 300, 817, 827, 849  
 引張降伏応力 (tensile yield stress), 89, 517, 822  
 引張接合 (tensile-type bolted connection), 857  
 非適合ひずみ (incompatible strain), 516  
 非適合要素 (nonconforming element), 366  
 ビニルエステル樹脂 (vinyl-ester synthetic resin), 81  
 非破壊評価 (non-destructive evaluation), 747, 855  
 ひび割れ (crack), 189, 818  
 非保存力 (nonconservative force), 289  
 標構 (configuration), [‘配置’も参照せよ], 588  
 表面外力 (surface force), 67  
 表面波 (surface wave), 496  
 表面力 (traction), 64  
 平田靱負 (Hirata Yukie), 800  
 比例限界 (proportional limit), 816  
 比例減衰 (proportional damping), 421  
 疲労 (fatigue), 820  
 疲労破壊 (fatigue fracture), 507, 820
- ふ
- ファンデルポール振動子 (van der Pol oscillator), 470  
 フィーレンデール橋 (Vierendeel bridge), 10  
 フーリエ級数 (Fourier series), 249  
   2重 (double —), 365  
   複素 (complex —), 401  
 フーリエスペクトル (Fourier spectrum), 402  
 フーリエの法則 (Fourier’s law), 753  
 フーリエ変換 (Fourier transform), 401  
 フォークト定数 (Voigt constants), 76, 80  
 フォークトモデル (Voigt model), 583, 764  
 フォンカルマンの板理論 (von Kármán plate theory), 367, 836  
 フォンミーゼスの降伏条件 (von Mises yield condition), 89, 517, 526, 823  
 複合構造 (hybrid structures), 802  
 複合材料 (composite material), 83  
 複素応力関数 (complex stress function), 744  
 複素速度ポテンシャル (complex velocity potential), 113  
 複素フーリエ級数 (complex Fourier series), 401
- 腹板 (web), 6  
 複葉機 (biplane), 882, 883  
 部材 (member), 17  
 ブシネスク問題 (Boussinesq problem), 128, 135  
 不静定構造 (statically indeterminate structure), 50  
 不静定次数 (degree of statical indeterminacy), 47  
 不静定反力 (statically indeterminate force), 163  
 フックの法則 (Hooke’s law), 75, 821  
   1次元の (— in one dimension), 116  
   一般化された (generalized —), 79, 87  
   増分型 (incremental —), 523  
   バネの (— of spring), 680  
   平面応力の (— in plane stress), 115, 357  
   平面ひずみの (— in plane strain), 114, 258  
 物質点 (material point), 54, 589  
 物質導関数 (material [time] derivative), 108, 604  
 物質微分 (material differentiation), 604  
 物体力 ((specific) body force), [‘体積力’も参照せよ], 66  
 太さパラメータ (thickness parameter), 707  
 負の面 (surface to the negative direction), 30, 66  
 不変量 (invariant), 72  
   応力の (— of stress), 72  
   応力の第1 (first — of stress), 74  
   ひずみの第1 (first — of strain), 73  
   偏差応力の第2 (second — of deviatoric stress), 77, 516  
   偏差応力の第3 (third — of deviatoric stress), 516  
   偏差ひずみの第2 (second — of deviatoric strain), 77  
 豚まん (Buta-man), 883  
 プラガーのモデル (Prager’s model), 549  
 フラッター (flutter), 840  
 フラマンの解 (Flamant solution), 128  
 ブランコ (swing), 476  
 フランジ (flange), 6  
 プラントル・ロイスの式 (Prandtl-Reuss’s equation), 90, 520, 525, 529  
 浮力 (buoyancy), 112  
 ふるい特性 (sifting property), 168  
 ブレーストリブ (braced-rib), 8  
 プレートガーダ (plate girder), 5, 804  
 フレドホルムの定理 (Fredholm alternative), 798  
 プログラム (program), 233, 237, 261  
 フロケの定理 (Floquet theorem), 476  
 分岐荷重 (bifurcation load), 270  
 分岐現象 (bifurcation phenomenon), 277  
 分岐座屈 (bifurcation buckling), 278  
 分岐条件 (bifurcation condition), 272  
 分岐点 (bifurcation point), 270, 278  
 分散的 (dispersive), 500
- へ
- へ (fly, volcanic ash, fart), 1024  
 平均応力 (average stress), 74, 821  
 平衡方程式 (equilibrium equation), [‘つり合い式’も参照せよ], 67  
 閉断面 (closed section), 319, 804  
 平方根 (square root), 1027  
 平面応力 (plane stress), 115

平面ひずみ (plane strain), 114  
 塑性的 (plastically —), 555, 563, 570, 654  
 ページ (ウェブ) (Web Page), iv  
 ヘ音記号 (F clef, bass clef), 1027  
 べき乗則 (power law), 559  
 ベッセル関数 (Bessel functions), 291, 432  
 ベッティの相反定理 (Betti's reciprocal theorem), 101, 177  
 ペナルティ法 (penalty method), 704  
 ヘビサイド関数 (Heaviside function), 392, 487  
 ヘリコプター (helicopter), 877, 884, 910  
 ヘルツの解 (Hertz solution), 129  
 ベルヌーイ・オイラーの仮定 (Bernoulli-Euler assumption), 140  
 ベルヌーイの式 (Bernoulli equation), 111  
 ヘルムホルツ分解定理 (Helmholtz decomposition theorem), 106  
 変位 (displacement), 54, 589  
 変位関数 (displacement function), 223  
 変位勾配 (displacement gradient), 58, 591  
 変位の境界条件 (boundary condition of displacements), 67, 147  
 変位法 (displacement method), 236  
 偏角の原理 (principle of the argument), 498  
 ヘンキーの定理 (Hencky's theorem), 565  
 変形 (deformation), 54  
 変形勾配 (deformation gradient), 589  
 変形速度 (deformation rate, rate of deformation), 602  
 変形テンソル (deformation tensor)  
 左コーシー・グリーン (left Cauchy-Green —), 593  
 右コーシー・グリーン (right Cauchy-Green —), 590  
 偏差応力 (deviatoric stress), 74, 821  
 偏差応力の第2 不変量 (second invariant of deviatoric stress), 77, 516  
 偏差応力の第3 不変量 (third invariant of deviatoric stress), 516  
 偏差ひずみ (deviatoric strain), 60, 821  
 偏差ひずみの第2 不変量 (second invariant of deviatoric strain), 77  
 変態 (transformation), 813  
 辺長比 (aspect ratio), 371, 837  
 変調振り子 (modulated pendulum), 472  
 変分原理 (variational principle), 246  
 変分問題 (variational problem), 246

## ほ

ポアゾユ流れ (Poiseuille flow), 「ハーゲン・ポアゾユ流れ」を見よ  
 ポアソン比 (Poisson's ratio), 75  
 一般化された (generalized —), 81  
 ポアンカレの周波数シフト (Poincaré frequency shift), 469  
 棒 (bar), 139, 149  
 崩壊 (collapse), 571  
 法線則 (normality rule), 528  
 棒の縦振動 (longitudinal vibration in bars), 197  
 包絡線 (envelope), 823

◇ 表記ではオリジナルの文献 [69] を尊重したが、通常「ッ」は付けない。「微視的力学」という一般名詞ではなく、村外志夫先生による造語の固有名詞。ある辞書 [188] にはその固有名詞の方の意味が載っている。

ホームレス (homeless person), iv  
 補仮想仕事の原理 (principle of complementary virtual work), 95, 98, 251  
 補剛材 (stiffener)  
 垂直 (vertical —), 36, 40, 850  
 水平 (horizontal —), 40, 850  
 舗装 (pavement), 5  
 細長比 (slenderness ratio), 254, 285, 829  
 ティモシェンコ梁の (— of Timoshenko beams), 691  
 曲げねじりの (— for flexural torsion), 336  
 細長比パラメータ (slenderness parameter), 297, 830  
 横倒れ座屈の (— for lateral buckling), 353, 833  
 保存則 (law of conservation)  
 運動量 (— of momentum), 391  
 エネルギー (— of energy), 380  
 質量 (— of mass), 591  
 保存的 (conservative), 79  
 保存力 (conservative force), 289  
 ポテンシャルエネルギー (potential energy), 「全ポテンシャルエネルギー」を見よ  
 歩道橋 (pedestrian bridge), 376  
 骨組 (frame), 34, 149, 198, 806  
 補ひずみエネルギー (complementary strain energy), 251, 253  
 補ポテンシャルエネルギー (complementary potential energy), 「全補ポテンシャルエネルギー」を見よ  
 保有水平耐力 (ultimate lateral strength), 570  
 ホワイトノイズ (white noise), 「白色雑音」を見よ  
 ホワイトボード (whiteboard), 1006  
 本質的境界条件 (essential boundary condition), 67, 147, 218  
 ボン ミーゼス? おいおい! ある発表会で実際に社会人が使ったので驚いた! 日本の大学教育はどうなってしまうのか?, 「フォン ミーゼスの降伏条件」を見よ!

## ま

マーフィーの法則 (Murphy's law), 12, 210  
 マイクロメカニクス<sup>o</sup> (Micromechanics), 1036  
 曲がり梁 (curved beam), 139  
 膜 (membrane), 372  
 マクスウェルの相反定理 (Maxwell's reciprocal theorem), 101, 177  
 マクスウェル モデル (Maxwell model), 752  
 枕木 (sleeper, crosstie), 5  
 曲げ圧縮強度 (flexural compressive strength), 41, 179, 353, 833, 851  
 曲げ剛性 (flexural rigidity)  
 板の (— of plates), 358  
 梁の (— of beams), 9, 144  
 曲げ振動 (bending vibration), 198, 436  
 曲げねじり剛性 (flexural-torsional stiffness), 331  
 曲げねじりモーメント (flexural-torsional moment), 331  
 曲げ引張強度 (flexural tensile strength), 41, 180, 353, 833, 851  
 曲げモーメント (bending moment), 4, 29, 30, 143  
 曲げモーメント図 (moment diagram), 30  
 摩擦接合 (friction grip connection), 857

- マシユウ方程式 (Mathieu equation), 472  
マトリックス構造解析 (matrix analysis of structures), 229, 695
- み
- ミーゼスの降伏条件 (Mises yield condition), 「フォンミーゼスの降伏条件」を見よ  
ミウラ折り (Miura-ori, Miura folding), 875  
右 (right), 327  
右極限 (right limit), 1025  
右コーシー・グリーン変形テンソル (right Cauchy-Green deformation tensor), 590  
右ストレッチテンソル (right stretch tensor), 592  
溝形鋼 (channel), 812  
溝形断面 (channel section), 194, 337  
密度 (mass density), 591  
皆 (everyman), 326  
耳桁 (outside girder, exterior girder), 846  
ミュラー・ブレスローの定理 (Müller-Breslau's theorem), 180  
ミラー指数 (Miller index), 518  
ミンドリン・ライスナー板 (Mindlin-Reissner plate), 356
- む
- 無意味な解 (trivial solution), 285, 287, 301, 828  
ムーニー・リブリンモデル (Mooney-Rivlin model), 636  
矛盾 (contradiction), 144, 325, 357  
むしろ (straw mat), 80, 644
- め
- 冥王星 (Pluto), 1038  
めじろ (*Zosterops japonica*), 1014  
面 (surface)  
  正の (— to the positive direction), 30, 66  
  負の (— to the negative direction), 30, 66  
面外波 (antiplane wave), 490  
免震支承 (base-isolator), 809  
面心立方晶 (face-centered cubic crystal), 518, 814  
面積座標 (area coordinate), 263  
面内波 (in-plane wave), 490
- も
- 毛利元就 (Mouri, Motonari), 5  
モード (mode)  
  固有振動 (natural vibration —), 408  
  座屈 (buckling —), 285, 288, 829, 832  
  振動 (vibration —), 408, 414, 427, 431, 438  
  直交 (orthogonal —), 415  
モード解析法 (modal analysis)  
  多自由度系の (— of multi-degree-of-freedom system), 417  
  梁の (— of beam), 440  
モード変換 (mode conversion), 493  
モーメント分配法 (moment distribution method), 250  
モール・クーロンの破壊規準 (Mohr-Coulomb's failure criterion), 556, 567  
モールの応力円 (Mohr's stress circle), 564  
モールの定理 (Mohr's theorem), 256  
モールのひずみ円 (Mohr's strain circle), 117  
木橋 (timber bridge), 800  
持ち帰り袋 (doggie bag), 373  
木琴 (xylophone), 198  
モデル (model)  
  ガーソン (Gurson damage —), 584  
  ケルビン (Kelvin —), 750  
  ケルビン・フォークト (Kelvin-Voigt —), 382  
  現象論的 (phenomenological —), 562  
  シャンレイ (Shanley —), 299  
  震源 (seismic source —), 169  
  ダグデル・パーレンブラット (Dugdale-Barenblatt —), 744  
  ツィーグラの (Ziegler's —), 550  
  ドッカー・プラーガーの (Drucker-Prager's —), 553, 556  
  フォークト (Voigt —), 583, 764  
  プラーガーの (Prager's —), 549  
  マクスウェル (Maxwell —), 752  
  ムーニー・リブリン (Mooney-Rivlin —), 636  
  ロイス (Reuss —), 584, 764  
ものさし (measure, rule), 249
- や
- ヤウマン応力速度 (Jaumann stress rate), 624  
ヤウマン速度 (Jaumann rate)  
  キルヒホッフ応力の (— of Kirchhoff stress), 624  
  コーシー応力の (— of Cauchy stress), 624  
焼入れ (quench hardening), 814  
焼なまし (annealing), 814  
焼きならし (normalizing), 814  
焼戻し (tempering), 814  
八木山第1公園 (Yagiyama first park), 476  
ヤコビアン (Jacobian), 591  
山形鋼 (angle), 812  
ヤング率 (Young's modulus), 75, 816  
  一般化された (generalized —), 81
- ゆ
- ユークリッド幾何学 (Euclidean geometry), 355  
有限帯板法 (finite strip method), 220  
有限回転 (finite rotation), 592  
有限変位理論 (finite displacement theory), 268  
  線形化された (linearized —), 275  
有限変形 (finite deformation), 587  
有限要素 (finite element), 222  
  拡散の (— for diffusion), 264  
  浸透流の (— for seepage flow), 264  
有限要素法 (finite element method, FEM), 222  
  アダプティブ (adaptive —), 263  
  拡張 (X- —), 263  
有効座屈長 (effective length of buckling), 288, 832  
有効座屈長係数 (coefficient of effective length), 288, 832  
有効幅 (effective width), 194, 853  
歪み (distortion), 57

## よ

余因子行列 (cofactor matrix), 50, 591, 767  
 陽解法 (explicit integration method), 396  
 溶接 (welding), 190, 299  
 要素剛性方程式 (element stiffness equation)  
   弾性床上の梁の (— of beams on elastic foundation), 241  
   ティモシェンコ梁の (— of Timoshenko beams), 695  
   ねじりの (— of torsion), 343  
   柱の (— of columns), 223  
   梁の (— of beams), 224  
   梁の動的 (— of beams in motion), 242  
   梁-柱の (— of beam-columns), 300, 709  
   平面トラスの (— of planar trusses), 232  
   平面ひずみ問題の (— for plane strain problems), 260  
   平面骨組の (— of planar frames), 235  
   有限変位ティモシェンコ梁の (— of Timoshenko beams in finite displacements), 717  
   有限変位平面骨組の (— of planar frames in finite displacements), 717  
   立体骨組の (— of space frames), 347  
 ヨウマン応力速度 [第1著者はこう発音してきたか?] (Jau-mann stress rate), [‘ヤウマン応力速度’も参照せよ], 624  
 ヨーヨー風船 (yo-yo balloon), 390  
 横荷重 (lateral force), 30  
 横桁 (cross beam), 5, 20, 36, 809  
 横倒れ座屈 (lateral-torsional buckling, lateral buckling), 352, 833  
 横等方 (transversely isotropic), 81  
 横波 (transverse wave), 107, 489  
 横ねじれ座屈 (lateral-torsional buckling, lateral buckling), 352, 833

## ら

ラーフル (rafel), 800  
 ラーメン (Rahmen), 34, 149, 198  
 ラーメン構造 (frame), 806  
 ラグランジュ関数 (Lagrange function), 247  
 ラグランジュ的記述 (Lagrangian description), 108, 590  
 ラグランジュの未定乗数 (Lagrange multiplier), 98, 215, 310, 312, 703  
 ラグランジュ方程式 (Lagrange equation), 247  
 らせん転位 (screw dislocation), [‘転位’も参照せよ], 506  
 落橋防止装置 (aseismic connector, structure for falling prevention of bridge), 36, 810  
 ラブ波 (Love wave), 499  
 ラメ定数 (Lamé constants), 75  
 ラメラテア (lamella tear), 855  
 欄干? 正しい土木技術者は用いないので, 「高欄」を見よ!  
 ランダウの記号 (Landau's symbol), 294  
 ランプ (ramp), 35

## り

リーマン幾何学 (Riemannian geometry), 355  
 力学的境界条件 (static boundary condition), 67, 147  
 理想的へき開強度 (ideal fracture (tensile) strength), 739  
 リッツ法 (Ritz method), 247

立方晶 (cubic crystal), 80  
   体心 (body-centered —), 814  
   面心 (face-centered —), 518, 814  
 リブ (rib), 8  
 リミットサイクル (limit cycle), 470  
 留数 (residue), 447  
 流跡線 (trajectory), 594  
 流線 (streamline), 111, 113  
 リューダース帯 (Lüders band), 622, 652, 673  
 履歴依存性 (history-dependency), 523, 539  
 理論 (theory)  
   ガーソン (Gurson's —), 584  
   換算係数 (reduced modulus —), 298  
    $J_2$  流れ ( $J_2$  flow —), 532  
   初等梁 (elementary beam —), 140  
   すべり線 (slip line —), 563  
   接線係数 (tangent modulus —), 298  
   線形化された有限変位 (linearized finite displacement —), 275  
   全ひずみ (deformation —, total-strain —), 90, 512, 524, 559  
   増分 (incremental —), 90, 519  
   損傷 (damage —), 583  
   大統一 (Grand Unification —), 11  
   大変位 (large displacement —), 268  
   流れ (flow —), 90, 519  
   梁-柱 (beam-column —), 829  
   非局所 (non-local —), 53, 562  
   微小変位 (infinitesimal displacement —), 268  
   フォン カルマンの板 (von Kármán plate —), 367, 836  
   有限変位 (finite displacement —), 268  
   大変形 (large deformation —), 268, 587  
 臨界減衰 (critical damping), 383

## る

累積塑性ひずみ (accumulated plastic strain), 517  
 ルジャンドル多項式 (Legendre polynomials), 435

## れ

零式艦上戦闘機 (Zero Fighter), 10  
 0.2% オフセット耐力 (0.2% offset yield strength), 817  
 レイノルズ数 (Reynolds number), 109  
 レイリー減衰 (Rayleigh damping), 421  
 レイリー波 (Rayleigh wave), 496  
 レイリー・リッツ法 (Rayleigh-Ritz method), 247  
 レール (rail), 5  
 煉瓦 (brick), 804  
 連鎖律 (chain rule), 604  
 連続体 (continuum), 53  
 連続の式 (equation of continuity), 108, 603  
 連続梁 (continuous beam), 49, 160, 165  
 錬鉄 (wrought iron), 812

## ろ

ロイスモデル (Reuss model), 584, 764  
 ロード角 (Lode angle), 527  
 ロゼットゲージ (rosette gauge, strain-gauge rosette), 116



六方晶 (hexagonal crystal), 80  
 ロハ (free of charge), iv  
 ロピタルの定理 (l'Hôpital's rule), 1020  
 ロビン条件 (Robin condition), 68, 148, 754

## わ

矮惑星 (dwarf planet), 1038  
 湧き出し (source), 109  
 藁 (straw), 804

## み

みや (courtesy), 1006

## ゑ

ゑ (picture), 984

## を

遠方 (far field), 197

## ん

んだもしたん! (ㇿㇿㇿㇿ), 267

## 橋梁の写真

Esplanade Riel Bridge (エスプラナード・リエル橋), 376  
 Machinac Bridge (マキノー橋, マキナック橋), 504, 748  
 Michigan Avenue Bridge (ミシガン通り橋), 801  
 Wabash Avenue Bridge (ウォバッシュ通り橋), 52, 376  
 赤石橋 (Akaishi Bashi), 805, 879  
 明石海峡大橋 (Akashi Kaikyo-u Oh-hashii), 806  
 東橋 (Azuma Bashi), 354  
 岩黒島橋 (Iwagurojima Bashi), 14, 808  
 牛越橋 (Ushigoe Bashi), 3, 5, 31, 36, 810, 880  
 牛根大橋 (Ushine Oh-hashii), 688  
 大橋 (Oh Hashi), 8  
 大鳴門橋 (Oh Naruto Kyo-u), 2  
 小川橋 (Ogawa Bashi), 803  
 御霊屋橋 (Otamaya Bashi), 8  
 かずら橋 (Kazura Bashi), 13, 803  
 北備讃瀬戸大橋 (Kita Bisan Seto Oh-hashii), i  
 錦帯橋 (Kintai Kyo-u), 800  
 来島海峡大橋 (Kurushima Kaikyo-u Oh-hashii), 314, 807  
 黒之瀬戸大橋 (Kuronoseto Oh-hashii), 586  
 気仙沼大島大橋 (Kesen-numa Ohshima Oh-hashii), 678  
 高麗橋 (Kourai Bashi), 678  
 児島-坂出ルート (Kojima-Sakaide Route), 504  
 酒田みらい橋 (Sakata Mirai Kyo-u), 137  
 山王川橋梁 (San-noh-gawa Kyo-u-ryo-u), 586  
 下津井瀬戸大橋 (Shimotsui Seto Oh-hashii), 808  
 松齡橋 (Shourei Bashi), 482, 762  
 多々羅大橋 (Tatara Oh-hashii), 12  
 伊達橋 (Date Bashi), 7, 805  
 天保山大橋 (Tenpouzuan Oh-hashii), 138  
 十綱橋 (Totsuna Bashi), 8  
 仲の瀬橋 (Nakanose Bashi), 804  
 西田橋 (Nishida Bashi), 696, 803  
 伯方大島大橋 (Hakata Ohshima Oh-hashii), 808  
 櫃石島橋 (Hitsuishijima Bashi), 14, 808  
 ひより台大橋 (Hiyoridai Oh-hashii), 813

広島空港大橋 (Hiroshima Airport Oh-hashii), 805  
 琵琶湖疎水アーチ橋 (Biwako Sosui Arch), 502  
 南備讃瀬戸大橋 (Minami Bisan Seto Oh-hashii), i, 9, 807  
 最上橋 (Mogami Bashi), 730  
 ものつくり大FRP橋 (Monotsukuri Univ. FRP bridge), 780  
 ラーメン (頬杖) 橋 (Rahmen bridge), 806

## 情報処理関連

assembler (アセンブラ), 919  
 assembly language (アセンブリ言語), 918  
 binary notation (2進法), 917  
 bisection method (2分法), 973  
 cancellation error (桁落ち), 930  
 Central Processing Unit (中央処理装置), 918  
 compiler (コンパイラ), 919  
 CPU, Central Processing Unit (中央処理装置), 918  
 debug (デバッグ), 913, 921, 962  
 directory (ディレクトリ), 889  
 entropy (情報量), 926  
 extension (拡張子), 888  
 file (ファイル), 887  
 folder (フォルダ), 889  
 hardware (ハードウェア), 889  
 hexadecimal notation (16進法), 917  
 high-level programming language (高級言語, 高レベルプログラミング言語), 918  
 home position (ホームポジション), 944  
 interpreter (インタープリタ), 919  
 kernel (カーネル), 887  
 kerning (カーニング), 900  
 keyboard (キーボード), 944  
 ligature (合字), 900  
 logic circuit (論理回路), 917  
 machine language (機械語), 918  
 mnemonic (ニーモニック), 918  
 Newton-Raphson method (ニュートン・ラプソン法), 974, 975  
 Operating System (オーエス), 887  
 pipe (パイプ), 894  
 prompt (プロンプト), 890  
 redirection (リダイレクション), 893, 895, 937  
 register (レジスタ), 918  
 shareware (シェアウェア), 941  
 significant digits, significant figures (有効数字), 930  
 software (ハードウェア), 887  
 source (ソース), 887  
 URL, Uniform Resource Locator (ユールエル), 914  
 アセンブラ (assembler), 919  
 アセンブリ言語 (assembly language), 918  
 インタープリタ (interpreter), 919  
 オーエス (Operating System), 887  
 カーニング (kerning), 900  
 カーネル (kernel), 887  
 拡張子 (extension), 888  
 キーボード (keyboard), 944  
 機械語 (machine language), 918  
 桁落ち (cancellation error), 930

- 高級言語 (high-level programming language), 918  
 合字 (ligature), 900  
 高レベルプログラム言語 (high-level programming language), 918  
 コンパイラ (compiler), 919  
 シーピーユー (CPU, Central Processing Unit), 918  
 シェアウェア (shareware), 941  
 16 進法 (hexadecimal notation), 917  
 情報量 (entropy), 926  
 ソース (source), 887  
 ソフトウェア (software), 887  
 中央処理装置 (CPU, Central Processing Unit), 918  
 ディレクトリ (directory), 889  
 デバッグ (debug), 913, 921, 962  
 ニーモニック (mnemonic), 918  
 2 進法 (binary notation), 917
- Fancy English  
 Beats me! (私を殴れ!), 14  
 Biscuit (クッキー, ん!), 373  
 Bullshit (牛の糞), 748  
 Caesar (7 月), 314  
 Caucasian (カフカス人), 799  
 Chances are (勝ち目は?), 780  
 Chicken (かしわ), 748  
 Close but no cigar! (閉めたら葉巻はやるな!), 394  
 Closed (接続された), 695  
 Cohesive tape (粘着テープ), 883  
 Couple of (カップルの), 884  
 Dark or white? (黒か白か?), 1027  
 Dry town (埃っぽい街), 137  
 Edward (日本人名は発音し難い?), 586  
 Excuse me? (すみませんか?), 266
- Four-letter word (ん!?), 374  
 French fries (仏製フライパン), 882  
 Gesundheit! (健康!?), 696  
 Goof off (へまをする), 481  
 Grand (傲慢な), 884  
 Guess what! (何かを推測せよ!), 780  
 Headquarters (本社), 756  
 I mean (私は意地悪だ), 1012  
 Lazybones (ゆるい骨), 481  
 Maine (メイン州?), 762  
 Niner? (もっと 9?), 52  
 No offense (専守防衛), 759  
 On the house (屋根に上げろ!), 137  
 Pancake (ホットケーキ), 373  
 PhD, MS & BS (学位), 748  
 Pissed off (小便をもらす), 481  
 Push or pull? (ドアは押す・引く?), 314
- 2 分法 (bisection method), 973  
 ニュートン・ラプソン法 (Newton-Raphson method), 974, 975  
 ハードウェア (hardware), 889  
 パイプ (pipe), 894  
 ファイル (file), 887  
 フォルダ (folder), 889  
 プロンプト (prompt), 890  
 ホームポジション (home position), 944  
 虫取り (debug), 913, 921, 962  
 ユーアールエル (URL, Uniform Resource Locator), 914  
 有効数字 (significant digits, significant figures), 930  
 リダイレクション (redirection), 893, 895, 937  
 レジスタ (register), 918  
 論理回路 (logic circuit), 917
- Say when! (一体いつになるんだ!), 942  
 See no evil (猿を見るな!), 14  
 See you tomorrow! (明日間に合わない!), 210  
 Sure! (自信を持って!), 266  
 Syllabus yearbook (卒業アルバム), 501  
 Take care! (面倒を見ろ!), 729  
 Take it easy! (気楽にしろ!), 729  
 Talented waitress (賢い給仕), 482  
 Tell you what (何を話そうか?), 780  
 Vanilla? (バナナ?), 51  
 Whatchamacallit (!◎△#☆?), 137  
 What's up? (何が上にな?), 1012  
 What time do you have? (どんな時を過ごしてるんだ?), 374  
 You bet! (君が賭けろ!), 266  
 You know! (君は知るぞ!), 1012

## あとがき

一般的な教科書にあとがきは無いですが、さほど重要ではない備忘録程度の情報を少しだけ書いておきます。まず現在のところこの文書の大半を第1著者が書いてきておりますので、文責はほぼ100%岩熊にあると考えてください。

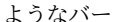
さてこの文書作成のきっかけは西野文雄先生の還暦で、異なる大学で教育を担当していた教員で一つの教科書案を分担執筆しようとしたことでした。ただ岩熊が東北大学では担当していない講義に関する内容が書けなかったこと等が原因で実現できませんでした。しかし、力学教育に関する委員会報告（東京大学の堀井秀之先生設立のものに加えて、つくば大学の西岡隆先生設立の委員会のものも含めて）からも感じられるように、大学毎に教える内容にかなりの差異があることから、誰をターゲットにした教科書にするかという点でまとめ難かったという印象も岩熊個人は持っております。したがって、執筆分担者すら教科書として使えない本になるかもしれず、刊行後に売れない可能性があります。呵呵。そういった状況が、大学毎に別々の教科書を執筆・使用しておられていて標準教科書のようなものが存在しない理由だと想像できます。現にこの文書も少なくない方々から難し過ぎる<sup>†</sup>というコメントをいただいています。また東北大学工学部の他学科の様子を眺めてみても、変形できる物体の力学教育の重要性・新規性が下がっているようにも感じていて、既存の教科書で学部教育は十分カバーできるような状況にあるとも思われました。

このような経緯の2年後くらいから、岩熊が部分的な内容をつぎはぎしたものをインターネット上で公開しておりました。3年生のときに初めて有限要素法の講義を受けたときや、そのあとの米国における応用数学や弾性論・連続体力学・破壊力学等の講義で、仮想仕事の原理という道具がいろんな箇所でも重要だということを感じておりました。西野先生からいただいた卒業研究でも仮想仕事の原理が必要不可欠でした。そのあと京都大学の田村武先生の教科書 [152] のサブタイトルを見て期待したのですが、残念ながら田村先生の教科書はやや物足りなく感じました。ポリウムから推測して、田村先生が書きたかったことが十分には含められなかったのだらうと思います。さらに、1985年頃存在した力学勉強の若手の会（東京大学の堀井秀之先生設立のMOM）で知り合った大学や機関・会社の応用力学や地盤工学等の研究者から、より正確な力学を教えてもらったのも大いに刺激になりました。というわけでこの文書は、いろんな方々から教えてもらった内容のうち岩熊が理解できたことをほぼそのまま流用して、まえがきにも書いたように仮想仕事の原理を背骨にした文書に仕上げようと奮闘したものです。

したがってその内容は、現役の技術者にはほとんど役に立ちません。また就職試験や公務員試験・大学院入試を受けようとする4年生にもあまり役立ちません。どうか役立ちそうなのは修士課程の学生で、既存の理屈がどのような考え方と道具で作られているかを学ぶ（復習する）ことができるのではないかと期待しています。修士研究の初期の段階で少しだけ役立つのではないかと、研究の本質的かつ本格的な挑戦へのドアを押し開くのになんとだけ力を貸すことができるのではないかと、というのがこの文書の内容とレベルだと考えられます。現場で新しい問題に対処しようとしている若手技術者や初めて触れる課題に挑もうとしている若手研究者の役にちょっとでも立てれば幸いです。

さてこの文書では標準的な $\LaTeX$ では用意されていない表現を多数使っていますが、それもいろんな人達が準備してくれたパッケージを利用・流用させてもらって実現しています。なお写真は図表と同じようなフロートとして新しく追加定義しました。あまり多くの人が使っていないと思われるスタイルファイルについて簡単に説明しておきます。

**alltt.sty:**  $\LaTeX$  コマンドのいくつかを `verbatim` 環境に似た環境の中で使うことができます。例えば付録 N のコマンドラインの例示に改行マーク  $\backslash\CR$  を使う等ができます。

**bc128.sty:** 奥付にあるようなバーコード  を生成できます。

**boondox-cal.sty:** `\cal` を小文字にも拡張定義し、`Boondox` のフォントを使って表示できます。なにしろ数学記号はかなり限定されて不足気味ですので、この小文字が使えるのはとても便利です。


**boondox-frak.sty:** ドイツ語の花文字のような数学記号の `Boondox` のフォントを表示できます。索引見出しに使ってみました。

**boxedminipage.sty:** `minipage` 環境を枠付きの箱に入れることができます。例えば付録 N の  $\LaTeX$  ソース表示等に使ってあります。

<sup>†</sup> この文書の基本的な参考書の一つの西野先生と長谷川先生による教科書案 [171, 172] にも同様のコメントをもらったことがあります。


<sup>\*</sup> 実は第1著者は $\TeX$ システムを長い間更新していません。使ったものは $\J\LaTeX$  [ $\J\TeX$ , Version 2.2, based on  $\TeX$  Version 3.14159265 ( $\TeX$  Live 2016/W32 $\TeX$ ) (preloaded format=jlatex 2016.10.19)] と  $\LaTeX 2_{\epsilon}$  [2016/03/31 patch level 3] および `mendex` [version 2.6f (14-Aug-2009)] です。



岩熊 哲夫   
IWAKUMA, Tetsuo

Stardate

- [-38]0526 セクター 001 地球日本国福岡県久留米市に生れる
- [-34]0756 同国鹿児島で教育を受け、東京で Academy 卒業
- [-34]4406 同 Academy で修士取得
- [-33]3691 Deep Road 980 機関部配属; Lieut. Jr. Grade
- [-33]3931 地球米国 Illinois 州の Academy で PhD 取得
- [-33]7806 Lieutenant
- [-31]3026 Lieutenant Commander
- [-27]5633 引退し、Starbase 890 で隠遁

小山 茂   
KOYAMA, Shigeru

- [-36]2860 セクター 001 地球日本国宮城県仙台市に生れる
- [-32]6320 同国宮城で教育を受け Academy 卒業
- [-32]9976 同 Academy で修士取得
- [-31]5455 Deep Road 980 機関部配属; Ensign
- [-31]7286 同 Academy で博士 (工学) 取得
- [-31]9111 Starbase 380 機関部配属; Ensign
- [-28]1026 Lieutenant

著者へのメール連絡は



## 構造と連続体の力学基礎

熊でもわかる変形できる物体の力学

I'VE GOT A BAD HEADACHE IN LEARNING MECHANICS OF STRUCTURES AND CONTINUA!

|                   | 初 版              | 1998 年 1 月 13 日 (宇宙暦 [-30]0546.6) |
|-------------------|------------------|-----------------------------------|
| 第 2 版             | 1998 年 3 月 21 日  | ([-30]0882.1)                     |
| 第 3 版             | 1998 年 8 月 23 日  | ([-30]1656.9)                     |
| 第 4 版             | 1999 年 1 月 10 日  | ([-30]2356.1)                     |
| 第 5 版             | 1999 年 11 月 28 日 | ([-30]3965.2)                     |
| 第 6 版             | 2000 年 7 月 2 日   | ([-30]5050.5)                     |
| 第 7 版             | 2001 年 2 月 4 日   | ([-30]6136.4)                     |
| 第 8 版             | 2001 年 8 月 18 日  | ([-30]7110.1)                     |
| 第 9 版             | 2002 年 6 月 29 日  | ([-30]8685.2)                     |
| 第 10 版            | 2002 年 11 月 9 日  | ([-30]9351.1)                     |
| 第 11 版            | 2004 年 1 月 11 日  | ([-29]1491.4)                     |
| 第 12 版            | 2005 年 5 月 8 日   | ([-29]3906.4)                     |
| 第 13 版            | 2006 年 2 月 12 日  | ([-29]5306.2)                     |
| 第 14 版            | 2007 年 5 月 3 日   | ([-29]7531.7)                     |
| 第 15 版            | 2008 年 3 月 21 日  | ([-29]9145.8)                     |
| 第 16 版            | 2009 年 1 月 4 日   | ([-28]0591.7)                     |
| 第 17 版            | 2010 年 1 月 11 日  | ([-28]2451.6)                     |
| 第 18 版            | 2010 年 8 月 21 日  | ([-28]3561.3)                     |
| 第 19 版            | 2011 年 1 月 8 日   | ([-28]4261.7)                     |
| 第 20 版            | 2012 年 1 月 7 日   | ([-28]6080.0)                     |
| 第 21 版            | 2013 年 1 月 2 日   | ([-28]7886.3)                     |
| 第 22 版            | 2014 年 1 月 2 日   | ([-28]9710.6)                     |
| 第 23 版            | 2015 年 1 月 2 日   | ([-27]1535.9)                     |
| 第 24 版            | 2016 年 1 月 31 日  | ([-27]3506.2)                     |
| 第 25 版            | 2017 年 3 月 21 日  | ([-27]5580.6)                     |
| 第 26 版            | 2018 年 1 月 21 日  | ([-27]7110.6)                     |
| 第 27 版            | 2019 年 8 月 29 日  | ([-26]0036.2)                     |
| β <sub>47</sub> 版 | 2023 年 11 月 27 日 | ([-26]7790.3)                     |

なお第 10 版までのタイトルは「数値利器楽の構造利器が苦うー構造と連続体の力学基礎を  
独習する」で、そのあと第 25 版までは同じサブタイトルに「難徒劣苦表有速編荷苦痛」だった。  
ただし英語サブタイトルは初版から不規則に変化し続けてきている。



Copyright © 1998-2002 岩熊 哲夫, 2004-2019, 2023 岩熊 哲夫・小山 茂  
いかなる部分も、以下の条件に合致しないままの使用を禁ずる  
ただし著者以外の方が撮影した写真の使用は禁止する ☆



個々読者負担 他費出版【時価】 印